SIFAT–SIFAT NORMA HASIL BAGI DAN SEMINORMA

SKRIPSI

OLEH
DWI AJENG ROSMAYA
NIM. 200601110083

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT–SIFAT NORMA HASIL BAGI DAN SEMINORMA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
DWI AJENG ROSMAYA
NIM. 200601110083

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT–SIFAT NORMA HASIL BAGI DAN SEMINORMA

SKRIPSI

Oleh
Dwi Ajeng Rosmaya
NIM. 200601110083

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 26 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dian Maharani, M. Si	Erna Herawati, M. Pd.
NIP. 199400217 202012 2 001	NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M. Sc.
NIP. 19741129 100012 2 005

SIFAT-SIFAT NORMA HASIL BAGI DAN SEMINORMA

SKRIPSI

Oleh
Dwi Ajeng Rosmaya
NIM. 200601110083

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 28 Juni 2024

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M. Sc	....
Anggota Penguji 1	: Dr. Hairur Rahman, S. Pd, M. Si	....
Anggota Penguji 2	: Dian Maharani, M. Si	....
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M. Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dwi Ajeng Rosmaya

NIM : 200601110083

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat-sifat Norma Hasil Bagi dan Seminorma

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juni 2024
Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL
14FEAALX228004762

Dwi Ajeng Rosmaya
NIM. 200601110083

MOTO

"Apabila engkau telah selesai(dengan suatu kebajikan) teruslah bekerja keras (untuk kebajikan yang lain)."

(QS. Al-Insyirah:7)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Bapak dan Ibu yang senantiasa mendoakan, memberikan movitasi dan cintanya, nasihat, arahan serta dukungannya baik secara spiritual maupun material dalam proses penulisan skripsi ini. Kakak dan nenek yang selalu memberikan doa dan memotivasi penulis agar selalu mengerjakan skripsi ini, serta selalu memberikan apresiasi atas setiap pencapaian kecil yang telah dilakukan penulis. Sahabat dan teman-teman yang selalu memberikan dukungan dan bantuan terhadap kesulitan yang dialami penulis selama penulisan skripsi ini. Serta, diri penulis sendiri atas kerja keras dan semangatnya sehingga tidak pernah menyerah dalam proses mengerjakan skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Dengan rahmat dan ridha Allah SWT, penulis mengucapkan puji syukur atas segala nikmat-Nya yang senantiasa melimpah. Shalawat dan salam senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW, seorang penuntun yang sempurna bagi umat manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang, sehingga penulis dapat menyelesaikan proposal skripsi yang berjudul "Sifat-sifat Norma Hasil Bagi dan Seminorma" sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam Program Studi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam penyusun proposal skripsi ini tidak lepas dari petunjuk dan bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dian Maharani, M. Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan berbagai pengetahuan, pengalaman, arahan, nasihat, serta motivasi kepada penulis.
5. Erna Herawati, M. Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan berbagai pengetahuan, pengalaman, arahan, nasihat, serta motivasi kepada penulis.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Orang tua dan seluruh keluarga yang senantiasa memberikan doa, semangat, dukungan, nasihat, dan kasih sayang kepada penulis.

8. Seluruh mahasiswa angkatan 2020 yang berjuang bersama dalam mengerjakan skripsi yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat kepada penulis.
9. Seluruh sahabat dan teman-teman yang memberikan dukungan, semangat, dan memberikan bantuan kepada penulis dalam proses pengerjaan skripsi.

Semoga Allah *subhanahu wa ta'ala* selalu memberikan balasan atas segala bantuan dan kebaikan yang telah diberikan kepada penulis. Penulis berharap agar laporan ini dapat bermanfaat bagi penulis serta pembaca untuk menambah wawasan keilmuan yang selalu berkembang.

Wassalamualaikum warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 28 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam penelitian ini memiliki makna sebagai berikut:

$l(x)$	: Fungsi terhadap x
$\dim X$	: Dimensi dari ruang vektor X
$codim\, Y$	: Kodimensi dari subruang Y
$x \sim y$	: Relasi ekuivalen x ke y
X/Y	: Ruang hasil bagi X atas Y
$\|\|\|x + Y\|\|\|$	: Norma hasil bagi pada ruang hasil bagi X atas Y
$\nrightarrow$	: Tidak konvergen
$\|\cdot\|_X$	: Norma pada X
$x + Y$	: Koset kiri dari x di ruang vektor X atas subruang Y
$\sim$	: Relasi ekuivalen
$Z(F)$	: Kernel dari F

ABSTRAK

Rosmaya, Dwi Ajeng, 2024. **Sifat-sifat Norma Hasil Bagi dan Seminorma**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dian Maharani, M. Si, (II) Erna Herawati, M. Pd.

Kata Kunci: Ruang Hasil Bagi, Norma Hasil Bagi, Seminorma.

Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Fungsi $l: X \to \mathbb{R}$ dikatakan seminorma pada X jika memenuhi kondisi pada seminorma. Seminorma merupakan perumuman dari norma. Ruang bernorma adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) yang dilengkapi dengan fungsi norma. Misalkan X merupakan ruang bernorma dan misalkan Y merupakan subruang tertutup dari X, didefinisikan norma hasil bagi pada suatu ruang hasil bagi X/Y sebagai $|||x+Y||| = \inf\{\|z\|: z \in x+Y\} = \inf\ \{\|x+y\|: y \in Y\}$. Tujuan penelitian ini yaitu membahas terkait sifat konvergen pada norma hasil bagi dan pada seminorma hanya akan dibahas mengenai sifat konveks, penyerapan, dan seimbang, kekontinuan seminorma, serta hubungan seminorma dan norma. Sifat kekonvergenan pada norma hasil bagi adalah suatu barisan $(x_n + Y)$ akan konvergen ke $(x+Y)$ di ruang hasil bagi jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y yaitu subruang tertutup dalam ruang bernorma sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di ruang bernorma X. Kemudian, sifat pada seminorma yaitu (i) Suatu seminorma di ruang vektor jika terdapat himpunan $U = \{x \in X\ |l(x) < 1\}$ maka U memenuhi sifat: U konveks, penyerapan dan seimbang, (ii) Seminorma l pada ruang bernorma X akan kontinu di ruang bernorma X jika dan hanya jika terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk $x \in X$, (iii) Suatu seminorma yang dibentuk oleh suatu pemetaan linier.

ABSTRACT

Rosmaya, Dwi Ajeng, 2024. **The Properties of Quotient Norm and Seminorm**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dian Maharani, M. Si, (II) Erna Herawati, M. Pd.

Keyword: Quotient Space, Qoutient Norm, Seminorm

Let X be a vector space over the field $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$). The function $l: X \to \mathbb{R}$ is said to be seminorm on X if it satisfies the properties on seminorm. Seminorm is a generalization of norms. A normed space is a vector space over the field $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) which is completed with a norm function. Let X be a normed space and let Y be a closed subspace of X, let $|||x + Y||| = \inf\{\|z\|: z \in x + Y\} = \inf\{\|x + y\|: y \in Y\}$ is a qoutient norm in qoutient space X/Y. The aim of this research is to proof the convergent properties of quotient norms and in seminorms only discuss about convex, absorption and balanced properties, continuity of seminorms, and the relation between seminorms and norms. The convergence property of the quotient norm is a sequence $(x_n + Y)$ converges to $(x + Y)$ in the quotient space if and only if there is a sequence (y_n) in Y, called a closed subspace of normed space such that $(x_n + y_n)$ converges to x in normed space X. Then, the properties in seminorm is (i) A seminorm in a vector space if there is a set $U = \{x \in X \mid l(x) < 1\}$ then U statisfy the properties convex, absorbing and balanced, (ii) The seminorm l in a space with a norm X will be continuous in normed space X if and only if there exists $\alpha > 0$ such that $l(x) \leq \alpha\|x\|$ for all $x \in X$, (iii) A seminorm formed by a linear mapping.

مستخلص البحث

روسمايا، دوي أجينج، 2024. **خصائص معايير القسمة والندوة.** البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة: (1) ديان مهراني الماجستير، (2) إرنا هيراواتي الماجستير.

الكلمات المفتاحية: المساحة الحاصل، معايير القسمة، الندوة.

مثّل X هو مســـاحة متجهة فوق لميدان ($\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$) $\mathbb{F}$. الوظيفة $l: X \to \mathbb{R}$ يُقال أن تكون للندوة على X إذا كانت تستوفي الشروط الموجودة في الندوة. الندوة هي تعميم للمعايير. المساحة المعيارية هي مساحة متجهة فوق الميدان ($\mathbb{C}$ أو $\mathbb{R}$) $\mathbb{F}$ التي مجهزة بوظيفة عادية. مثّل X يكون مساحة معيارية و مثّل Y يكون فضاء فرعي مغلق من X، يتم التعريف أن معايير القسمة في مساحة الحاصل X/Y كـــــ $|||x+Y||| = \inf\{||z||: z \in x+Y\} = \inf\{||x+y||: y \in Y\}$. الأهداف من هذا البحث هو مناقشة الخصائص المتقاربة لمعايير القسمة وفي الندوات سنناقش فقط الخصائص المحدبة، الامتصاص، والتوازن، واستمرارية الندوات، وكذلك العلاقة بين الندوات والمعايير. خاصية التقارب لمعايير القسمة هي أن التسلسل (x_n+Y) سوف يتقارب إلى $(x+Y)$ في مساحة الحاصل إذا وفقط إذا كان هناك تسلسل (y_n) في Y وهو مساحة فرعية مغلقة في المساحة المعيارية بحيث يتقارب (x_n+y_n) يتقارب مع x في المساحة المعيارية X. ثم، خصائص للندوات هي (i) للندوة في الفضاء المتجه إذا كانت هناك مجموعة $U = \{x \in X \,|\, l(x) < 1\}$ فإن U يحقق الخصائص: U محدب، وامتصاص ومتوازن، (ii) ستكون الندوة l في المساحة المعيارية X مستمرة في المساحة المعيارية X إذا وفقط إذا كان هناك $\alpha > 0$ بحيث يكون $l(x) \le \alpha ||x||$ لـــــ $x \in X$، (iii) الندوة التي تتكون من رسم الخرائط الخطية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang vektor atas lapangan ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) adalah himpunan tak kosong X yang dilengkapi oleh dua operasi aljabar, yaitu operasi penjumlahan dan operasi perkalian dengan skalar (Kreyszig, 1978). Berdasarkan Rynne dan Youngson (2008) ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi oleh dua fungsi yang memetakan $V \times V$ ke V dan fungsi yang memetakan dari $\mathbb{F} \times V$ ke V, yang masing-masing disimbolkan dengan $x + y$ dan αx, untuk setiap $x, y \in V$ dan sebarang $\alpha \in \mathbb{F}$ yang memenuhi kondisi-kondisi pada ruang vektor yaitu komutatif dalam penjumlahan, asosiatif dalam penjumlahan, identitas penjumlahan, invers penjumlahan, asosiatif dalam perkalian dan distributif dalam perkalian terhadap penjumlahan.

Ruang bernorma adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) yang dilengkapi dengan fungsi norma, yang dinotasikan dengan $\|\cdot\|$ atau dapat dinotasikan dengan $\|\cdot\|_X$ untuk norma pada X (Akcocglu et al., 2009). Fungsi dari bilangan riil yang memetakan ruang vektor X ke dalam $\mathbb{R}$ adalah norma pada X jika untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, memenuhi kondisi ruang bernorma yaitu terdefinisi positif, homogen dan ketaksamaan segitiga (Akcocglu et al., 2009).

Suatu himpunan tak kosong V dalam ruang vektor X disebut subruang dari X jika $x + y,\ \alpha x \in V$, di mana $x, y \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ (Limaye, 2016). Misalkan Y adalah subruang dari ruang vektor X. Koset dari $x \in X$ atas Y dinotasikan sebagai $x + Y$ dan didefinisikan sebagai himpunan

$$x + Y = \{v \in X \mid v = x + y, y \in Y\}$$

Koset-koset di atas membentuk partisi dalam ruang vektor. Untuk $w, x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ didiefinisikan operasi aljabar berikut.

$$(w + Y) + (x + Y) = (w + x) + Y$$

$$\alpha(x + Y) = \alpha x + Y$$

Koset-koset yang memenuhi dua operasi tersebut membentuk sebuah ruang vektor. Ruang ini disebut ruang hasil bagi (atau ruang faktor) atas X oleh Y (atau modulo Y) dan dinotasikan sebagai X/Y. Serta, dimensi dari ruang tersebut disebut Kodimensi dari Y dan dinotasikan sebagai *codim* Y, ditulis sebagai

$$codim\, Y = \dim(X/Y)$$

(Kreyszig, 1978).

Berkaitan dengan hal tersebut dalam ruang bernorma juga terdapat ruang hasil bagi yang disebut norma hasil bagi pada suatu ruang hasil bagi. Berdasarkan Weaver (2013) misalkan X merupakan ruang bernorma dan misalkan Y merupakan subruang tertutup dari X, didefinisikan norma hasil bagi pada suatu ruang hasil bagi X/Y sebagai:

$$|||x + Y||| = \inf\{\|z\| : z \in x + Y\} = \inf\ \{\|x + y\| : y \in Y\}$$

Selain itu, fungsi yang memetakan ruang vektor X ke dalam $\mathbb{R}$ disebut juga sebagai seminorma jika untuk semua $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi kondisi:

1. $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$,
2. $l(x + y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$
3. $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$

Seminorma l merupakan sebuah norma jika dan hanya jika $l(x) = 0$ mengakibatkan $x = 0$. Dengan kata lain, bahwa seminorma merupakan perumuman dari norma (Wilde, 2003).

Secara geometri, norma dapat dipandang sebagai alat ukur panjang dari suatu vektor (Ammari dkk., 2021). Alat ukur digunakan untuk mengukur ukuran sesuai dengan ketetapan yang berlaku. Dalam Al-Qur’an juga dijelaskan mengenai ukuran yaitu terdapat pada QS. Al Qamar dalam ayat 49 Allah SWT berfirman:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

yang berarti: *“Sesungguhnya kami menciptakan segala Sesuatu menurut ukuran.” (QS Al-Qamar:49).*

Berdasarkan Kemenag (2022), segala hal yang terjadi pada makhluk hidup telah ditentukan Allah SWT. Diciptakan-Nya segala sesuatu menurut ukuran yang tepat, dengan melalui system serta aturan yang telah ditentukan. Semua yang diciptakan-Nya sesuai dengan ketentuan dan hukum-hukum yang telah ditentukan oleh-Nya. Oleh karena itu, semua akan mendapatkan hukuman jika melanggar ketetapan dan hukum-hukum tersebut. Serta, segala hal yang akan terjadi sesuai dengan ketetapan-Nya (Kemenag, 2022).

Berdasarkan hal tersebut, Allah SWT menciptakan segala sesuatu dengan terukur dan sangat spesifik, mulai dari benda-benda langit seperti bintang dan planet hingga unsur-unsur mikroskopis. Dalam hal ini, ayat di atas juga menyiratkan konsep takdir yaitu segala sesuatu di dunia ini terjadi sesuai ketetapan Allah SWT. Setiap peristiwa, makhluk dan perubahan yang terjadi akan berjalan sesuai oleh rencana dan takaran Allah SWT yang telah ditetapkan sebelumya (Kemenag, 2022).

Setiap apa yang terjadi memiliki tujuan dan manfaat yang telah diperhitungkan oleh Allah SWT. Ukuran dan takarannya telah ditetapkan. Tidak akan ada ciptaan-Nya yang sia-sia atau tanpa alasan. Sehingga konsep ukuran berkaitan dengan segala ciptaan Allah SWT.

Berdasarkan pada norma hasil bagi dan seminorma yang telah dipaparkan di atas, sebelumnya telah dilakukan penelitian oleh Batkunde (2021) mengenai norma pada ruang hasil bagi dengan judul "*n-Normed spaces with Norm of its qoutient spaces*". Kemudian, pada penelitian Cristescue (2008) yang berjudul "*Vector seminorms spaces with vector norm and regular operators*" telah dipaparkan juga mengenai seminorma. Berkaitan dengan hal tersebut, penulis ingin mengkaji terkait sifat-sifat norma hasil bagi dan seminorma.

1.2 Rumusan Masalah

Berlandaskan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah "Bagaimana sifat-sifat norma hasil bagi dan seminorma?".

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dilakukan penelitian ini yaitu untuk menunjukkan sifat-sifat norma hasil bagi dan seminorma.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang terkandung pada penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Manfaat Bagi Penulis

   Manfaat penelitian ini untuk penulis yaitu menambah pengetahuan dan wawasan mengenai sifat-sifat norma hasil bagi dan seminorma selama penelitian berlangsung.

2. Manfaat Bagi Instansi

   Manfaat penelitian ini untuk instansi yaitu dapat digunakan sebagai sumber literatur dan acuan kedepan di bidang matematika mengenai sifat-sifat norma hasil bagi dan seminorma.

3. Manfaat Bagi Pembaca

   Manfaat penelitian ini untuk pembaca yaitu dapat digunakan sumber referensi, informasi dan menambah wawasan keilmuan terkait sifat-sifat norma hasil bagi dan seminorma.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah hanya akan membahas mengenai sifat konvergen pada norma hasil bagi dan pada seminorma hanya akan dibahas mengenai sifat konveks, penyerapan, dan seimbang, kekontinuan seminorma, serta perbedaan seminorma dan norma.

1.6 Definisi Istilah

Terdapat definisi istilah yang terkait penelitian ini, yaitu

1. Norma

Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Fungsi $\|\cdot\|$ pada X disebut norma asalkan untuk setiap f dan g di X dan setiap bilangan riil α memenuhi kondisi sebagai berikut.

a. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, (ketaksamaan segitiga)

b. $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$, (homogenitas positif)

c. $\|f\| \geq 0$ dan $\|f\| = 0$ jika dan hanya jika $f = 0$, (tak negatif)

(Kreyszig, 1978).

2. Seminorma

Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Fungsi $l: X \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan seminorma pada X jika memenuhi:

a. $l(x) \geq 0,\ (x \in X)$

b. $l(x+y) \leq l(x) + l(y),\ \ (x, y \in X)$

c. $l(\alpha x) = |\alpha| l(x),\ (\alpha \in \mathbb{F},\ \mathrm{x} \in \mathrm{X})$

(Nel, 2016).

3. Ruang Hasil Bagi

Misalkan X adalah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Misalkan Y merupakan subruang dari ruang vektor X. Untuk $x_1, x_2 \in X$, misalkan $x_1 \sim x_2$ jika $x_1 - x_2 \in Y$ dalam hal ini $\sim$ disebut relasi ekuivalen di X. Untuk $x \in X$, kelas ekuivalen dari x merupakan himpunan $x + Y = \{x + y : y \in Y\}$. Misalkan X/Y menyatakan himpunan dari semua kelas-kelas ekuivalen, yaitu $X/Y = \{x + Y : x \in X\}$.

Untuk $x_1 + Y, x_2 + Y$ di X/Y dan $k \in \mathbb{F}$, didefinisikan

$$(x_1 + Y) + (x_2 + Y) = (x_1 + x_2) + Y$$

dan

$$k(x_1 + Y) = kx_1 + Y$$

Operasi diatas jelas *well-defined* dan X/Y merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ atau disebut sebagai ruang hasil bagi dari X oleh Y. Anggota $x + Y$ dari X/Y disebut koset dari x atau koset kiri di X/Y. Jika $Y = X$, maka X/Y memuat hanya koset nol $0 + X$ dan jika $Y = \{0\}$, maka koset $x + \{0\}$ dari X/Y hanya memiliki anggota x (Limaye, 2016).

4. Kontinu

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, misalkan $f: A \to \mathbb{R}$, dan misalkan $c \in A$. Dikatakan bahwa f kontinu pada c jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika x adalah titik dari A yang memenuhi $|x - c| < \delta$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ (Bartle & Sherbert, 2011).

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada subbab ini, akan dikaji mengenai teori-teori pendukung yang terkait penelitian ini sebagai acuan dalam melakukan penelitian.

2.1.1 Ruang Vektor

Ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) adalah himpunan tak kosong X yang dilengkapi oleh dua operasi, yaitu operasi penjumlahan antar vektor dan operasi perkalian vektor dengan skalar. Secara menyeluruh, ruang vektor didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (Rynne & Youngson, 2008)

Ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) adalah himpunan tak kosong V yang dilengkapi dengan dua fungsi, yang pertama yaitu penjumlahan antar vektor dari $V \times V$ ke V dan yang kedua yaitu perkalian dengan skalar dari $\mathbb{F} \times V$ ke V yang dinotasikan oleh $x + y$ dan αx masing-masing, untuk semua $x, y \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$, sedemikian sehingga, untuk sebarang $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ dan sebarang $x, y, z \in V$ berlaku:

(V1) $x + y = y + x$,

(V2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(V3) Terdapat bilangan tunggal $0 \in V$ (tidak bergantung pada x) sedemikian sehingga $x + 0 = x$

(V4) Terdapat bilangan tunggal $-x \in V$ sedemikian sehingga $x + (-x) = 0$

(V5) $1x = x$

(V6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(V7) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

(V8) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Anggota dari $\mathbb{F}$ dikatakan skalar, sementara anggota dari V dikatakan vektor. Operasi $x + y$ merupakan penjumlahan antar vektor, sementara operasi αx merupakan perkalian vektor dengan skalar.

Contoh 2.1:

Misalkan V merupakan himpunan dari matriks berordo 2×2 di $\mathbb{R}$. Buktikan bahwa V merupakan ruang vektor.

Bukti:

Misalkan terdapat $u, v, w \in V$, di mana

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}, \qquad u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22} \in \mathbb{R}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}, \qquad v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22} \in \mathbb{R}$$

$$w = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}, \qquad w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22} \in \mathbb{R}$$

Akan ditunjukkan bahwa V merupakan ruang vektor jika memenuhi kondisi-kondisi berikut.

(V1) $u + v = v + u$,

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} + u_{11} & v_{12} + u_{12} \\ v_{21} + u_{21} & v_{22} + u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= v + u$$

(V2) $u + (v + w) = (u + v) + w$

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (u + v) + w$$

(V3) Terdapat bilangan tunggal $0 \in V$ (tidak bergantung pada u) sedemikian sehingga $u + 0 = u$

Misalkan

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka

$$u + 0 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

(V4) Terdapat bilangan tunggal $-u \in V$ sedemikian sehingga $u + (-u) = 0$

Misalkan

$$-u = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

maka

$$u + (-u) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} - u_{11} & u_{12} - u_{12} \\ u_{21} - u_{21} & u_{22} - u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

(V5) $1u = u$

$$1u = 1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

(V6) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

$$\alpha(\beta u) = (\alpha \left(\beta \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}\right) = \alpha\beta \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha\beta) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha\beta)u$$

(V7) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

$$\alpha(u + v) = \alpha \left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha u + \alpha v$$

(V8) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$$(\alpha + \beta)u = (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \alpha u + \beta u$$

Karena V memenuhi kondisi-kondisi ruang vektor di atas maka terbukti bahwa V merupakan ruang vektor.

2.1.2 Ruang Bernorma

Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang dilengkapi dengan norma. Dalam konsep ruang bernorma, norma memenuhi sifat-sifat tertentu. Berikut definisi dari ruang bernorma.

Definisi 2.2 (Kreyszig, 1978)

Misalkan X adalah ruang vektor atas $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$). Norma dari X adalah fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk semua $x, y, \in X$ dan $\alpha \ \in \mathbb{F}$ berlaku:

(N1) $\|x\| \geq 0$

(N2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

(N4) $\|x + y\| \leq \ \|x\| + \|y\|$.

Ruang vektor X yang memiliki norma disebut ruang vektor bernorma atau hanya ruang bernorma.

Contoh 2.2:

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, didefinisikan norma pada $\mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$\|x\| = |x|$$

Buktikan $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

Bukti:

Akan dibuktikan $\|x\|$ adalah ruang norma dengan kondisi-kondisi dari norma sebagai berikut.

(N1) Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| \geq 0$.

$$\|x\| = |x| \geq 0$$

Jelas bahwa syarat N1 terpenuhi berdasarkan definisi nilai mutlak yaitu $|x| \geq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$ dan bahwa $|x| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

(N2) Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

(→) Akan ditunjukkan jika $\|x\| = |x| = 0$ maka $x = 0$.

Diketahui bahwa $\|x\| = 0$. Sehingga diperoleh,

$$\|x\| = |x| = 0$$

$x = 0$

(←) Akan ditunjukkan jika $x = 0$ maka $\|x\| = 0$.

Diketahui bahwa $x = 0$. Sehingga diperoleh,

$$\|x\| = |x| = |0| = 0$$

Jadi, syarat N2 terpenuhi.

(N3) Akan ditunjukkan bahwa $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= |\alpha x| \\ &= |\alpha||x| \end{aligned}$$

Jadi, syarat N3 terpenuhi.

(N4) Akan ditunjukkan bahwa $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= |x + y| \\ &\leq |x| + |y| \\ &\leq \|x\| + \|y\| \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Syarat N4 terpenuhi karena $\|x + y\| \geq \|x\| + \|y\|$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma.

Contoh 2.2:

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, didefinisikan norma pada $\mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$\|x\| = |x - 1|$$

Buktikan $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ adalah bukan ruang bernorma.

Bukti:

Akan dibuktikan $\|x\|$ bukan ruang bernorma dengan kondisi-kondisi dari *norm* sebagai berikut:

(N1) Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| \geq 0$.

$$\|x\| = |x - 1| \geq 0$$

Jelas bahwa syarat N1 terpenuhi.

(N2) Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

($\rightarrow$) Akan ditunjukkan jika $\|x\| = 0$ maka $x = 0$.

Diketahui bahwa $\|x\| = 0$. Sehingga diperoleh,

$$\|x\| = |x - 1| = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

($\leftarrow$) Akan ditunjukkan jika $x = 0$ maka $\|x\| = 0$.

Diketahui bahwa $x = 0$. Sehingga diperoleh,

$$\|x\| = |x - 1| = |0 - 1| = |-1| = |1| = 1$$

Jadi, syarat N2 tidak terpenuhi terpenuhi.

(N3) Akan ditunjukkan bahwa $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

$$\|\alpha x\| = |\alpha x - 1|$$

$$= |\alpha||x - 1|$$

Jadi, syarat N3 tidak terpenuhi karena nilai $|\alpha||x-1| = |\alpha|\|x\|$ tidak selalu sama.

(N4) Akan ditunjukkan bahwa $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\begin{aligned} \|x+y\| &= |(x+y)-1| \\ &\geq |x-1| + |y-1| \\ &\geq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Syarat N4 tidak terpenuhi karena $\|x+y\| \geq \|x\| + \|y\|$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ bukan merupakan ruang bernorma karena tidak memenuhi syarat N2, N3 dan N4.

2.1.3 Ruang Hasil Bagi Pada Ruang Vektor

Pada subbab ini akan dipaparkan mengenai ruang hasil bagi. Sebelumnya akan dipaparkan terlebih dahulu mengenai definisi subruang sebagai berikut.

Definisi 2.3 (Gockenbach, 2010)

Misalkan X ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$) dan Y merupakan himpunan bagian dari X, maka Y merupakan subruang dari X jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut ini:

1. $0 \in Y$
2. Jika $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $x \in Y$, maka $\alpha x \in Y$
3. Jika $x, y \in Y$, maka $x + y \in Y$

Definisi 2.4 (Kreyszig, 1978)

Misalkan Y subruang dari ruang vektor X. Koset dari $x \in X$ atas Y dalam hal ini yaitu koset kiri dinotasikan sebagai $x + Y$ yang merupakan koset kiri dan didefinisikan sebagai himpunan

$$x + Y = \{v \in X \mid v = x + y, y \in Y\}$$

Koset-koset di atas membentuk partisi dalam ruang vektor. Untuk $w, x \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ didiefinisikan operasi aljabar berikut.

$$(w + Y) + (x + Y) = (w + x) + Y$$

$$\alpha(x + Y) = \alpha x + Y$$

Koset-koset yang memenuhi dua operasi tersebut membentuk sebuah ruang vektor. Ruang ini disebut ruang hasil bagi (atau ruang faktor) atas X oleh Y (atau modulo Y) dan dinotasikan sebagai X/Y. Dimensi dari ruang X/Y disebut kodimensi dari Y dan dinotasikan sebagai *codim* Y, ditulis sebagai

$$codim\, Y = \dim(X/Y).$$

Contoh 2.3:

Misalkan X ruang vektor $\mathbb{R}^3$ dan Y subruang dari $\mathbb{R}^3$ dengan $Y = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ dan koset dari $x \in X$ atas Y dinotasikan sebagai $x + Y$ dan didefinisikan sebagai himpunan

$$x + Y = \{v \in X \mid v = x + y, y \in Y\}$$

Koset-koset diatas yang membentuk sebuah ruang vektor merupakan ruang hasil bagi atas X oleh Y karena jika diketahui

$x = (1, 2, 3)$ dengan $x \in \mathbb{R}^3$ maka

$$x + Y = \{(1, 2, 3) + (x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$x + Y = \{(1 + x, 2 + y, 3) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Misalkan $w = (4, 5, 6)$ untuk $w, x \in X$ dan $\alpha = 2$, $\alpha \in \mathbb{F}$ sehingga dibentuk partisi dalam ruang vektor oleh koset-koset di atas.

$$(w + Y) + (x + Y) = (w + x) + Y$$

$$\big((4,5,6)+Y\big)+\big((1,2,3)+Y\big)=(4+1,5+2,6+3)+Y$$
$$=(5,7,9)+Y$$

dan

$$\alpha(x+Y)=\alpha x+Y$$
$$2((1,2,3)+Y)=(2,4,6)+Y$$

Oleh karena itu, koset-koset memenuhi dua operasi di atas yang membentuk sebuah ruang vektor maka terdapat ruang hasil bagi atas X oleh Y dengan

$$codim\ Y=\dim\left(\frac{X}{Y}\right)=3-2=1.$$

2.1.4 Ruang Hasil Bagi Pada Ruang Bernorma

Pada subbab ini, akan dipaparkan mengenai ruang hasil bagi pada ruang bernorma, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5 (Khanfer, 2023)

Misalkan X_0 merupakan subruang dari ruang bernorma X, didefinisikan hasil bagi X/X_0 sebagai

$$X\backslash X_0=\{[x]=x+X_0 : x\in X\}=\{x+z :\ z\in X_0\}$$

di mana elemen dari hasil bagi ini dikatakan koset kiri yaitu $[x]=x+X_0$, yang dibentuk oleh himpunan dari kelas-kelas ekuivalen. Untuk $x_1,x_2\in X$, didefinisikan relasi ekuivalen $\sim$ sebagai $x_1{\sim}x_2$ jika $x_1-x_2\in X_0$ dan jelas bahwa untuk $[x]=x+X_0$ dan $[y]=y+X_0$ di mana $y\in X$ serta $k\in\mathbb{F}$ didefinisikan

$$[x]+[y]=[x+y]$$

dan

$$[kx]=k[x]$$

Oleh karena itu, hasil bagi X/X_0 membentuk subruang dari X. Ruang $(X/X_0, \|\cdot\|)$ disebut ruang hasil bagi.

2.1.5 Norma Hasil Bagi

Pada subbab ini akan dipaparkan mengenai norma hasil bagi. Sebelumnya akan dipaparkan terlebih dahulu mengenai himpunan tertutup dan subruang tertutup dalam ruang bernorma sebagai berikut.

Definisi 2.6 (Khanfer, 2023)

Himpunan A disebut himpunan tertutup dalam ruang bernorma X jika untuk setiap barisan $(x_n) \subseteq A$ dan $x_n \to x$, di mana $x \in A$.

Definisi 2.7 (Kreyszig, 1978)

Subruang X_0 dari ruang bernorma X merupakan subruang dari X dengan norma yang diperoleh dari membatasi norma pada X ke subhimpunan X_0. Norma pada Y ini diinduksi oleh norma pada X. Jika X_0 himpunan tertutup di X, maka X_0 disebut subruang tertutup dari X.

Definisi 2.8 (Weaver, 2013)

Misalkan X merupakan ruang bernorma dan misalkan X_0 merupakan subruang tertutup dari X. Didefinisikan $\|\cdot\|: X\backslash X_0 \to \mathbb{R}$ norma hasil bagi pada ruang hasil bagi X/X_0 sebagai

$$|\|x + X_0\|| = \inf \{\|z\|: z \in x + X_0\} = \inf \{\|x + y\|: y \in X_0\}.$$

Untuk $x \in X$.

Contoh 2.4:

Misalkan $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ didefinisikan $\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sebagai

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|$$

dan misalkan $X_0 \subseteq \mathbb{R}^2$. Buktikan terdapat norma hasil bagi pada ruang hasil bagi $\mathbb{R}^2/X_0$.

Bukti:

Akan ditunjukkan terdapat norma hasil bagi pada ruang hasil bagi $\mathbb{R}^2/X_0$. Namun, akan dibuktikan terlebih dahulu $\|x\|$ merupakan norma dan X_0 merupakan subruang tertutup dari $\mathbb{R}^2$.

Akan ditunjukkan bahwa $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ merupakan norma jika memenuhi kondisi berikut:

(N1) $\|x\| \geq 0$

Untuk setiap $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| \geq 0$$

Jelas bahwa syarat N1 terpenuhi berdasarkan definisi nilai mutlak yaitu $|x| \geq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$ dan bahwa $|x| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

(N2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

($\rightarrow$) Akan ditunjukkan jika $\|x\| = 0$ maka $x = 0$.

Diketahui bahwa $\|x\| = |x_1| + |x_2| = 0$. Sehingga diperoleh,

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| = 0$$

$$|x_1| + |x_2| = 0$$

karena $|x_1|$ dan $|x_2|$ tak negatif maka

$$|x_1| = 0 \text{ dan } |x_2| = 0$$

Sehinga, $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$

($\leftarrow$) Akan ditunjukkan jika $x = 0$ maka $\|x\| = 0$.

Diketahui bahwa $x = (x_1, x_2) = (0,0)$. Sehingga diperoleh,

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| = |0| + |0| = 0$$

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| = \|(\alpha x_1, \alpha x_2)\| &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| \\ &= |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| \\ &= |\alpha|(|x_1| + |x_2|) \\ &= |\alpha|\|x\| \end{aligned}$$

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Untuk setiap $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2)\| \\ &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \end{aligned}$$

karena diketahui bahwa

$|x_1 + y_1| \leq |x_1| + |y_1|$ dan $|x_2 + y_2| \leq |x_2| + |y_2|$

maka

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\ &\leq (|x_1| + |y_1|) + (|x_2| + |y_2|) \\ &= |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2| \\ &\leq \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Terbukti bahwa bahwa $\|x\| = |x_1| + |x_2|$ merupakan norma.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa X_0 merupakan subruang dari $\mathbb{R}^2$ dan juga subruang tertutup. Misalkan untuk $X_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ dengan $X_0 = \{(y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$. Berdasarkan Definisi 2.3 X_0 subruang dari X jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut ini:

1. $0 \in X_0$

   Vektor nol di $\mathbb{R}^2$ adalah $(0,0)$ yang jelas berada dalam X_0 karena $0 \in \mathbb{R}$

2. Jika $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $x \in X_0$, maka $\alpha x \in X_0$

   Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha(y,0) = (\alpha y, 0)$$

   Karena $\alpha y \in \mathbb{R}$ maka $(\alpha y, 0) \in X_0$.

3. Jika $x, y \in X_0$, maka $x + y \in X_0$

   Misalkan $(y_1, 0), (y_2, 0) \in X_0$

$$(y_1, 0) + (y_2, 0) = (y_1 + y_2, 0)$$

   Karena $y \in \mathbb{R}$ maka $y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$. Oleh sebab itu, $(y_1 + y_2, 0) \in X_0$

Jadi, terbukti X_0 merupakan subruang dari X.

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa X_0 merupakan subruang tertutup, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa X_0 merupakan himpunan tertutup di $\mathbb{R}^2$. Misalkan terdapat barisan $(y_n, 0)$ dalam X_0 yang konvergen ke $x = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Berdasarkan Definisi 2.7 maka

$$\lim_{n\to\infty} (y_n, 0) = (y_1, y_2)$$

karena $y_2 = 0$ maka

$$\lim_{n\to\infty} (y_n, 0) = (y_1, 0)$$

di mana $(y_1, 0) \in X_0$. Jadi, terbukti bahwa X_0 merupakan himpunan tertutup di $\mathbb{R}^2$. Oleh sebab itu, berdasarkan Definisi 2.7 maka X_0 merupakan subruang tertutup.

Kemudian, akan dibuktikan terdapat norma hasil bagi pada ruang hasil bagi $\mathbb{R}^2/X_0$. Untuk $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, terdapat koset dari $x \in \mathbb{R}^2$ atas X_0 sebagai berikut.

$$x + X_0 = (x_1, x_2) + X_0 = \{(x_1 + y, x_2) | y \in \mathrm{X}_0\}$$

Sehingga, norma hasil bagi adalah

$$|||(x_1, x_2) + X_0||| = \inf \{\|(x_1 + y, x_2)\| : y \in X_0\}$$

karena

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|$$

maka

$$\|(x_1 + y, x_2)\| = |x_1 + y| + |x_2|$$

Karena $|x_1 + y| \geq 0$ untuk setiap $y \in \mathbb{R}$ dan nilai minimumnya adalah nol. Oleh karena itu, infimum dari $|x_1 + y|$ adalah nol jika memilih $y = -x_1$. Sehingga

$$\begin{aligned} |||(x_1, x_2) + X_0||| &= \inf \{\|(x_1 + y, x_2)\| : y \in X_0\} \\ &= \|(x_1 - x_1, x_2)\| \\ &= \|(0, x_2)\| \\ &= |x_2| \end{aligned}$$

Jadi, terbukti terdapat norma hasil bagi pada ruang hasil bagi X/X_0 yaitu $|x_2|$.

2.1.6 Bola Satuan Tertutup

Pada subbab ini akan dibahas mengenai satuan bola tertutup pada ruang bernorma. Bola satuan tertutup pada ruang bernorma didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.9 (Limaye, 2016)

Misalkan X merupakan ruang bernorma. Untuk $x \in X$ dan $r > 0$, didefinisikan bola buka sebagai himpunan

$$U(x, r) = \{y \in X\} | \|x - y\| < r$$

Dengan r merupakan jari-jari. Jika $y \in X$ dan $\|x-y\| = r$ maka $y_n = y + (x - y)/n \in U(x,r)$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $y_n \to y$. Bola tertutup didefinisikan sebagai himpunan $\overline{U}(x,r) = \{y \in X | \|x-y\| \leq r\}$ dengan r merupakan jari-jari.

Himpunan $U(0,1) = \{x \in X | \|x\| < 1\}$ dikatakan sebagai bola satuan terbuka dari X. Himpunan $\overline{U}(0,1) = \{x \in X | \|x\| \leq 1\}$ dikatakan sebagai bola satuan tertutup dari X dan himpunan $\{x \in X | \|x\| = 1\}$ dikatakan sebagai bola satuan dari X.

2.1.7 Seminorma

Seminorma merupakan suatu fungsi yang memetakan ruang vektor ke bilangan riil yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Secara lebih rinci, seminorma didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.10 (Wilde, 2003).

Misalkan X ruang vektor pada lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$), suatu pemetaan $l: X \to \mathbb{R}$ disebut seminorma jika memenuhi kondisi

1. $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$,
2. $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$
3. $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$

Jika l memiliki sifat $l(x) = 0$ yang berakibat $x = 0$, maka l adalah norma.

Contoh 2.5:

Misalkan $X = \mathbb{R}$, $l: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang didefinisikan sebagai berikut.

$$l(x) = |x + 4|$$

Buktikan bahwa l merupakan seminorma dan apakah l juga merupakan norma?

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa l merupakan seminorma jika memenuhi kondisi berikut:

1. Akan ditunjukkan bahwa $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$

   Untuk semua vektor $x \in X$

   $$l(x) = |x + 4| \geq 0$$

   $l(x)$ akan selalu positif dikarenakan $l(x) = |x + 4|$, di mana berdasarkan definisi nilai mutlak akan selalu positif atau nol.

2. Akan ditunjukkan bahwa $l(x + y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$.

   Untuk $x, y \in X$,

   $$\begin{aligned} l(x + y) &= |(x + y) + 4| \\ &\leq |x + 4| + |y + 4| \\ &\leq l(x) + l(y) \end{aligned}$$

   kondisi ke-2 terpenuhi karena $l(x + y) \leq l(x) + l(y)$.

3. Akan ditunjukkan bahwa $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$

   Untuk sebarang skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ dan untuk semua $x \in X$

   $$\begin{aligned} l(\lambda x) &= |\lambda x + 4| \\ &= |\lambda||x + 4| \end{aligned}$$

   kondisi ke-3 terpenuhi karena $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$.

Oleh karena itu, l merupakan seminorma karena memenuhi semua kondisi.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah l merupakan norma.

Jika l memiliki sifat $l(x) = 0$ yang berakibat $x = 0$, maka l adalah norma. Andaikan bahwa l norma maka

$$l(x) = 0$$

$$|x + 4| = 0$$

$$x = -4$$

karena $x = -4$ jadi l bukan norma pengandaian salah.

Jadi, l merupakan seminorma namun bukan norma.

Contoh 2.5:

Misalkan $X = \mathbb{R}$, $l: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$l(x) = |x - 4|$$

Buktikan bahwa l bukan merupakan seminorma dan apakah l juga bukan norma!

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa l bukan merupakan seminorma jika memenuhi kondisi berikut:

1. Akan ditunjukkan bahwa $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$

   Untuk semua vektor $x \in X$

   $$l(x) = |x - 4| \geq 0$$

   $l(x)$ akan selalu positif dikarenakan $l(x) = |x - 4|$, di mana berdasarkan definisi nilai mutlak akan selalu positif atau nol.

2. Akan ditunjukkan bahwa $l(x + y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$.

   Untuk $x, y \in X$,

$$l(x+y) = |(x+y)-4|$$
$$\geq\ |x-4| + |y-4|$$
$$\geq\ l(x) + l(y)$$

kondisi ke-2 tidak terpenuhi karena $l(x+y) \geq l(x) + l(y)$.

3. $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x\ \in X$ dan semua $\lambda\ \in\ \mathbb{F}$

   Untuk sebarang skalar $\lambda\ \in\ \mathbb{R}$ dan untuk semua $x\ \in X$

$$l(\lambda x) = |\lambda x - 4|$$
$$= |\lambda||x-4|$$

   kondisi ke-3 terpenuhi karena nilai $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$.

Oleh karena itu, l bukan merupakan seminorma karena tidak memenuhi kondisi ke-2 dan 3.

Selanjutnya, akan ditunjukkan apakah l juga bukan norma.

Jika l memiliki sifat $l(x) = 0$ yang berakibat $x = 0$, maka l adalah norma. Andaikan bahwa l norma maka

$$l(x) = 0$$
$$|x+4| = 0$$
$$x = 4$$

Karena $x = 4$ jadi l bukan norma pengandaian salah jadi l bukan seminorma dan bukan norma.

2.1.8 Konvergen

Pada subbab ini akan dipaparkan mengenai kekonvergenan dalam bilangan riil dan dalam ruang bernorma yang sangat penting untuk subbab selanjutnya yaitu kekontinuan dalam bilangan riil dan ruang bernorma. Sebelum mendefinisian kekonvergenan dan kekontinuan dalam bilangan riil serta dalam ruang bernorma, akan didefinisikan megenai persekitaran sebagai berikut.

Definisi 2.11 (Bartle & Sherbert, 2011)

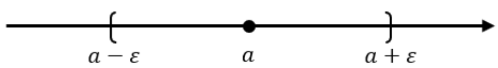
Misalkan $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Maka persekitaran-ε dari a adalah himpunan $V_\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.

Pernyataan $x \in V_\varepsilon(a)$ memiliki makna

$$|x - a| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$



Gambar 2.1 Persekitaran-ε Dari a

2.1.8.1 Konvergen di $\mathbb{R}$

Kekonvergenan barisan pada bilangan riil didefinsiikan sebagai berikut.

Definisi 2.12 (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x dikatakan limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, dengan ketentuan x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jika barisan mempunyai limit, dikatakan bahwa barisan tersebut konvergen, jika tidak mempunyai limit, dikatakan bahwa barisan tersebut divergen.

Ketika barisan mempunya limit x, akan digunakan notasi

$$\lim X = x \quad atau \quad \lim(x_n) = x$$

Contoh 2.6:

Misalkan terdapat barisan (x_n) dengan $x_n \in \mathbb{R}$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$ yang didefinisikan dengan

$$(x_n) = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$$

dan

$$\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Buktikan bahwa barisan (x_n) konvergen ke $x = 0$.

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$ jika $n \in \mathbb{N}$ maka

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > 1/\varepsilon$$

Sehingga untuk sebarang $\varepsilon > 0$ jika dipilih $K(\varepsilon) = \left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil$ maka untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K(\varepsilon)} < \varepsilon$$

Hal ini menunjukkan bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ konvergen ke $x = 0$. Jadi terbukti bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ konvergen ke $x = 0$.

Dengan menggunakan konsep kekonvergenan barisan, Definisi 2.5 ekuivalen dengan pernyataan-pernyataan pada teroema berikut.

Teorema 2.13 (Bartle & Sherbert, 2011)

Misalkan $X = (x_n)$ adalah barisan dari bilangan riil, dan misalkan $x \in \mathbb{R}$. Pernyataan berikut ini ekuivalen.

(a) X konvergen ke x.

(b) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, ketentuan x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

(c) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, ketentuan x_n memenuhi $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

(d) Untuk setiap persekitaran ε dari x atau $V_\varepsilon(x)$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, memenuhi kententuan $x_n \in V_\varepsilon(x)$.

Bukti:

Akan dibuktikan pernyataan $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$, $(c) \Rightarrow (d)$, dan $(d) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$

Diketahui X konvergen ke x, berdasarkan Definisi 2.5 yaitu barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x dikatakan limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, dengan ketentuan x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

Jelas terbukti bahwa pernytaan (a) ekuivalen dengan pernyataan (b).

$(b) \Rightarrow (c)$

Misalkan $(x_n) = u$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, ketentuan x_n memenuhi

$$|u - x| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < u - x < \varepsilon$$

$$x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$$

Terbukti bahwwa pernyataan (b) ekuivalen dengan pernyataan (c).

$(c) \Rightarrow (d)$

Misalkan $(x_n) = u$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, ketentuan x_n memenuhi

$$x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$$

di mana berdasarkan Definisi 2.4 diperoleh

$$u \in V_\varepsilon(x)$$

Terbukti pernyatan (c) ekuivalen dengan pernyataan (d).

$(d) \Rightarrow (a)$

Misalkan $(x_n) = u$ untuk setiap persekitaran ε dari x atau $V_\varepsilon(x)$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, kententuan $x_n \in V_\varepsilon(x)$

Berdasarkan Definisi 2. 4 jika $x_n \in V_\varepsilon(x)$ artinya

$$|u - x| < \varepsilon$$

$$-\varepsilon < u - x < \varepsilon$$

$$x - \varepsilon < u < x + \varepsilon$$

Hal ini berlaku juga untuk semua $\varepsilon > 0$ barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$.

Terbukti pernyataan (d) ekuivalen dengan pernyataan (a).

Jadi, terbukti bahwa pernyataan $(a), (b), (c)$ dan (d) ekuivalen.

2.1.8.2 Konvergen dalam Ruang Bernorma

Konvergen dari sebuah barisan dalam ruang benorma yang dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.14 (Kreyszig, 1978)

Barisan (x_n) pada ruang bernorma X adalah konvergen jika X memuat x sedemikian sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

atau ditulis $x_n \to x$.

Contoh 2.7:

Misalkan pada ruang bernorma $\mathbb{C}$ terdapat barisan $z_n = 2 + i\left(\frac{1}{n}\right)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa barisan tersebut konvergen ke 2.

Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.7, akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} \|z_n - 2\| = 0$ sehingga didefinisikan

$$\|z_n - 2\| = \left\|2 + i\left(\frac{1}{n}\right) - 2\right\| = \left\|i\left(\frac{1}{n}\right)\right\| = \left|i\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n}$$

diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - 2\| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Jadi, terbukti bahwa barisan z_n konvergen ke 2.

2.1.9 Kontinu

Subbab ini akan menjelaskan mengenai kekontinuan pada bilangan riil dan ruang bernorma.

2.1.9.1 Kontinu di $\mathbb{R}$

Secara umum kekontinuan pada bilangan riil didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.15 (Bartle & Sherbert, 2011)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, misalkan $f: A \to \mathbb{R}$, dan misalkan $c \in A$. Dikatakan bahwa f kontinu pada c jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika x adalah titik dari A yang memenuhi $|x - c| < \delta$ maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

Contoh 2.8:

Misalkan terdapat fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x + 3$. Buktikan bahwa f kontinu pada $c = 1$.

Bukti:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \varepsilon/2$ maka berdasarkan Definisi 2.8

$$|x - 1| < \delta \leq \varepsilon/2$$

diperoleh

$$2|x - 1| < \varepsilon$$

$$|2(x - 1)| < \varepsilon$$

$$|2x - 2| < \varepsilon$$

$$|2x + 3 - 5| < \varepsilon$$

di mana

$$f(1) = 2(1) + 3 = 5$$

sehingga

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon$$

Jadi, untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ sedemikian sehingga $|x - 1| < \delta$ maka $|f(x) - f(1)| = 2|x - 1| < 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$. Terbukti bahwa f kontinu pada $c = 1$.

Teorema 2.16 (Bartle & Sherbert, 2011)

Fungsi $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu pada titik $c \in A$ jika dan hanya jika diberikan sebarang persekitaran-ε dari $f(c)$ atau $V_\varepsilon(f(c))$ terdapat persekitaran-δ dari c atau $V_\delta(c)$ sedemikian sehingga jika x adalah sebarang titik dari $A \cap V_\delta(c)$, maka $f(x)$ memenuhi $V_\varepsilon(f(c))$, sehingga

$$f\big(A \cap V_\delta(c)\big) \subseteq V_\varepsilon(f(c))$$

Bukti:

Misalkan $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dan misalkan $c \in A$.

($\rightarrow$) Akan dibuktikan bahwa kondisi $f\big(A \cap V_\delta(c)\big) \subseteq V_\varepsilon(f(c))$ terpenuhi.

Asumsikan bahwa f kontinu pada titik c dan misalkan $V_\delta(c) = \{x \in A \,|\, |x - c| < \delta\}$ berdasarkan Definisi 2.8, untuk setiap $x \in A$ berlaku bahwa

$$|f(x) - c| < \varepsilon$$

Misalkan $x \in A \cap V_\delta(c)$, maka $x \in A$ dan $x \in V_\delta(c)$.

Sehingga diperoleh

$$x \in A \text{ dan } |x - c| < \delta$$

Oleh karena itu, $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, yaitu $f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$ yang berarti bahwa $f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$. Kemudian, untuk setiap persekitaran-ε dari

$f(c)$ atau $V_\varepsilon(f(c))$ terdapat persekitaran-δ dari c atau $V_\delta(c)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c)$ dengan $x \in A$ berlaku bahwa

$$f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$$

atau

$$f\big(A \cap V_\delta(c)\big) \subseteq V_\varepsilon(f(c))$$

($\leftarrow$) Akan dibuktikan bahwa f kontinu di c.

Asumsikan bahwa untuk setiap persekitaran-ε dari $f(c)$ atau $V_\varepsilon(f(c))$ terdapat persekitaran-δ dari c atau $V_\delta(c)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in V_\delta(c)$ dengan $x \in A$ berlaku bahwa

$$f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$$

Misalkan $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $x \in A$ dengan $V_\delta(c) = \{x \in A \,||x - c| < \delta\}$ berlaku bahwa

$$|x - c| < \delta$$

$$-\delta < x - c < \delta$$

$$c - \delta < x < c + \delta$$

yang berakibat bahwa $x \in V_\delta(c)$ sehingga

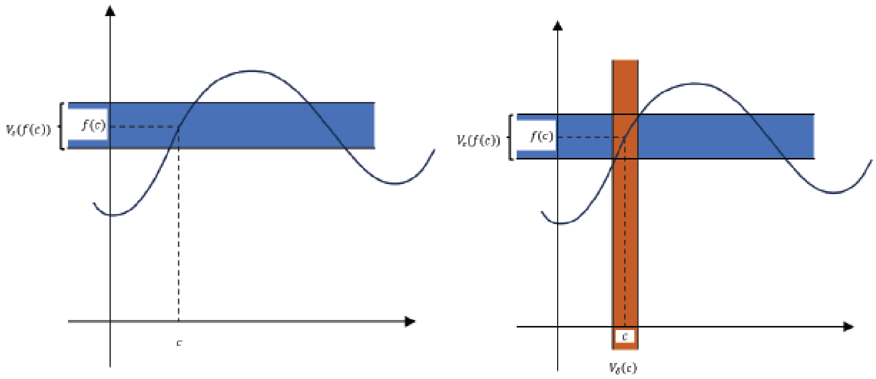
$$f(x) \in V_\varepsilon(f(c))$$

maka

$$f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$$

Oleh karena itu, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $x \in A$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku bahwa $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, Dimana hal ini menunjukkan bahwa f kontinu di c sesuai dengan Definisi 2.8

Pembuktian dari Teorema 2.9 dapat diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 2.2 Ilustrasi Teorema 2.9

Teorema 2.17 Kriteria Barisan pada Kekontinuan (Bartle & Sherbert, 2011)

Fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik $c \in A$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) di A konvergen ke c, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$.

Bukti:

($\to$) Akan dibuktikan bahwa barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$.

Diketahui bahwa Fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik $c \in A$.

Berdasarkan Definisi 2.8, f dikatakan kontinu pada $c \in A$ jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika x adalah titik dari A yang memenuhi $|x - c| < \delta$ maka

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

Misalkan terdapat barisan (x_n) di A konvergen ke c.

Berdasarkan Definisi 2.7, barisan dikatakan konvergen jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

Sehingga jika barisan (x_n) di A konvergen ke c ketika f kontinu maka

$$|x_n - c| < \delta$$

diperoleh

$$|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik $c \in A$ jika untuk setiap barisan (x_n) di A konvergen ke c, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$.

$(\leftarrow)$ Akan dibuktikan bahwa f kontinu.

Diketahui barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$, untuk semua $n \geq K(\varepsilon)$, x_n memenuhi

$$|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$$

Oleh sebab itu, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $x \in A$ memenuhi

$$|x_n - c| < \delta$$

Jadi, terbukti bahwa f kontinu.

2.1.9.2 Kontinu dalam Ruang Bernorma

Pada ruang bernorma kekontinuan dibuktikan dalam dua kondisi yang ekuivalen yaitu berdasarkan pada Lemma 2.18 dan Definisi 2.19 sebagai berikut.

Lemma 2.18 (Akcocglu dkk, 2009)

Misalkan X dan Y dua ruang bernorma, $a \in A \subset X$, dan $f: A \to Y$ adalah fungsi. Maka pernyataan berikut ekuivalen:

1. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ di mana $\|x - a\| < \delta$ dan $x \in A$.
2. Jika x_n adalah barisan di A dan jika $x_n \to a$ di X, maka $f(x_n) \to f(a)$ di Y.

Bukti:

1. Misalkan x_n barisan di A dan asumsikan bahwa $x_n \to a$. Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$. Karena $x_n \to a$, terdapat N sedemikian sehingga $\|x_n - a\| < \delta$ untuk semua $n \geq N$. Oleh karena itu, $\|f(x_n) - f(a)\| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq N$. Sehingga $f(x_n) \to f(a)$.
2. Sebaliknya, asumsikan pernyataan (1) salah, maka terdapat $\alpha > 0$ dengan memenuhi sifat-sifat. Untuk setiap $\delta > 0$ terdapat $x \in A$ sedemikian sehingga $\|x - a\| < \delta$ tetapi $\|f(x_n) - f(a)\| \geq \alpha$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat x_n sedemikian sehingga

$$\|x_n - a\| < \frac{1}{n} \text{ tapi } \|f(x_n) - f(a)\| \geq \alpha$$

Maka $x_n \to a$ tapi $f(x_n) \nrightarrow f(a)$. Karena pernyataan (a) salah, maka pernyataan (1) dan (2) terbukti setara.

Definisi 2.19 (Akcocglu dkk, 2009).

Misalkan X dan Y dua ruang bernorma, $a \in A \subset X$, dan $f: A \to Y$ merupakan fungsi, maka f dikatakan kontinu pada a jika f memenuhi salah satu kondisi yang setara berdasarkan Lemma 4.1 Jika f kontinu pada setiap $a \in A$, maka f dikatakan kontinu pada A.

Contoh 2.8:

Didefinisikan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = 2x$. Akan dibuktikan f kontinu di $x = 1$.

Bukti:

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Akan dibuktikan terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga,

$$\|x - 1\| < \delta$$

di mana

$$\|f(x) - f(1)\| < \varepsilon$$

Karena $\|\cdot\| = |\cdot|$ di $\mathbb{R}$, maka

$$\|x - 1\| = |x - 1| \qquad \text{dan} \qquad \|f(x) - f(1)\| = |2x - 2|$$

Oleh karena itu,

$$|2x - 2| = |2(x - 1)| = 2|x - 1| < \varepsilon$$

Dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ sehingga,

$$\|x - 1\| = |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Maka,

$$\|f(x) - f(1)\| = |2x - 2| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$$

Jadi, terbukti terdapat terdapat $\delta > 0$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $\|f(x) - f(1)\| < \varepsilon$ di mana $\|x - 1\| < \delta$ dan $x \in A$. Karena memenuhi kondisi 1 pada Lemma 2.1 Maka terbukti f kontinu pada $x = 1$.

2.2 Integrasi Tersirat Konsep Ukuran pada Al-Qur'an

Pada Bab 1, telah dijelaskan mengenai Allah SWT menciptakan semua yang diciptakannya menurut ukuran. Segala hal yang ada di bumi telah terukur sesuai dengan ketetapan-Nya. Semua hal disini mengacu pada segala ciptaan Allah SWT mulai dari langit, laut, gunung dan sebagainya. Sehingga, penciptaan alam semesta dan seisinya telah memuat konsep ukuran dalam matematika. Allah SWT telah menyebutkan segala hal diciptakan sesuai dengan ukuran yang seimbang dan tepat seperti dalam QS Al-Hijr pada ayat 19 Allah SWT berfirman:

وَالْأَرْضَ مَدَدْنَاهَا وَأَلْقَيْنَا فِيهَا رَوَاسِيَ وَأَنبَتْنَا فِيهَا مِن كُلِّ شَيْءٍ مَّوْزُونٍ (١٩)

yang artinya: *"Kami telah menghamparkan bumi, memancangkan padanya gunung-gunung, dan menumbuhkan di sana segala sesuatu menurut ukuran-Nya" (QS Al Hijr:19)*

Pada ayat di atas dijelaskan penerapan konsep ukuran yaitu penciptaan bumi beserta isinya termasuk gunung-gunung menurut ukuran dan ketetapan-Nya. Berdasarkan Kemenag (2022), Allah SWT menyebutkan tanda kekuasaan-Nya di bumi. Allah SWT menyatakan, "Dan kami telah menghamparkan bumi sebagai pijakan bagi manusia, dan kami pancangkan padanya gunung-gunung yang kukuh sebagai pasak bagi bumi agar tidak roboh dan berguncang sehingga manusia menjadi aman, serta kami ciptakan dan tumbuhkan di sana segala sesuatu, seperti tumbuhan yang beragam, menurut ukuran yang seimbang dan tepat" segalanya demi kebaikan seluruh makhluk-Nya.

Allah SWT menjelaskan tanda-tanda kebesaran dan kekuasaan-Nya di langit, pada ayat ini Allah SWT menjelaskan mengenai tanda-tanda kekuasaan-Nya yang dapat dilihat, dirasakan, dan dipikirkan oleh manusia. Salah satu tanda kebersarannya adalah diciptakannya bumi yang terhampar luas, sehingga mudah dihuni manusia, yang dapat digunakan bertani, dan memudahkan perjalanan mereka ke berbagai penjuru didunia untuk mencari rezeki yang halal dan menikmati kehidupan. Allah SWT juga menciptakan lembah-lembah dalam di bumi dengan aliran sungai-sungai kecil yang bersatu menjadi sungai yang besar menuju lautan luas. Selain itu, diciptakan-Nya pula gunung-gunung yang tinggi, dihiasi dengan berbagai jenis tanaman dan tumbuh-tumbuhan yang hijau, yang menyenangkan hati siapa saja orang-orang yang melihatnya, sebagaimana firman Allah SWT dalam QS Ar Rad ayat 3:

وَهُوَ الَّذِي مَدَّ الْأَرْضَ وَجَعَلَ فِيهَا رَوَاسِيَ وَأَنْهَارًا ۖ وَمِن كُلِّ الثَّمَرَاتِ جَعَلَ فِيهَا زَوْجَيْنِ
اثْنَيْنِ ۖ يُغْشِي اللَّيْلَ النَّهَارَ ۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَآيَاتٍ لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ (٣)

yang artinya: *"Dialah yang menghamparkan bumi dan menjadikan gunung-gunung dan Sungai-sungai padanya, Dia menjadikan padanya (semua) buah-buahan berpasang-pasangan (dan) menutup malam pada siang, Sesungguhnya pada yang demikian itu terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi kaum yang berpikir"(QS Ar Rad:3).*

Betapa agungnya Allah SWT yang menciptakan segala sesuatu ini, memberikan manfaat dan kenikmatan yang dapat dirasakan oleh manusia, meskipun banyak dari mereka yang ingkar kepada-Nya. Allah SWT telah menciptakan berbagai jenis tanaman dan tumbuhan dengan ukuran dan kadar yang sudah ditentukan. Pohon durian memiliki batang yang kokoh, sesuai dengan buahnya yang besar dan berduri. Batang padi juga sesuai dengan buahnya yang bertangkai serta tanah tempat tumbuhnya. Demikian pula tanaman lainnya, diciptakan oleh Allah SWT dengan keseimbangan dan keserasian yang sesuai dengan iklim, kondisi daerah, dan kebutuhan manusia atau hewan ditempat tumbuhnya. Selain itu, perbedaan daerah dan tanah tempat tumbuh suatu tanaman menyebabkan perbedaan rasa dan ukuran buahnya. Kandungan gula di dalam tebu berbeda dengan kandungan gula dalam air kelapa, demikian pula manisnya mangga dan jeruk. Buah salak ketika masih berupa putik dikelilingi oleh duri-duri tajam, tetapi setelah masak, duri-duri tersebut tampak membuka, memudahkan manusia mengambil buahnya yang manis (Kemenag, 2022).

Putik pepaya memiliki rasa pahit saat masih kecil, sehingga manusia tidak tertarik untuk mengambil dan memakannya. Namun, seiring dengan pertumbuhannya, rasa pahit tersebut semakin berkurang, membuat manusia semakin tertarik untuk mengambil dan memakannya. Setelah matang, buah pepaya dipetik dan dijadikan makanan yang digemari. Demikianlah Allah SWT menciptakan segala sesuatu dengan ukuran dan kadar yang tertentu, sehingga kesempurnaan ciptaan-Nya itu menambah iman di dalam hati orang yang mau berpikir dan memperkuat keyakinan bahwa Allah SWT adalah Maha Sempurna (Kemenag, 2022). Selain terkait akan ciptaannya Allah SWT juga menurunkan rezeki dengan ukuran seperti dalam QS Asy Syura pada ayat 27 Allah SWT berfirman:

وَلَوْ بَسَطَ اللَّهُ الرِّزْقَ لِعِبَادِهِ لَبَغَوْا فِي الْأَرْضِ وَلَٰكِن يُنَزِّلُ بِقَدَرٍ مَّا يَشَاءُ ۚ إِنَّهُ بِعِبَادِهِ خَبِيرٌ بَصِيرٌ (٢٧)

yang artinya: *"seandainya Allah melapangkan rezeki kepada hamba-hamba-Nya, niscaya mereka akan berbuat melampaui batas di bumi. Akan tetapi, Dia menurunkan apa yang Dia kehendaki dengan ukuran (tertentu). Sesungguhnya Dia Maha teliti lagi Maha Melihat (keadaan) hamba-hamba-Nya"(QS Asy Syura:27).*

Pada ayat ini, diuraikan bahwa kemurahan Allah SWT tampak dalam cara-Nya memberikan rezeki kepada hamba-hamba-Nya. Allah SWT menerangkan bahwa jika Allah SWT melimpahkan rezeki secara berlebihan kepada hamba-hamba-Nya, baik secara materi maupun non-materi, manusia cenderung akan berbuat melampaui batas di bumi, melakukan perbuatan yang menyimpang dari ajaran Allah SWT dan tidak bersyukur atas nikmat-Nya. Hal ini merupakan sifat dasar manusia. Namun, Allah SWT memberikan rezeki dengan ukuran tertentu sesuai kehendak-Nya. Sesungguhnya, Allah SWT Maha teliti terhadap semua keadaan hamba-hamba-Nya, Maha Melihat segala yang mereka lakukan dan terima (Kemenag, 2022).

Berdasarkan tafsir tahlili, Allah SWT menerangkan bahwa Allah SWT tidak akan memberikan rezeki yang berlimpah kepada hamba-Nya, jika hal tersebut dapat membuat mereka menjadi sombong. Allah SWT memberikan rezeki kepada hamba-hamba-Nya dalam jumlah tertentu, sesuai dengan kehendak dan kebijaksanaan-Nya. Dengan sifat Rahman-Nya, Allah SWT tetap memberikan rezeki meskipun orang tersebut tidak beriman. Bahkan saat seseorang melupakan Tuhannya, Allah SWT masih melimpahkan rezeki-Nya. Namun, jika mereka tidak bersyukur dan terus tenngelam dalam kenikmatan, maka Allah SWT menurunkan azab-Nya (Kemenag, 2022).

Konsep ukuran dipaparkan dalam Al-Qur'an dengan sangat rinci dan diperjelas mulai dari Allah SWT menciptakan alam semesta, bumi dan seisinya berserta seluruh makhluknya, sudah terukur dan sesuai dengan ketetapan-Nya. Bahkan takdir dari awal sudah diperhitungkan. Ukuran berkaitan dengan segala konsep dalam matematika, khususnya dalam ruang bernorma. Telah dijelaskan pada Bab 1 bahwa secara geometri, norma dapat dipandang sebagai alat ukur panjang dari suatu vektor (Ammari dkk., 2021). Demikianlah penerapan konsep ukuran pada Al-Qur'an.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Pada subbab ini diawali dengan pembahasan mengenai sifat-sifat seminorm dan ruang bernorma. Sebelumnya didefinisikan norma hasil bagi sebagai berikut.

Definisi 2.20 (Weaver, 2013)

Misalkan X merupakan ruang bernorma dan misalkan X_0 merupakan subruang tertutup dari X. Didefinisikan norma hasil bagi pada ruang hasil bagi X/X_0 sebagai

$$|||x + X_0||| = \inf \{\|z\| : z \in x + X_0\} = \inf \{\|x + y\| : y \in X_0\}$$

Berdasarkan Definisi 2.20 dibuktikan Proposisi di bawah ini.

Proposisi 2.21 (Limaye, 2016)

Misalkan Y subruang tertutup dari ruang bernorma X. Untuk $x + Y$ dalam ruang hasil bagi X/Y, misalkan

$$|||x + Y||| := \inf\{\|x + y\| : y \in Y\}$$

maka $|||\cdot|||$ adalah norma pada X/Y, disebut norma hasil bagi.

Barisan $(x_n + Y)$ konvergen ke $x + Y$ di X/Y jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di X.

Selanjutnya, terdapat hubungan antara seminorma dan norma dalam teorema yang akan diselesaikan oleh penulis sebagai berikut.

Teorema 2.22 (Limaye, 2016)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma, Y merupakan ruang vektor dan misalkan F merupakan pemetaan linier dari X pada Y. Didefinisikan $l(y) := \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = y\}$ untuk $y \in Y$. Jika $x \in X$ dan $F(x) = y$, maka $l(y) = \inf\{\|x + z\| : z \in Z(F)\}$. Akibatnya, l merupakan seminorma di Y. Lebih jauh lagi, l merupakan norma di Y jika dan hanya jika $Z(F)$ subhimpunan tertutup dari X.

Hal serupa juga dipaparkan pada teorema yang akan diselesaikan oleh penulis sebagai berikut.

Teorema 2.23 (Limaye, 2016)

Misalkan $m \geq 2$ dan misalkan $l_1, \ldots, l_m$ merupakan seminorma pada ruang vektor X. Didefinisikan

$$l(x) := \max\{l_1(x), \ldots, l_m(x)\} \text{ dan } l(x) := \min\{l_1(x), \ldots, l_m(x)\}$$

untuk $x \in X$, jika satu dari $l_1, \ldots, l_m$ adalah norma, maka l merupakan norma di X.

Teorema 2.24

Misalkan $m \geq 2$ dan misalkan $l_1, \dots , l_m$ merupakan seminorma pada ruang vektor X. Didefinisikan

$$l(x) \coloneqq \max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} \text{ dan } l(x) \coloneqq \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$$

untuk $x \in X$. l mungkin bukan seminorma meskipun masing-masing dari $l_1, \dots , l_m$ merupakan norma di X.

Kemudian, akan dibuktikan mengenai kekontinuan dari seminorma namun akan di buktikan terlebih dahulu mengenai sifat-sifat seminorma berdasarkan teorema berikut.

Teorema 2.25 (Limaye, 2016)

Misalkan l merupakan seminorma pada ruang vektor X, dan misalkan $U \coloneqq \{x \in X : l(x) < 1\}$, maka himpunan U konveks (yaitu, $(1-t)x + ty \in U$ ketika $x, y \in U$ dan $t \in (0,1)$), penyerapan (yaitu untuk setiap $x \in X$ terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $\left(\frac{x}{r}\right) \in U$) dan seimbang (yaitu $kx \in U$ ketika $x \in U$ dan $k \in \mathbb{F}$ dengan $|k| \leq 1$).

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.19 di bawah ini, akan dibuktikan mengenai kekontinuan seminorma pada Lemma 2.18 sebagai berikut.

Definisi 2.26 (Mehdi, 1959)

Misalkan X adalah ruang vektor dan l adalah seminorma pada X. Jika seminorma l kontinu pada satu titik di X, maka seminorma l kontinu di mana-mana. Jika X adalah ruang bernorma maka l kontinu di X jika dan hanya jika, untuk bilangan konstan M,

$$l(x) \leq M\|x\| \qquad \text{untuk semua } x \in X$$

Lemma 2.27 (Limaye, 2016)

Misalkan X merupakan ruang bernorma dengan norma $\|\cdot\|$ dan l merupakan seminorma pada X, maka l kontinu di X jika dan hanya jika terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan cara studi literatur yaitu dengan menggabungkan semua teori-teori pendukung melalui berbagai sumber seperti artikel, buku, paper, jurnal, dan referensi lain terkait topik yang akan dibahas.

3.2 Pra Penelitian

Langkah-langkah yang akan ditempuh penulis sebelum melakukan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami dan mengumpulkan informasi yang relevan melalui berbagai sumber seperti artikel, buku, paper, jurnal, dan referensi lainnya.
2. Menentukan topik.
3. Menentukan rumusan masalah.
4. Menentukan tujuan dan manfaat diadakannya penelitian ini.

3.3 Tahapan penelitian

Adapun langkah-langkah yang akan ditempuh penulis pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Memahami dan mengkaji buku refrensi utama.
2. Mencari sumber atau refrensi lain untuk memaparkan konsep dan teori yang relevan.

3. Memaparkan dan mengkaji integrasi terkait norma pada ayat-ayat Al-Qur'an.
4. Membuktikan sifat kekonvergenan dari norma hasil bagi.
5. Membuktikan seminorma melalui hubungannya dengan norma.
6. Membuktikkan sifat konveks, penyerapan dan seimbang pada seminorma
7. Membuktikan bagaimana kekontinuan seminorma atas sifat-sifat dari seminorma.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada Bab ini akan dibuktikan mengenai sifat-sifat norma hasil bagi dan seminorma.

4.1 Kekonvergenan Norma Hasil Bagi

Untuk membuktikan sifat-sifat norma hasil bagi dan seminorma, yang pertama akan dipaparkan mengenai definisi norma hasil bagi sebagai berikut.

Definisi 4.1 (Weaver, 2013)

Misalkan X merupakan ruang bernorma dan misalkan X_0 merupakan subruang tertutup dari X. Didefinisikan norma hasil bagi pada ruang hasil bagi X/X_0 sebagai

$$|||x + X_0||| = \inf \{\|z\| : z \in x + X_0\} = \inf \{\|x + y\| : y \in X_0\}.$$

Untuk $x \in X$.

Proposisi 4.2 (Limaye, 2016)

Misalkan Y subruang tertutup dari ruang bernorma X. Untuk $x + Y$ dalam ruang hasil bagi X/Y, misalkan

$$|||x + Y||| \coloneqq \inf\{\|x + y\| : y \in Y\}$$

maka $|||\cdot|||$ adalah norma pada X/Y, disebut norma hasil bagi. Barisan $(x_n + Y)$ konvergen ke $x + Y$ di X/Y jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di X.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa barisan $(x_n + Y)$ konvergen ke $x + Y$ di X/Y jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di X.

Sebelum itu, akan dibuktikan terlebih dahulu mengenai $|||\cdot|||$ adalah norma pada X/Y, disebut norma hasil bagi sesuai dengan sifat-sifat norma sebagai berikut.

Untuk $x \in X$, $|||x + Y||| \coloneqq \inf\{\|x - y\| : y \in Y\} = d(x, Y)$.

(N1) Akan dibuktikan bahwa $|||x + Y||| \coloneqq \inf\{\|x + y\| : y \in Y\} \geq 0$.

Pada sifat ini jelas terbukti karena norma di X selalu positif.

(N2) Akan dibuktikan bahwa $|||x + Y||| = 0$ jika dan hanya jika $x + Y = 0$

($\rightarrow$) Akan ditunjukkan bahwa $x + Y = 0$

Jika $|||x + Y||| = 0$ maka terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $x + y_n \rightarrow 0$, kemudian $y_n \rightarrow -x$ karena subruang Y tertutup maka $-x \in Y$. Untuk semua $x \in X, x + Y \subseteq Y$ sehingga $x + Y = Y$. Terbukti $x + Y = 0$

($\leftarrow$) Akan ditunjukkan bahwa $|||x + Y||| = 0$

jika $x + Y = 0$ berdasarkan Definisi 4.2 maka

$$|||x + Y||| = \inf\{\|x + y = 0\| : y \in Y\} = 0$$

artinya $|||x + Y||| = 0$. Terbukti $|||x + Y||| = 0$.

(N3) Akan dibuktikan bahwa $|||k(x + Y)||| = |k||||x + Y|||$

Misalkan $x \in X$ dan $k \in \mathbb{F}$, maka

$$|||k(x + Y)||| \coloneqq \inf\{\|kx + ky\| : y \in Y\}$$

$= |k| \inf\{\|x + y\| : y \in Y\}$

Pada $k = 0$ dan $k \neq 0$, $|||k(x + Y)||| = |k||||x + Y|||$.

(N4) Akan dibuktikan bahwa $|||(x_1+Y)+(x_2+Y)||| \leq |||x_1+Y|||+|||x_2+Y|||$.

Misalkan x_1 dan x_2 di X ambil sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat y_1 dan y_2 di Y sedemikian sehingga

$$\|x_1+y_1\| < \inf\{\|x_1+y\| : y \in Y\} + \frac{\varepsilon}{2} = |||x_1+Y||| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|x_2+y_2\| < \inf\{\|x_2+y\| : y \in Y\} + \frac{\varepsilon}{2} = |||x_2+Y||| + \frac{\varepsilon}{2}$$

maka

$$\begin{aligned}\|x_1+y_1+x_2+y_2\| &\leq \|x_1+y_1\| + \|x_2+y_2\| \\ &\leq |||x_1+Y||| + |||x_2+Y||| + \varepsilon\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\inf\{\|(x_1+x_2)+y\| : y \in Y\} &= |||(x_1+x_2)+Y||| \\ &\leq \|x_1+x_2+y_1+y_2\| \\ &\leq |||x_1+Y||| + |||x_2+Y||| \\ &\quad +\varepsilon\end{aligned}$$

Karena hal tersebut berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ maka $|||(x_1+Y)+(x_2+Y)||| \leq |||x_1+Y|||+|||x_2+Y|||$.

Jadi, terbukti bahwa $|||\cdot|||$ adalah norma pada X/Y, disebut norma hasil bagi.

Kemudian, akan dibuktikan bahwa barisan (x_n+Y) konvergen ke $x+Y$ di X/Y jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga (x_n+y_n) konvergen ke x di X.

($\leftarrow$) Akan dibuktikan barisan (x_n+Y) konvergen ke $x+Y$ di X/Y.

Misalkan (x_n+Y) merupakan barisan di X/Y. Andaikan terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $x_n+y_n \to x$ di X, maka

$$|||(x_n + Y) - (x + Y)||| = |||(x_n - x) + Y||| \leq \|x_n - x + y_n\|$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Jadi, terbukti bahwa $x_n + Y \to x + Y$ di X/Y.

($\to$) Akan dibuktikan $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di X.

Asumsikan bahwa $x_n + Y \to x + Y$ di X/Y.

karena

$$|||(x_n + Y) - (x + Y)||| = \inf\{\, \|x_n - x + y\| : y \in Y\}$$

terdapat $y_n \in Y$ sedemikian sehingga

$$\|x_n - x + y_n\| < |||(x_n + Y) - (x + Y)||| + 1/n$$

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, $x_n - x + y_n \to 0$.

Jadi terbukti bahwa $x_n + y_n \to x \in X$.

Sehingga, terbukti bahwa barisan $(x_n + Y)$ konvergen ke $x + Y$ di X/Y jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di X.

■

4.2 Hubungan Seminorma Dengan Norma

Konsep norma hasil bagi juga dapat digunakan untuk membuktikan sifat-sifat seminorma pada Teorema 4.3. Namun, sebelum itu akan dipaparkan mengenai pemetaan linier dan kernel sebagai berikut.

Definisi 4.3 (Dillon, 2020)

Transformasi linier atau pemetaan linier $F: X \to Y$ adalah pemetaan yang memenuhi

$$F(cx_1 + x_2) = cF(x_1) + F(x_2)$$

untuk semua $v_1, v_2 \in X$ dan $c \in \mathbb{F}$.

Salah satu subruang dalam pemetaan linier $F: X \to Y$ adalah subruang

$$R(F) = \{y \in Y : \exists\, x \in X \ni y = F(x)\}$$

dari Y atau dikatakan ruang jarak dari F dan subruang

$$Z(F) = \{x \in X : F(x) = 0\}$$

dari X, di mana dikatakan sebagai kernel dari F (Limaye, 2016).

Teorema 4.4 (Limaye, 2016)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma, Y merupakan ruang vektor dan misalkan F merupakan pemetaan linier dari X pada Y. Didefinisikan $l(y) \coloneqq \inf\{\|x\|: x \in X \text{ dan } F(x) = y\}$ untuk $y \in Y$. Jika $x \in X$ dan $F(x) = y$, maka $l(y) = \inf\{\|x + z\|: z \in Z(F)\}$. Akibatnya, l merupakan seminorma di Y. Lebih lanjut lagi l merupakan norma di Y jika dan hanya jika $Z(F)$ subhimpunan tertutup dari X.

Bukti:

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ merupakan ruang bernorma, Y merupakan ruang vektor dan misalkan F merupakan pemetaan linier dari X pada Y.

Didefinisikan $l(y) \coloneqq \inf\{\|x\|: x \in X \text{ dan } F(x) = y\}$ untuk $y \in Y$.

Akan dibuktikan bahwa:

1. Jika $x \in X$ dan $F(x) = y$, maka $l(y) = \inf\{\|x + z\|: z \in Z(F)\}$.

   Akan ditunjukkan bahwa $l(y) = \inf\{\|x + z\|: z \in Z(F)\}$.

   Misalkan $Z(F)$ merupakan kernel dari pemetetaan linier $F: X \to Y$ yaitu didefinisikan

$$Z(F) = \{z \in X : F(x) = 0\}$$

Karena $x \in X$ dan $F(x) = y$, maka setiap $x + Z(F)$ dipetakan ke y.

di mana

$$F(x + z) = F(x) + F(z) = y + 0 = y$$

Untuk $z \in Z(F)$. Oleh karena itu,

$$l(y) \coloneqq \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = y\}$$

$$= \inf\{\|x + z\| : z \in Z(F)\}$$

2. Akan dibuktikkan bahwa l merupakan seminorma di Y menggunakan sifat dari seminorma sebagai berikut.

(N1) Akan dibuktikan bahwa $l(y) \coloneqq \inf\{\|x\| : x \in X \text{ dan } F(x) = y\} \geq 0$.

Pada sifat ini jelas terbukti karena norma di X selalu positif.

(N2) Akan dibuktikan bahwa $l(\alpha y) = |\alpha| l(y)$

Untuk $\alpha \in \mathbb{F}$

$$l(\alpha y) = \inf\{\|x\| : z \in X \text{ dan } F(x) = \alpha y\}$$

Jika $F(x) = y$ maka $F(\alpha x) = \alpha F(x) = \alpha y$, maka

$$l(\alpha y) = \inf\{\|\alpha x\| : z \in X \text{ dan } F(x) = y\}$$

$= \inf\{|\alpha| \|x\| : z \in X \text{ dan } F(x) = y\}$

$= |\alpha| \inf\{\|x\| : z \in X \text{ dan } F(x) = y\}$

$= |\alpha| l(y)$

(N3) Akan dibuktikan bahwa $l(y_1 + y_2) \leq l(y_1) + l(y_2)$

Misalkan $y_1, y_2 \in Y$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $x_1, x_2 \in X$ sedemikian sehingga $F(x_1) = y_1$, $F(x_2) = y_2$, dan

$$\|x_1\| < l(y_1) + \frac{\varepsilon}{2}$$

serta

$$\|x_2\| < l(y_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena F pemetaan linier maka

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2) = y_1 + y_2$$

Sehingga diperoleh,

$$l(y_1 + y_2) \leq \|x_1 + x_2\|$$

di mana

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$$

sehingga

$$l(y_1 + y_2) \leq \|x_1\| + \|x_2\| < l(y_1) + l(y_2) + \varepsilon$$

jadi

$$l(y_1 + y_2) \leq l(y_1) + l(y_2).$$

Jadi, terbukti bahwa l merupakan seminorma di Y.

3. Akan ditunjukkan bahwa l merupakan norma di Y jika dan hanya jika $Z(F)$ subhimpunan tertutup dari X.

   (←) Akan ditunjukkan bahwa l merupakan norma di Y.

   Sebelumnya telah dibuktikan bahwa l merupakan seminorma di Y. l dikatakan norma jika l memiliki sifat $l(y) = 0$ yang berakibat $y = 0$

   Misalkan $Z(F)$ merupakan subhimpunan tertutup dari X dan $y \in Y$ sedemikian sehingga $l(y) = 0$.

   Jika $x \in X$ dan $F(y) = y$ maka

$$l(y) = \inf\{\|x\|: x \in X \text{ dan } F(x) = y\} = 0$$

   Misalkan terdapat $(x_n) \in X$ sedemikian sehingga $F(x_n) = y$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $\|x_n\| \to 0$.

karena $\|x_n\| \to 0$ maka

$$F(x_n) \to F(0) = 0$$

Namun, $F(x_n) = y$ sehingga $y \to 0$. Oleh karena itu, $y = 0$.

Jadi, l merupakan norma di Y.

($\to$) Akan ditunjukkan bahwa $Z(F)$ subhimpunan tertutup dari X.

Misalkan $Z(F)$ tidak tertutup dan (z_n) merupakan barisan di $Z(F)$ sedemikian sehingga $z_n \to z$ di X dengan $z \notin Z(F)$, diketahui l merupakan norma maka

$$l(0) = \inf\{\|x\|: x \in X \text{ dan } F(x) = 0\}$$

$$= \inf\{\|z\|: z \in Z(F)\}$$

Oleh sebab itu, $z_n \in Z(F)$ dan $z_n \to z$ diperoleh $\|z_n\| \to 0$

Sehingga

$$l(0) = \inf\{\|x\|: x \in X \text{ dan } F(x) = 0\} = 0$$

Namun, karena $z \notin Z(F)$ serta $F(x) = 0$ dan $\|x\| \neq 0$ maka l bukan norma.

Jadi, pengandaian salah.

Jadi, terbukti bahwa $Z(F)$ merupakan subhimpunan tertutup dari X.

■

Teorema 4.5 (Limaye, 2016)

Misalkan $m \geq 2$ dan misalkan $l_1, \dots, l_m$ merupakan seminorma pada ruang vektor X. Didefinisikan

$$l(x) \coloneqq \max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} \text{ dan } l(x) \coloneqq min\,\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$$

untuk $x \in X$, jika satu dari $l_1, \dots, l_m$ adalah norma, maka l merupakan norma di X.

Bukti:

Akan dibuktikan jika satu dari $l_1, \dots , l_m$ adalah norma, maka l merupakan norma di X.

Misalkan $l_1, \dots , l_m$ merupakan seminorma pada ruang vektor X maka disimpulkan bahwa $l(x) \coloneqq \max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$ juga memenuhi sifat seminorma sebagai berikut.

1. $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$,
2. $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$
3. $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$

Jika $l(x)$ memiliki sifat $l(x) = 0$ yang berakibat $x = 0$ maka l_i adalah norma. Sehingga dibuktikan bahwa $l(x) = 0$ yang berakibat $x = 0$ sebagai berikut.

$$l(x) \coloneqq \max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} = 0$$

artinya $\max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} = 0$ sehingga berakibat seminorma $l_1(x), \dots, l_m(x) = 0$.

Jadi, terbukti bahwa l merupakan norma di X.

Sehingga disimpulkan bahwa jika satu dari $l_1, \dots , l_m$ adalah norma, maka l merupakan norma di X.

■

Teorema 4.6

Misalkan $m \geq 2$ dan misalkan $l_1, \dots , l_m$ merupakan seminorma pada ruang vektor X. Didefinisikan

$$l(x) \coloneqq \max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} \text{ dan } l(x) \coloneqq \min\,\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$$

untuk $x \in X$. l mungkin bukan seminorma meskipun setiap dari $l_1, \dots , l_m$ merupakan norma di X.

Bukti:

Akan dibuktikan l mungkin bukan seminorma meskipun setiap dari $l_1, \dots, l_m$ merupakan norma di X.

Pada bagian 1 telah dibuktikan bahwa l merupukan norma.

Andaikan l seminorma maka berlaku pernyataan-pernyataan berikut.

1. $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$,

   Diketahui bahwa $l_1, \dots, l_m$ merupakan seminorma pada ruang vektor X artinya $l_1, \dots, l_m$ memenuhi sifat $l_1, \dots, l_m \geq 0$ sehingga untuk $x \in X$ nilai minimum dari $l_1, \dots, l_m$ juga tidak akan negatif. Sehingga diperoleh

   $$l(x) \coloneqq \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} \geq 0$$

2. $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$,

   $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$

   $l(\min\{l_1(x+y), \dots, l_m(x+y)\})$

   $\leq l(\min\{l_1(x)+l_1(y), \dots, l_m(x) + l_m(y)\})$

   $\leq l(\min\{l_1(x)), \dots, l_m(x)\}) + l(\min\{l_1(y), \dots, l_m(y)\})$

3. $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$

   $$l(\alpha x) \coloneqq \min\{\alpha l_1(x), \dots, \alpha l_m(x)\}$$

   $= |\alpha| \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$

   Nilai $l(\alpha x) = |\alpha| \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$ memiliki nilai yang sama untuk $\alpha \neq 0$ sedangkan untuk nilai α berbeda $l(\alpha x) = |\alpha| \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$ tidak terpenuhi artinya sifat $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ pada $l(\alpha x) = |\alpha| \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$ tidak selalu terpenuhi.

Jadi, pengandaian di atas salah karena l tidak selalu memenuhi sifat $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ yang artinya terbukti bahwa l mungkin bukan seminorma.

■

4.3 Konveks, Penyerapan, dan Keseimbangan pada Seminorma

Pada subbab ini dipaparkan mengenai sifat konveks, penyerapan dan keseimbangan pada seminorma. Pada ruang bernorma terdapat juga sifat konveks yang dijelaskan sebagai berikut:

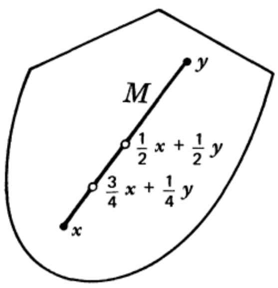
Himpunan bagian A dari ruang vektor X dikatakan konveks jika $x, y \in A$ maka

$$M = \{z \in X \mid z = \alpha x + (1-\alpha) y, \qquad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subset A$$

M dikatakan segment tertutup dengan titik batas x dan y serta untuk setiap $z \in M$ dikatakan titik interior dari M. Untuk $\alpha \in [0,1]$ didefinisikan bola satuan tertutup

$$B(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

dalam ruang bernorma X yang dikatakan konveks dan dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 4.1 Ilustrasi Konveks pada Ruang Bernorma

(Kreyszig, 1978)

Teorema 4.7 (Limaye, 2016)

Misalkan l merupakan seminorma pada ruang vektor X, dan misalkan $U \coloneqq \{x \in X: l(x) < 1\}$, maka himpunan U konveks (yaitu, $(1-t)x + ty \in U$ ketika $x, y \in U$ dan $t \in (0,1)$), penyerapan (yaitu untuk setiap $x \in X$ terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $\left(\frac{x}{r}\right) \in U$) dan seimbang (yaitu $kx \in U$ ketika $x \in U$ dan $k \in \mathbb{F}$ dengan $|k| \leq 1$).

Bukti:

Misalkan l merupakan seminorma pada ruang vektor X, dan misalkan $U \coloneqq \{x \in X: l(x) < 1\}$. Akan dibuktikan bahwa

1. U konveks

   Akan dibuktikan $(1-t)x + ty \in U$ ketika $x, y \in U$ dan $t \in (0,1)$.

   Misalkan $x, y \in U$ maka $l(x) < 1$ dan $l(y) < 1$.

   Misalkan $t \in (0,1)$ maka $l\big((1-t)x + ty\big) < 1$

   Sehingga berdasarkan sifat seminorma yang ke-2 dan ke-3 yaitu $l(x+y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$ dan $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ diperoleh

   $$l\big((1-t)x + ty\big) \leq |1-t| l(x) + |t| l(y)$$

   $$l\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t) l(x) + (t) l(y)$$

   karena $l(x) < 1$ dan $l(y) < 1$, maka

   $$l\big((1-t)x + ty\big) < (1-t)1 + (t)1 = 1$$

   Jadi, terbukti bahwa $(1-t)x + ty \in U$ ketika $x, y \in U$ dan $t \in (0,1)$ karena $l\big((1-t)x + ty\big) < 1$.

2. Penyerapan U

Akan dibuktikan untuk setiap $x \in X$ terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $\left(\frac{x}{r}\right) \in U$.

Misalkan $x \in X$ terdapat $r > 0$.

Berdasarkan sifat seminorma yang ke-3 yaitu $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ diperoleh

$$l\left(\frac{x}{r}\right) = \left|\frac{1}{r}\right| l(x)$$

$$l\left(\frac{x}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right) l(x)$$

$$= \frac{l(x)}{l(x)+1}$$

karena $l(x) + 1 > l(x)$ maka $l\left(\frac{x}{r}\right) < 1$.

Jadi, terbukti bahwa untuk setiap $x \in X$ terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $\left(\frac{x}{r}\right) \in U$.

3. U diseimbangkan

Akan dibuktikan bahwa $kx \in U$ ketika $x \in U$ dan $k \in \mathbb{K}$ dengan $|k| \leq 1$.

Misalkan $x \in U$ dan $k \in \mathbb{K}$ dengan $|k| \leq 1$.

Berdasarkan sifat seminorma yang ke-3 yaitu $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$ diperoleh

$$l(kx) = |k| l(x)$$

karena $|k| \leq 1$, maka

$$l(kx) \leq (1) l(x) < 1$$

Sehingga, diperoleh $l(kx) < 1$

Jadi, terbukti $kx \in U$ yang berarti seimbang.

Jadi, terbukti bahwa U konveks, penyerapan, dan seimbang.

■

4.4 Kekontinuan pada Seminorma

Pada subbab ini akan dipaparkan mengenai kekontinuan pada seminorma yang dijelaskan pada Lemma 4.11. Sebelumnya, akan dipaparkan mengenai sifat-sifat seminorma pada Teorema 4.6 berikut.

Teorema 4.8 (Rudin, 1991)

Andaikan l adalah seminorma pada ruang vektor X atas lapangan $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$), maka

1. $l(0) = 0$
2. $|l(x) - l(y)| \leq l(x - y)$
3. $l(x) \geq 0$
4. $\{x \in X : l(x) = 0\}$ adalah subruang dari X

Bukti:

Misalkan l adalah seminorma pada ruang vektor X.

1. Akan dibuktikan bahwa $l(0) = 0$

   Berdasarkan sifat homogenitas seminorma yaitu $l(\alpha x) = |\alpha| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\alpha \in \mathbb{F}$

   Misalkan $\alpha = 0$ maka

   $$l(0x) = |0| l(x)$$

   $$l(0) = 0$$

   Terbukti bahwa $l(0) = 0$.

2. Akan dibuktikan bahwa $|l(x) - l(y)| \leq l(x - y)$

   Berdasarkan sifat ketaksamaan segitiga yaitu $l(x + y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$ diperoleh

   $$l(x) = l(x - y + y) \leq l(x - y) + l(y)$$
   $$l(x - y) \leq l(x - y)$$

   Begitu juga apabila x dan y ditukar akan tetap berlaku, karena $l(x - y) = l(y - x)$ sehingga,

   $$l(x) - l(y) \leq l(x - y)$$

   dan

   $$l(y) - l(x) \leq l(y - x)$$

   diperoleh

   $$|l(x) - l(y)| \leq l(x - y)$$

   Terbukti bahwa bahwa $|l(x) - l(y)| \leq l(x - y)$.

3. Akan dibuktikan bahwa $l(x) \geq 0$

   Berdasarkan Definisi 2.10 yaitu terdapat pada sifat $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$. Terbukti bahwa $l(x) \geq 0$.

4. Akan dibuktikan bahwa $\{x \in X: l(x) = 0\}$ adalah subruang dari X

   Misalkan $S = \{x \in X: l(x) = 0\}$ adalah subruang dari X

   Jika $l(x) = l(y) = 0$ dan α, β adalah skalar maka

   a. $l(x) \geq 0$, untuk semua $x \in X$,

   $$l(0) = 0,\ 0 \in S$$

   b. $l(x + y) \leq l(x) + l(y)$, untuk semua $x, y \in X$

   $$l(x + y) \leq l(x) + l(y) \leq 0 + 0 \leq 0, \qquad 0 \in S$$

   c. $l(\lambda x) = |\lambda| l(x)$, untuk semua $x \in X$ dan semua $\lambda \in \mathbb{F}$

$$l(\lambda x) = |\lambda| l(x) = |\lambda| \cdot 0 = 0, \qquad 0 \in S$$

Karena S tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian makaa terbukti bahwa $S = \{x \in X: l(x) = 0\}$ adalah subruang dari X.

■

Remark 4.9 (Limaye, 2016)

Misalkan X dan Y merupakan ruang vektor dan misalkan $F: X \to Y$ merupakan pemetaan linier. Andaikan $\|\cdot\|_Y$ merupakan norma di Y. Untuk $x \in X$, didefinisikan $l(x) \coloneqq \|F(x)\|_Y$, di mana l merupakan seminorma di X dan terdapat norma di X jika dan hanya jika pemetaan F satu-satu.

Di sisi lain, andaikan bahwa $l: X \to \mathbb{R}$ merupakan seminorma di X dan misalkan $Z \coloneqq \{x \in X : l(x) = 0\}$, maka Z merupakan subruang dari X seperti pada Teorema 4.8.

Selanjutnya, akan dipaparkan mengenai norma yang ekuivalen sebagai berikut.

Definisi 4.10 (Limaye, 2016)

Misalkan $\|\cdot\|$ dan $\|\cdot\|_0$ merupakan norma pada ruang vektor. Norma $\|\cdot\|$ dikatakan lebih kuat daripada norma $\|\cdot\|_0$ jika $\|x_n\|_0 \to 0$ ketika $\|x_n\| \to 0$. Norma $\|\cdot\|$ dan $\|\cdot\|_0$ pada X dikatakan sebanding jika satu dari keduanya lebih kuat dari yang lainnya dan dikatakan ekuivalen jika setiap norma lebih kuat daripada yang lainnya.

Definisi 4.11 (Kreyszig, 1978)

Norma $\|\cdot\|$ pada ruang vektor X dikatakan ekuivalen pada norma $\|\cdot\|_0$ di X jika terdapat bilangan positif α dan β sedemikian sehingga untuk semua $x \in X$

$$\beta \|x\| \leq \|x\|_0 \leq \alpha \|x\|.$$

Proposisi 4.12 (Limaye, 2016)

Misalkan $\|\cdot\|$ dan $\|\cdot\|_0$ merupakan norma pada ruang vektor X. Norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dari norma $\|\cdot\|_0$ jika dan hanya jika terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$.

Bukti:

($\leftarrow$) Andaikan $\|\cdot\|_0 \leq \alpha\|\cdot\|$ untuk semua $x \in X$,

Akan dibuktikan bahwa norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dibanding norma $\|\cdot\|_0$.

Misalkan (x_n) merupakan barisan di X dan misalkan $\|x_n\| \to 0$

maka

$$\|x_n\|_0 \leq \alpha\|x_n\|$$

karena $\|x_n\| \to 0$ maka $\alpha\|x_n\|$ sedemikian sehingga

$$\|x_n\|_0 \to 0$$

Jadi, terbukti bahwa norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dari norma $\|\cdot\|_0$.

Sebaliknya, andaikan norma $\|\cdot\|$ lebih besar dari norma $\|\cdot\|_0$.

Jika tidak terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat barisan tak kosong $x_n \in X$ sedemikian sehingga

$$\|x_n\|_0 > n\|x_n\|$$

Misalkan $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\|y_n\| = \left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{\|x_n\|}{n\|x_n\|} = \frac{1}{n}$$

Sehingga $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ karena $\frac{1}{n} \to 0$, akan tetapi $\|y_n\|_0 \nrightarrow 0$ karena

$$\|y_n\|_0 = \left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\|_0 = \frac{\|x_n\|_0}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$$

Oleh karena itu,

$$\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \text{ akan tetapi } \|y_n\|_0 \nrightarrow 0 \text{ karena } \|y_n\|_0 > 1$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Jadi, terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \le \alpha\|x\|$ sehingga terbukti bahwa norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dari norma $\|\cdot\|_0$.

($\rightarrow$) Andaikan norma $\|\cdot\|$ lebih kuat dari norma $\|\cdot\|_0$.

Akan dibuktikan terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \le \alpha\|x\|$.

Berdasarkan Definisi 4.11 yaitu mengenai norma yang ekuivalen di X jika terdapat bilangan positif α dan β sedemikian sehingga untuk semua $x \in X$

$$\beta\|x\| \le \|x\|_0 \le \alpha\|x\|$$

Sehingga pengandain diatas benar.

Jadi, terbukti bahwa terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|x\|_0 \le \alpha\|x\|$.

$\blacksquare$

Berdasarkan sifat-sifat seminorma dan norma yang ekuivalen diperoleh Lemma 4.13 sebagai berikut.

Lemma 4.13 (Limaye, 2016)

Misalkan X merupakan ruang bernorma dengan norma $\|\cdot\|$ dan l merupakan seminorma pada X, maka l kontinu di X jika dan hanya jika terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \le \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$.

Bukti:

($\leftarrow$) Misalkan terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \le \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$. Akan dibuktikan bahwa l kontinu.

Misalkan terdapat barisan (x_n) di mana $x_n \to x$ di X, maka untuk semua $n \in \mathbb{N}$,

$$l(x_n) - l(x) \le l(x_n - x)$$

dan

$$l(x) - l(x_n) \leq l(x - x_n)$$

sehingga berdasarkan Teorema 4.8 (2)

$$|l(x_n) - l(x)| \leq l(x_n - x) \leq \alpha\|x_n - x\|$$

Jika $\|x_n - x\| < \delta$, diberikan $\varepsilon > 0$ dan dipilih $\delta = \varepsilon/\alpha$ maka

$$\begin{aligned} |l(x_n) - l(x)| \leq l(x_n - x) &\leq \alpha\|x_n - x\| \\ &< \alpha\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

dengan demikian

$$|l(x_n) - l(x)| \to 0$$

Jadi, terbukti bahwa l kontinu.

Sebaliknya, misalkan bahwa tidak terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga

$$l(x) \leq \alpha\|x\|$$

untuk semua $x \in X$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terdapat $x_n \in X$ sedemikian sehingga

$$l(x_n) > n\|x_n\|$$

Berdasarkan Proporsisi 4.12 diketahui bahwa

$$\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0 \text{ akan tetapi } \|y_n\|_0 \nrightarrow 0 \text{ karena } \|y_n\|_0 > 1$$

Hal ini berlaku juga jika misalkan $y_n := \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, diperoleh

$$\|y_n\| = \left\|\frac{x_n}{n\|x_n\|}\right\| = \frac{\|x_n\|}{n\|x_n\|} = \frac{1}{n}$$

Sehingga, $y_n \to 0$ karena $\|y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$ saat $n \to \infty$, akan tetapi $l(y_n) \nrightarrow 0$ karena

$$l(x_n) > n\|x_n\|$$

maka

$$l(y_n) = \frac{l(x_n)}{n\|x_n\|} > \frac{n\|x_n\|}{n\|x_n\|} = 1$$

Oleh karena itu, $l(y_n) > 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Jadi, l tidak kontinu pada titik $0 \in X$ jika bahwa tidak terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$.

($\rightarrow$) Misalkan l kontinu di X. Akan dibuktikan bahwa $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$. Misalkan terdapat barisan (x_n) di mana $x_n \rightarrow x$ di X, maka untuk semua $n \in \mathbb{N}$

$$l(x_n - x) \rightarrow 0$$

Karena l kontinu maka

$$|l(x_n) - l(x)| \rightarrow 0$$

Sehingga berdasarkan Teorema 4.8

$$|l(x_n) - l(x)| \leq l(x_n - x)$$

Kemudian, berdasarkan Remark 4.9 seminorma mendefinisikan norma pada X sebagai berikut.

$$l(x_n - x) = \|x_n - x\|$$

Jika terdapat suatu α pada norma, maka

$$\begin{aligned} l(\alpha(x_n - x)) &= \|\alpha(x_n - x)\| \\ &= |\alpha|\|x_n - x\| \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk semua $x \in X$.

■

4.5 Kajian Penerapan Integrasi Topik Dengan Al-Qur’an

Ukuran sangat terkait dalam kehidupan sehari-hari seperti mengukur panjang, waktu, volume, luas, kecepatan dan lain sebagainya. Dalam Al-Quran ukuran tersirat secara eksplisit dan implisit. Pada bab-bab sebelumnya telah dipaparkan mengenai penciptaan alam semesta dan seisinya, rezeki serta takdir dari awal sudah diperhitungkan telah memuat konsep ukuran dalam matematika. Lalu, pada subbab ini akan dipaparkan kembali mengenai ukuran yaitu mengenai pengukuran besaran panjang, volume, dan waktu.

Salah satu contoh terkait ukuran secara eksplisit dan implisit dijelaskan pada Al-Qur’an yaitu terkait perhitungan amal baik dan buruk manusia di bumi saat yaumul hisab nanti. Secara eksplisit, perhitungan amal baik dan buruk manusia di bumi pada saat yaumul hisab nanti dijelaskan pada beberapa firman Allah SWT sebagai berikut.

1. QS. Al-Ghasyiyah:26

   ثُمَّ إِنَّ عَلَيۡنَا حِسَابَهُم ٢٦

   yang artinya: *“kemudian, sesungguhnya kamilah yang berhak melakukan hisab (perhitungan) atas mereka”(QS. AlGhasyiyah:26).*

2. QS. Al Gafir:17

   ٱلۡيَوۡمَ تُجۡزَىٰ كُلُّ نَفۡسِۢ بِمَا كَسَبَتۡۚ لَا ظُلۡمَ ٱلۡيَوۡمَۚ إِنَّ ٱللَّهَ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ١٧

   yang artinya: *“Pada hari ini setiap jiwa diberi balasan sesuai dengan apa yang telah diusahakannya. Tidak ada yang terzalimi pada hari-ini. Sesungguhnya Allah sangat cepat perhitungannya”(QS. Al-Gafir:17).*

3. QS. Sad:53

هَٰذَا مَا تُوعَدُونَ لِيَوۡمِ ٱلۡحِسَابِ ۝٥٣

yang artinya:*"Inilah apa yang dijanjikan kepadamu pada hari perhitungan" (QS. Sad:53).*

Pada ayat-ayat diatas, yang pertama dijelaskan mengenai Allah SWT akan menghisab manusia atas perbuatan yang telah diperbuat di dunia dan kemudian menjatuhkan hukuman-Nya. Allah SWT juga memberikan peringatan kepada manusia tentang hari pertemuan, di mana segala sesutu akan terlihat dengan jelas, tanpa ada yang bisa menyembunyikan apapun. Hal ini menegaskan bahwa pada hari pertemuan tersebut, dengan firman Allah SWT, "Pada hari itu, hari pertemuan, setiap jiwa akan diberi balasan sesuai dengan perbuatannya di dunia. Pada hari itu tidak ada yang akan dirugikan atau dianiaya, karena Allah SWT Yang Maha Bijaksana akan melakukan perhitungan dengan sangat cepat (Kemenag, 2022).

Allah SWT akan selalu berlaku adil terhadap hamba-hamba-Nya. Di akhirat, setiap manusia akan menerima balasan berdasarkan usaha dan perbuatan mereka di dunia. Pada hari itu, tidak ada seorang pun yang akan dianiaya dan dirugikan. Orang yang berbuat baik akan menerima balasan baik tanpa pengurangan, dan orang yang berbuat jahat akan menerima balasan yang setimpal dengan kejahatannya. Balasan dari kejahatannya tidak akan ditambah sedikit pun. Hisab dan perhitungan amal tidak akan ditunda atau ditangguhkan untuk siapapun. Allah SWT juga menjelaskan bahwa saat hari perhitungan, ketika manusia dibangkitkan dari kubur dan diarahkan ke Padang Mahsyar, setiap orang akan diadili di hadapan-Nya sesuai dengan janji-Nya (Kemenag, 2022).

Allah SWT menekankan bahwa semua kenikmatan di surga merupakan janji bagi hamba-hamba Allah SWT yang bertakwa, yang pasti akan terwujud setelah seluruh manusia dibangkitkan dari kubur, dan diadili di Padang Mahsyar. Kenikmatan di surga bukanlah kenikmatan biasa, tetapi kenikmatan yang kekal (Kemenag, 2022).

Berdasarkan pemaparan ayat-ayat di atas, secara eksplisit dijelaskan mengenai besaran amal yang akan dihisab dengan dilakukan perhitungan amal dan peringatan akan balasan-Nya. Perhitungan amal ini menunjukkan suatu ukuran besaran amal. Kemudian, secara implisit ukuran terkait perhitungan amal baik dan buruk manusia di bumi pada saat yaumul hisab nanti dijelaskan pada firman Allah SWT yaitu pada QS. Al-Zalzalah pada ayat 7-8 sebagai berikut.

لَهَا يَوْمَىِٕذٍ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُۥ ۝٧ وَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُۥ ۝٨

yang artinya: *"Siapa yang mengerjakan kebaikan seberat zarah, dia akan melihat (balasan)-nya; siapa yang mengerjakan kejahatan seberat zarah, dia akan melihat (balasan)-nya " (QS. Al-Zalzalah:7-8).*

Pada ayat di atas, dijelaskan bahwa setiap manusia akan mengetahui nasibnya sendiri. Siapapun mengerjakan kebaikan sekecil zarrah akan melihatnya dalam catatan amalnya dan menerima pahalanya. Dia akan merasa senang dan bahagia karena perbuatannya tidak sia-sia. Sebaliknya, siapapun yang melakukan kejahatan sekecil zarrah dan menganggapnya remeh juga akan melihatnya dalam catatan amalnya dan menerima balasannya. Ini merupakan bukti keadilan Allah SWT, yang tidak menzalimi siapa pun (Kemenag, 2022).

Allah SWT menjelaskan secara rinci balasan untuk setiap amal manusia. Siapapun yang beramal baik, meskipun seberat atom, pasti akan menerima balasannya. Begitu pula dengan yang beramal jahat, meskipun hanya sebesar atom, akan merasakan balasannya. Amal kebajikan orang-orang kafir tidak dapat menolong atau membebaskan mereka dari siksa karena kekafirannya. Mereka akan tetap menderita selama-lamanya di neraka. Dalam hal ini, kebaikan dan kejahatan yang diukur walaupun seberat zarah mengimplikasikan suatu ukuran yaitu terkait besaran berat. Ukuran amal dapat dinyatakan sebagai norma sedangkan amal baik dan buruk dapat dianggap sebagai ruang vektor. Fungsi norma dalam matematika memetakan ruang vektor ke dalam suatu bilangan riil yang memenuhi kondisi-kondisi tertentu. Kondisi-kondisi dapat dianggap sebagai amal baik dan buruk manusia. Sehingga, konsep ukuran dalam matematika khususnya norma berkaitan erat dengan konsep-konsep ukuran dalam Al-Quran.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada Bab IV, dapat disimpulkan sifat-sifat norma hasil bagi dan seminorma sebagai berikut.

1. Suatu barisan $(x_n + Y)$ akan konvergen ke $(x + Y)$ di ruang hasil bagi jika dan hanya jika terdapat barisan (y_n) di Y yaitu subruang tertutup dalam ruang bernorma sedemikian sehingga $(x_n + y_n)$ konvergen ke x di ruang bernorma X.
2. Pada pemetaan linier $F: X \to Y$, di mana X merupakan ruang bernorma dan Y merupakan ruang vektor, didefinisikan $l(y) = \inf\{\|x\| \mid x \in X \text{ dan } F(x) = y\}$ untuk $y \in Y$. Jika $x \in X$ dan $F(x) = y$ maka didefinisikan $l(y) = \inf\{\|x + z\| \mid z \in Z(F)\}$. q merupakan seminorma begitu pula l merupakan norma di ruang vektor Y jika dan hanya jika kernel $Z(F)$ merupakan subhimpunan tertutup dari ruang bernorma X. Hal serupa terjadi pada suatu barisan $l_1, \dots, l_m$ yang merupakan seminorma pada ruang vektor X. Didefinisikan

   $$l(x) \coloneqq \max\{l_1(x), \dots, l_m(x)\} \text{ dan } l(x) \coloneqq \min\{l_1(x), \dots, l_m(x)\}$$

   untuk $x \in X$. Jika satu dari barisan seminorma adalah norma, maka seminorma merupakan norma di X. Akan tetapi, l mungkin bukan seminorma meskipun masing-masing dari $l_1, \dots, l_m$ merupakan norma di X.

3. Pada suatu seminorma di ruang vektor jika terdapat himpunan $U = \{x \in X \mid l(x) < 1\}$ maka U memenuhi sifat: U konveks, penyerapan dan seimbang.
4. Seminorma l pada ruang bernorma X akan kontinu di ruang bernorma X jika dan hanya jika terdapat $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $l(x) \leq \alpha\|x\|$ untuk $x \in X$.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis hanya berfokus menuliskan sifat kekonvergenan dari suatu norma hasil bagi pada suatu ruang hasil bagi. Diharapkan kedepannya dapat diteliti terkait sifat lainnya dari suatu norma hasil bagi pada suatu ruang hasil bagi.

DAFTAR PUSTAKA

Akcocglu, M. A., Bartha, P. F. A., & Minh Ha, D. (2009). *Analysis In Vector Spaces*. Jerman: Wiley.

Ammari, S., Nur, M., & Aris, N. (2021). Fixed Point Theorem on Contractive Mapping in Standard 2-Normed Spaces. *Jurnal Matematika, Statistika Dan Komputasi*, *18*(1), 93–101. https://doi.org/10.20956/j.v18i1.14394.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed). Amerika Serikat: Wiley.

Batkunde, H. (2021). Norms on Quotient Spaces of the 2-Inner Product Space. In *Contemporary Mathematics and Applications* (Vol. 3, Issue 2).

Cristescue, R. (2008). *Vector Seminorms Spaces with Vector Norm and Regular Operators*.

Dillon, M. I. (2020). *Linear Algebra Vector Spaces and Linear Transformations*. Amerika Serikat: American Mathematical Society.

Gockenbach, M. (2010). *Finite-Dimensional Linear Algebra*. Amerika Serikat: CRC Press.

Kemenag. (2022). Qur'an Kemenag. https://quran.kemenag.go.id/. Diakses pada tanggal 16 Mei 2024.

Khanfer, A. (2023). Fundamentals of Functional Analysis. In *Fundamentals of Functional Analysis*. Springer Nature Singapore.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Mesir: Wiley.

Limaye, B. V. (2016). *Linear Functional Analysis for Scientists and Engineers*. India: Springer Singapore.

Mehdi. (1959). Continuity of Seminorm on Topological Vector Spaces. *Studia Mathematica*.

Nel, L. (2016). Continuity Theory. Jerman: Springer International Publishing.

Rudin, W. (1991). *Functional analysis*. Singapura: McGraw-Hill Book.

Rynne, B., & Youngson, M. (2008). *Linear Functional Analysis*. Swiss: Springer London.

Weaver, Nik. (2013). *Measure theory and functional analysis*. World Scientific.

Wilde, I.F. (2003). Topological Vector Spaces Version. London: King’s Collage.

RIWAYAT HIDUP

Dwi Ajeng Rosmaya, lahir di Nganjuk pada 12 Mei 2000. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara dari Bapak Tukiran dan Ibu Sukarti. Selama masa pendidikan, penulis menempuh pendidikan mulai dari Pendidikan dasar di SDN Cerme 1, Pace, Nganjuk yang lulus pada tahun 2013. Selanjutnya, penulis menempuh Pendidikan menengah pertama di SMPN 1 Pace, dan lulus pada tahun 2016. Kemudian, penulis melanjutkan Pendidikan kejenjang menengah atas di SMAN 1 Ngajuk hingga tahun 2019. Pada tahun 2020, penulis melanjutkan Pendidikan di Universitas Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika. Selama masa studi, penulis aktif dalam berbagai kegiatan baik internal maupun eksternal kampus, diantaranya yaitu mengikuti kegiatan eksternal berupa mengikuti komunitas Senyum Anak Nusantara (SAN) Chapter Malang yang merupakan komunitas yang berbasis volunteer yang focus pada masalah sosial dan Pendidikan anak. Lalu pada kegiatan internal, penulis aktif mengikuti kegiatan kepantian kampus baik dalam lingkup Senat Mahasiswa, Dewan Eksekutif Mahasiswa, dan Himpunan Mahasiswa Jurusan.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dwi Ajeng Rosmaya
NIM : 200601110083
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika.
Judul Skripsi : Sifat-sifat Norma Hasil Bagi dan Seminorma
Pembimbing I : Dian Maharani, M. Si
Pembimbing II : Erna Herawati, M. Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 September 2023	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	20 September 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	27 September 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	4 Oktober 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	4 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	11 Oktober 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	11 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	23 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	31 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	8 November 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	10.
11.	9 November 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	11.
12.	20 November 2023	ACC Bab I, II, dan III	12.
13.	20 November 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	13.
14.	23 November 2023	ACC Seminar Proposal	14.
15.	5 Februari 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	15.
16.	13 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	16.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	22 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	17.
18.	14 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	18.
19.	18 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	19.
20.	4 April 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	20.
21.	23 April 2024	Konsultasi Bab IV dan V	21.
22.	29 April 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	22.
23.	14 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	23.
24.	22 Mei 2024	ACC Bab IV dan V	24.
25.	22 Mei 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	25.
26.	3 Juni 2024	ACC Seminar Hasil	26.
27.	19 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	27.
28.	21 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	28.
29.	24 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	29.
30.	28 Juni 2024	ACC Revisi Akhir	30.

Malang, 28 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005