KONSTANTA ZBÁGANU DAN MODIFIKASINYA PADA RUANG MORREY KECIL

SKRIPSI

OLEH:
AHMAD NAUFAL HANIF
NIM. 19610089

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

KONSTANTA ZBÁGANU DAN MODIFIKASINYA PADA RUANG MORREY KECIL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Ahmad Naufal Hanif
NIM. 19610089

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

KONSTANTA ZBÁGANU DAN MODIFIKASINYA PADA RUANG MORREY KECIL

SKRIPSI

Oleh
Ahmad Naufal Hanif
NIM. 19610089

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 25 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si.	Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

KONSTANTA ZBÁGANU DAN MODIFIKASINYA PADA RUANG MORREY KECIL

SKRIPSI

Oleh
Ahmad Naufal Hanif
NIM. 19610089

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 27 Juni 2024

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.,	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.,	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, S.Pd., M.Si.,	....
Anggota Penguji 3	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.,	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan dibawah ini

Nama	:	Ahmad Naufal Hanif
NIM	:	19610089
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Konstanta Zbáganu dan Modifikasinya pada Ruang Morrey kecil

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 27 Juni 2024

Ahmad Naufal Hanif
NIM. 19610089

MOTO

"Setiap petualangan ada hal yang tak terduga yang kita tidak pernah bisa tau."

-Masrang

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmaanirrahiim

Alhamdulillahi robbil aalamiin

Dengan segenap hati skripsi ini dipersembahkan untuk :

Seluruh keluarga terkhusus Ayah Haryanto dan Ibu Luluk Maknunah yang memberikan kesempatan bagi penulis untuk memilih jalan perjuangan selama ini. Mendukung setiap langkah dan keputusan penulis hingga dapat menyelesaikan tugas akhir dengan doa – doa dan harapan yang selalu dilangitkan. Untuk diriku yang terus berusaha tidak menyerah dan mengakui bahwa rencana Allah selalu lebih indah, dan tak ada daya kekuatan tanpa kasih sayang Allah yang begitu luas memberikan penulis kesempatan untuk selalu memperbaiki diri setiap harinya melalui proses menyelesaikan tugas akhir.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullah Wabarakatuh

Alhamdulillah, segala puji dan syukur saya panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah mengizinkan penulis menyelesaikan penelitian dengan judul “Konstanta Zbáganu dan Modifikasinya pada Ruang Morrey Kecil” yang menjadi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Program Strata-1 Matematika pada Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Sholawat dan salam tentunya tak lupa peneliti curahkan kepada Rasulullah SAW, yang telah membawa kita ke *addinul islam*.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis mendapatkan beraneka macam bimbingan serta pengarahan dari berbagai pihak. Maka dari itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tidak terbatas yakni:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, MA., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan banyak arahan dan motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang juga telah banyak memberikan bimbingan serta ilmu dan pengalaman kepada penulis.
6. Ibu Dian Maharani, M.Si., selaku anggota penguji 1 dalam ujian skripsi yang telah memberikan saran serta arahan yang bermanfaat bagi penulis.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
8. Ayahanda Haryanto dan Ibunda Luluk Maknunah, serta adik yang memberi semangat dan dukungan.
9. Semua rekan-rekan mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2019.

Atas segala bantuan, dukungan, dan semangat yang diberikan kepada penulis. Penulis menyadari bahwasanya penelitian penulis ini masih belum sempurna, oleh karena itu penulis berharap terdapat saran ataupun kritik supaya penelitian selanjutnya dapat semakin baik. Peneliti berharap penelitian yang dihasilkan nantinya dapat bermanfaat bagi para pembaca. *Aamiin Ya Rabbal Alamin*

Wassalamu'alaikum Warahmatullah Wabarakatuh

Malang, 27 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

C	: Konstanta
C_Z	: Konstanta Zbáganu
$C_Z(\lambda, \mu, X)$	: Konstanta modifikasi Zbáganu
R	: Bilangan real
R^n	: Ruang Euclid
λ	: Ukuran Lambda
L^p	: Ruang Lebesgue
λ	: Ukuran Lambda
r	: Jari-jari
μ	: Ukuran μ
M_q^p	: Ruang Morrey
m_q^p	: Ruang Morrey Kecil
$\vert\cdot\vert$	: Nilai mutlak
$\Vert\cdot\Vert$	: Norma
$(\cdot,\cdot)$	: Hasil kali dalam

ABSTRAK

Hanif, Ahmad Naufal. 2024. **Konstanta Zbáganu dan Modifikasinya pada Ruang Morrey Kecil.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Kata Kunci: Konstanta Geometri, Ruang Morrey Kecil, Konstanta Zbáganu

Konstanta geometri merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk mempelajari sifat-sifat geometri dari ruang Banach. Beberapa peneliti telah mendefinisikan berbagai konstanta geometri di ruang Banach, salah satunya yaitu konstanta Zbáganu dan konstanta modifikasi Zbáganu. Konstanta tersebut berlaku untuk setiap ruang Banach. Disamping itu terdapat beberapa definisi ruang lain yang merupakan ruang Banach, seperti ruang Morrey kecil. Oleh karenanya pada penelitian kali ini, penilis ingin mencari nilai konstanta tersebut di ruang Morrey kecil. Dalam pencarian nilai konstantanya, penulis mengikuti definisi konstanta yang diberikan dengan mendefinisikan beberapa norma di ruang Morrey kecil. Sebagai hasil, penulis memperoleh nilai yang sama untuk konstanta Zbáganu dan konstanta modifikasi Zbáganu di ruang Morrey kecil yaitu 2.

ABSTRACT

Hanif, Ahmad Naufal. 2024. **Zbáganu Constant and Its Modified on Morrey Small Spaces.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Tecnology, Univesitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

Keyword: Geometric constant, small Morrey spaces, Zbáganu constant

Geometric constant is one way to study geometric properties of Banach spaces. some of researchers have defined various geometric constants on Banach spaces, for example the Zbáganu constant and the modified Zbáganu constant. Both constants is hold for every Banach spaces. Beside of that, there are some of definitions of the other spaces which are Banach spaces, like small Morrey spaces. Hence, in this thesis, the author discussed both constants on small Morrey spaces. In obtaining the constants, the author followed the definition of constants by defining some norm functions on small Morrey spaces. As the result, the author obtained the same value of Zbáganu constant and modified Zbáganu constant on small Morrey spaces that is 2.

مستخلص البحث

الحنيف، أحمد نوف. ٢٠٢٤. **ثابت *Zbáganu* وتعديلاته على فضاء موري الصغيرة.** البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: (١) الدكتور. خيرالرحمن ،الماجستير. المشرف الثاني(٢) الدكتور, إمام سوجاروو، الماجستير, الحاج.

الكلمات المفتاحية: الثوابت الهندسية ، فضاء موري الصغير ، ثوابت *Zbáganu*

الثوابت الهندسية هي إحدى الطرق التي يمكن استخدامها للدراسة خصائص الهندسية لفضاء الباناخ. وقد عرّف العديد من الباحثين ثوابت الهندسية المختلفة في فضاء الباناخ، أحدها ثابت زبانو (*Zbáganu*) وثابت تعديل زبانو(*Zbáganu*). تنطبق هذه الثوابت على كل فضاء الباناخ. إضافة إلى ذلك، هناك عدة تعريفات لفضاءات أخرى هي فضاء الباناخ، مثل فضاء الموري الصغيرة. لذلك، يريد المؤلف في هذا البحث إيجاد القيمة الثابت في فضاء الموري الصغير. ولإيجاد القيمة الثابت، يتبع المؤلف التعريف المعطى للثابت من خلال تحديد بعض المعايير في فضاء الموري الصغير. ونتيجة ذلك، حصل المؤلف على نفس القيمة الثابت زبانو (*Zbáganu*) وثابت زبانو (*Zbáganu*) المعدل في فضاء الموري الصغير وهي ٢.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu ruang fungsi yang sering dibahas dalam bidang analisis adalah ruang L^p atau dikenal dengan ruang Lebesgue. Ruang Lebesgue merupakan ruang Banach untuk $1 \leq p \leq \infty$. Ruang Lebesgue memiliki peran penting dalam teori ukuran, analisis fungsional, dan teori peluang.

Suatu ruang tentunya membutuhkan pemahaman tentang karakteristik dan sifat-sifat untuk mendeskripsikannya. Pencarian karakteristik suatu ruang bisa didapatkan dengan mengkaji sifat-sifat geometri dari ruang tersebut. Secara umum, mempelajari sifat-sifat geometris dari ruang Banach yakni dengan mencari konstanta atau modulusnya (Yang, 2016).

Konstanta atau modulus dapat digunakan untuk mempelajari sifat-sifat geometri dari ruang Banach. Beberapa peneliti telah mendeskripsikan beberapa konstanta geometri dalam ruang Banach. Salah satu dari konstanta geometri tersebut adalah konstanta Zbáganu. Bermula dari penemuan Gheorghita Zbaganu yang terkenal mengenai hasil kali dalam. (Zbáganu, 2002) memperkenalkan konstanta Zbáganu yaitu sebagai berikut:

$$C_Z(X) \coloneqq sup\left\{\frac{\|x+y\|\|x-y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2} : x, y \in X, (x, y) \neq (0,0)\right\}$$

Dengan $1 \leq C_Z \leq 2$ terpenuhi untuk setiap ruang Banach X, dan $C_Z = 1$ jika dan hanya jika X merupakan ruang Hilbert (Llorens-Fuster, 2008).

Definisi konstanta tersebut berlaku hanya pada ruang Banach, hal ini pada akhirnya menarik untuk mencari sifat geometri pada ruang topologi lain, di mana ruang tersebut juga merupakan ruang Banach. Seperti halnya C.B. Morrey pada tahun 1938 memperkenalkan perumuman dari ruang Lebesgue yaitu $\mathcal{M}_q^p$ dengan $1 \leq p \leq q < \infty$. Kemudian Sawano (2018) mendefinisikan perumuman dari ruang Morrey yaitu dengan membatasi jari-jari dalam definisi ruang Morrey pada interval $(0, 1)$, ruang ini kemudian dinamai dengan ruang Morrey kecil. Dikarenakan definisi ruang Morrey kecil berasal dari perumuman ruang Lebesgue yang merupakan ruang Banach, maka ruang Morrey kecil pun merupakan ruang Banach (Sawano, 2018).

Penelitian untuk mempelajari sifat-sifat geometri terus dilakukan untuk pencarian nilai konstanta geometri. Sebagaimana halnya konstanta Zbáganu yang telah dihitung oleh peneliti sebelumnya di beberapa ruang, diantaranya (Llorens-Fuster dkk, 2010) menghitung beberapa nilai konstanta geometri termasuk konstanta Zbáganu dalam ruang Bernorma. Peneliti selanjutnya (Liu dkk, 2021) juga menghitung perumuman konstanta Zbáganu di ruang Banach. Berdasarkan beberapa penelitian tersebut, penulis akhirnya ingin mencari nilai konstanta Zbáganu dan konstanta modifikasi Zbáganu dalam ruang Morrey kecil.

Mencari nilai konstanta Zbáganu dan konstanta Zbáganu yang dimodifikasi dalam ruang Morrey kecil adalah suatu cara untuk menggambarkan sifat geometris ruang tersebut. Hal tersebut selaras dengan cara Allah menggambarkan surga sebagaimana yang tersimpan dalam Surat Al-Baqarah ayat 25, yaitu:

وَبَشِّرِ الَّذِيْنَ اٰمَنُوْا وَعَمِلُوا الصّٰلِحٰتِ اَنَّ لَهُمْ جَنّٰتٍ تَجْرِيْ مِنْ تَحْتِهَا الْاَنْهٰرُ ۗ كُلَّمَا رُزِقُوْا مِنْهَا مِنْ ثَمَرَةٍ
رِّزْقًاۙ قَالُوْا هٰذَا الَّذِيْ رُزِقْنَا مِنْ قَبْلُ وَاُتُوْا بِهٖ مُتَشَابِهًا ۗ وَلَهُمْ فِيْهَآ اَزْوَاجٌ مُّطَهَّرَةٌ وَّهُمْ فِيْهَا خٰلِدُوْنَ

Artinya: "Sampaikanlah kabar gembira kepada orang-orang *yang beriman dan beramal saleh bahwa untuk mereka (disediakan) surga-surga yang di bawahnya mengalir sungai-sungai. Setiap kali diberi rezeki buah-buahan darinya, mereka berkata, "Inilah rezeki yang diberikan kepada kami sebelumnya." Mereka telah diberi (buah*-buahan) *yang serupa dan di sana mereka (memperoleh) pasangan-pasangan yang disucikan. Mereka kekal di dalamnya."*

Secara jelas, bentuk surga dijelaskan oleh Allah SWT secara detail pada ayat tersebut, yaitu berupa adanya sungai mengalir 'جَنّٰتٍ تَجْرِيْ', terdapat buah-buahan 'ثَمَرَةٍ رِّزْقًا' dan bidadari suci 'اَزْوَاجٌ مُّطَهَّرَةٌ'.

Berdasarkan makna dari surat Al-Baqarah ayat 25, dapat dikatakan bahwa untuk mendeskripsikan suatu ruang, akan membutuhkan satu ataupun dua karakteristik dari ruang yang akan dideskripsikan. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis akan mencari nilai konstanta Zbáganu yang didefinisikan oleh Llorens-Fuster (2008) dan konstanta modifikasi Zbáganu yang didefinisikan oleh Liu, dkk (2021) di ruang Morrey kecil.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan paparan latar belakang tersebut, maka penelitian ini dapat dirumuskan permasalahannya yaitu:

1. Bagaimana perhitungan konstanta Zbáganu $\left(C_Z\left(m_q^p\right)\right)$ pada ruang Morrey kecil?
2. Bagaimana perhitungan konstanta modifikasi Zbáganu $\left(C_Z(\lambda, \mu, X)\left(m_q^p\right)\right)$ pada ruang Morrey kecil?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan paparan rumusan masalah tersebut, maka penelitian ini dibuat dengan tujuan yaitu:

1. Untuk mengetahui cara perhitungan konstanta Zbáganu $\left(C_Z\left(m_q^p\right)\right)$ pada ruang Morrey kecil.
2. Untuk mengetahui cara perhitungan konstanta modifikasi Zbáganu $\left(C_Z(\lambda, \mu, X)\left(m_q^p\right)\right)$ pada ruang Morrey kecil.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Manfaat bagi peneliti

   Peneliti dapat mempelajari lebih dalam mengenai materi perkuliahan yang mendukung penelitian ini antara lain teori ukuran, analisis fungsional, dan teori peluang yang sebelumnya belum dipahami dengan baik. Penelitian ini juga dapat bermanfaat menjadi bahan tambahan kajian literatur untuk penelitian kedepannya tentang konstanta geometri di ruang Morrey kecil.
2. Manfaat bagi instansi

   Penelitian ini dapat dijadikan sebagai bacaan serta referensi tambahan bagi Program Studi Matematika dalam bidang analisis.
3. Manfaat bagi pembaca

   Penelitian ini memberikan tambahan referensi, *insight*, dan wawasan mengenai konstanta Zbáganu dan konstanta modifikasi Zbáganu di ruang Morrey kecil.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini yakni hanya mencari dua nilai kostanta geometri, yakni konstanta Zbáganu dan konstanta modifikasi Zbáganu di ruang Morrey kecil.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Pendukung

Sebelum melanjutkan penelitian, akan dijelaskan beberapa materi pendukung yang berisikan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan topik yang akan dijelaskan pada Bab Pembahasan.

2.1.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1 (Kreyzig, 1978)

(X, d) adalah ruang metrik di mana X adalah himpunan tak kosong dan d (*distance*) adalah merik pada X. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang mana untuk seluruh anggota $x, y, z \in X$, d (*distance*) memenuhi:

(M1) $d(x, y) \geq 0$ (d adalah bernilai riil, terbatas & tidak negatif).

(M2) $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$.

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri).

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Ketaksamaan segitiga).

Contoh 2.2

Didefinisikan fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $d(x, y) = |x - y|$, untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $d(x, y)$ merupakan metrik pada $\mathbb{R}$ dan $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik.

Penyelesaian:

1. Akan ditunjukkan bahwa $d(x, y) \geq 0$

   Dari definisi $d(x, y) = |x - y|$ di mana untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$

   Karena nilai mutlak selalu bernilai tak negatif, mengakibatkan

$d(x, y) \in \mathbb{R}, d(x, y) < \infty, d(x, y) \geq 0$ (sifat nilai mutlak)

Terbukti bahwa $d(x, y) \geq 0$.

2. Akan ditunjukkan bahwa $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

($\Rightarrow$) Diketahui $d(x, y) = 0$

$|y - x| = 0$

$y - x = 0$

$x = y$

($\Leftarrow$) Diketahui $x = y$

$d(x, y) = d(x, x)$

$= |x - x|$

$= |0|$

$= 0$

Terbukti bahwa $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

3. Akan ditunjukkan bahwa $d(x, y) = d(y, x)$

Perhatikan bahwa

$d(x, y) = |y - x|$

$= |x - y|$ (sifat nilai mutlak)

$= d(y, x)$

Terbukti bahwa $d(x, y) = d(y, x)$

4. Akan dibuktikan bahwa $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$d(x, y) = |y - x|$

$= |y - z + z - x|$

$\leq |y - z| + |z - x|$

$= |z - x| + |y - z|$ (sifat komutatif)

$= d(x, z) + d(z, y)$

$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Terbukti bahwa $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Karena telah terpenuhi dari $1 - 4$, maka d merupakan ruang metrik pada $\mathbb{R}$ dan $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik.

2.1.2 Ruang Bernorma

Definisi 2.3 (Rynne dan Youngson, 2008)

Misalkan X adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in F$ disebut norma apabila memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $\|x\| \geq 0$,
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, untuk sebarang skalar α dan $x \in X$,
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (ketaksamaan segitiga).

Ruang vektor bernorma (ruang bernorma) merupakan vektor X yang dilengkapi dengan suatu norma atau dapat ditulis $(X, \|\cdot\|)$.

Contoh 2.4

Misalkan $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Tunjukkan bahwa fungsi berikut merupakan norma.

$\|x\| = |x_1| + |x_2|$.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ merupakan norma.

1. Ambil sebarang $x \in X$, maka berdasarkan definisi fungsi $\|x\|$,

$\|x\| \geq 0$ (berdasarkan sifat nilai mutlak)

Terpenuhi $\|x\| \geq 0$.

2. $\|x\| \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$

   Bukti:

   $(\Rightarrow)\ \|x\| = |x_1| + |x_2|$

   $0 = |x_1| + |x_2|$

   $|x_1| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

   $|x_2| = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$

   Sehingga diperoleh bahwa $x = 0$

   $(\Leftarrow)\|x\| = |x_1| + |x_2|$

   $\|x\| = |0| + |0|$

   $\|x\| = 0 + 0$

   $\|x\| = 0$

   Sehingga diperoleh bahwa $\|x\| = 0$

   Berdasarkan bukti dua arah, maka terpenuhi bahwa $\|x\| \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

   Bukti:

   $\|\alpha x\| = (|\alpha \mathrm{x}|_1 + |\alpha \mathrm{x}|_2)$

   $= |a||x_1| + |a||x_2|$

   $= |a|(|x_1| + |x_2|)$

   $= |\alpha|\|x\|$

   Terpenuhi bahwa $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|\mathrm{y}\|$

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^2$ dengan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ dengan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}\|x + y\| &= |x_1 + y_1||x_2 + y_2| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \\ &= (|x_1 + y_1|) + (|x_2 + y_2|) \\ &= \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

Terpenuhi bahwa $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Dikarenakan seluruh aksioma pada definisi terpenuhi, maka terbukti bahwa $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ merupakan norma.

2.1.3 Ruang Hasil Kali Dalam

Definisi 2.5 (Rynne dan Youngson, 2008)

Misalkan X merupakan ruang vektor riil. Fungsi $(\cdot\,,\ \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ merupakan hasil kali dalam pada X apabila memenuhi:

1. $(x, x) \geq 0$
2. $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $(\alpha x + \beta y,\ z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$
4. $(x, y) = (y, x)$

Ruang vektor riil atau kompleks pada X yang dilengkapi hasil kali dalam $\big(X, (\cdot\,,\ \cdot)\big)$ dikatakan sebagai ruang hasil kali dalam.

Contoh 2.6:

Misalkan $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ adalah vektor-vektor pada $\mathbb{R}^2$. Tunjukkan bahwa $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ adalah hasil kali dalam.

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa (x, y) memenuhi keempat aksioma dari ruang hasil kali dalam.

1. $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$

   $= y_1x_1 + y_2x_2$

   $= (y, x)$

2. Jika $u = (u_1, u_2)$, maka

   $(x + y, u) = (x_1 + y_1)u_1 + (x_2 + y_2)u_2$

   $= x_1u_1 + y_1u_1 + x_2u_2 + y_2u_2$

   $= (x_1u_1 + x_2u_2) + (y_1u_1 + y_2u_2)$

   $= (x, u) + (y, u)$

3. $(kx, y) = kx_1y_1 + kx_2y_2$

   $= k(y_1x_1 + y_2x_1)$

   $= k(x, y)$

4. $(y, y) = y_1y_1 + y_2y_2$

   $= {y_1}^2 + {y_2}^2$

   ≥ 0

   dan

   $(y, y) = {y_1}^2 + {y_2}^2$ jika dan hanya jika $y_1 = y_2 = 0$ atau $y = 0$.

Berdasarkan pembuktian di atas, maka dapat disimpulkan bahwa $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ merupakan ruang hasil kali dalam.

2.1.4 Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue merupakan ruang fungsi perumuman dari ruang vektor berdimensi hingga.

Definisi 2.7 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 135):

Didefinisikan suatu ruang linier $(\mathcal{F})$ merupakan koleksi dari seluruh fungsi- fungsi terukur bernilai riil diperluas yang berhingga pada himpunan terukur E. Selanjutnya dua fungsi f dan g pada $\mathcal{F}$ dikatakan ekuivalen atau dapat ditulis $f \cong g$ jika memenuhi

$$f(x) = g(x) \text{ untuk hampir setiap } x \in E.$$

Berdasarkan relasi ekuivalensi yaiu refleksif, simetris, dan transitif, mengakibatkan suatu partisi dari $\mathcal{F}$ pada sebuah koleksi disjoin (terpisah) dari kelas-kelas ekuivalensi yang dinotasikan dengan $\mathcal{F}/\cong$. Kemudian subhimpunan dari ruang linier dinamakan subruang yang tertutup terhadap bentuk kombinasi liniernya. Berikut didefinisikan koleksi $\{L^p(E)\}_{1\leq p\leq\infty}$ yang merupakan subruang dari $\mathcal{F}/\cong$ (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 136).

Definisi 2.8 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 136):

Untuk $1 \leq p < \infty$, didefinisikan ruang Lebesgue $L^p(E)$ sebagai koleksi dari kelas ekuivalen $[f]$ sedemikian sehingga

$$\int_E |f|^p < \infty.$$

Definisi 2.9 (Royden dan Fitzpatrick, 2010: 139):

Untuk sebarang himpunan terukur E, asumsikan $1 < p < \infty$ dan $f \in L^p(E)$, maka norm dari f dapat dituliskan sebagai berikut

$$\|f\|_p = \left[\int_E |f|^p\right]^{1/p}.$$

2.1.5 Ruang Morrey

Ruang Morrey yang akan dipelajari pada penelitian ini merupakan ruang Morrey dengan domain $\mathbb{R}^n$. Ruang Morrey merupakan salah satu perumuman dari ruang lebesgue.

Definisi 2.10 (Mu'tazili, 2019):

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_q^p$ adalah himpunan semua fungsi yang terdefinisi dengan norma berikut ini.

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, R>0} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Dengan $B(a,R)$ merupakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di a dan berjari-jari R.

Jika $p = q$, maka $\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \|f\|_{\mathcal{L}^p}$ sehingga $\mathcal{M}_q^p = \mathcal{L}^p$. Berdasarkan hal tersebut, maka ruang Morrey dapat dipandang sebagai perluasan dari ruang Lebesgue. Seperti halnya ruang Lebesgue, ruang Morrey juga merupakan ruang banach.

Berikut contoh perhitungan norma fungsi di ruang Morrey.

Contoh 2.11 (Mu'tazili, 2019):

Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}^d, r > 0$ dan $g(x) = \chi B(\alpha, r)(x)$, maka $g \in \mathcal{M}_q^p$ dan $\|\chi B(\alpha, r)\|_{\mathcal{M}_q^p} = \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} r^{\frac{d}{q}}$ dengan C_d adalah luas permukaan bola satuan di $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned}
\|\chi B(\alpha, r)\|_{\mathcal{M}_q^p} &= \sup_{a\in\mathbb{R}^d, R>0} |B(a, R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |\chi B(\alpha, r)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{a\in\mathbb{R}^d, R>0} |B(a, R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(a, R) \cap B(\alpha, r)|^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{a\in\mathbb{R}^d, R>0} |B(a, R) \cap B(\alpha, r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(a, R) \cap B(\alpha, r)|^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{a\in\mathbb{R}^d, R>0} |B(a, R) \cap B(\alpha, r)|^{\frac{1}{q}} \\
&\leq |B(\alpha, r)|^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} r^{\frac{d}{q}}
\end{aligned}$$

Dan

$$\begin{aligned}
\left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} r^{\frac{d}{q}} &= |B(\alpha, r)|^{\frac{1}{q}} \\
&= |B(\alpha, r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(\alpha,r)} |\chi B(\alpha, r)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\chi B(\alpha, r)\|_{\mathcal{M}_q^p},
\end{aligned}$$

Sehingga $\|\chi B(\alpha, r)\|_{\mathcal{M}_q^p} = \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} r^{\frac{d}{q}}$.

2.1.6 Ruang Morrey Kecil

Ruang Morrey kecil diperkenalkan Sawano (2018). Ruang tersebut diperoleh dengan membatasi jari-jari bola pada definisi ruang Morrey hanya di interval $(0, 1)$.

Definisi 2.12 (Mu'tazili, 2019):

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey kecil $m_q^p = m_q^p(\mathbb{R}^n)$ merupakan himpunan semua fungsi terukur $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, R\in(0,1)} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Ruang Morrey kecil memuat ruang Morrey dan juga lebih luas dari ruang Morrey. Hal ini dikarenakan jika $f \in \mathcal{M}_q^p$, maka

$$\begin{aligned} \|f\|_{m_q^p} &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, R\in(0,1)} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, R>0} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_{\mathcal{M}_q^p}, \end{aligned}$$

Sehingga $f \in m_q^p$.

Selanjutnya akan diberikan contoh perhitungan norma di ruang Morrey kecil.

Contoh 2.13 (Mu'tazili, 2019):

Jika $\alpha \in \mathbb{R}^d, r > 0$, dan $g(x) = \chi_{B(a,r)}(x)$, maka $g \in m_q^p$ dan $\|g\|_{m_q^p} = \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} min\left\{1, r^{\frac{d}{q}}\right\}$, dimana C_d menotasikan luas dari lapisan satuan di $\mathbb{R}^d$.

Perhatikan bahwa

$$\|g\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^d \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} \chi_{B(\alpha,r)}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^d \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(a,R)\cap B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^d \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)\cap B(\alpha,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(a,R)\cap B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^d \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)\cap B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} min\left\{1, r^{\frac{d}{q}}\right\}$$

Dan $\|g\|_{m_q^p} \geq |B(\alpha, min\{1,r\})|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(\alpha,min\{1,r\})} \chi_{B(\alpha,r)}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$

$$= |B(\alpha, min\{1,r\})|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |B(\alpha, min\{1,r\})\cap B(\alpha,r)|^{\frac{1}{p}}$$

$$= |B(\alpha, min\{1,r\})|^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} min\left\{1, r^{\frac{d}{q}}\right\},$$

Sehingga $\|g\|_{m_q^p} = \left(\frac{C_d}{d}\right)^{\frac{1}{q}} min\left\{1, r^{\frac{d}{q}}\right\}$.

Ruang Morrey kecil merupakan ruang Banach akan dibuktikan pada teorema berikut.

Teorema 2.16 $m_q^p(\mathbb{R}^n)$ adalah Ruang Banach.

Bukti. Ruang Banach merupakan ruang bernorma yang lengkap. $\|f\|_{m_q^p}$ memenuhi aksioma norma:

1. $\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$

   Sesuai dengan definisi harga mutlak maka $|f(x)| > 0$. Dengan demikian berakibat $\|f\|_{m_q^p} = 0$.

2. Jika $\|f\|_{m_q^p} = 0$

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

$$0 \leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 \leq \sup_{R\in(0,1)} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(0,R)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 = \left(\int_{B(0,R)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$0 = \int_{B(0,R)} |f(x)|^p \, dx$$

$$0 = f(x)$$

   Jika $f(x) = 0$

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} R^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(a,R)} |0|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 0$$

3. Untuk setiap skalar $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|\alpha f\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |\alpha f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|\alpha|^p \int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |\alpha| \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \|f\|_{m_q^p}$$

4. Untuk setiap $f, g \in m_q^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|f+g\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B(a,R)} |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$\leq \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\left(\int_{B(a,R)} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right.$$

$$\left. + \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ R\in(0,1)}} |B(a,R)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,R)} |g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

$$= \|f\|_{m_q^p} + \|g\|_{m_q^p}$$

5. Ambil sebarang barisan Cauchy (f_n) di $m_q^p(\mathbb{R}^n)$, yaitu $\lim_{m,n} \|f_m - f_n\|_{m_q^p} = 0$. kita dapat menemukan subbarisan dari (f_n) yang konvergen hampir di mana-mana, katakan (f_{n_i}), di mana $n_1 < n_2 \ \dots$ dan juga memenuhi $\left\|f_m - f_{n_k}\right\|_{m_q^p} < 2^{-k}$ untuk setiap $m \geq n_k$.

Definisikan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$,

$$g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k-1} |f_{n+1} - f_{n_i}|$$

Jelas bahwa

$$\|g_k\|_{m_q^p} = \|f_{n_i}\|_{m_q^p} + \sum_{i=1}^{k-1} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_{m_q^p} < \|f_{n_i}\|_{m_q^p} + 1 < \infty$$

Misalkan $g = \lim_{k\to\infty} g_k = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k-1} \left|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right|$. Berdasarkan Lemma Fatou kita mempunyai $\|g\|_{m_q^p} < \|f_{n_1}\|_{m_q^p} + 1$. Secara umum, $g(x) < \infty$ hampir di mana-mana, sehingga deret

$$f_{n_i}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)\right)$$

Konvergen mutlak hampir semua x. Didefinisikan jumlah pada deret diatas sebagai $f(x)$ untuk x di mana deret tersebut konvergen dan $f(x) = 0$ untuk x lainnya. Karena

$$f_{n_i} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right) = f_{n_k}$$

Kita mempunyai

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) \text{ hampir di mana-mana}$$

Kita cukup membuktikan bahwa f adalah limit dari f_n, yaitu $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{m_q^p} = 0$. Ambil $\epsilon > 0$ sebarang, karenanya terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk semua $m, n > N$ kita mempunyai $\|f_n - f_m\|_{m_q^p} < \frac{\epsilon}{2}$. Juga, karena (f_{n_k}) konvergen ke f, kita dapat pilih k sedemikian sehingga $n_k > N$ dan $\|f_n - f\|_{m_q^p} < \frac{\epsilon}{2}$. karenanya,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{m_q^p} &= \left\|f_n - f_{n_k} + f_{n_k} - f\right\|_{m_q^p} \\ &\leq \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_{m_q^p} + \left\|f_{n_k} - f\right\|_{m_q^p} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Untuk setiap $n > N$, membuktikan bahwa $f_n \to f$. Maka, m_q^p adalah Ruang Banach.

2.2 Kajian Islam terkait dengan Pendeskripsian Bumi

Pada Sub Bab ini, akan dibahas cara Allah mendeskripsikan bentuk bumi dengan karakteristik atau sifat-sifat. Pendeskripsian bentuk bumi diterangkan pada surat Al-Baqarah ayat 22, yang berbunyi:

الَّذِي جَعَلَ لَكُمُ الْاَرْضَ فِرَاشًا وَّالسَّمَاۤءَ بِنَاۤءًۖ وَّاَنْزَلَ مِنَ السَّمَاۤءِ مَاۤءً فَاَخْرَجَ بِهٖ مِنَ الثَّمَرٰتِ رِزْقًا لَّكُمْ ۚ
فَلَا تَجْعَلُوْا لِلّٰهِ اَنْدَادًا وَّاَنْتُمْ تَعْلَمُوْنَ

Artinya: *"(Dialah) yang menjadikan bagimu bumi (sebagai) hamparan dan langit sebagai atap, dan Dialah yang menurunkan air (hujan) dari langit, lalu Dia menghasilkan dengan (hujan) itu buah-buahan sebagai rezeki untuk kamu. Oleh karena itu, janganlah kamu mengadakan tandingan-tandingan bagi Allah, padahal kamu mengetahui."*

Pada ayat ini Allah mendeskripsikan bumi dengan kata 'فِرَاشً' yang bermakna tikar atau dipan, dalam artian bumi dihamparkan agar manusia nyaman tinggal di atasnya. Berkaitan dengan ilmu geologi, bumi yang ditinggali oleh manusia sebenarnya sesuatu yang berbentuk bola api yang sangat besar dengan dilapisi oleh kerak bumi setebal belasan kilometer. Sehingga, dapat dipahami bahwa Allah menciptakan kerak bumi seolah-olah terbentang di atas lelehan magma bumi serta melindungi manusia dari panasnya.

Pada surat yang lain, yaitu surat Al-Gasyiyah ayat 20 yang berbunyi:

وَاِلَى الْاَرْضِ كَيْفَ سُطِحَتْۗ

Artinya: *"Dan (apakah manusia tidak mau memikirkan) bagaimana bumi dihamparkan?"*

Pada ayat ini, Allah menjelaskan bumi dihamparkan dengan menggunakan kata 'سُطِحَتْ' yang menunjukkan bumi itu bulat. Namun dalam *Tafsir Jalalain* dijelaskan, makna 'سُطِحَتْ' pada dasarnya menunjukkan bahwa bumi itu datar dan dijelaskan oleh ulama, bukan bulat sebagaimana yang dikatakan oleh ahli astronom.

Terdapat perbedaan pendapat di kalangan ulama dalam menafsirkan pendeskripsian bumi yang dijelaskan Allah, beberapa mengatakan bentuk bumi bulat beberapa lagi mengatakan bentuk bumi datar. Terlepas dari perbedaan tersebut, yang penulis tekankan adalah cara Allah mendeskripsikan bumi berdasarkan karakteristik serta sifat dari bumi itu sendiri. Hal ini selaras dengan penelitian yang penulis kaji untuk mencari karakteristik dari ruang Morrey kecil melalui nilai konstanta geometrinya.

2.3 Kajian Teori Konstanta Zbáganu dan Modifikasinya

Konstanta Zbáganu diperkenalkan oleh G Zbáganu (2002) yang berjudul *"An Inequality of M. Radulescu and S. Radulescu which Characterizes the Inner Product Spaces"*. Berikut definisi dari Konstanta Zbáganu.

Definisi 2.14 (Llorens, 2008):

Misalkan $X = (X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang Banach. Konstanta Zbáganu didefinisikan sebagai berikut:

$$C_Z(X) = sup\left\{\frac{\|x+y\|\|x-y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2} : x, y \in X, (x,y) \neq (0,0)\right\}.$$

Teorema 2.15 (Llorens, 2008) Untuk setiap ruang Banach $(X, \|\cdot\|)$

$$C_Z(X) \geq sup\{\varepsilon(1-\delta_X(\varepsilon)) : 0 \leq \varepsilon \leq 2\}.$$

Bukti. Misalkan $\varepsilon \in (0, 2]$. Ambil $x, y \in S_X$ sedemikian sehingga $\|x-y\| = \varepsilon$.

Dari definisi $C_Z(X)$, maka

$$\frac{\|x+y\|\|x-y\|}{\|x\|^2+\|y\|^2} \leq C_Z(X)$$

$$\frac{\|x+y\|\varepsilon}{2} \leq C_Z(X)$$

$$\frac{1}{2}\|x+y\| \leq \frac{C_Z(X)}{\varepsilon}$$

Oleh karena itu,

$$1 - \frac{1}{2}\|x+y\| \geq 1 - \frac{C_Z(X)}{\varepsilon}.$$

Dari definisi $\delta_X(\varepsilon)$ kita peroleh

$$\delta_X(\varepsilon) \geq 1 - \frac{C_Z(X)}{\varepsilon}.$$

Maka

$$C_Z(X) \geq \varepsilon(1-\delta_X(\varepsilon))$$

Selanjutnya akan diberikan definisi konstanta modifikasi Zbáganu di ruang banach.

Definisi 2.16 (Liu, 2021):

Misalkan $X = (X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang Banach. Konstanta modifikasi Zbáganu didefinisikan sebagai berikut:

$$C_Z(\lambda, \mu, X) = sup\left\{\frac{2\|\lambda x + \mu y\|\|\mu x - \lambda y\|}{(\lambda^2 + \mu^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2)} : x, y \in X, (x, y) \neq (0,0)\right\}$$

Di mana $\lambda, \mu > 0$ dan dengan jelas $C_Z(1, 1, X) = C_Z(X)$.

Proposisi 2.17 (Liu, 2021): Misalkan X adalah ruang Banach. Maka

$$1 \leq C_Z(\lambda, \mu, X) \leq 2$$

Bukti. Misalkan $y = \frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}x$, maka diperoleh

$$\frac{2\|\lambda x + \mu y\|\|\mu x - \lambda y\|}{(\lambda^2 + \mu^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2)} = 1$$

Untuk bukti bagian kedua:

$$\frac{2\|\lambda x + \mu y\|\|\mu x - \lambda y\|}{(\lambda^2 + \mu^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$

$$\leq \frac{\|\lambda x + \mu y\|^2 + \|\mu x - \lambda y\|^2}{(\lambda^2 + \mu^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$

$$\leq \frac{(2\lambda^2 + 2\mu^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2)}{(\lambda^2 + \mu^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2)}$$

$$= 2$$

Teorema 2.18 (Liu, 2021):

Misalkan X adalah ruang Banach. Maka $C_Z(\lambda, \mu, X) = 1$ jika dan hanya jika X adalah ruang Hilbert.

Bukti. Misalkan $C_Z(\lambda, \mu, X) = 1$, mengikuti aturan $\lambda = \mu = 1$ maka

$$\frac{4\|x\|\|y\|}{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2} \leq 1$$

Maka diperoleh

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \geq 4$$

Untuk setiap $x, y \in S_x$. Maka X adalah ruang Hilbert.

Untuk bukti bagian kedua, asumsikan bahwa X adalah ruang Hilbert

$$\frac{\|\lambda x + \mu y\|^2 + \|\mu x - \lambda y\|^2}{(\lambda^2 + \mu^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2)} = 1$$

Maka

$$\frac{2\|\lambda x + \mu y\|\|\mu x - \lambda y\|}{(\lambda^2 + \mu^2)(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \leq 1$$

Untuk setiap bilangan real tak negatif λ, μ dan setiap $x, y \in X$. Maka $C_Z(\lambda, \mu, X) = 1$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini menggunakan penelitian kualitatif dengan pendekatan deskriptif dan studi literatur. Penelitian kualitatif merupakan metode penelitian yang menekankan analisa atau deskriptif. Sedangkan pendekatan deskriptif merupakan metode untuk menganalisis hasil penelitian dan studi literatur digunakan untuk mengkaji atau mempelajari teori dari sumber yang kredibel seperti buku, jurnal, dan lain sebagainya.

3.2 Pra Penelitian

Tahapan pertama yang perlu dilakukan adalah dengan mengumpulkan sumber-sumber yang relevan dengan topik. Penelitian terdahulu yang dipergunakan pada penelitian ini adalah (Llorens, 2008) yang berjudul *"Zbáganu Constant and Normal Structure"*. Penelitian tersebut dijadikan sebagai acuan utama oleh peneliti. Terdapat penelitian lain yang digunakan peneliti sebagai pedoman dalam tata cara membuktikan yakni, (Rahman & Gunawan, 2020).

3.3 Tahapan Penelitian

Berikut tahapan penelitian yang harus penulis lakukan untuk menghitung nilai konstanta Zbáganu $\left(C_Z(m_q^p)\right)$ dan konstanta modifikasi Zbáganu $\left(C_Z(\lambda,\mu,X)(m_q^p)\right)$ pada ruang Morrey kecil yaitu:

1. Membuktikan nilai konstanta Zbáganu dan nilai konstanta modifikasi Zbáganu pada ruang Morrey kecil dengan mendefinisikan beberapa fungsi.
2. Membuat ringkasan atau kesimpulan dari pembuktian.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Konstanta Zbáganu dan Konstanta Modifikasi Zbáganu di Ruang Morrey Kecil

Konsanta Zbáganu yang akan penulis bahas pada penelitian ini merupakan konstanta Zbáganu yang didefinisikan oleh Llorens (2008). Pada penelitiannya tersebut, Llorens (2008) mendefinisikan konstanta Zbáganu pada ruang Banach. Kemudian pada penelitian ini juga dibahas mengenai konstanta modifikasi Zbáganu yang didefinisikan oleh Liu, dkk (2021). Pada penelitian ini, penulis akan menggunakan definisi konstanta tersebut dan menghitungnya di ruang Morrey kecil. Hasil dari perhitungan konstanta tersebut akan dijelaskan pada pembuktian teorema berikut.

Teorema 4.1 Diberikan ruang Morrey $m_q^p(\mathbb{R}^n)$ serta konstanta Zbáganu $C_Z\left(m_q^p\right)$ dan konstanta modifikasi Zbáganu $C_Z(\lambda, \mu, X)\left(m_q^p\right)$ di ruang Morrey kecil. Jika $1 \leq p < q < \infty$, maka

$$C_Z\left(m_q^p\right) = C_Z(\lambda, \mu, X)\left(m_q^p\right) = 2.$$

Bukti: Untuk membuktikan teorema ini, Penulis menggunakan ide pembuktian pada penelitian Rahman dan Gunawan (2021) yang berjudul "Generalized Von Neumann-Jordan Constant for Morrey Spaces and Small Morrey Spaces" dalam menghitung konstanta Zbáganu di ruang Morrey kecil.

Ide pembuktian dari pencarian nilai konstanta tersebut yakni dengan mengkonstruksikan beberapa definisi fungsi di ruang Morrey kecil $m_q^p = m_q^p(\mathbb{R}^n)$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, kemudian kita definisikan fungsi

$$f(x) = |x|^{-\frac{n}{q}},$$

$$g(x) = f(x)\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|),$$

$$h(x) = f(x) - g(x),$$

$$l(x) = -f(x) + 2g(x),$$

di mana $|x|$ menyatakan norma Euclid. Pada pemilihan fungsi-fungsi tersebut, dapat diketahui bahwa fungsi g, h, l merupakan fungsi yang bergantung pada nilai ε. Perlu diperhatikan bahwa semua fungsi merupakan fungsi radial, fungsi f dan g merupakan fungsi radial menurun, $h \leq f$, dan $|l| = f$.

Selanjutnya untuk menentukan nilai konstanta Zbáganu dan konstanta modifikasi Zbáganu, kita memerlukan nilai norma dari fungsi-fungsi tersebut di ruang Morrey kecil. Berikut perhitungan norma masing-masing fungsi.

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n, r \in (0,1)} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |fx|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Berdasarkan pendefinisian fungsi f sebelumnya, maka $a = 0 \in \mathbb{R}^n$. Dengan demikian, dapat diulis norma f sebagai berikut:

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{r \in (0,1)} |B(0,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(0,r)} |fx|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

Karena untuk setiap $B(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$, maka untuk sebarang $C > 0$, dapat dituliskan $|B(0,r)| = Cr^n$, sehingga dapat dituliskan,

$$\|f\|_{m_q^p} = \sup_{r \in (0,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(0,r)} |x|^{-\frac{np}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{definisi } f(x) = |x|^{-\frac{n}{q}}$$

$$= \sup_{r\in(0,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_0^r r^{-\frac{np}{q}}(r^{n-1}dr)\right)^{\frac{1}{p}}, \text{karena } 0 \leq |x| \leq r$$

$$= \sup_{r\in(0,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\left(\frac{1}{n-\frac{np}{q}}r^{n-\frac{np}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}, \text{pengintegralan biasa}$$

$$= \sup_{r\in(0,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\left(\frac{1}{n\left(1-\frac{p}{q}\right)}r^{n-\frac{np}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}\left(n\left(1-\frac{p}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,1)} Cr^{0}\left(n\left(1-\frac{p}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= C\left(n\left(1-\frac{p}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Dari perhitungan nilai norma f tersebut, diperoleh $\|f\|_{m_q^p} < \infty$, artinya $f \in m_q^p$.

Selanjutnya, berikut perhitungan norma fungsi yang lain yaitu,

$$\|g\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)} |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)} \left|f(x)\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{definisi fungsi } g(x)$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1)}} |B(0,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(0,r)} \left|f(x)\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Karena untuk setiap $B(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$, maka $|B(0,r)| = Cr^n$. Selanjutnya berdasarkan definisi fungsi karakteristik dan $0 \leq |x| \leq r$ dengan $r \in (0,1)$, maka $\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|) = 1$. Sehingga dapat dituliskan,

$$\|g\|_{m_q^p} = \sup_{r\in(0,\varepsilon)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(0,r)} |x|^{-\frac{np}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,\varepsilon)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_0^r r^{-\frac{np}{q}} (r^{n-1} dr) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,\varepsilon)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\frac{1}{n-\frac{np}{q}} r^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,\varepsilon)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\frac{1}{n\left(1-\frac{p}{q}\right)} r^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,\varepsilon)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \left(n\left(1-\frac{p}{q}\right) \right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,\varepsilon)} Cr^{0} \left(n\left(1-\frac{p}{q}\right) \right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= C \left(n\left(1-\frac{p}{q}\right) \right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{m_q^p},$$

$$\|h\|_{m_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r\in(0,1)} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |h(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r\in(0,1)} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^n, r\in(0,1)} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} \left|f(x) - f(x)\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(0,r)} \left|f(x)\left(1 - \chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)\right)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(0,r)} |f(x)|^p \left(1 - \chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)\right) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(0,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(0,r)} |x|^{-\frac{np}{q}} \left(1 - \chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)\right) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(\varepsilon,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(\varepsilon,r)} |x|^{-\frac{np}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(\varepsilon,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{\varepsilon}^{r} r^{-\frac{np}{q}} (r^{n-1} dr) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(\varepsilon,1)} Cr^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\frac{1}{n - \frac{np}{q}} \left(r^{n-\frac{np}{q}} - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(\varepsilon,1)} C \left(n\left(1 - \frac{p}{q}\right) \right)^{-\frac{1}{p}} r^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(r^{n-\frac{np}{q}} - \varepsilon^{n-\frac{np}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(\varepsilon,1)} C\left(n\left(1-\frac{p}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{p}} r^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right).\frac{p}{p}}\left(r^{n-\frac{np}{q}}-\varepsilon^{n-\frac{np}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(\varepsilon,1)} C\left(n\left(1-\frac{p}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{p}} \left(r^{n\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right).p}\left(r^{n-\frac{np}{q}}-\varepsilon^{n-\frac{np}{q}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(\varepsilon,1)} C\left(n\left(1-\frac{p}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{p}} \left(r^{\frac{np}{q}-n}\left(r^{n-\frac{np}{q}}-\varepsilon^{n-\frac{np}{q}}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{r\in(\varepsilon,1)} C\left(n\left(1-\frac{p}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{p}} \left(1-r^{\frac{np}{q}-n}\varepsilon^{n-\frac{np}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= C\left(n\left(1-\frac{p}{q}\right)\right)^{-\frac{1}{p}}\left(1-\varepsilon^{n-\frac{np}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{m_q^p}\left(1-\varepsilon^{n-\frac{np}{q}}\right)^{\frac{1}{p}},$$

dan

$$\|l\|_{m_q^p} = \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r\in(0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)} |l(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r\in(0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)} |2g(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r\in(0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)} \left|2f(x)\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)-f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n\\ r\in(0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(a,r)} \left|f(x)\left(2\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|)-1\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p \big(2\chi_{(0,\varepsilon)}(|x|) - 1\big) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_{\substack{a\in\mathbb{R}^n \\ r\in(0,1)}} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{m_q^p}.$$

Berdasarkan perhitungan norma dari fungsi-fungsi tersebut, dapat diketahui bahwa semua fungsi yang didefinisikan berada di ruang Morrey kecil. Selanjutnya, hasil perhitungan norma fungsi-fungsi tersebut akan digunakan untuk perhitungan konstanta Zbáganu di ruang Morrey kecil. Berikut merupakan langkah-langkah perhitungan konstanta Zbáganu.

$$C_Z\big(m_q^p\big) \geq \frac{\|f+l\|_{m_q^p}\|f-l\|_{m_q^p}}{\|f\|_{m_q^p}^2 + \|l\|_{m_q^p}^2}$$

$$= \frac{\|f+(-f+2g)\|_{m_q^p}\|f-(-f+2g)\|_{m_q^p}}{\|f\|_{m_q^p}^2 + \|f\|_{m_q^p}^2}$$

$$= \frac{\|2g\|_{m_q^p}\|2f-2g\|_{m_q^p}}{\|f\|_{m_q^p}^2 + \|f\|_{m_q^p}^2}$$

$$= \frac{\|2g\|_{m_q^p}\|2(f-g)\|_{m_q^p}}{\|f\|_{m_q^p}^2 + \|f\|_{m_q^p}^2}$$

$$= \frac{\|2g\|_{m_q^p}\|2h\|_{m_q^p}}{\|f\|_{m_q^p}^2 + \|f\|_{m_q^p}^2}$$

$$= \frac{4\|g\|_{m_q^p}\|h\|_{m_q^p}}{2\|f\|_{m_q^p}^2}$$

$$= \frac{2\|f\|_{m_q^p}^2 \left(1 - \varepsilon^{-\frac{dp}{q}+d}\right)^{\frac{1}{p}}}{\|f\|_{m_q^p}^2}$$

$$= 2\left(1 - \varepsilon^{-\frac{dp}{q}+d}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nilai tersebut berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$. Jika dipilih nilai ε sekecil mungkin yang mendekati 0, maka akan diperoleh bahwa $C_Z\left(m_q^p\right) \geq 2$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, diperoleh perhitungan konstanta Zbáganu di ruang Morrey Kecil yaitu $C_Z\left(m_q^p\right) = 2$.

Selanjutnya, berikut perhitungan dari konstanta modifikasi Zbáganu di ruang Morrey Kecil.

$$C_Z(\lambda, \mu, X)\left(m_q^p\right) \geq \frac{2\|f + l\|_{m_q^p}\|f - l\|_{m_q^p}}{2\left(\|f\|_{m_q^p}^2 + \|l\|_{m_q^p}^2\right)}$$

$$= \frac{2\|f + (-f + 2g)\|_{m_q^p}\|f - (-f + 2g)\|_{m_q^p}}{2\left(\|f\|_{m_q^p}^2 + \|f\|_{m_q^p}^2\right)}$$

$$= \frac{2\|2g\|_{m_q^p}\|2f - 2g\|_{m_q^p}}{2\left(\|f\|_{m_q^p}^2 + \|f\|_{m_q^p}^2\right)}$$

$$= \frac{2\|2g\|_{m_q^p}\|2(f - g)\|_{m_q^p}}{2\left(\|f\|_{m_q^p}^2 + \|f\|_{m_q^p}^2\right)}$$

$$= \frac{2\|2g\|_{m_q^p}\|2h\|_{m_q^p}}{2\left(2\|f\|_{m_q^p}^2\right)}$$

$$= \frac{8\|g\|_{m_q^p}\|h\|_{m_q^p}}{4\|f\|_{m_q^p}^2}$$

$$= \frac{2\|f\|_{m_q^p}^2\left(1-\varepsilon^{-\frac{dp}{q}+d}\right)^{\frac{1}{p}}}{\|f\|_{m_q^p}^2}$$

$$= 2\left(1-\varepsilon^{-\frac{dp}{q}+d}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hasil ini juga memenuhi untuk setiap $\varepsilon > 0$. Dengan menggunakan pembuktian yang sama, maka dapat disimpulkan benar bahwa $C_Z(\lambda,\mu,X)\left(m_q^p\right) = 2$. Dengan demikian teorema terbukti.

4.2 Kajian Penerapan Integrasi Islam dengan Topik

Terdapat perbedaan pendapat di kalangan ulama dalam menafsirkan pendeskripsian bumi yang dijelaskan Allah, beberapa mengatakan bentuk bumi bulat beberapa lagi mengatakan bentuk bumi datar. Terlepas dari perbedaan tersebut, yang penulis tekankan adalah cara Allah mendeskripsikan bumi berdasarkan karakteristik serta sifat dari bumi itu sendiri. Hal ini selaras dengan penelitian yang penulis kaji untuk mencari nilai karakteristik dari ruang Morrey kecil melalui nilai konstanta geometrinya. Salah satu konstanta geometrinya yaitu konstanta Zbáganu dan konstanta modifiaksi Zbáganu.

Konstanta geometri merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk mempelajari sifat-sifat geometri dari ruang Banach. Beberapa peneliti telah mendefinisikan berbagai konstanta geometri di ruang Banach, salah satunya yaitu konstanta Zbáganu dan konstanta modifikasi Zbáganu. Konstanta tersebut berlaku untuk setiap ruang Banach. Disamping itu terdapat beberapa definisi ruang lain yang merupakan ruang Banach, seperti ruang Morrey kecil. Oleh karenanya pada penelitian kali ini, penilis ingin mencari nilai konstanta tersebut di ruang Morrey kecil. Dalam pencarian nilai konstantanya, penulis mengikuti definisi konstanta yang diberikan dengan mendefinisikan beberapa norma di ruang Morrey kecil.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan yang telah dipaparkan, maka penulis dapat menyimpulkan dari penelitian ini yaitu nilai konstanta Zbáganu di ruang Morrey kecil $C_Z\left(m_q^p\right)$ yaitu 2 (dua) dan nilai konstanta modifikasi Zbáganu di ruang Morrey kecil $C_Z(\lambda, \mu, X)\left(m_q^p\right)$ yaitu 2 (dua).

5.2 Saran

Sebagai saran untuk penelitian selanjutnya, peneliti bisa mencari nilai konstanta-konstanta lainnya di ruang Morrey kecil seperti konstanta James, konstanta Ptolemy, dan konstanta Dunkl-Williams. Sehingga dapat diketahui sifat geometri dari ruang Morrey kecil tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson. (2007). *Linear Fuctional Analysis Second Edition.* Springer: Verlag London.

Bryan P. Rynne and Martin A. Youngson. (2008). *Linear Fuctional Analysis.* New York: Springer Verlag.

Ghoffar, M. A., Mu'thi, A., & Al-Atsari, A. I. (2004). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1.* Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Gunawan, H., Hakim, D. I., & Putri, A. S. (2021). On Geometric Propeties of Morrey Spaces. *Ufa Mathematical Journal, 13*, 131-136.

Gunawan, H., Kikianty, E., & Sawano, Y. (2019, November). Three Geometric Constants for Morrey Spaces. *Bulletin of the Korean Mathematical Society, 56*, 1569-1575.

Hutson, V., Pym, J. S., & Cloud, M. J. (2005). *Applications of Fundamental Analysis and Operator Theory* (Vol. 200). Amsterdam: Elsevier.

Kemenag. (2019). *Qur'an Kemenag*. https://quran.kemenag.go.id/

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Fuctional Analysis with Applications.* New York: John Wiley and Sons.

Liu, Q., Sarfraz, M., & Li, Y. (2021). Some Aspects of Generalized Zbaganu and James Constant in Banach Spaces. *Demonstratio Mathematica*, *54*, 299-310.

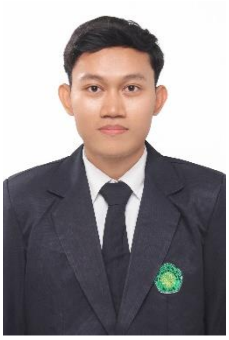
Llorens-Fuster, E., Mazcuñán-Navarro, E. M., & Reich, S. (2010). The Ptolemy and Zbăganu constants of normed spaces. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, *72*(11), 3984–3993.

Llorens-Fuster, E. (2008). Zbăganu Constant and Normal Structure. *Fixed Point Theory,* Volume 9(1), 159-172.

Rahman, H., & Gunawan, H. (2020). Generalized Von Neumann-Jordan Constant for Morrey Spaces and Small Morrey Spaces. *Mathematics Subject Classification*.

Zbaganu, G. (2002). An Inequality of M. Radulescu and S. Radulescu which Characterizes the Inner Product Spaces. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*, *47*, 253-257.

RIWAYAT HIDUP



Ahmad Naufal Hanif, lahir di kota Nganjuk pada tanggal 04 Januari 2001, biasa dipanggil dengan sebutan Afal atau Naufal, tinggal di Desa Kalimo'ok Kecamatan Kalianget Kabupaten Sumenep. Ia merupakan anak pertama dari Bapak Haryanto dan Ibu Luluk Maknunah.

Riwayat pendidikannya dimulai dari TK Al-Bashar yang berada di desa tempat penulis tinggal, yakni Desa Kalimo'ok dan lulus pada tahun 2007. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan dasarnya di SDN Kalimo'ok 1 dan lulus pada tahun 2013. Kemudian, penulis melanjutkan sekolah menengah pertama di SMPN 1 Kalianget dan lulus pada tahun 2016. Kemudian, penulis melanjutkan sekolah menengah atas di SMAN 2 Sumenep dan lulus pada tahun 2019. Pada tahun 2019 penulis melanjutkan pendidikannya di Univeritas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika. Untuk menambah pengalaman selama kuliah, penulis juga turut serta dalam beberapa organisasi di Kampus. Penulis menerima segala saran, kritikan, ataupun masukan demi manfaatnya tugas akhir ini. Penulis dapat dihubungi melalui email: naufalhanifan03@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp./Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Ahmad Naufal Hanif
NIM	: 19610089
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Konstanta Zbaganu Dan Modifikasinya Pada Ruang Morrey Kecil
Pembimbing I	: Dr. Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II	: Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 Januari 2023	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	7 Februari 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	18 Februari 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	20 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	23 Maret 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	17 April 2023	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	7 Juli 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	13 Juli 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	19 September 2023	ACC Seminar Proposal	9.
10.	25 September 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	8 November 2023	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	16 November 2023	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	12 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	13 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	20 Maret 2024	ACC Bab IV dan V	15.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	22 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	16.
17.	16 April 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	17.
18.	30 Mei 2024	ACC Seminar Hasil	18.
19.	6 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	19.
20.	14 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	20.
21.	27 Juni 2024	ACC Keseluruhan	21.

Malang, 27 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005