BILANGAN KROMATIK GRAF *COMMUTING* DAN *NONCOMMUTING* GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
HANDRINI RAHAYUNINGTYAS
NIM. 11610010

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

BILANGAN KROMATIK GRAF *COMMUTING* DAN *NONCOMMUTING* GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Handrini Rahayuningtyas
NIM. 11610010

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

BILANGAN KROMATIK GRAF *COMMUTING* DAN *NONCOMMUTING* GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Handrini Rahayuningtyas
NIM. 11610010

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 13 Mei 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

BILANGAN KROMATIK GRAF *COMMUTING* DAN *NONCOMMUTING* GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Handrini Rahayuningtyas
NIM. 11610010

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 Mei 2015

Penguji Utama	:	Evawati Alisah, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Drs. H. Turmudi, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M.A	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Handrini Rahayuningtyas
NIM	: 11610010
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Bilangan Kromatik Graf *Commuting* dan *Noncommuting* Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Mei 2015
Yang membuat pernyataan,

Handrini Rahayuningtyas
NIM. 11610010

MOTO

"Tuhanmu lebih tahu batas rasa sakit yang bisa kau tampung. Jangan engkau sampai menyerah di saat selangkah lagi Tuhanmu mengganti kesakitan dengan sejuta keindahan"
(Habib Achmad Jamal bin Toha Baagil)

PERSEMBAHAN

Dengan penuh rasa syukur yang tak terhingga, skripsi ini dengan bangga penulis persembahkan kepada kedua orang tua tercinta

Bapak Alm. H. Agung Kiswandoyo dan Ibu Hj. Nuraini,

juga saudari tersayang Nuning Rahayu, S.Pd.I dan Tri Rahayu Handayani yang selalu memberikan motivasi penuh kepada penulis, serta Misbahul Munir yang setia mendukung penulis, dan seluruh keluarga besar serta kerabat penulis.

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillah puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Alah Swt. yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, hidayah, serta inayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Bilangan Kromatik Graf Commuting dan Noncommuting Grup Dihedral*" ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad Saw., yang telah membimbing manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang terang benderang yaitu agama Islam.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak lepas dari saran, bimbingan, arahan, serta do'a dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis haturkan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing I yang senantiasa dengan sabar memberikan arahan dan ilmu yang sangat berharga kepada penulis.
4. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah mamberikan saran dan arahan dalam penulisan skripsi ini.

5. Seluruh sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Ayahanda alm. H. Agung Kiswandoyo dan ibunda Hj. Nuraini tercinta yang telah mencurahkan kasih sayangnya, do'a, bimbingan, dan motivasi hingga skripsi ini selesai.
7. Saudara-saudara tersayang yang telah memberikan semangat kepada penulis.
8. Segenap keluarga besar Pesantren al-Adzkiya' Nurus Shofa (ANSHOFA), pengasuh, serta teman-teman seperjuangan penulis.
9. Segenap keluarga besar "Abelian", teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2011.
10. Semua pihak yang turut membantu selesainya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan khususnya bagi penulis dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, Mei 2015

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Rahayuningtyas, Handrini. 2015. **Bilangan Kromatik Graf *Commuting* dan *Noncommuting* Grup Dihedral.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: bilangan kromatik, pewarnaan titik, pewarnaan sisi, graf *commuting*, graf *noncommuting*, grup dihedral.

Misal G grup berhingga dan X adalah subset dari G. Graf *commuting* $C(G,X)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Misal G grup non abelian dan $Z(G)$ adalah *center* dari G. Graf *noncommuting* Γ_G adalah suatu graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G\backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$.

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak k warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Sedangkan pewarnaan sisi pada graf G adalah dua sisi yang berasal dari titik yang sama diberi warna yang berbeda. Adapun bilangan terkecil k sehingga suatu graf dapat diberi k warna pada titik dan sisi inilah yang dinamakan bilangan kromatik.

Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan dengan tahapan analisis yang diawali dengan menentukan elemen-elemen grup dihedral (D_{2n}) dengan $3 \leq n \leq 5$ untuk graf *commuting* dan $3 \leq n \leq 8$ untuk graf *noncommuting*, menggambarkan tabel *Cayley* dari grup dihedral, mencari elemen-elemen komutatif dan tidak komutatif, menggambarkan graf *commuting* $(C(D_{2n}))$ dan graf *noncommuting* $(\Gamma(D_{2n}))$ dari grup dihedral, mencari pola bilangan kromatik dari pewarnaan titik dan sisi, membangun konjektur, dan membuktikannya sebagai teorema. Adapun hasil penelitian ini sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral
$$\chi\big(C(D_{2n})\big) = n, \text{ untuk } n \text{ ganjil dan genap}$$
2. Bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral
$$\chi'\big(C(D_{2n})\big) = 2n-1, \text{ untuk } n \text{ ganjil dan genap}$$
3. Bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral
$$\chi\big(\Gamma(D_{2n})\big) = \begin{cases} n+1, & n \text{ ganjil} \\ \dfrac{n}{2}+1, & n \text{ genap} \end{cases}$$
4. Bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral
$$\chi'\big(\Gamma(D_{2n})\big) = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ ganjil} \\ 2n-3, & n \text{ genap} \end{cases}$$

ABSTRACT

Rahayuningtyas, Handrini. 2015. **Chromatic Number Commuting and Noncommuting Graphs of Dihedral Group.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Keywords: chromatic number, vertex colouring, edge colouring, commuting graph, noncommuting graph, dihedral group.

Let G finite group and X is a subset of G. Commuting graph $C(G,X)$ is a graph that has a set of points X and two different vertices to be connected directly if each commutative in G. Let G non abelian group and $Z(G)$ is a center of G. Noncommuting graph $\Gamma(G,X)$ is a graph which the the vertex is a set of $G \setminus Z(G)$ and two vertices x and y are adjacent if and only if $xy \neq yx$.

The vertex colouring of G is giving k colour at the vertex, two vertices that are adjacent not given the same colour. Edge colouring of G is two edges that have common vertex are coloured with different colour. The smallest number k so that a graph can be coloured by assigning k colours to the vertex and edge called chromatic number.

The research method used in this research is literature study with analysis begins with determine the elements of the dihedral group $3 \leq n \leq 5$ for commuting graph and $3 \leq n \leq 8$ for noncommuting graph, create the Cayle's table, determine commutative and noncommutative elements, draw commuting graph $(C(D_{2n}))$ and noncommuting graph $(\Gamma(D_{2n}))$ from dihedral group, determine the patterns of chromatic number from vertex and edge colouring, write the conjecture, and proof it to be theorem. The result of this research are:

1. Chromatic number from vertex colouring *commuting* graph of dihedral group
$$\chi\big(C(D_{2n})\big) = n,\ n \text{ is odd and even number}$$
2. Chromatic number from edge colouring *commuting* graph of dihedral group
$$\chi'\big(C(D_{2n})\big) = 2n-1, n \text{ is odd and even number}$$
3. Chromatic number from vertex colouring *noncommuting* graph of dihedral group
$$\chi\big(\Gamma(D_{2n})\big) = \begin{cases} n+1, & n \text{ odd} \\ \dfrac{n}{2}+1, & n \text{ even} \end{cases}$$
4. Chromatic number from edge colouring *noncommuting* graph of dihedral group
$$\chi'\big(\Gamma(D_{2n})\big) = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ odd} \\ 2n-3, & n \text{ even} \end{cases}$$

ملخص

رهايونيغ تياس, هندريني. 2015. عدد التلوين المخططات *Commuting* و *Noncommuting* منظومة *dihedral*. البحث الجامعي شعبة الرياضيات . كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك ابرهيم مالانج .المشرف: (1)د. عبد الشاكر، الماجستير ,(2) أحمد نصيح الدين، الماجستير.

الكلمة الرئيسية : عدد التلوين , تلوين الرؤو , تلوين حافات , المخطط *Commuting* و *Noncommuting* منظومة *dihedral*.

نفترض G مجموعة محدودة و X هو مجموعة فرعية منG. المخطط *commuting* $C(G,X)$ هو المخطط الذي يحتوي على مجموعة من رؤوس X وجهتي نظر مختلفتين أن تكون متجاوران إذا كانا متبادلان في G. على سبيل المثال G جماعة غير ابليان و $Z(G)$ هو مركز G. المخطط *noncommuting* $\Gamma(G,X)$ هو المخطط الذي رؤوسها هي مجموعة من$(G \setminus Z(G))$ ورأسان x و متجاوران إذا $xy \neq yx$.

في تلوين الرووس, الطرف على المخطط تعطي سواء من اللون. لكل الرئس التي لا يتجاوران . و أما في تلوين الحافة , جهتين على الرسم البياني الّتي إرتباط بالطرف الذي سواء تتقاضي عن اللون المختلف . تلوين الحافة تبدأ من مكوّن الرسم البياني التي قد عندها قدر إرتفاعا . عدد أصغر حتّي كل الرسم البياني يستطيع أن يعطي اللون بكيفية وهو يعطي اللون في طرفه. و هذا الشرح التي قد تسمّى بإعداد التلوين.

طريقة البحث المستخدمة في هذا البحث هو دراسة الأدب مع مرحلة التحليل الذي يبدأ مع تحديد عناصر مجموعة ثنائي السطح مع $3 \leq n \leq 5$ عن *commuting* و $3 \leq n \leq 8$ للمخطط *noncommuting*، ثم وصف الجدول كيلي من فريق ثنائي السطح والعناصر النزرة ليست تبديلية وتبادلي، واصفا المخطط *commuting* $(C(D_{2n}))$ والمخطط *noncommuting* $(\Gamma(D_{2n}))$ من مجموعة ثنائي السطح، ثم ابحث عن وجود نمط من تلوين عدد وبي من القمم والحواف، لبناء نظرية وحجيته. إنتاج البحث كما يلي:

1. عدد التلوين من تلوين الرؤوس المخطط *commuting* منظومة *dihedral*
$$\chi(C(D_{2n})) = n \text{ لحرف } n \text{ وتريّ و شفعيّ}$$
2. عدد التلوين من تلوين الحافات المخطط *commuting* منظومة *dihedral*
$$\chi'(C(D_{2n})) = 2n - 1 \text{ لحرف } n \text{ وتريّ و شفعيّ}$$
3. عدد التلوين من تلوين الرؤوس المخطط *noncommuting* منظومة *dihedral*
$$\chi(\Gamma(D_{2n})) = \begin{cases} n+1, & n \text{ وتريّ} \\ \frac{n}{2}+1, & n \text{ شفعيّ} \end{cases}$$
4. عدد التلوين من تلوين الحافات المخطط *noncommuting* منظومة *dihedral*
$$\chi'(\Gamma(D_{2n})) = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ وتريّ} \\ 2n-3, & n \text{ شفعيّ} \end{cases}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Graf G adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q) (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Sisi $e = (u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u,v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung *(adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik u dan v disebut *ujung* dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Abdussakir, dkk, 2009:6).

Salah satu topik dalam matematika yang hingga kini masih dijadikan sebagai alat bantu untuk memecahkan suatu masalah dalam kehidupan yaitu graf. Secara singkat, graf merupakan himpunan titik dan sisi yang saling terhubung. Jika dikaitkan dengan kehidupan sehari-hari, menjalin hubungan baik dengan sesama manusia merupakan syarat sejahteranya suatu kehidupan. Dalam al-Quran dijelaskan dalam surat at-Taubah ayat 71 seperti berikut ini:

وَٱلۡمُؤۡمِنُونَ وَٱلۡمُؤۡمِنَٰتُ بَعۡضُهُمۡ أَوۡلِيَآءُ بَعۡضٖۚ يَأۡمُرُونَ بِٱلۡمَعۡرُوفِ وَيَنۡهَوۡنَ عَنِ ٱلۡمُنكَرِ وَيُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَيُؤۡتُونَ ٱلزَّكَوٰةَ وَيُطِيعُونَ ٱللَّهَ وَرَسُولَهُۥٓۚ أُوْلَٰٓئِكَ سَيَرۡحَمُهُمُ ٱللَّهُۗ إِنَّ ٱللَّهَ عَزِيزٌ حَكِيمٞ ٧١

"dan orang-orang yang beriman, lelaki dan perempuan, sebahagian mereka (adalah) menjadi penolong bagi sebahagian yang lain. mereka menyuruh (mengerjakan) yang ma'ruf, mencegah dari yang munkar, mendirikan shalat, menunaikan zakat dan mereka taat pada Allah dan Rasul-Nya. mereka itu akan diberi rahmat oleh Allah; Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana" (QS.Taubah/9:71).

Perkembangan terbaru teori graf yaitu membahas graf yang dibangun oleh suatu grup. Misal G grup berhingga dan X adalah subset dari G. Graf *commuting* $C(G,X)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G. Jadi, titik x dan y akan terhubung langsung di $C(G,X)$ jika dan hanya jika $xy = yx$ di G (Vahidi & Talebi, 2010:123). Sebaliknya, Misal G grup non abelian dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *noncommuting* Γ_G adalah suatu graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G\backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$ (Abdollahi, dkk, 2006). Kajian tentang graf *commuting* telah diangkat menjadi sebuah penelitian oleh Abussakir, dkk. (2013) tentang spektrum dari graf *commuting* yang dibangun dari grup dihedral.

Perkembangan sebelumnya muncul bilangan kromatik pewarnaan titik dan pewarnaan sisi pada graf. Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada sisi sehingga dua sisi yang saling terkait langsung tidak diberi warna yang sama. Bilangan n terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan cara tersebut dinamakan bilangan kromatik. Bilangan kromatik titik ditulis $\chi(G)$ dan bilangan kromatik sisi ditulis $\chi'(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

Kajian tentang bilangan kromatik telah diangkat menjadi sebuah penelitian yang dikembangkan oleh beberapa peneliti, di antaranya oleh Muhib (2013) yang meneliti tentang "*Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik pada Graf Dual dari Graf Piramid (Pr n*)*". Selain itu kajian tentang bilangan kromatik juga telah diangkat menjadi topik penelitian oleh Asis As'adi Haq (2010) yang berjudul "*Pewarnaan pada Graf Bipartisi Komplit* $K_{m,n}$ *dan Graf Tripartisi* $T_2, n-1, n$ *dengan* m, n *Adalah Bilangan Asli*".

Perkembangan kajian dalam teori graf yang membahas tentang graf yang dibangun dari suatu grup salah satunya yaitu grup dihedral. Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap *n* bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991:24-25). Kajian tentang grup dihedral ini telah diangkat menjadi sebuah penelitian oleh Prof. Alexandru Suciu (2010) yang berjudul "*The Dihedral Groups*".

Berdasarkan uraian di atas, sampai saat ini belum ada yang mengkaji tentang bilangan kromatik graf *commuting* dan *noncommuting* yang dibangun dari suatu grup. Hal inilah yang melatarbelakangi penulis mengangkat kajian tentang bilangan kromatik dengan judul penelitian **"Bilangan Kromatik Graf *Commuting* dan *Noncommuting* Grup Dihedral."**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah yang dikaji dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana rumus umum bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral?
2. Bagaimana rumus umum bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral?
3. Bagaimana rumus umum bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral?
4. Bagaimana rumus umum bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan fokus penelitian, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui rumus umum bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral.
2. Untuk mengetahui rumus umum bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral.
3. Untuk mengetahui rumus umum bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral.
4. Untuk mengetahui rumus umum bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis
   a) Memperdalam pemahaman mengenai teori-teori dalam bidang aljabar.
   b) Menambah wawasan khususnya mengenai bilangan kromatik pada graf *commuting* dan *noncommuting* grup dihedral.
2. Bagi Pembaca
   a) Menambah khazanah keilmuan dan memperdalam pengetahuan dan wawasan baru dalam bidang aljabar.
   b) Menambah wawasan dan informasi bagi mahasiswa yang sedang menempuh teori graf dan aljabar abstrak khususnya mengenai bilangan kromatik graf *commuting* dan *noncommuting* graf dihedral.
3. Bagi Lembaga
   a) Menambah bahan kepustakaan dan untuk rujukan penelitian khususnya tentang bilangan kromatik graf *commuting* dan *noncommuting* grup dihedral.

1.5 Batasan Masalah

Agar pembahasan pada penelitian ini tepat pada masalah yang akan diselesaikan, maka penulis membatasi pencarian pola dalam penulisan skripsi ini, yaitu pada graf *commuting* dan *noncommuting* grup dihedral (D_{2n}) dengan $3 \leq n \leq 5$ untuk graf *commuting* dan $3 \leq n \leq 8$ untuk graf *noncommuting*.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam peneitian ini adalah *library research* atau studi kepustakaan. Metode ini dilakukan dengan mengambil rujukan yang berasal dari buku maupun jurnal sebagai landasan teori yang berkaitan dengan bahasan penelitian. Untuk menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik dan sisi graf *commuting* dan *noncommuting* grup dihedral terlebih dahulu dikaji tentang elemen-elemen pembangun dari grup dihedral-2n dengan n yang telah ditentukan. Kemudian terbentuk graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral tersebut. Setelah itu, melakukan pewarnaan terhadap titik dan sisi dari setiap graf yang telah terbentuk, sehingga didapatkan bilangan kromatik graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral. Adapun tahapan penelitian yang dilakukan secara lengkap adalah sebagai berikut:

1) Menentukan elemen-elemen yang saling komutatif pada grup dihedral-2*n*, yaitu D_6, $D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}$.
2) Menggambarkan tabel *Cayley* dari grup dihedral-2*n*, yaitu D_6, $D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}$.
3) Menggambarkan graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral-2*n*, yaitu D_6, $D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}$.
4) Mewarnai setiap titik dan sisi pada graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral-2*n* yaitu D_6, $D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}$,.
5) Mengamati dan menentukan pola yang terbentuk dari banyaknya warna yang digunakan dari setiap graf *commuting* dan *noncommuting* grup dihedral-2*n* yaitu D_6, $D_8, D_{10}, D_{12}, D_{14}, D_{16}$.
6) Membuktikan pola yang terbentuk sebagai teorema.

7) Menarik kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari 4 bab dan masing-masing bab dibagi dalam beberapa sub bab dengan penjelasan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan teori-teori yang berhubungan dengan penelitian ini, yaitu mengenai graf, derajat titik, graf terhubung, bilangan kromatik, grup dihedral-$2n$, center grup, tabel *Cayley*, graf *commuting* dan *noncommuting*, serta hubungan antara Allah dengan makhluk-Nya dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi tentang grup dihedral-$2n$, graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral-$2n$, pewarnaan titik dan sisi graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral-$2n$ serta bilangan kromatiknya, dan pola yang terbentuk dari bilangan kromatik pewarnaan titik dan sisi graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral-$2n$.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Graf G adalah pasangan ($V(G)$, $E(G)$) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q) (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Sisi $e = (m,n)$ dikatakan menghubungkan titik m dan n. Jika $e = (m,n)$ adalah sisi di graf G, maka m dan n disebut terhubung langsung *(adjacent)*, n dan e serta m dan e disebut terkait langsung *(incident)*, dan titik m dan n disebut *ujung* dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung (*adjacent*), jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (m, n)$ akan ditulis $e = mn$. Mengacu pada definisi graf di awal, maka beberapa hal yang dapat dicermati adalah,

a. Himpunan titik pada graf harus tidak kosong dan berhingga. Dengan demikian, maka definisi ini hanya terbatas pada graf berhingga, yaitu graf yang himpunan titiknya berhingga.

b. Himpunan sisi adalah himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda. Kata "pasangan tak berurutan" berarti bahwa (a,b) dan (b,a) adalah sama. Berdasarkan definisi ini, maka graf tidak boleh memuat sisi rangkap atau sisi paralel. Sisi rangkap atau sisi paralel adalah dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama. Kata "berbeda" berarti bahwa pasangan berurutan tersebut tidak boleh berbentuk (a, a) (Abdussakir, dkk, 2009:7-8).

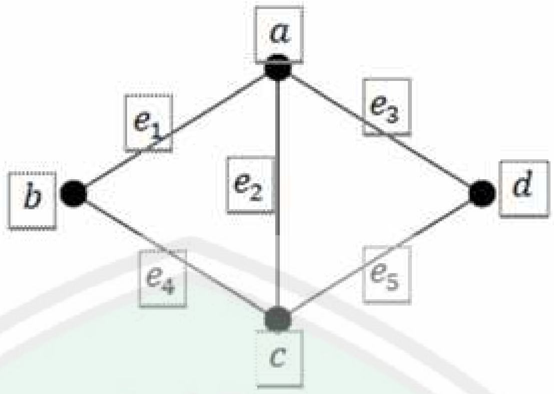
2.2 Derajat Titik

Jika v adalah titik pada graf G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut ***lingkungan dari v*** dan ditulis $N_G(\boldsymbol{v})$. ***Derajat dari titik*** $\boldsymbol{v}$ di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Derajat total G adalah jumlah derajat semua titik dalam G. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $deg_G(v)$ disingkat menjadi $deg(v)$ dan $N_G(v)$ disingkat menjadi $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$.

$$deg(v) = |N(v)|$$

Titik yang berderajat 0 disebut titik terasing atau titik terisolasi. Titik yang berderajat 1 disebut titik ujung atau titik akhir. Titik yang berderajat genap disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil. Derajat maksimum titik di G dilambangkan dengan D(G) dan derajat minimum titik di G dilambangkan dengan d(G) (Abdussakir, dkk, 2009:9).

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2.1. Graf G dengan Himpunan Titik $V(G)$

Berdasarkan gambar, diperoleh bahwa:

$$N(a) = \{b, c, d\}$$

$$N(b) = \{a, c\}$$

$$N(c) = \{a, b, d\}$$

$$N(d) = \{a, c\}$$

Dengan demikian, maka

$$\deg(a) = 3$$

$$\deg(b) = 2$$

$$\deg(c) = 3$$

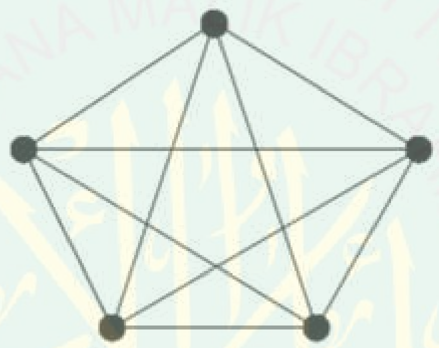
$$\deg(d) = 2$$

Diperoleh bahwa derajat maksimum di G adalah 3 dan derajat minimum di G adalah 2. Titik b dan d adalah titik genap, sedangkan titik a dan c adalah titik ganjil. Karena tidak ada yang berderajat 0 atau 1, maka graf G tidak mempunyai titik terisolasi dan titik ujung.

Kenyataan bahwa jumlah derajat semua titik yang hasilnya sama dengan dua kali banyak sisinya berlaku secara umum untuk semua graf. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q adalah

$$\sum_{v=G} \deg(v) = 2q$$

Graf G dikatakan *beraturan-r* atau *beraturan dengan derajat r* jika masing-masing titik v di G, maka $deg(v) = r$, untuk bilangan bulat tak negatif r. Suatu graf disebut beraturan jika graf tersebut beraturan-r untuk suatu bilangan bulat tak negatif r. Graf beraturan-3 biasa juga disebut dengan graf kubik. Berikut ini merupakan contoh graf beraturan 4.



Gambar 2.2. Graf Beraturan 4

Graf G dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan-$(n-1)$ dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$. Sebuah graf G dikatakan *bipartisi* jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2. Jika G adalah graf bipartisi beraturan-r, dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_2|$ (Abdussakir, dkk, 2009:21).

Suatu graf G disebut bipartisi komplit jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$. Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ disebut graf bintang (star) dan dinotasikan dengan S_n. Jadi, S_n mempunyai order (n – 1) dan ukuran n (Abdussakir, dkk, 2009:22).

Graf G dikatakan partisi-n komplit jika G adalah graf partisi-n dengan himpunan partisi $V_1, V_2, \ldots, V_n$, sehingga jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$, maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = p_i$, maka graf ini dinotasikan dengan $K_{p_1, p_2, \ldots, p_n}$. Urutan p_1, p_2, …, p_n tidak begitu diperhatikan. Graf partisi-n komplit merupakan graf komplit K_n jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i. Jika $p_i = t$ untuk semua i, $t \geq 1$, maka graf partisi-n komplit ini merupakan graf beraturan dan dinotasikan dengan $K_{n(t)}$. Jadi, $K_{n(1)}$ tidak lain adalah K_n (Abdussakir, dkk, 2009:23).

2.3 Graf Terhubung

Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut sirkuit. Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup tak trivial. Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut sikel. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Jika dicarikan hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa trail tertutup dan tak trivial pada graf G disebut sirkuit di G. Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan u-v di G. Suatu graf G dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap titik u dan v di G terdapat lintasan u-v di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v

di *G*, tetapi tidak ada lintasan *u-v* di *G*, maka *G* dikatakan tak terhubung (*disconnected*) (Abdussakir, dkk, 2009:55-56).

2.4 Bilangan Kromatik

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Pewarnaan sisi pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada sisi sehingga dua sisi yang saling terkait langsung tidak diberi warna yang sama. Bilangan n terkecil sehingga graf G dapat diwarnai dengan cara tersebut dinamakan bilangan kromatik. Bilangan kromatik titik ditulis $\chi(G)$ dan bilangan kromatik sisi ditulis $\chi'(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

2.5 Grup Dihedral

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua $a,b,c \in G$ (yaitu $*$ assosiatif).
2. Ada suatu elemen *e* di G sehingga $a*e = e*a = a$, untuk semua $a \in G$ (*e* disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (a^{-1} disebut invers dari *a*)

Adapun grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a*b = b*a$ untuk semua $a,b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14).

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991:24-25). Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh st untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga *st* adalah fungsi komposisi). Jika s, t akibat permutasi titik berturut-turut $\pm, {}^2$, maka *st* akibat dari $\pm \circ {}^2$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri *s* (jadi jika *s* akibat permutasi pada titik $\pm$, s^{-1} akibat dari $\pm^{-1}$) (Dummit dan Foote, 1991:24-25).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) 1, r, r^2, . . ., r^{n-1}

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua *i*.

(4) $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$ yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991:26).

2.6 Center Grup

Misal G grup, center dari grup G dituliskan $Z(G)$ sebagai berikut:

$$Z(G) = \{z \in G: zx = xz, \forall x \in G\}$$

Jadi, $Z(G)$ adalah himpunan anggota G yang komutatif terhadap semua anggota $Z(G)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:229).

2.7 Graf Commuting

Misal G adalah grup berhingga dan X adalah subset dari G, graf commuting $C(G, X)$ adalah graf dengan X sebagai himpunan titik dan dua elemen berbeda di $C(G, X)$ terhubung langsung jika keduanya adalah elemen yang saling komutatif di G (Nawawi, dkk, 2012).

Sebagai contoh G merupakan grup dihedral atau D_{2n}, maka $C(G, X)$ dapat ditulis $C(D_{2n}, X)$, artinya graf *commuting* dari grup dihedral. Karena setiap grup G memiliki identitas (dinotasikan 1) dan $\forall a \in G$ berlaku $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (komutatif dengan elemen identitas), maka unsur X yang beranggotakan semua unsur grup G, berlaku $X \subseteq G$, artinya bisa jadi $X \subset G$ atau $X = G$. Dalam skripsi ini, penulis menjelaskan bahwa $C(G, X)$ dapat ditulis $C(G)$. Hal ini dikarenakan $X = G$, maka penulisan $C(G, X)$ selanjutnya disingkat menjadi $C(G)$. Misal G adalah grup dihedral (D_{2n}), maka selanjutnya $C(D_{2n}, D_{2n})$ dapat ditulis menjadi $C(D_{2n})$, artinya graf *commuting* dari grup dihedral.

Sebagai contoh pada grup dihedral order 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi. Diambil $X = D_6$ maka akan ditentukan unsur yang saling komutatif melalui tabel berikut:

Tabel 2.1. Tabel *Cayley* untuk D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.1 terlihat bahwa:

1. 1 komutatif dengan setiap elemen D_6 (sifat elemen identitas) sehingga 1 terhubung langsung dengan setiap elemen di $C(D_6)$.
2. $r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1$ merupakan elemen-elemen yang komutatif sehingga terhubung langsung di $C(D_6)$.
3. Untuk elemen-elemen yang tidak komutatif maka elemen-elemen tersebut tidak terhubung langsung di $C(D_6)$.

2.8 Graf Noncommuting

Misal G grup non abelian dan $Z(G)$ adalah center dari G. Graf *noncommuting* $(\Gamma(G))$ adalah suatu graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G \setminus Z(G)$ dan dua titik x dan y terhubung langsung jika dan hanya jika $xy \neq yx$ (Abdollahi, dkk, 2006).

2.9 Hubungan antara Allah dengan Makhluk-Nya dalam Al-Quran

Hubungan antara Allah dengan makhluk-Nya merupakan satu hubungan yang tidak mungkin terpisahkan. Manusia sebagai makhluk yang diciptakan oleh

Allah tidak akan mungkin tidak bergantung pada Sang Pencipta-nya. Mulai dari udara, air, makanan, semua sumber kehidupan yang ada merupakan pemberian Allah untuk manusia yang ada di bumi ini. Tidak ada sesuatupun yang diminta oleh Allah kepada manusia kecuali hanya beribadah kepada-Nya. Sesuai dengan firman Allah Swt. yakni dalam al-Quran surat al-Baqarah ayat 21, yaitu:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ ٱعۡبُدُواْ رَبَّكُمُ ٱلَّذِي خَلَقَكُمۡ وَٱلَّذِينَ مِن قَبۡلِكُمۡ لَعَلَّكُمۡ تَتَّقُونَ ٢١

"Hai manusia, sembahlah Tuhanmu yang telah menciptakanmu dan orang-orang yang sebelummu, agar kamu bertakwa" (QS. al-Baqarah/2:21).

Adapun tafsir ayat di atas menurut Jalaluddin (2010:39) dalam tafsirnya menjelaskan bahwa kata *"yaa ayyuhan naas"* yang artinya "hai manusia", yang dimaksud ialah penduduk Mekkah, *"u'buduu"* yang artinya "sembahlah" yaitu esakanlah. Kemudian *"robbakumulladzii kholaqokum"* yang artinya Tuhan yang menciptakanmu, yang dimaksud ialah yang menumbuhkan kamu, sementara kamu belum menjadi sesuatu. *"Wa"* yang artinya "dan" menciptakan *"alladziina min qoblikum la'allakum tattaquun"* yang artinya "orang-orang yang sebelum kamu, agar kamu bertakwa." Yakni dengan cara beribadah kepada-Nya untuk menghindari siksa-Nya. Kata *"la'alla"* sebenarnya mengandung makna *tarajji* (memberi harapan), namun di dalam firman Allah mengandung makan *tahqiq* (memberi kepastian).

Menurut Jabir al-Jazairi (2004:68-69) dalam buku tafsirnya yang berjudul Tafsir al-Aisar, beliau mengatakan bahwa setelah Allah menyebutkan orang-orang beriman yang beruntung dan keadaan orang-orang kafir yang merugi maka Allah menyebutkan orang-orang munafik yang kondisi mereka berada di antara orang-orang yang sungguh-sungguh beriman dengan orang-orang kafir yang merugi itu.

Selanjutnya, untuk menarik perhatian mereka seluruhnya, Allah memanggil mereka dengan ungkapan *"Hai Manusia"* sebagai panggilan umum untuk manusia secara menyeluruh pada segala tempat dan masa. Allah memerintahkan mereka untuk menyembah pada-Nya agar mereka mampu melepaskan diri dari kerugian.

Seruan kepada manusia untuk menyembah Allah Swt. ini dijelaskan lebih dalam oleh Yusuf Ali (2009:22) dalam kitab tafsirnya yang berjudul Tafsir Yusuf Ali bahwa penyembahan adalah suatu tindakan tertinggi serta sikap rendah hati yang luar biasa dalam ibadah. Keimanan manusia akan menghasilkan segala amal shaleh. Inilah kesempatan bagi manusia yang diberikan oleh Allah. Imani (2006:115) dalam kitab tafsir karangannya juga menjelaskan makna penyembahan yang diserukan kepada manusia. Penyembahan yang dimaksud ialah aspek penyerahan diri yang paling tinggi kepada Dzat yang memiliki derajat kebaikan dan kemurahan hati yang tertinggi.

Perintah untuk menyembah Allah ini adalah perintah yang bersifat umum bagi seluruh manusia. Adapun yang dimaksud dengan sebuah perintah yang umum, yaitu ibadah yang komplit dengan menaati perintah-perintah Allah, menjauhi larangan-Nya, dan mempercayai kabar-kabar-Nya. Lalu Allah memerintahkan mereka kepada tujuan dari penciptaan mereka (Abdurrahman, 2007:83).

Penjelasan melalui ayat dan tafsir di atas telah menegaskan kepada manusia untuk selalu menjaga hubungannya dengan Sang Pencipta dan tidak menyekutukan-Nya dengan cara apapun. Akan tetapi, tidak hanya hubungan manusia dengan penciptanya sajalah yang harus dijaga. Allah Swt. juga memerintahkan hamba-Nya untuk menjaga hubungan baik dengan sesama manusia, dalam hal ini yaitu silaturrahim. Hal ini telah tertulis dalam al-Quran surat ar-Ra'd ayat 21 berikut:

وَٱلَّذِينَ يَصِلُونَ مَآ أَمَرَ ٱللَّهُ بِهِۦٓ أَن يُوصَلَ وَيَخۡشَوۡنَ رَبَّهُمۡ وَيَخَافُونَ سُوٓءَ ٱلۡحِسَابِ ٢١

"Dan orang-orang yang menghubungkan apa yang diperintahkan Allah agar dihubungkan, dan mereka takut kepada Tuhannya dan takut kepada hisab yang buruk" (QS. al-Ra'd/13:21).

Beberapa riwayat menunjukkan bahwa apa yang diperintahkan Allah agar dihubungkan adalah hubungan kekerabatan. Yakni, memelihara hubungan kekerabatan maupun ikatan ideologis yang mencakup ikatan-ikatan kontinyu dan mendalam dengan para pemimpin suci serta mengikuti garis wilayah (kepemimpinan) nya (Imani, 2005:77).

Berdasarkan terjemah dari ayat di atas, *"dan orang-orang yang menghubungkan apa yang diperintahkan Allah agar dihubungkan"* dijelaskan lebih dalam oleh al-Jazairi (2004:56) pada Tafsir al-Aisar yaitu menghubungkan apa yang Allah perintahkan untuk dihubungkan berupa iman, islam, ihsan, dan silaturrahim. Penjelasan serupa juga diungkapkan oleh Yusuf Ali (2009:598) bahwa menghubungkan apa yang diperintah Allah yang dimaksud pada ayat tersebut yaitu menghubungkan iman dengan tindakan nyata, mencintai Allah dengan mencintai manusia, serta menghormati semua nabi tanpa membeda-bedakan, juga mengikuti ajaran agama secara universal.

"Mereka takut kepada Tuhannya dan takut kepada hisab yang buruk." Mereka yang dimaksud ialah orang-orang yang menjaga silaturrahim dengan orang-orang yang berhubungan baik dengan mereka, yang diperintahkan Allah

Swt. untuk dipelihara. Penjagaan hubungan baik itu berupa berbakti kepada orang tua, silaturrahim, mengasuh anak yatim, menolong orang fakir, dan memberikan bantuan kepada orang yang tertimpa musibah (al-Qarni, 2008:350).

Pendapat serupa dikemukakan oleh ash-Shiddieqy (2000:2087) bahwa mereka yang dimaksud pada ayat di atas adalah mereka yang menghubungi rahim (menjalin kekerabatan) yang diperintah oleh Allah agar melakukannya. Mereka memperlakukan kerabat-kerabatnya dengan sebaik-baiknya dan berbuat ihsan kepada kaum kerabat yang memerlukan sesuatu kebajikan darinya dan menolak gangguan dari mereka. Menurut *lahiriyyah* ayat ini, hubungan kekerabatan yang dikehendaki oleh Allah untuk melengkapi semua perintah-Nya adalah dilarang memutuskan hubungan persaudaraan. Masuk ke dalamnya semua hak Allah, sebagaimana semua hak hamba.

Hubungan antara sesama manusia adalah saling tolong-menolong, menjalin cinta dan kasih sayang sebagaimana disebutkan dalam hadits berikut yang artinya:

"Dari Abu Hurairah r.a. bahwasanya ia berkata: "Aku mendengar Rasulullah Saw. bersabda: "barang siapa gembira dilapangkan rizkinya dan selalu disebut-sebut kebaikannya, maka hendaklah pelihara hubungan silaturahim"(H.R. Bukhari, Muslim, dan Turmudzi).

Dalam hadits lain dikatakan bahwa:

"Dari Ibnu Abbas ia berkata: "Rasulullah Saw. bersabda: "sesungguhnya kebajikan dan menghubungkan silaturahim itu kedua-duanya benar-benar meringankan hisab yang buruk di hari kiamat" (H.R. al-Khatib dari Ibnu Asakir).

Penjelasan dari ayat al-Quran dan hadits inilah yang menegaskan kepada manusia untuk selalu menjaga hubungan baik dengan Sang Pencipa *(hablumminallah)* dan sesama manusia *(hablumminannas).*

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan tentang bilangan kromatik graf *commuting* dan *noncommuting* grup dihedral. Grup dihedral dengan operasi "∘" terlebih dahulu akan dicari elemen-elemen komutatifnya, kemudian digambarkan graf *commuting*-nya dengan batasan n yaitu $3 \leq n \leq 5$. Secara sama untuk kasus graf *noncommuting*, akan tetapi dalam kasus *noncommuting* akan dicari elemen-elemen komutatifnya, kemudian digambarkan dengan batasan n yaitu $3 \leq n \leq 8$.

3.1 Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik dan Sisi Graf *Commuting* dari Grup Dihedral-$2n$ (D_{2n})

Pewarnaan titik pada graf G adalah pemberian sebanyak n warna pada titik sehingga dua titik yang saling terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Sedangkan pewarnaan sisi pada graf G merupakan pemberian sebanyak n warna pada sisi sehingga dua sisi yang saling terkait langsung tidak diberi warna yang sama. Bilangan terkecil sehingga graf G dapat diwarnai inilah yang disebut dengan bilangan kromatik. Pada pembahasan ini akan dikhususkan pada graf *commuting* dari grup dihedral.

3.1.1 Graf Commuting dari Grup Dihedral-6 (D_6)

Grup dihedral-6 memiliki elemen-elemen pembangun yaitu $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya, maka diperoleh tabel *Cayley* dari grup dihedral-6 seperti berikut:

Tabel 3.1. Tabel *Cayley* untuk D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Tabel di atas menunjukkan elemen-elemen pembangun grup dihedral-6 (D_6) yang komutatif dan tidak komutatif. Warna biru pada tabel merupakan center grup dihedral-6 (D_6), warna oranye merupakan elemen-elemen yang tidak komutatif, sedangkan kotak yang tidak diberi warna merupakan elemen-elemen grup dihedral-6 (D_6) yang komutatif. Berdasarkan tabel *Cayley* di atas maka dapat diketahui elemen-elemen grup dihedral-6 yang komutatif, sehinnga diperoleh uraian sebagai berikut:

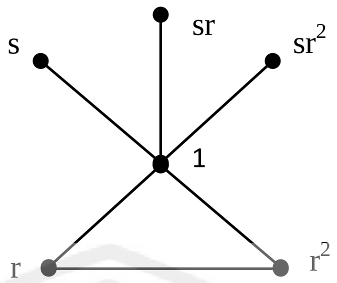
1. Elemen r^i saling komutatif,

$$1 \circ r = r \circ 1 \qquad 1 \circ r^2 = r^2 \circ 1 \qquad r \circ r^2 = r^2 \circ r$$

2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

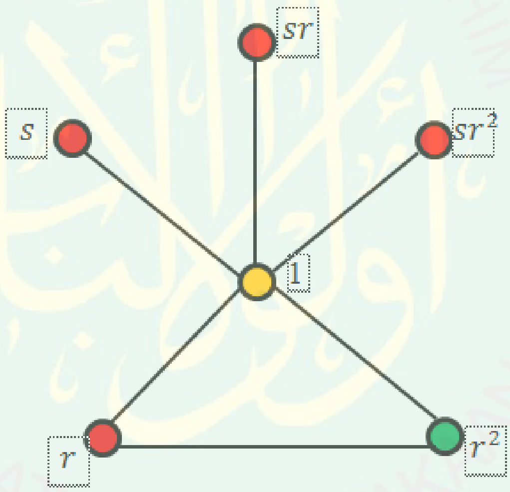
$$s \circ 1 = 1 \circ s \qquad sr \circ 1 = 1 \circ sr \qquad sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$$

Setelah mengetahui elemen-elemen pembangun dari grup dihedral-6 yang komutatif, selanjutnya graf *commuting* dari grup dihedral-6 dapat disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.1. Graf *Commuting* pada D_6

Dari Gambar 3.1, jika r diberi warna merah, r^2 diberi warna hijau, 1 diberi warna kuning, kemudian $s, sr,$ dan sr^2 diberi warna merah, maka pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral-6 (D_6) dapat disajikan sebagai berikut:

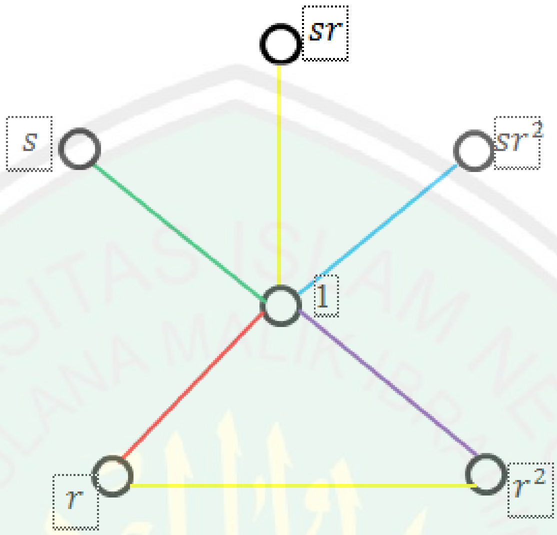


Gambar 3.2. Pewarnaan Titik Graf *Commuting* pada D_6

Dari pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral-6 (D_6) di atas didapatkan bilangan kromatik pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral-6 (D_6) yaitu 3, atau dapat ditulis $\chi(C(D_6)) = 3$.

Selain bilangan kromatik dari pewarnaan titik, selanjutnya yakni bilangan kromatik dari pewarnaan sisi. Jika sisi yang menghubungkan s dan 1 $(s, 1)$ diberi warna hijau, $(sr, 1)$ diberi warna kuning, kemudian $(sr^2, 1)$ diberi warna biru muda, $(r^2, 1)$ diberi warna ungu, selanjutnya $(r, 1)$ diberi warna merah, dan

(r, r^2) diberi warna kuning, maka pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral-6 (D_6) dapat disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.3. Pewarnaan Sisi Graf *Commuting* pada D_6

Pewarnaan sisi pada graf merupakan pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Dari penjelasan ini dapat disimpulkan bahwa pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral-6 (D_6) membutuhkan warna 5, dengan kata lain dapat dikatakan bahwa bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral-6 (D_6) adalah 5, dapat ditulis $\chi'(C(D_6)) = 5$.

3.1.2 Graf *Commuting* dari Grup Dihedral-8 (D_8)

Grup dihedral-8 memiliki elemen-elemen pembangun yaitu $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya, maka diperoleh tabel *Cayley* dari grup dihedral-8 seperti berikut:

Tabel 3.2. Tabel *Cayley* untuk D_8

$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Berdasarkan tabel *Cayley* di atas maka dapat diketahui elemen-elemen grup dihedral-8 yang komutatif. Sehingga diperoleh uraian sebagai berikut:

1. Elemen r^i saling komutatif,

$$1 \circ r = r \circ 1 \qquad 1 \circ r^3 = r^3 \circ 1 \qquad r \circ r^3 = r^3 \circ r$$

$$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1 \qquad r \circ r^2 = r^2 \circ r \qquad r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$$

2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

$$s \circ 1 = 1 \circ s \qquad sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$$

$$sr \circ 1 = 1 \circ sr \qquad sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$$

3. r^2 komutatif dengan elemen sr^i,

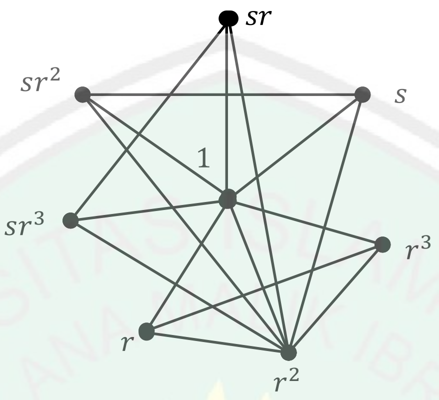
$$s \circ r^2 = r^2 \circ s \qquad sr^2 \circ r^2 = r^2 \circ sr^2$$

$$sr \circ r^2 = r^2 \circ sr \qquad sr^3 \circ r^2 = r^2 \circ sr^3$$

4. Elemen sr^i komutatif dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$,

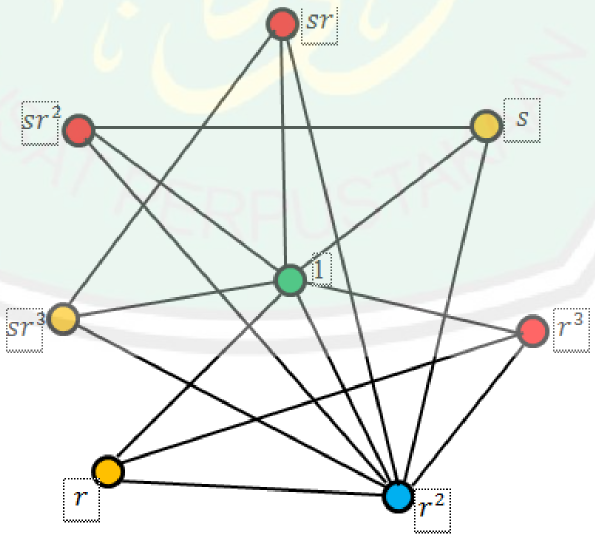
$$s \circ sr^2 = sr^2 \circ s \qquad sr \circ sr^3 = sr^3 \circ sr$$

Setelah mengetahui elemen-elemen pembangun dari grup dihedral-8 yang komutatif, selanjutnya dapat dibentuk graf *commuting* dari grup dihedral-8 yang dapat disajikan dalam bentuk sebagai berikut:



Gambar 3.4. Graf *Commuting* pada D_8

Dari Gambar 3.4, misal pewarnaan titiknya dimulai dari 1. Jika 1 diberi warna hijau, sr dan sr^2 diberi warna merah, sr^3 dan r diberi warna kuning, r^2 diberi warna biru, r^3 diberi warna merah, dan s diberi warna kuning, maka pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral-8 (D_8) dapat disajikan seperti berikut:



Gambar 3.5. Pewarnaan Titik Graf *Commuting* pada D_8

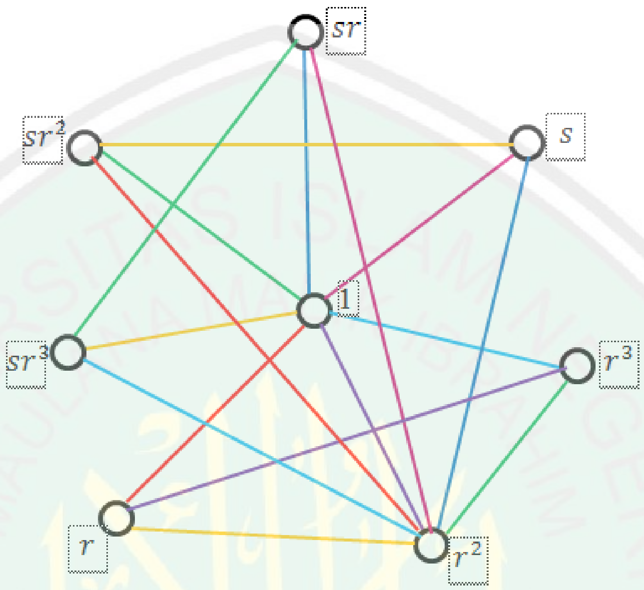
Seperti yang terlihat pada Gambar 3.5, sr dan sr^2 dapat diberi warna yang sama karena keduanya tidak terhubung langsung. Secara sama untuk sr^3 dan r, dapat diberi warna yang sama karena tidak terhubung langsung. 1 diberi warna yang berbeda dengan sr, sr^2, sr^3, dan r karena 1 terhubung langsung dengan sr, sr^2, sr^3, dan r. Selanjutnya r^2 diberi warna yang berbeda dengan 1, sr, sr^2, sr^3, dan r karena r^2 terhubung langsung dengan 1, sr, sr^2, sr^3, dan r. Untuk r^3, dapat diberi warna yang sama dengan sr dan sr^2 karena r^3 tidak terhubung langsung dengan sr dan sr^2. Kemudian s dapat diberi warna yang sama dengan sr^3 dan r karena s tidak terhubung langsung dengan keduanya. Dari penjelasan ini dapat diketahui bahwa pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral-8 (D_8) membutuhkan minimal 4 warna. Dengan demikian, bilangan kromatik pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral-8 (D_8) adalah 4, dapat ditulis $\chi(C(D_8)) = 4$.

Selain pewarnaan titik juga terdapat pewarnaan sisi. Setelah diketahui bilangan kromatik dari pewarnaan titiknya, selanjutnya yakni bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral-8 (D_8). Misal, jika sisi-sisi graf *commuting* grup dihedral-8 (D_8) diberi warna seperti tabel berikut:

Tabel 3.3. Warna Sisi Graf *Commuting* Grup Dihedral-8 (D_8)

Sisi	Warna	Sisi	Warna
$(1, sr)$	Biru tua	(r^2, r)	Kuning
$(1, sr^2)$	Hijau tua	(r^2, sr^3)	Biru muda
$(1, sr^3)$	Kuning	(r^2, sr^2)	Merah
$(1, r)$	Merah	(r^2, sr)	Hijau muda
$(1, r^2)$	Ungu	(r^2, s)	Biru tua
$(1, r^3)$	Biru muda	(r^3, r^2)	Hijau tua
$(1, s)$	Hijau muda	(r^3, r)	Ungu
(s, sr^2)	Kuning	(sr, sr^3)	Hijau tua

Dari rincian tabel warna sisi graf *commuting* grup dihedral-8 (D_8) di atas, maka pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral-8 (D_8) dapat disajikan seperti berikut:



Gambar 3.6. Pewarnaan Sisi Graf *Commuting* pada D_8

Pewarnaan sisi graf *commuting* pada D_8 hampir sama dengan pewarnaan titiknya. Sesuai dengan aturan pewarnaan sisi, sisi-sisi yang terkait dengan titik yang sama tidak boleh diberi warna yang sama. Berdasarkan Gambar 3.6, banyak warna yang digunakan adalah 7. Artinya bilangan kromatik pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral-8 adalah 7, dapat dinotasikan dengan $\chi'(C(D_8)) = 7$.

3.1.3 Graf *Commuting* dari Grup Dihedral-10 (D_{10})

Grup dihedral-10 memiliki elemen-elemen pembangun yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya, maka dapat diperoleh tabel *Cayley* dari grup dihedral-10 berikut:

Tabel 3.4. Tabel *Cayley* untuk D_{10}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Berdasarkan tabel *Cayley* di atas maka dapat diketahui elemen-elemen grup dihedral-10 yang komutatif. Sehingga diperoleh uraian sebagai berikut:

1. Elemen r^i saling komutatif,

$$1 \circ r = r \circ 1 \qquad r \circ r^2 = r^2 \circ r \qquad r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$$

$$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1 \qquad r \circ r^3 = r^3 \circ r \qquad r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$$

$$1 \circ r^3 = r^3 \circ 1 \qquad r \circ r^4 = r^4 \circ r$$

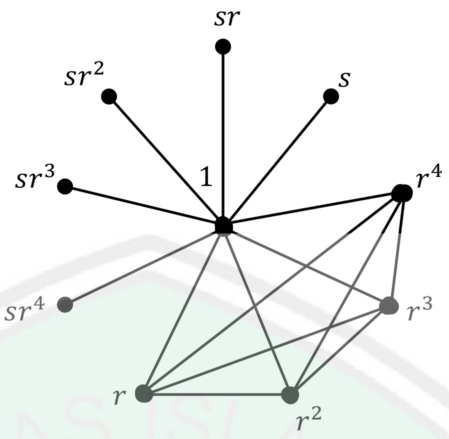
$$1 \circ r^4 = r^4 \circ 1 \qquad r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$$

2. 1 komutatif dengan elemen sr^i,

$$s \circ 1 = 1 \circ s \qquad sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2 \qquad sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$$

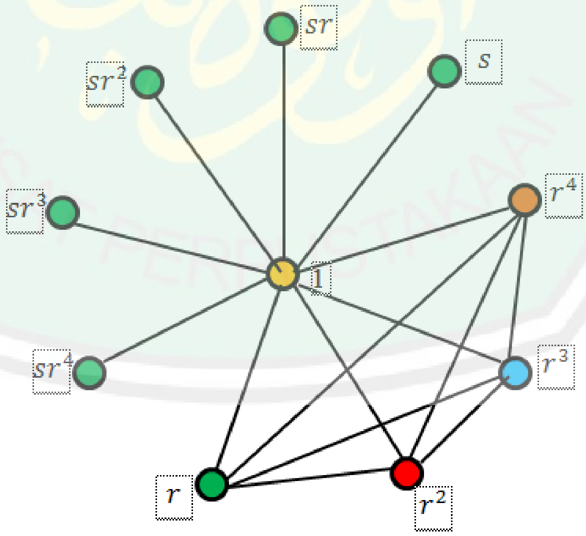
$$sr \circ 1 = 1 \circ sr \qquad sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$$

Setelah mengetahui elemen-elemen pembangun dari grup dihedral-10 yang komutatif, selanjutnya dapat dibentuk graf *commuting* dari grup dihedral-10 yang dapat disajikan dalam bentuk sebagai berikut:



Gambar 3.7. Graf *Commuting* pada D_{10}

Dari Gambar 3.7, misal pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral-10 (D_{10}) dimulai dari 1. Jika 1 diberi warna kuning, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, dan r diberi warna hijau, r^2 diberi warna merah, r^3 diberi warna biru tua, dan r^4 diberi warna oranye, maka pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral-10 (D_{10}) dapat disajikan dalam bentuk sebagai berikut:



Gambar 3.8. Pewarnaan Titik Graf *Commuting* pada D_{10}

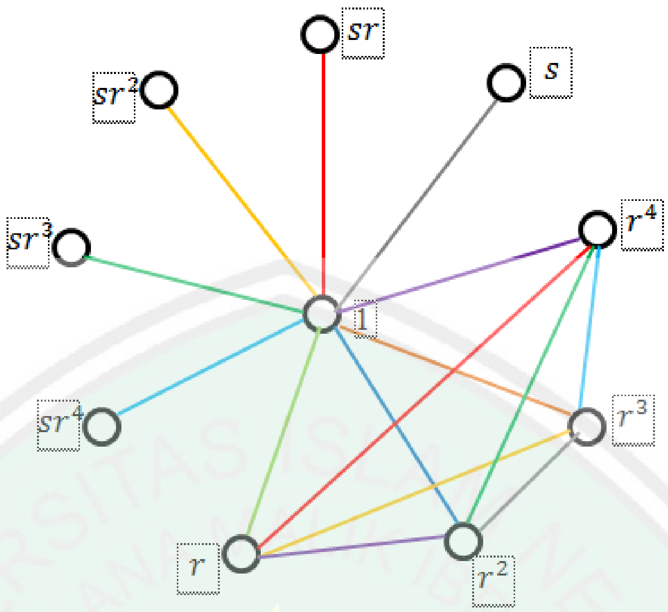
Gambar 3.8 menunjukkan bahwa pewarnaan titik graf *commuting* pada grup dihedral-10 menggunakan 5 warna. Elemen-elemen yang tidak saling terhubung langsung yaitu r, sr^4, sr^3, sr^2, sr, dan s diberi warna yang sama yaitu hijau. Kemudian empat elemen sisanya diberi warna yang berbeda. Dari penjelasan melalui Gambar 3.8 dapat diketahui bahwa pewarnaan titik graf *commuting* dari grup dihedral-10 (D_{10}) membutuhkan minimal warna sebanyak 5 warna. Artinya, bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral-10 (D_{10}) adalah 5, dapat dinotasikan dengan $\chi\big(C(D_{10})\big) = 5$.

Pewarnaan berikutnya yaitu pewarnaan sisi graf *commuting* pada grup dihedral-10 (D_{10}). Misal, jika sisi-sisi graf *commuting* grup dihedral-10 (D_{10}) diberi warna seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.5. Warna Sisi Graf *Commuting* Grup Dihedral-10 (D_{10})

Sisi	Warna	Sisi	Warna
$(1, s)$	Abu-abu	$(1, r^4)$	Ungu
$(1, sr)$	Merah	(r^2, r)	Ungu
$(1, sr^2)$	Kuning	(r^3, r)	Kuning
$(1, sr^3)$	Hijau tua	(r^3, r^2)	Abu-abu
$(1, sr^4)$	Biru muda	(r^3, r^4)	Biru muda
$(1, r)$	Hijau muda	(r^4, r)	Merah
$(1, r^2)$	Biru tua	(r^4, r^2)	Hijau tua
$(1, r^3)$	oranye	-	-

Dari Tabel 3.5, pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral-10 (D_{10}) dapat disajikan dalam bentuk seperti berikut ini:



Gambar 3.9. Pewarnaan Sisi Graf *Commuting* pada D_{10}

Gambar 3.9 menunjukkan banyaknya warna yang digunakan dalam pewarnaan titik graf *commuting* pada grup dihedral-10 (D_{10}) adalah 9 warna. Setiap sisi yang terkait dengan titik yang sama tidak dapat diberi warna yang sama. Pewarnaan sisi pada graf *commuting* grup dihedral-10 (D_{10}) ini dimulai dari elemen yang sisi-sisinya merupakan derajat tertinggi dari elemen graf tersebut. Adapun derajat tertinggi pada graf *commuting* grup dihedral-10 (D_{10}) adalah 9, yaitu sisi-sisi yang terkait pada elemen 1. Dari penjelasan melalui gambar di atas dapat disimpulkan bahwa pewarnaan sisi graf *commuting* pada grup dihedral-10 (D_{10}) membutuhkan minimal warna sebanyak 9. Artinya bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *commuting* pada grup dihedral-10 adalah 9, dapat dinotasikan dengan $\chi'(C(D_{10})) = 9$.

Setelah didapatkan bilangan kromatik dari pewarnaan titik dan sisi dari setiap graf *commuting* pada grup dihedral-$2n$, dimana $3 \leq n \leq 5$, maka pola yang didapatkan dapat disajikan dalam bentuk tabel seperti berikut ini:

Tabel 3.6. Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik dan Sisi Graf *Commuting* Grup D_{2n}

$C(D_{2n})$	$\chi(C(D_{2n}))$	$\chi'(C(D_{2n}))$
D_6	3	5
D_8	4	7
D_{10}	5	9
.	.	.
.	.	.
.	.	.
D_{2n}	n	$2n-1$

Teorema 1

Misal $C(D_{2n})$ adalah graf *commuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}). Maka bilangan kromatik titik graf *commuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}) adalah $\chi(C(D_{2n})) = n$.

Bukti

Untuk n ganjil dan genap, misal diketahui $v = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Kemudian $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$ untuk $i, j = 0,1,2, \dots, n-1$ di D_{2n}, maka r^i dan r^j saling terhubung langsung di $C(D_{2n})$. Karena r^i dan r^j saling komutatif, maka terdapat $(r^i, r^j) \in C(D_{2n})$ yang membentuk subgraf komplit-n. Sehingga dibutuhkan sebanyak n warna, atau dengan kata lain bilangan kromatik pewarnaan titik r^i dan r^j yaitu n.

Misal $w = \{s, sr, sr^1, \dots, sr^{n-1}\}$ dimana w hanya komutatif dengan 1 di D_{2n}. Artinya sr^i dan $sr^j, i, j = 0,1,2, \dots, n-1$ tidak saling komutatif. Karena tidak saling komutatif, maka dapat diberi warna yang sama.

Pada n ganjil, sr^i tidak komutatif dengan $r^j, j = 1,2, \dots, n-1$.

$$sr \circ r = sr^{1+1} \qquad\qquad r \circ sr = sr^{1-1}$$

$$= sr^2 \qquad\qquad\qquad = s$$

Karena sr^i tidak komutatif dengan $r^j, j = 1,2, \dots, n-1$, maka warna titik sr^i berlaku sama dengan titik $r^j, j = 1,2, \dots, n-1$.

Pada n genap, terdapat $sr^{\frac{n}{2}} \circ r^{\frac{n}{2}} = r^{\frac{n}{2}} \circ sr^{\frac{n}{2}}$, sehingga warna titik $sr^{\frac{n}{2}}$ tidak boleh sama dengan $r^{\frac{n}{2}}$. Selain itu, terdapat $sr^{\frac{n}{2}} \circ r^i = r^i \circ sr^{\frac{n}{2}}$, sehingga warna titik $sr^{\frac{n}{2}}$ boleh sama dengan warna titik r^i, atau dengan kata lain $sr^i, i = 0,1,2, \dots, n-1$ dapat diberi warna yaitu memilih dari $\frac{n}{2}$ warna.

Jadi, diperoleh $\chi\big(C(D_{2n})\big) = n$, untuk n ganjil maupun genap.

Teorema 2

Misal $C(D_{2n})$ adalah graf *commuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}). Maka bilangan kromatik sisi graf *commuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}) adalah $\chi'\big(C(D_{2n})\big) = 2n - 1$.

Bukti

Untuk n ganjil, diketahui bahwa $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk $i, j = 0,1,2, \dots, n-1$ di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Jadi, r^i dan r^j saling terhubung langsung di G. Di samping itu, 1 komutatif dengan semua elemen r^i dan sr^i, sehingga 1 terhubung langsung dengan semua elemen r^i dan $sr^i, i = 0,1,2, \dots, n-1$ di G. Karena 1 terhubung langsung dengan $2n-1$ elemen di G, maka minimal warna yang digunakan pewarnaan sisinya yaitu sebanyak $2n-1$ warna. Berdasarkan aturan pewarnaannya, setiap sisi yang terkait dengan 1 titik yang sama diberi warna yang berbeda. Adapun r^i dan $r^j, i = 0,1,2, \dots, 2n-1$ yang saling terhubung langsung dapat diberi warna dari $2n-1$ warna yang telah digunakan sebelumnya. Sehingga didapatkan bilangan kromatik sisinya yaitu $\chi'(C(D_{2n})) = 2n - 1$, untuk n ganjil.

Untuk n genap, diketahui bahwa Untuk n ganjil, diketahui bahwa $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, untuk $i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Jadi, r^i dan r^j saling terhubung langsung di G. Walaupun $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$, tetapi $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ tidak komutatif dengan r^j untuk j selain $\frac{n}{2}$. Elemen 1 komutatif dengan r^i dan $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ yaitu sebanyak $2n-1$ elemen. Karena 1 komutatif dengan semua elemen r^i dan $sr^i, i = 0,1,2,\dots,n-1$ yaitu sebanyak $2n-1$ elemen, maka 1 memiliki derajat tertinggi di G. Artinya, minimal warna yang dibutuhkan adalah sebesar derajat tertinggi di G yaitu 1. 1 terhubung langsung dengan $2n-1$ elemen, maka minimal warna yang digunakan dalam pewarnaan sisi di G sebanyak $2n-1$ warna. Jadi, diperoleh bilangan kromatik sisinya yaitu $\chi'(C(D_{2n})) = 2n-1$, untuk n genap.

3.2 Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik dan Sisi Graf *Noncommuting* dari Grup Dihedral-$2n$ (D_{2n})

Adapun penjelasan berikutnya pada bagian ini yaitu bilangan kromatik dari pewarnaan titik dan sisi graf *noncommuting* dari grup dihedral-$2n$. Langkah awal yang dilakukan sama dengan pembahasan sebelumnya pada graf *commuting*, yakni memaparkan terlebih dahulu elemen-elemen dari grup dihedral-$2n$.

Kemudian dari paparan tersebut dapat dibentuk graf *noncommuting* dari grup dihedral-$2n$ dan ditentukan bilangan kromatik dan kromatik sisi-nya.

3.2.1 Graf Noncommuting Grup Dihedral-6 (D_6)

Grup dihedral-6 memiliki elemen-elemen pembangun yaitu $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya, dapat diperoleh tabel *Cayley* dari grup dihedral-6 seperti berikut:

Tabel 3.7. Tabel Cayley untuk D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

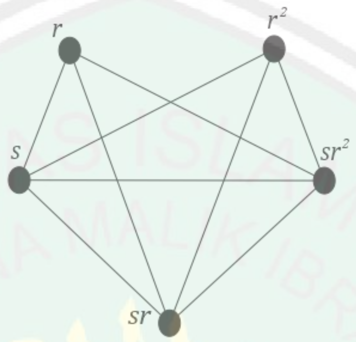
Warna hijau pada tabel di atas merupakan center grup dihedral D_6. Adapun center grup dihedral-6 (D_6) yang dimaksud yaitu $\{1\}$. Dikatakan center grup karena jika dioperasikan, 1 komutatif dengan semua elemen di D_6. Selanjutnya warna jingga yang merupakan elemen-elemen yang tidak komutatif pada grup dihedral-6 (D_6). Elemen-elemen yang tidak komutatif tersebut dapat disajikan sebagai berikut:

$$r \circ s \neq s \circ r \qquad r^2 \circ s \neq s \circ r^2 \qquad s \circ sr \neq sr \circ s$$

$$r \circ sr \neq sr \circ r \qquad r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2 \qquad s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$

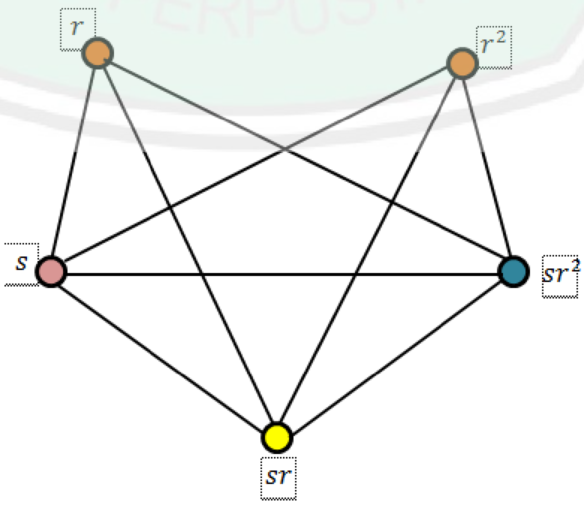
$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r \qquad r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2 \qquad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$

Berdasarkan definisinya, graf *noncommuting* merupakan graf yang titiknya bukan merupakan elemen-elemen center dari suatu graf G. Artinya, dilakukan pengambilan atau penghapusan elemen center pada graf G. Dengan demikian center dari grup dihedral-6 (D_6) dihilangkan, sehingga graf *noncommuting* dari grup dihedral D_6 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Himpunan titik-titik ini dapat disajikan dalam bentuk graf sebagai berikut:



Gambar 3.10. Graf *Noncommuting* pada D_6

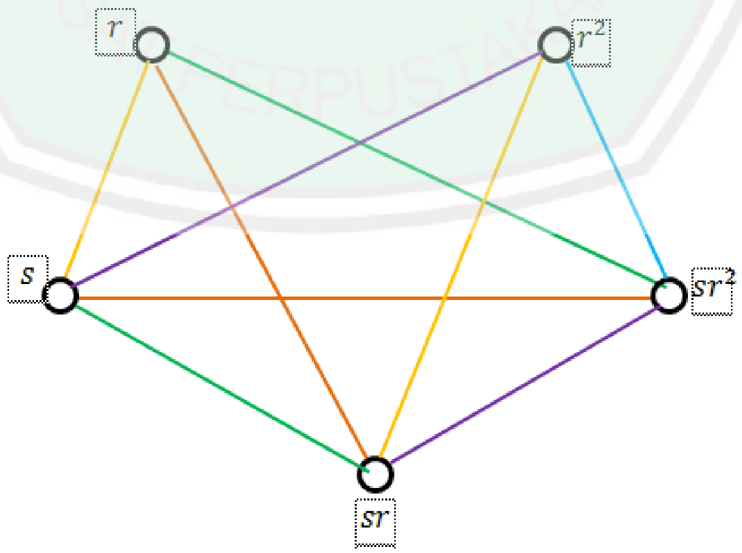
Selanjutnya yakni melakukan pewarnaan titik pada graf *noncommuting* grup dihedral-6 untuk mengetahui bilangan kromatik atau bilangan terkecil yang digunakan untuk memberi warna pada graf tersebut. Dari Gambar 3.10, misal jika r dan r^2 diberi warna oranye, s diberi warna pink, sr diberi warna kuning, dan sr^2 diberi warna biru, maka pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-6 (D_6) dapat disajikan dalam bentuk sebagai berikut:



Gambar 3.11. Pewarnaan Titik Graf *Noncommuting* pada D_6

Gambar 3.11 menunjukkan pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-6 (D_6). r dan r^2 dapat diberi warna yang sama karena keduanya tidak terhubung langsung. Kemudian, $s, sr,$ dan sr^2 diberi warna yang berbeda karena $s, sr,$ dan sr^2 saling terhubung langsung. Dari penjelasan melalui Gambar 3.11, pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-6 membutuhkan minimal warna sebanyak 4 warna. Hal ini menunjukkan bahwa bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-6 (D_6) adalah 4, atau dapat ditulis $\chi(\Gamma(D_6)) = 4$.

Pewarnaan berikutnya yaitu pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-6 (D_6). Misal jika sisi yang menghubungkan sr dan s (sr, s) diberi warna hijau, (sr, r) diberi warna oranye, (sr, r^2) diberi warna kuning, (sr, sr^2) diberi warna ungu, (s, sr^2) diberi warna oranye, (s, r) diberi warna kuning, (s, r^2) diberi warna ungu, (sr^2, r) diberi warna hijau, dan (sr^2, r^2) diberi warna biru, maka pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-6 (D_6) dapat disajikan seperti gambar berikut:



Gambar 3.12. Pewarnaan Sisi Graf *Noncommuting* pada D_6

Pewarnaan sisi pada graf merupakan pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berebeda. Dari Gambar 3.12, dapat diketahui bahwa pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-6 (D_6) membutuhkan minimal warna sebanyak 5 warna. Artinya, bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-6 (D_6) adalah 5, atau dapat ditulis $\chi'(\Gamma(D_6)) = 5$.

3.2.2 Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-8 (D_8)

Grup dihedral-8 memiliki elemen-elemen pembangun yaitu $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya, maka dapat diperoleh tabel *Cayley* dari grup dihedral-*8* seperti berikut ini:

Tabel 3.8. Tabel *Cayley* untuk D_8

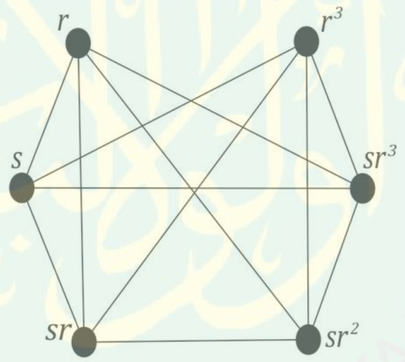
$\circ$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{r^2}$	$\boldsymbol{r^3}$	$\boldsymbol{s}$	$\boldsymbol{sr}$	$\boldsymbol{sr^2}$	$\boldsymbol{sr^3}$
$\mathbf{1}$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
$\boldsymbol{r}$	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
$\boldsymbol{r^2}$	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
$\boldsymbol{r^3}$	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
$\boldsymbol{s}$	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
$\boldsymbol{sr}$	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
$\boldsymbol{sr^2}$	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
$\boldsymbol{sr^3}$	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Sama seperti pembahasan sebelumnya, tabel di atas menunjukkan elemen-elemen komutatif dan tak komutatif pada grup dihedral-8. Warna biru pada tabel di atas merupakan center grup dihedral-8 yaitu $\{1, r^2\}$. Sedangkan warna kuning pada tabel merupakan elemen-elemen yang tidak komutatif pada grup dihedral-*8*.

Adapun elemen-elemen yang tidak komutatif tersebut dapat disajikan sebagai berikut:

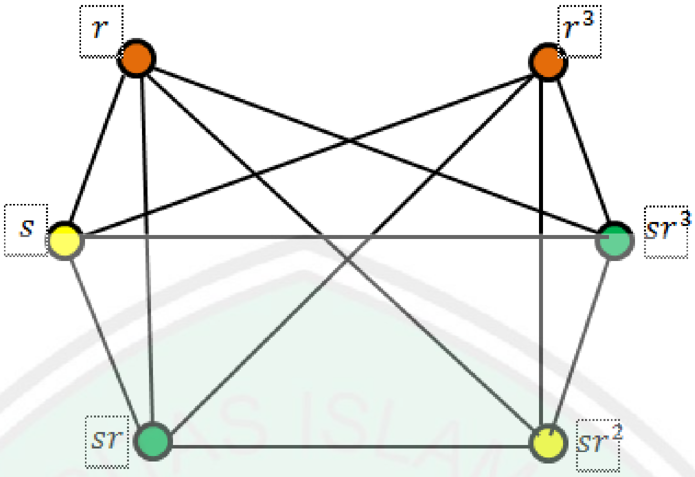
$r \circ s \neq s \circ r$	$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$	$s \circ sr \neq sr \circ s$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$	$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$
$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$	$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$
$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$	$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$

Dengan menghilangkan center dari grup dihedral-8 (D_8) yairu $Z(D_8) = \{1, r^2\}$, sehingga dari uraian elemen-elemen grup dihedral-8 (D_8) baik yang komutatif maupun yang tidak komutatif, dapat menghasilkan sebuah graf *noncommuting* sebagai beriut:



Gambar 3.13. Graf *Noncommuting* pada D_8

Langkah pertama yang dilakukan setelah mengetahui bentuk graf *noncommuting* dari grup dihedral-8 (D_8), selanjutnya melakukan pewarnaan titik pada graf tersebut. Dari Gambar 3.13, misal jika r dan r^2 diberi warna oranye, s dan sr^2 diberi warna kuning, kemudian sr dan sr^3 diberi warna hijau, maka pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-8 (D_8) dapat disajikan seperti gambar berikut:



Gambar 3.14. Pewarnaan Titik Graf *Noncommuting* pada D_8

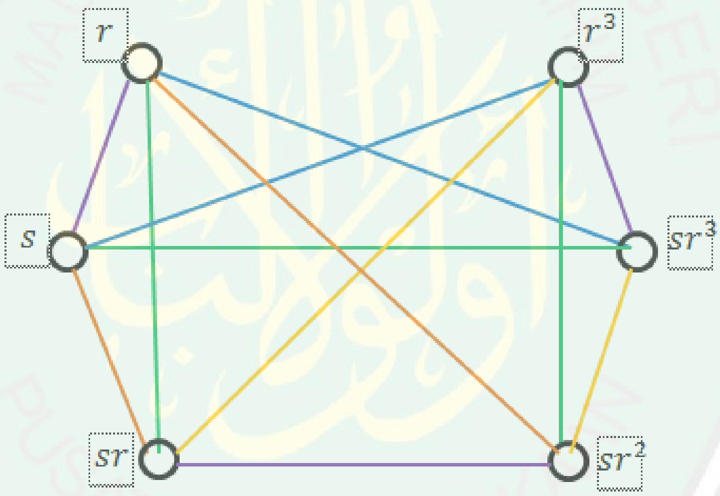
Gambar 3.14 menunjukkan bahwa elemen r dan r^3 diberi warna yang sama karena dua elemen ini tidak terhubung langsung. Kemudian dengan alasan yang sama, elemen s dan sr^2 juga dapat diberi warna yang sama. Kemudian sr juga diberi warna yang sama dengan sr^3. Dengan demikian, dari Gambar 3.14 dapat disimpulkan bahwa warna yang digunakan dalam pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-8 (D_8) yaitu sebanyak 3 warna. Artinya, bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-8 (D_8) adalah 3, atau dapat ditulis $\chi(\Gamma(D_8)) = 3$.

Langkah berikutnya yaitu graf pada Gambar 3.13 diberi warna pada setiap sisinya. Misal jika setiap sisi pada graf *noncommuting* grup dihedral-8 (D_8) diberi warna sesuai dengan tabel berikut:

Tabel 3.9. Warna Sisi Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-8 (D_8)

Sisi	Warna	Sisi	Warna
(sr, s)	Oranye	(sr^2, sr^3)	Kuning
(sr, r)	Hijau	(s, sr^3)	Hijau
(sr, r^3)	Kuning	(s, r)	Ungu
(sr, sr^2)	Ungu	(r, sr^3)	Biru
(sr^2, r)	Oranye	(r^3, sr^3)	Ungu
(sr^2, r^3)	Hijau	(r^3, s)	Biru

Dari Tabel 3.9, pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-8 (D_8) dapat disajikan seperti gambar berikut:



Gambar 3.15. Pewarnaan Sisi Graf *Noncommuting* pada D_8

Berdasarkan definisi pewarnaan sisi pada graf, sisi yang terkait satu titik yang sama tidak dapat diberi warna yang sama. Seperti terlihat pada Gambar 3.15, bahwa pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-8 (D_8) membutuhkan 5 warna. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa bilangan kromatik pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-8 adalah 5, atau dapat ditulis dengan $\chi'(\Gamma(D_8)) = 5$.

3.2.3 Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-10 (D_{10})

Grup dihedral-10 memiliki elemen-elemen pembangun yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya, maka dapat diperoleh tabel *Cayley* dari grup dihedral-10 seperti berikut ini:

Tabel 3.10. Tabel *Cayley* untuk D_{10}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

Tabel di atas menunjukkan elemen-elemen pembangun grup dihedral-10 yang komutatif dan yang tidak komutatif. Warna biru pada tabel menunjukkan center grup dihedral-10 yaitu $\{1\}$. Sedangkan warna kuning pada tabel merupakan elemen-elemen yang tidak komutatif pada grup dihedral-10. Adapun elemen-elemen yang tidak komutatif tersebut dapat disajikan sebagai berikut:

$$r \circ s \neq s \circ r$$
$$r \circ sr \neq sr \circ r$$
$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$$
$$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$$
$$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$$
$$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$$
$$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$$
$$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$$

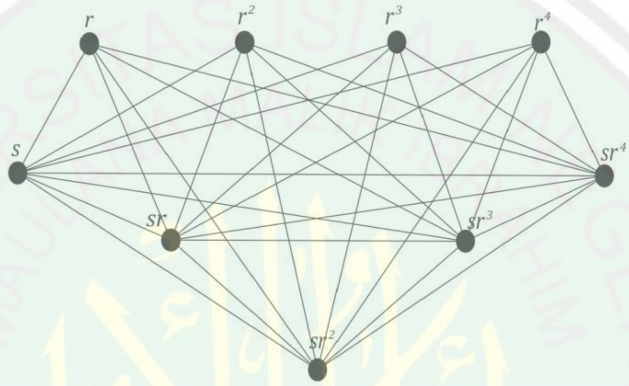
$$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$$
$$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$$
$$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$$
$$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$$
$$r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3$$
$$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$$
$$r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$$
$$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$$

$$s \circ sr \neq sr \circ s$$
$$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$
$$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$$
$$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$$
$$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$
$$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$$
$$sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$$
$$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$$

$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$ $\quad$ $r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$ $\quad$ $sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$

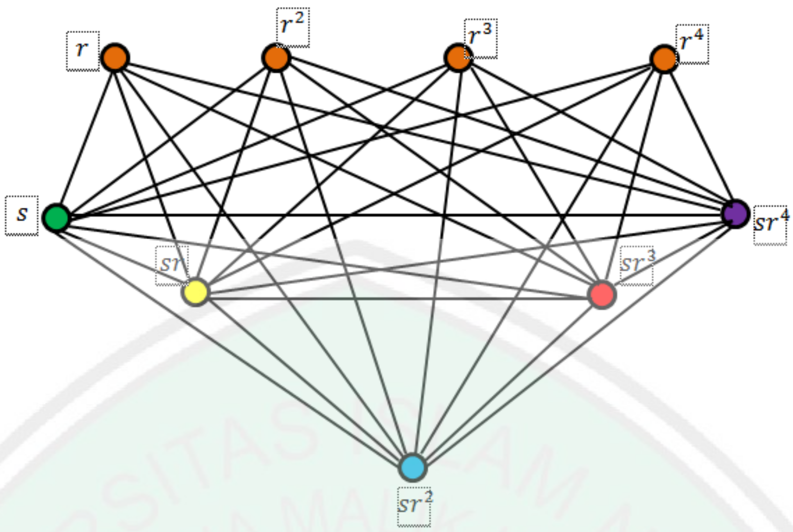
$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$ $\quad$ $r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$ $\quad$ $sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$

Dengan menghilangkan center dari grup dihedral-10 (D_{10}) yaitu $Z(D_{10}) = \{1\}$, maka dari uraian elemen-elemen grup dihedral-10 (D_{10}) baik yang komutatif maupun yang tidak komutatif dapat menghasilkan sebuah graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.16. Graf *Noncommutig* pada D_{10}

Setelah mengetahui bentuk graf *noncommuting* dari grup dihedral-*10* (D_{10}), selanjutnya melakukan pewarnaan titik pada graf tersebut. Setiap titik yang terhubung langsung tidak diberi warna yang sama. Jika r, r^2, r^3, dan r^4 diberi warna yang sama yaitu oranye, s diberi warna hijau, sr diberi warna kuning, sr^2 diberi warna biru, sr^3 diberi warna merah, dan sr^4 diberi warna ungu, maka pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-10 (D_{10}) dapat disajikan seperti gambar berikut:



Gambar 3.17. Pewarnaan Titik Graf *Noncommuting* pada D_{10}

Gambar 3.17 menunjukkan bahwa elemen-elemen graf *noncommuting* pada D_{10} yang tidak terhubung langsung diberi warna yang sama. Elemen r, r^2, r^3, dan r^4 diberi warna yang sama. Sedangkan elemen-elemen graf *noncommuting* pada D_{10} sisanya diberi warna yang berbeda satu sama lain. Hal ini dikarenakan lima elemen yang tersisa yaitu s, sr, sr^2, sr^3, dan sr^4 terhubung langsung satu sama lain. Dari Gambar 3.17, warna yang digunakan dalam pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-10 (D_{10}) sebanyak 6 warna, sehingga dapat disimpulkan bahwa pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-10 (D_{10}) membutuhkan 6 warna, atau dengan mudah dikatakan bahwa bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-10 (D_{10}) adalah 6, atau dapat ditulis $\chi(\Gamma(D_{10})) = 6$.

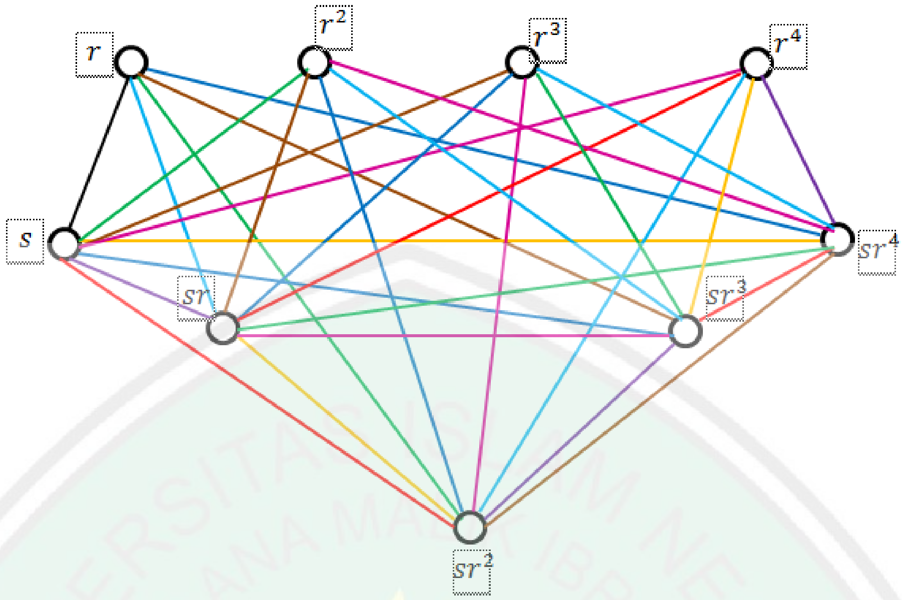
Sama seperti sebelumnya, setelah mengetahui bilangan kromatik pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-10 (D_{10}), selanjutnya melakukan pewarnaan pada sisi graf *noncommuting* grup dihedral-10 (D_{10}) untuk mengetahui bilangan kromatik pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-

10 (D_{10}). Misal jika setiap sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-10 (D_{10}) diberi warna seperti pada tabel berikut ini:

Tabel 3.11. Warna Sisi Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-10 (D_{10})

Sisi	Warna	Sisi	Warna
(sr^2, s)	Merah	(sr, sr^4)	Hijau
(sr^2, sr)	Kuning	(sr^3, s)	Biru tua
(sr^2, r)	Hijau	(sr^3, r)	Cokelat
(sr^2, r^2)	Biru tua	(sr^3, r^2)	Biru muda
(sr^2, r^3)	Pink	(sr^3, r^3)	Hijau
(sr^2, r^4)	Biru muda	(sr^3, r^4)	Kuning
(sr^2, sr^3)	Ungu	(s, r)	Hitam
(sr^2, sr^4)	Cokelat	(s, r^2)	Hijau
(s, sr)	Ungu	(s, r^3)	Cokelat
(sr, sr^3)	Pink	(s, r^4)	Pink
(sr^3, sr^4)	Merah	(s, sr^4)	Kuning
(sr, r)	Biru muda	(r, sr^4)	Biru tua
(sr, r^2)	Cokelat	(r^2, sr^4)	Pink
(sr, r^3)	Biru tua	(r^3, sr^4)	Biru muda
(sr, r^4)	Merah	(r^4, sr^4)	Ungu

Dari Tabel 3.11, pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-10 (D_{10}) dapat disajikan seperti gambar berikut ini:



Gambar 3.18. Pewarnaan Sisi Graf *Noncommuting* pada D_{10}

Sama seperti pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral sebelumnya, dua sisi yang terkait oleh satu titik yang sama tidak dapat diberi warna yang sama. Dari penjelasan melalui gambar di atas dapat disimpulkan bahwa pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-10 (D_{10}) membutuhkan 9 warna. Artinya, bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *noncommuting* dari grup dihedral-10 (D_{10}) adalah 9, atau dapat ditulis dengan $\chi'\left(\Gamma\left((D_{10})\right)\right) = 9$.

3.2.4 Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-12 (D_{12})

Grup dihedral-12 memiliki elemen-elemen pembangun yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya, maka dapat diperoleh tabel *Cayley* dari grup dihedral-12 seperti berikut ini:

Tabel 3.12. Tabel *Cayley* untuk D_{12}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Tabel di atas menunjukkan elemen-elemen pembangun grup dihedral-12 yang komutatif dan yang tidak komutatif. Warna biru pada tabel menunjukkan center grup dihedral-12 (D_{12}) yaitu $\{1, r^3\}$. Sedangkan warna kuning yang ada pada tabel merupakam elemen-elemen yang tidak komutatif pada grup dihedral-12 (D_{12}). Adapun elemen-elemen yang tidak komutatif tersebut dapat disajikan sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$	$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$	$s \circ sr \neq sr \circ s$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$	$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$
$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$	$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$
$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$	$r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$	$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$
$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$	$r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$	$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$
$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$	$r^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^4$	$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$
$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$	$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$	$sr \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr$

$r^{2} \circ sr \neq sr \circ r^{2}$ $\quad$ $r^{5} \circ sr \neq sr \circ r^{5}$ $\quad$ $sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$

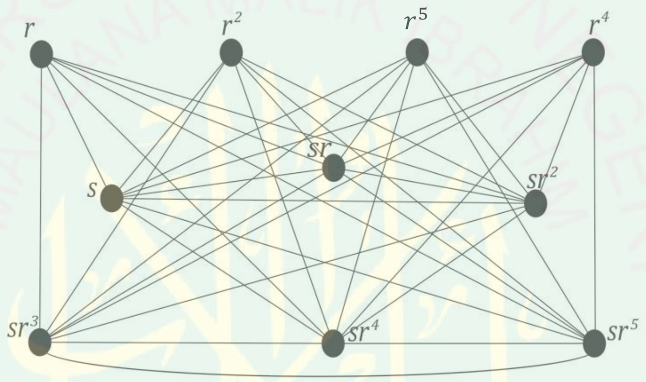
$r^{2} \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^{2}$ $\quad$ $r^{5} \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^{5}$ $\quad$ $sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$

$r^{2} \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^{2}$ $\quad$ $r^{5} \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^{5}$ $\quad$ $sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$

$r^{2} \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^{2}$ $\quad$ $r^{5} \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^{5}$ $\quad$ $sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$

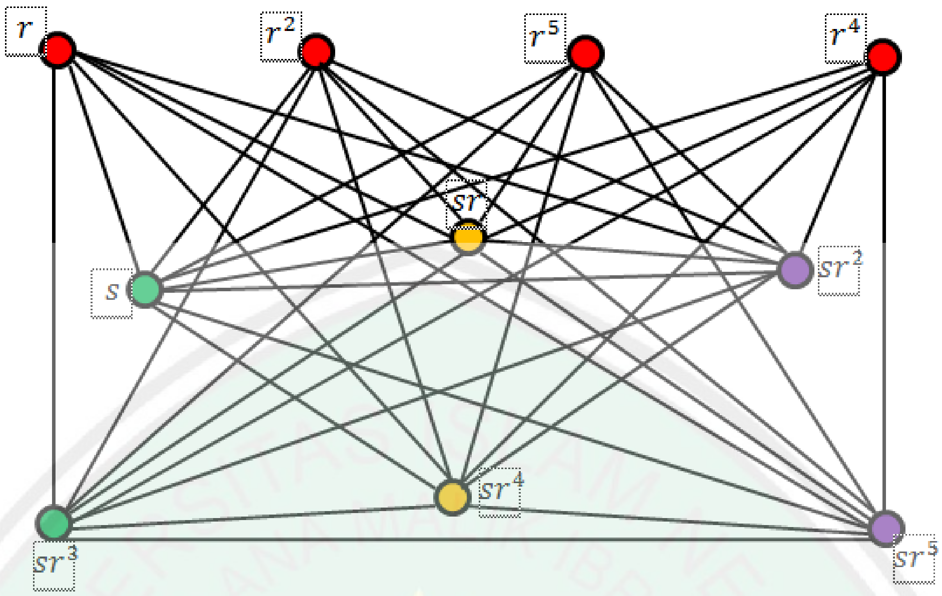
$r^{2} \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^{2}$ $\quad$ $r^{5} \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^{5}$ $\quad$ $sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$

Dengan menghilangkan center dari grup dihedral-12 yaitu $Z(D_{12}) = \{1, r^3\}$, maka dari uraian elemen-elemen grup dihedral-12 di atas dapat menghasilkan sebuah graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.19. Graf *Noncommuting* pada D_{12}

Setelah mengetahui bentuk graf *noncommuting* dari grup dihedral-12 (D_{12}), selanjutnya melakukan pewarnaan titik pada graf *noncommuting* dari grup dihedral-12 (D_{12}) tersebut. Setiap titik yang terhubung langsung diberi warna yang berbeda. Misal jika pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-12 (D_{12}) dimulai dari r. Jika r, r^2, r^5, r^4 diberi warna merah, s dan sr^3 diberi warna hijau, sr dan sr^4 diberi warna kuning, sr^2 dan sr^5 ungu, maka pewarnaan titik pada graf *noncommuting* dari grup dihedral-12 (D_{12}) dapat disajikan dalam bentuk sebagai berikut:



Gambar 3.20. Pewarnaan Titik Graf *Noncommuting* pada D_{12}

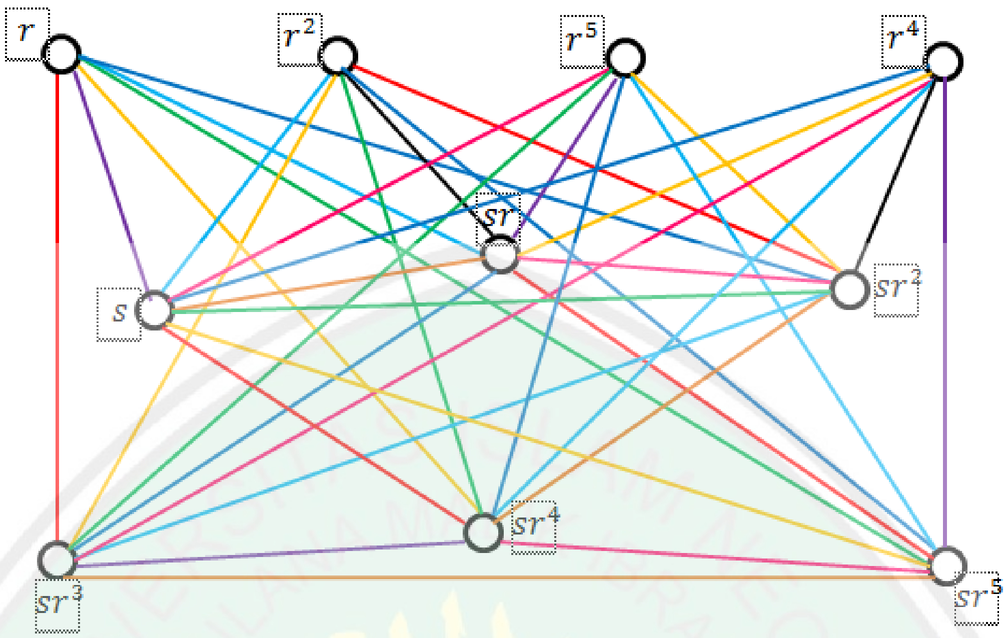
Gambar 3.20 menunjukkan bahwa elemen-elemen yang tidak terhubung langsung dapat diberi warna yang sama, seperti r, r^2, r^4, dan r^5. Selain itu s dan sr^3, sr dan sr^4, juga sr^2 dan sr^5 dapat diberi warna yang sama. Dari penjelasan ini dapat diketahui bahwa pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-12 memerlukan warna sebanyak 4 warna. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-12 (D_{12}) adalah 4, atau dapat ditulis $\chi(\Gamma(D_{12})) = 4$.

Setelah mengetahui bilangan kromatik pewarnaan titik graf *noncommuting* dari grup dihedral-12 (D_{12}), selanjutnya melakukan pewarnaan sisi pada graf *noncommuting* dari grup dihedral-12 (D_{12}) untuk mengetahui bilangan kromatiknya. Misal jika setiap sisi pada graf *noncommuting* dari grup dihedral-12 (D_{12}) diberi warna seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.13. Warna Sisi Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-12 (D_{12})

Sisi	Warna	Sisi	Warna
(r, s)	Ungu	(r^5, s)	Pink
(r, sr)	Biru muda	(r^5, sr)	Ungu
(r, sr^2)	Biru tua	(r^5, sr^2)	Kuning
(r, sr^3)	Merah	(r^5, sr^3)	Hijau
(r, sr^4)	Kuning	(r^5, sr^4)	Biru tua
(r, sr^5)	Hijau	(r^5, sr^5)	Biru muda
(r^2, s)	Biru muda	(s, sr)	Oranye
(r^2, sr)	Hitam	(s, sr^2)	Hijau
(r^2, sr^2)	Merah	(s, sr^4)	Merah
(r^2, sr^3)	Kuning	(s, sr^5)	Kuning
(r^2, sr^4)	Hijau	(sr, sr^2)	Pink
(r^2, sr^5)	Biru tua	(sr, sr^3)	Biru tua
(r^4, s)	Biru tua	(sr, sr^5)	Merah
(r^4, sr)	Kuning	(sr^2, sr^3)	Biru muda
(r^4, sr^2)	Hitam	(sr^2, sr^4)	Oranye
(r^4, sr^3)	Pink	(sr^3, sr^4)	Ungu
(r^4, sr^4)	Biru muda	(sr^3, sr^5)	Oranye
(r^4, sr^5)	Ungu	(sr^4, sr^5)	Pink

Berdasarkan pewarnaan sisi pada Tabel 3.13, maka pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-12 (D_{12}) dapat disajikan seperti gambar berikut:



Gambar 3.21. Pewarnaan Sisi Graf *Noncommuting* pada D_{12}

Gambar 3.21 menunjukkan bahwa setiap dua sisi yang terkait dengan satu titik yang sama tidak diberi warna yang sama. Seperti yang telah dijelaskan melalui gambar di atas, pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-12 (D_{12}) membutuhkan minimal warna sebanyak 9 warna. Dengan kata lain bilangan kromatik pewarnaan sisi untuk graf *noncommuting* pada grup dihedral-12 (D_{12})adalah 9. Uraian ini dapat ditulis secara matematis yaitu $\chi'\big(\Gamma(D_{12})\big) = 9$.

3.2.5 Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-14 (D_{14})

Grup dihedral-14 memiliki elemen-elemen pembangun yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2,\ sr^3,\ sr^4,\ sr^5,\ sr^6\}$. Berdasarkan elemen-elemen pembangunnya, dapat diperoleh tabel *Cayley* dari grup dihedral-14 seperti berikut ini:

Tabel 3.14. Tabel *Cayley* untuk D_{14}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Tabel 3.9 menunjukkan elemen-elemen pembangun grup dihedral-14 (D_{14}) yang komutatif dan tidak komutatif. Kotak yang berwarna kuning merupakan elemen atau unsur dari grup dihedral-14 (D_{14}) yang tidak komutatif. Sedangkan kotak berwarna putih merupakan elemen grup dihedral-14 (D_{14}) yang komutatif. Warna biru pada tabel di atas menunjukkan center grup dihedral-14 (D_{14}) yaitu $\{1\}$. Adapun elemen-elemen yang tidak komutatif pada grup dihedral-14 (D_{14})dapat disajikan seperti berikut ini:

$r \circ s \neq s \circ r$ $\quad$ $r^4 \circ s \neq s \circ r^4$ $\quad$ $s \circ sr \neq sr \circ s$

$r \circ sr \neq sr \circ r$ $\quad$ $r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$ $\quad$ $s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$

$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$ $\quad$ $r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$ $\quad$ $s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$

$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$ $\quad$ $r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$ $\quad$ $s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$

$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$

$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$

$r \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r$

$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$

$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$

$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$

$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$

$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$

$r^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^2$

$r^2 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$

$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$

$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$

$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$

$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$

$r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3$

$r^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^3$

$r^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$

$r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$

$r^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^4$

$r^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^4$

$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$

$r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$

$r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$

$r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$

$r^5 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^5$

$r^5 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^5$

$r^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^5$

$r^6 \circ s \neq s \circ r^6$

$r^6 \circ sr \neq sr \circ r^6$

$r^6 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^6$

$r^6 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^6$

$r^6 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^6$

$r^6 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^6$

$r^6 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^6$

$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$

$s \circ sr^6 \neq sr^6 \circ s$

$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$

$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$

$sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$

$sr \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr$

$sr \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr$

$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$

$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$

$sr^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^2$

$sr^2 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^2$

$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$

$sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$

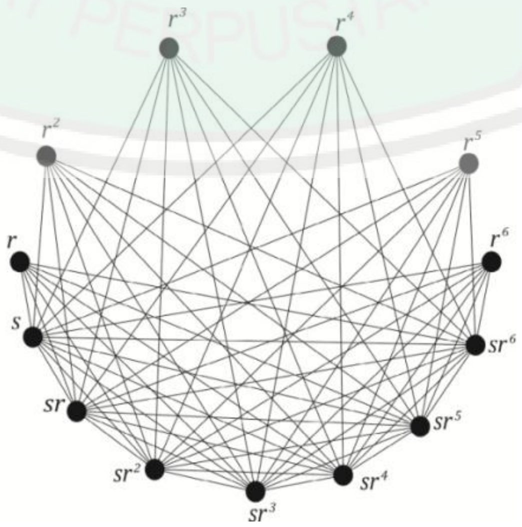
$sr^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^3$

$sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$

$sr^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^4$

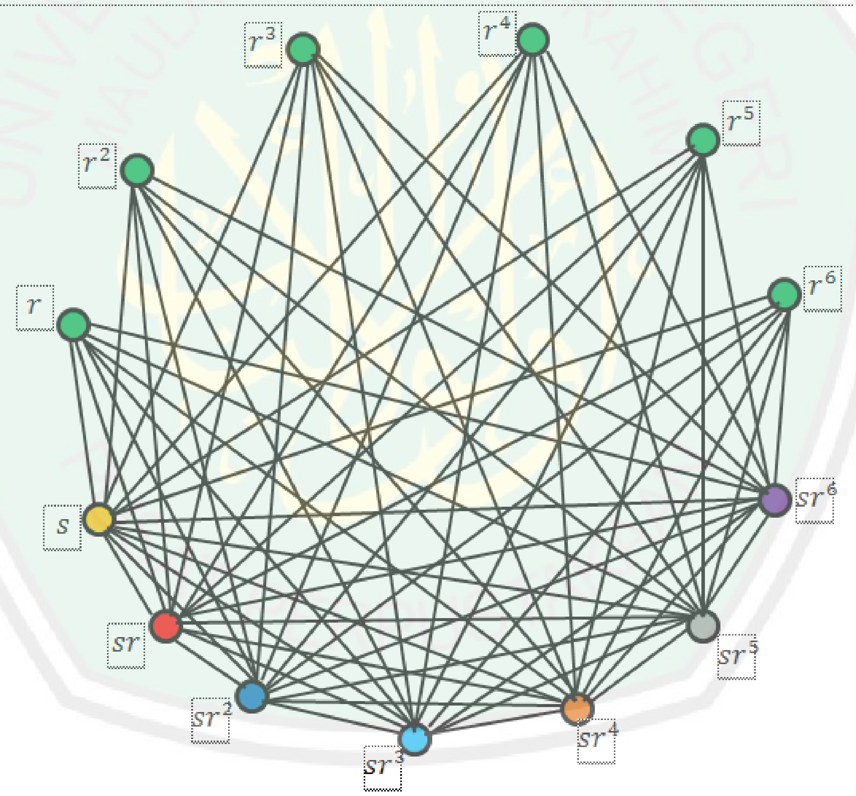
$sr^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^5$

Dengan menghilangkan center grup dihedral-14 yaitu $Z(D_{14}) = \{1\}$, maka dari uraian elemen-elemen grup dihedral-14 (D_{14}) di atas dapat menghasilkan sebuah graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.22. Graf Noncommuting pada D_{14}

Setelah mengetahui bentuk graf *noncommuting* dari grup dihedral-14 (D_{14}), selanjutnya melakukan pewarnaan titik pada graf tersebut untuk mengetahui bilangan kromatiknya. Setiap titik yang saling terhubung langsung diberi warna yang berbeda. Misal jika $r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6$ diberi warna hijau, s diberi warna kuning, sr diberi warna merah, sr^2 diberi warna biru tua, sr^3 diberi warna biru muda, sr^4 diberi warna oranye, sr^5 diberi warna abu-abu, dan sr^6 diberi warna ungu, maka pewarnaan titik pada graf *noncommuting* dari grup dihedral-14 (D_{14}) dapat disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.23. Pewarnaan Titik Graf *Noncommuting* pada D_{14}

Pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-14 (D_{14}) sama seperti pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral sebelumnya. Setiap titik yang terhubung langsung tidak dapat diberi warna yang sama. Pada Gambar 3.23 menunjukkan bahwa elemen r, r^2, r^3, r^4, r^5, dan r^6 diberi warna yang sama, karena elemen-elemen ini tidak saling terhubung langsung. Kemudian $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5$, dan sr^6 diberi warna yang berbeda satu sama lain karena ketujuh elemen tersebut saling terhubung langsung. Dari penjelasan ini dapat diketahui bahwa pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-14 (D_{14}) membutuhkan minimal sebanyak 8 warna. Artinya, bilangan kromatik pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-14 (D_{14}) adalah 8. Uraian ini dapat ditulis secara matematis yaitu $\chi(\Gamma(D_{14})) = 8$.

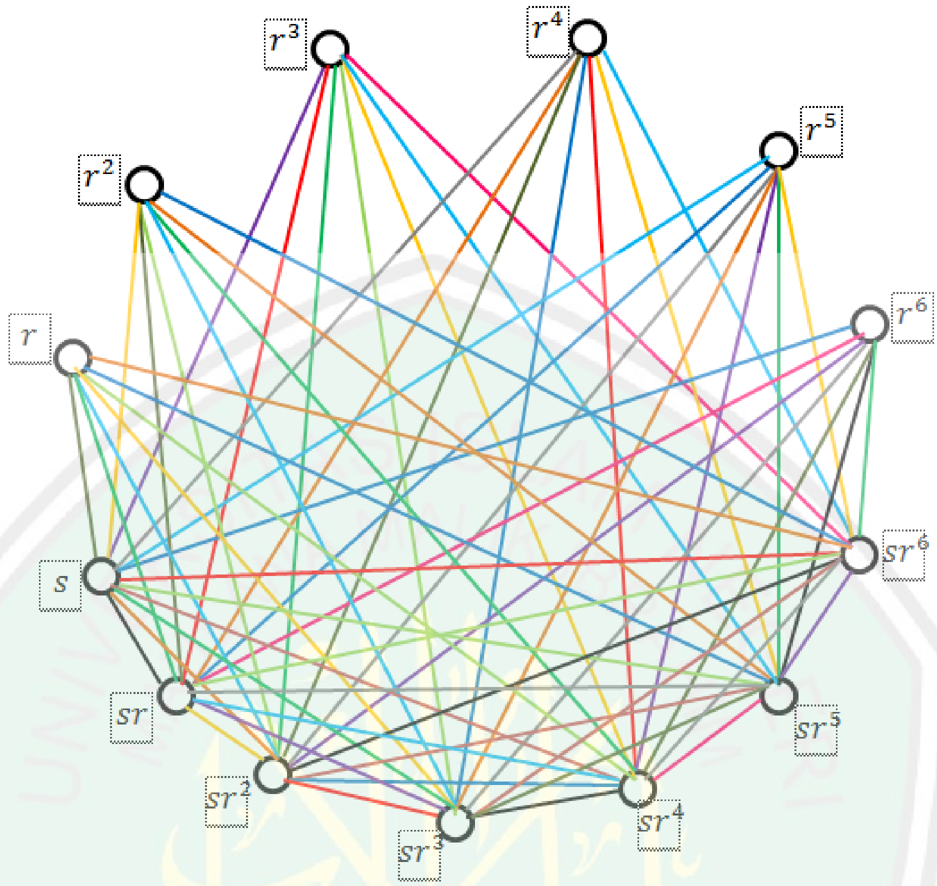
Setelah mengetahui bilangan kromatik pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-14 (D_{14}), selanjutnya melakukan pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-14 (D_{14}) untuk mengetahui bilangan kromatik pewarnaan sisinya. Misal jika setiap sisi graf *noncommuting* grup dihedral-14 (D_{14}) diberi warna seperti uraian pada tabel berikut ini:

Tabel 3.15. Warna Sisi Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-14 (D_{14})

Sisi	Warna	Sisi	Warna
(r, s)	Olive	(r^5, sr^3)	Oranye
(r, sr)	Hijau tua	(r^5, sr^4)	Ungu
(r, sr^2)	Biru muda	(r^5, sr^5)	Hijau tua
(r, sr^3)	Kuning	(r^5, sr^6)	Kuning
(r, sr^4)	Hijau muda	(r^6, s)	Biru tua
(r, sr^5)	Biru tua	(r^6, sr)	Pink
(r, sr^6)	Oranye	(r^6, sr^2)	Ungu
(r^2, s)	Kuning	(r^6, sr^3)	Abu-abu
(r^2, sr)	Olive	(r^6, sr^4)	Olive
(r^2, sr^2)	Hijau muda	(r^6, sr^5)	Hitam
(r^2, sr^3)	Biru muda	(r^6, sr^6)	Hijau tua
(r^2, sr^4)	Hijau tua	(s, sr)	Hitam
(r^2, sr^5)	Oranye	(s, sr^2)	Oranye
(r^2, sr^6)	Biru tua	(s, sr^3)	Hijau tua

(r^3, s)	Ungu	(s, sr^4)	Merah, accent 2
(r^3, sr)	Merah	(s, sr^5)	Hijau muda
(r^3, sr^2)	Hijau tua	(s, sr^6)	Merah
(r^3, sr^3)	Hijau muda	(sr, sr^2)	Kuning
(r^3, sr^4)	Kuning	(sr, sr^3)	Ungu
(r^3, sr^5)	Biru muda	(sr, sr^4)	Biru muda
(r^3, sr^6)	Pink	(sr, sr^5)	Abu-abu
(r^4, s)	Abu-abu	(sr, sr^6)	Hijau muda
(r^4, sr)	Oranye	(sr^2, sr^3)	Merah
(r^4, sr^2)	Olive	(sr^2, sr^4)	Biru tua
(r^4, sr^3)	Biru tua	(sr^2, sr^5)	Merah, accent 2
(r^4, sr^4)	Merah	(sr^2, sr^6)	Hitam
(r^4, sr^5)	Kuning	(sr^3, sr^4)	Hitam
(r^4, sr^6)	Biru muda	(sr^3, sr^5)	Olive
(r^5, s)	Biru muda	(sr^3, sr^6)	Merah,accent 2
(r^5, sr)	Biru tua	(sr^4, sr^5)	Pink
(r^5, sr^2)	Abu-abu	(sr^4, sr^6)	Abu-abu
(sr^5, sr^6)	Ungu	-	-

Dari Tabel 3.15, pewarnaan sisi pada graf *noncommuting* grup dihedral-14 (D_{14}) dapat disajikan seperti gambar berikut:



Gambar 3.24. Pewarnaan Sisi Graf *Noncommuting* pada D_{14}

Pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-14 (D_{14}) dilakukan untuk mengetahui bilangan kromatiknya. Setiap dua sisi yang terkait dengan satu titik yang sama tidak dapat diberi warna yang sama. Dari penjelasan melalui gambar di atas dapat diketahui bahwa pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-14 (D_{14}) membutuhkan minimal warna sebanyak 13 warna. Maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-14 (D_{14}) adalah 13, atau dapat ditulis secara matematis yaitu $\chi'(\Gamma(D_{14})) = 13$.

3.2.6 Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-16 (D_{16})

Grup dihedral-16 memiliki elemen-elemen pembangun yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Berdasarkan elemen-

elemen pembangunnya, dapat diperoleh tabel *Cayley* dari grup dihedral-16 sebagai berikut:

Tabel 3.16. Tabel *Cayley* untuk D_{16}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Tabel 3.10 menunjukkan elemen-elemen pembangun grup dihedral-16 (D_{16}) yang komutatif dan tidak komutatif. Kotak yang berwarna kuning merupakan elemen atau unsur dari grup dihedral-16 (D_{16}) yang tidak komutatif. Sedangkan kotak berwarna putih merupakan elemen grup dihedral-16 (D_{16}) yang komutatif. Warna biru pada tabel di atas menunjukkan center grup dihedral-16 (D_{16}) yaitu $\{1, r^4\}$, karena jika dioperasikan, 1 dan r^4 komutatif dengan semua elemen di D_{16}. Adapun elemen-elemen yang tidak komutatif pada grup dihedral-16 (D_{16}) dapat disajikan seperti berikut ini:

$r \circ s \neq s \circ r$

$r \circ sr \neq sr \circ r$

$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$

$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$

$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$

$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$

$r \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r$

$r \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r$

$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$

$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$

$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$

$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$

$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$

$r^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^2$

$r^2 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$

$r^2 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^2$

$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$

$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$

$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$

$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$

$r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3$

$r^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^3$

$r^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$

$r^3 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^2$

$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$

$r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$

$r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$

$r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$

$r^5 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^5$

$r^5 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^5$

$r^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^5$

$r^5 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^5$

$r^6 \circ s \neq s \circ r^6$

$r^6 \circ sr \neq sr \circ r^6$

$r^6 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^6$

$r^6 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^6$

$r^6 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^6$

$r^6 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^6$

$r^6 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^6$

$r^6 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^6$

$r^7 \circ s \neq s \circ r^7$

$r^7 \circ sr \neq sr \circ r^7$

$r^7 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^7$

$r^7 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^7$

$r^7 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^7$

$r^7 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^7$

$r^7 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^7$

$r^7 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ r^7$

$s \circ sr \neq sr \circ s$

$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$

$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$

$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$

$s \circ sr^6 \neq sr^6 \circ s$

$s \circ sr^7 \neq sr^7 \circ s$

$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$

$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$

$sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$

$sr \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr$

$sr \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr$

$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$

$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$

$sr^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^2$

$sr^2 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^2$

$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$

$sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$

$sr^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^3$

$sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$

$sr^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^4$

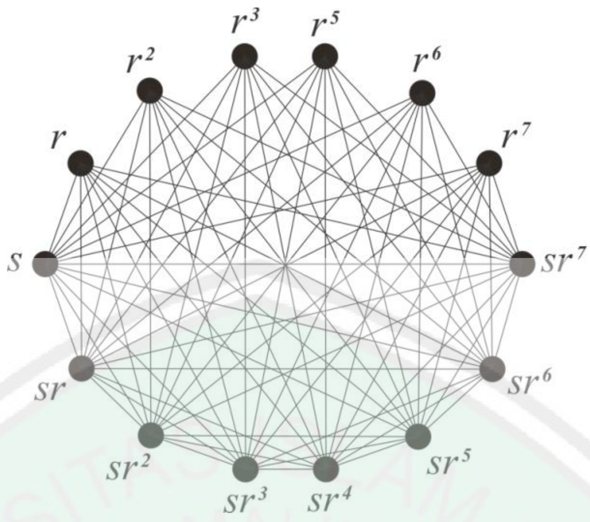
$sr^4 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^4$

$sr^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^5$

$sr^5 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^5$

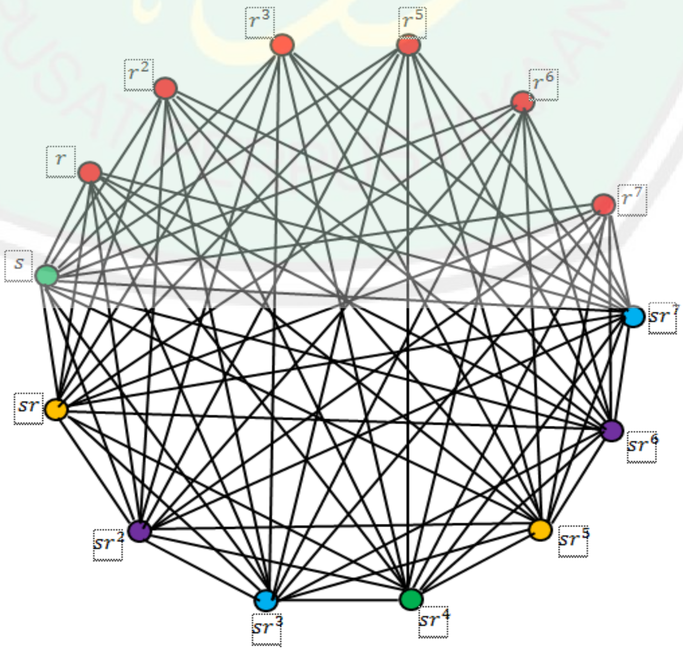
$sr^6 \circ sr^7 \neq sr^7 \circ sr^6$

Dengan menghilangkan center dari grup dihedral-16 (D_{16}) yaitu $Z(D_{16}) = \{1, r^4\}$, maka graf *noncommuting* dari grup dihedral-16 (D_{16}) memiliki himpunan titik $\Gamma_{D_{16}} = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.25. Graf *Noncommuting* pada D_{16}

Setelah mengetahui bentuk dari graf *noncommuting* pada grup dihedral-16 (D_{16}), selanjutnya melakukan pewarnaan titik pada graf tesebut untuk mengetahui bilangan kromatiknya. Misal jika elemen r, r^2, r^3, r^5, r^6, dan r^7 diberi warna merah, s dan sr^4 diberi warna hijau, sr dan sr^5 diberi warna kuning, sr^2 dan sr^6 diberi warna ungu, sr^3 dan sr^7 diberi warna biru, maka pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-16 (D_{16}) dapat disajikan seperti berikut ini:



Gambar 3.26. Pewarnaan Titik Graf *Noncommuting* pada D_{16}

Berdasarkan Gambar 3.26 dapat dilihat bahwa pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-16 (D_{16}) dilakukan dengan memberi warna yang sama pada titik yang tidak terhubung langsung. Elemen r, r^2, r^3, r^5, r^6, dan r^7diberi warna yang sama karena enam elemen tersebut terhubung langsung. Selanjutnya diberikan warna yang sama untuk s dan sr^4, sr dan sr^5, sr^2 dan sr^6, sr^3 dan sr^7. Dari penjelasan ini dapat diketahui bahwa pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-16 (D_{16}) membutuhkan minimal warna sebanyak 5 warna. Dengan demikian bilangan kromatik pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral-16 (D_{16}) adalah 5, atau secara matematis dapat ditulis dengan $\chi(\Gamma(D_{16})) = 5$.

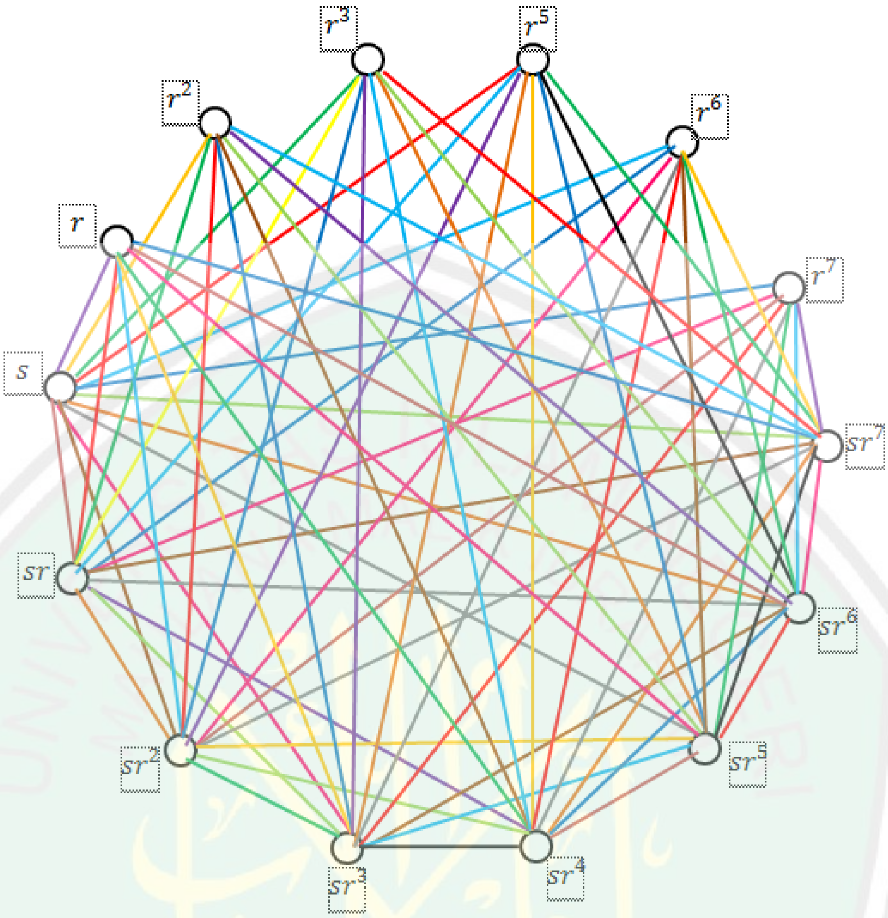
Setelah mengetahui bilangan kromatik pewarnaan titik dari graf *noncommuting* pada grup dihedral-16 (D_{16}), selanjutnya melakukan pewarnaan sisi dari graf tersebut. Misal jika setiap sisi graf *noncommuting* grup dihedral-16 (D_{16}) diberi warna seperti tabel berikut:

Tabel 3.17. Warna Sisi Graf *Noncommuting* Grup Dihedral-16 (D_{16})

Sisi	Warna	Sisi	Warna
(r, s)	Ungu	(r^6, sr^4)	Merah
(r, sr)	Merah	(r^6, sr^5)	Cokelat
(r, sr^2)	Biru muda	(r^6, sr^6)	Hijau tua
(r, sr^3)	Kuning	(r^6, sr^7)	Kuning
(r, sr^4)	Hijau tua	(r^7, s)	Biru tua
(r, sr^5)	Pink	(r^7, sr)	Pink
(r, sr^6)	Merah, accent 2	(r^7, sr^2)	Merah,accent 2
(r, sr^7)	Biru tua	(r^7, sr^3)	Merah
(r^2, s)	Kuning	(r^7, sr^4)	Abu-abu
(r^2, sr)	Hijau tua	(r^7, sr^5)	Hijau tua
(r^2, sr^2)	Merah	(r^7, sr^6)	Biru muda

(r^2, sr^3)	Biru tua	(r^7, sr^7)	Ungu
(r^2, sr^4)	Cokelat	(s, sr)	Merah,accent 2
(r^2, sr^5)	Hijau muda	(s, sr^2)	Cokelat
(r^2, sr^6)	Ungu	(s, sr^3)	Pink
(r^2, sr^7)	Biru muda	(s, sr^5)	Abu-abu
(r^3, s)	Hijau tua	(s, sr^6)	Oranye
(r^3, sr)	Kuning	(s, sr^7)	Hijau muda
(r^3, sr^2)	Biru tua	(sr, sr^2)	Oranye
(r^3, sr^3)	Ungu	(sr, sr^3)	Hijau muda
(r^3, sr^4)	Biru muda	(sr, sr^4)	Ungu
(r^3, sr^5)	Oranye	(sr, sr^6)	Abu-abu
(r^3, sr^6)	Hijau muda	(sr, sr^7)	Cokelat
(r^3, sr^7)	Merah	(sr^2, sr^3)	Hijau tua
(r^5, s)	Merah	(sr^2, sr^4)	Hijau muda
(r^5, sr)	Biru muda	(sr^2, sr^5)	Kuning
(r^5, sr^2)	Ungu	(sr^2, sr^7)	Abu-abu
(r^5, sr^3)	Oranye	(sr^3, sr^4)	Hitam
(r^5, sr^4)	Kuning	(sr^3, sr^5)	Biru muda
(r^5, sr^5)	Biru tua	(sr^3, sr^6)	Cokelat
(r^5, sr^6)	Hitam	(sr^4, sr^5)	Merah,accent 2
(r^5, sr^7)	Hijau tua	(sr^4, sr^6)	Biru tua
(r^6, s)	Biru muda	(sr^4, sr^7)	Oranye
(r^6, sr)	Biru tua	(sr^5, sr^6)	Merah
(r^6, sr^2)	Pink	(sr^5, sr^7)	Hitam
(r^6, sr^3)	Abu-abu	(sr^6, sr^7)	Pink

Dari Tabel 3.17, pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral-16 (D_{16}) dapat disajikan seperti gambar berikut:



Gambar 3.27. Pewarnaan Sisi Graf *Noncommuting* pada D_{16}

Pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-16 (D_{16}) dilakukan dengan memberi warna yang sama pada sisi yang tidak terkait dengan satu titik yang sama. Dari penjelasan melalui Gambar 3.27 dapat diketahui bahwa pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-16 (D_{16}) membutuhkan minimal warna sebanyak 13 warna. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-16 (D_{16}) adalah 13, atau secara matematis dapat ditulis dengan $\chi'(\Gamma(D_{14})) = 13$.

Setelah mengetahui bilangan kromatik pewarnaan titik dan bilangan kromatik pewarnaan sisi dari setiap graf *noncommuting* pada grup dihedral-$2n$, dimana $3 \leq n \leq 8$, selanjutnya didapatkan pola bilangan kromatik dari pewarnaan titik dan sisi seperti tabel berikut:

Tabel 3.18. Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik dan Sisi Graf *Noncommuting* Grup D_{2n}

$\Gamma(D_{2n})$	$\chi(\Gamma(D_{2n}))$	$\chi'(\Gamma(D_{2n}))$
$\Gamma(D_6)$	4	5
$\Gamma(D_8)$	3	5
$\Gamma(D_{10})$	6	9
$\Gamma(D_{12})$	4	9
$\Gamma(D_{14})$	8	13
$\Gamma(D_{16})$	5	13
. . .	. . .	. . .
$\Gamma(D_{2n})$	$n+1, n$ ganjil $\frac{n}{2}+1, n$ genap	$2n-1$, n ganjil $2n-3$, n genap

Teorema 3

Misal $\Gamma(D_{2n})$ adalah graf *noncommuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}), maka bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* pada grup dihedral-2n (D_{2n}) adalah $\chi(\Gamma(D_{2n})) = n+1$ untuk n ganjil dan $\chi(\Gamma(D_{2n})) = \frac{n}{2}+1$ untuk n genap.

Bukti

Untuk n ganjil, diperoleh himpunan $S = \{r, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ saling tidak komutatif di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Dapat dikatakan bahwa r^i dan sr^j, untuk $i,j = 0,1,2,\dots,n-1$ saling terhubung langsung. Dengan demikian, $S = \{r, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ akan membentuk subgraf komplit terbesar di G. Karena $S = \{r, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$ membentuk subgraf terbesar di G, maka bilangan clique atau order subgraf komplit terbesar graf G adalah $n+1$, yaitu kardinalitas himpunan S. Karena order dari subgraf komplit terbesarnya adalah $n+1$, maka pewarnaan titik pada graf G membutuhkan minimal warna sebanyak $n+1$ warna. Dengan demikian didapatkan bilangan kromatik titik pada graf *noncommuting* grup dihedral yaitu $\chi(\Gamma(D_{2n}))=n+1$, untuk n ganjil.

Untuk n genap, diketahui bahwa $Z(G)=\left\{1,r^{\frac{n}{2}}\right\}$. Karena r^i dan sr^j, untuk $i,j=0,1,2,\dots,n-1$ tidak saling komutatif, maka r^i dan sr^j, untuk $i,j=0,1,2,\dots,n-1$ terhubung langsung di G, untuk $i\neq j$. Karena $sr^i, i=0,1,2,\dots,\frac{n}{2}$ saling komutatif dengan $sr^j, j=\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}+2,\dots,n-1$, maka sr^i tidak terhubung langsung dengan sr^j. Namun demikian, $sr^i, i=0,1,2,\dots,\frac{n}{2}$ tidak komutatif satu sama lain. Maka $sr^i, i=0,1,2,\dots,\frac{n}{2}$ akan membentuk subgraf komplit. Karena $sr^i, i=0,1,2,\dots,\frac{n}{2}$ terhubung langsung dengan r, maka diperoleh subgraf komplit terbesar yang memuat $\frac{n}{2}+1$ titik. Dengan kata lain, bilangan clique atau order subgraf komplit terbesar graf G adalah $\frac{n}{2}+1$. Karena order dari subgraf komplit terbesar G adalah $\frac{n}{2}+1$, maka pewarnaan titik pada graf G membutuhkan minimal warna sebanyak $\frac{n}{2}+1$ warna. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik titik graf *noncommuting* grup dihedral yaitu $\chi(\Gamma(D_{2n}))=\frac{n}{2}+1$, untuk n genap.

Teorema 4

Misal $\Gamma(D_{2n})$ adalah graf *noncommuting* dari grup dihedral-2n (D_{2n}), maka bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *noncommuting* pada grup dihedral-$2n$ (D_{2n}) adalah $\chi'(\Gamma(D_{2n})) = 2n - 1$ untuk n ganjil dan $\chi'(\Gamma(D_{2n})) = 2n - 3$ untuk n genap.

Bukti

Untuk n ganjil, diketahui r^i dan $sr^j, i, j = 0,1,2, \dots, n-1$ tidak komutatif, artinya r^i dan $sr^j, i, j = 0,1,2, \dots, n-1$ saling terhubung langsung di D_{2n}, untuk $i \neq j$. Karena r^i dan sr^j saling terhubung langsung, maka membentuk subgraf komplit di $\Gamma(D_{2n})$. Misal v merupakan titik di $\Gamma(D_{2n})$. Diketahui bahwa banyaknya titik berderajat ganjil pada sebuah graf adalah genap, dapat ditulis $\sum_{v \in \Gamma(D_{2n})} deg(v) = 2n$. Pada graf *noncommuting*, pada n ganjil banyaknya $\sum(Z(D_{2n}))$ adalah 1. Karena pada graf *noncommuting* center grup tidak dimunculkan, maka dapat ditulis $D(\Gamma(D_{2n})) = \sum_{v \in \Gamma(D_{2n})} \deg(v) - \sum(Z(D_{2n})) = 2n - 1$. Dengan demikian, minimum warna yang digunakan yaitu $2n - 1$. Sehingga didapatkan $\chi'(\Gamma(D_{2n})) = 2n - 1$ untuk n ganjil.

Untuk n genap, diketahui r^i dan $sr^j, i, j = 0,1,2, \dots, n-1$ tidak saling komutatif, maka r^i dan $sr^j, i, j = 0,1,2, \dots, n-1$ terhubung langsung di $\Gamma(D_{2n})$, $i \neq j$. Diketahui bahwa banyaknya derajat titik pada sebuah graf adalah dua kali banyak sisi. Misal v merupakan titik di $\Gamma(D_{2n})$, maka dapat ditulis $\sum_{v \in \Gamma(D_{2n})} deg(v) = 2n$. Diketahui pada graf *noncommuting* $Z(D_{2n}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$, maka $\sum(Z(D_{2n})) = 2$. Dari banyaknya titik dan center grup di $\Gamma(D_{2n})$, dapat dikatakan $D\big(\Gamma(D_{2n})\big) = 2n - 2$. Karena $sr^i, i = 0,1,2, \dots, n-1$ saling komutatif dengan $sr^j, j = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$, maka $sr^i, i = 0,1,2, \dots, n-1$ tidak terhubung langsung dengan $sr^j, j = \frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \dots, n-1$, sehingga $D\big(\Gamma(D_{2n})\big) = 2n - 3$. Karena $D\big(\Gamma(D_{2n})\big) = |N(v \in D_{2n})|$ yaitu $2n - 3$, maka dapat dikatakan minimal warna yang digunakan sebanyak $2n - 3$ warna. Dengan demikian $\chi'\big(\Gamma(D_{2n})\big) = 2n - 3$ untuk n genap.

3.3 Memahami Konsep *Hablumminallah* dan *Hablumminannas* dengan Konsep Pewarnaan Graf

Agama Islam memiliki ajaran yang membentangkan dua bentuk hubungan yang harmonis, yaitu *hablumminallah* dan *hablumminannas. Hablumminallah* atau hubungan manusia dengan Allah merupakan hubungan yang paling penting dan utama dalam kehidupan manusia. Untuk membangun hubungan kepada Allah, manusia beserta makhluk lainnya mempunyai kewajiban untuk menunaikan hak-hak Allah, yaitu meng-Esa-kan dan tidak menyekutukan-Nya dengan yang lain serta menjalankan syariat Allah, misalnya sholat, puasa, dan sebagainya. Akan tetapi, *hablumminallah* saja tentu tidak cukup mengingat manusia merupakan makhluk sosial yang tidak bisa hidup tanpa bantuan orang lain.

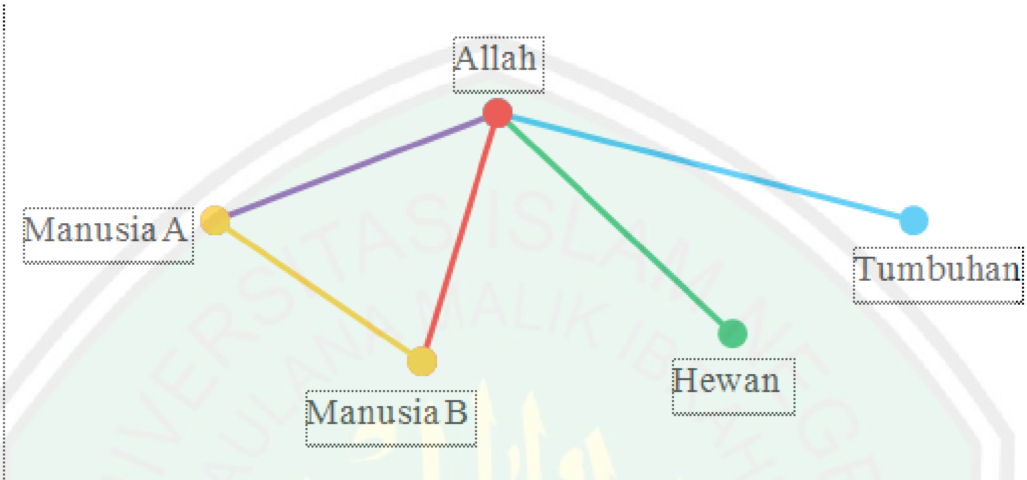
Allah telah menjelaskan dalam al-Quran surat an-Nisa ayat 36 yang berbunyi:

۞ وَٱعْبُدُوا۟ ٱللَّهَ وَلَا تُشْرِكُوا۟ بِهِۦ شَيْـًٔا ۖ وَبِٱلْوَٰلِدَيْنِ إِحْسَٰنًا وَبِذِى ٱلْقُرْبَىٰ وَٱلْيَتَٰمَىٰ
وَٱلْمَسَٰكِينِ وَٱلْجَارِ ذِى ٱلْقُرْبَىٰ وَٱلْجَارِ ٱلْجُنُبِ وَٱلصَّاحِبِ بِٱلْجَنۢبِ وَٱبْنِ ٱلسَّبِيلِ
وَمَا مَلَكَتْ أَيْمَٰنُكُمْ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن كَانَ مُخْتَالًا فَخُورًا ﴿٣٦﴾

"sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu bapak, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, Ibnu sabil, dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri" (QS. an-Nisa/4:36).

Ayat tersebut mengandung dua bentuk akhlak, yaitu akhlak kepada Allah (*hablumminallah)* yang ditunjukkan dengan perintah agar manusia menjalin hubungan yang baik kepada Allah dengan cara tidak menyekutukan-Nya dengan yang lain. Dan akhlak terhadap sesama manusia *(hablumminannas)* yang ditunjukkan dengan perintah berbuat baik kepada kedua orang tua, kerabat, anak yatim, orang-orang miskin, tetangga dekat maupun jauh, teman sejawat, orang yang sedang dalam perjalanan, dan hamba sahaya.

Konsep hubungan antara sesama manusia dan manusia dengan Allah juga diterapkan dalam konsep pewarnaan sisi pada graf. Menurut Budayasa (2007:175) sebuah pewarnaan sisi pada graf G adalah pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang terkait pada titik yang sama mendapatkan warna yang berbeda. Misal graf G terdiri dari beberapa sisi (himpunan titik yang saling terhubung) yang menjadi elemen atau unsur dari sebuah graf G. Adapun unsur-unsur dari graf G yaitu Allah sebagai titik pusat di G, kemudian terhubung langsung dengan titik-titik yang lain seperti manusia, hewan, dan tumbuhan. Maka pewarnaan sisi pada graf G merupakan pewarnaan semua sisi G sedemikian hingga setiap sisi di G yaitu sisi manusia A, manusia B, hewan, dan tumbuhan yang terkait dengan satu titik yang sama yaitu Allah diberi warna yang berbeda. Adapun bentuk graf yang dimaksud dapat disajikan sebagai berikut:



Gambar 3.28. Graf Hubungan antara Makhluk dengan Allah

Berdasarkan gambar 3.34, perbedaan warna yang digunakan dalam graf tersebut menunjukkan berbagai macam makhluk hidup yang ada di dunia yaitu manusia, hewan, dan tumbuhan. Semua sisi yang melambangkan manusia, hewan, dan tumbuhan terhubung langsung dan terkait satu titik yang sama yaitu Allah. Hal ini menjelaskan bahwa tidak ada satu makhluk-pun yang dapat hidup tanpa bergantung dengan Allah. Menjaga hubungan baik dengan Sang Pencipta merupakan hal yang wajib, karena dengan melakukan kewajiban sebagai makhluk yaitu beribadah hanya kepada Allah, maka Allah akan memberikan apa yang telah dijanjikan sebagai balasan berupa nikmat kepada makhluk-Nya.

Menjaga hubungan baik dengan sesama manusia juga merupakan hal yang wajib dalam kehidupan di dunia. Terdapat garis yang menghubungkan secara langsung antara manusia dengan manusia. Manusia tidak akan pernah dapat hidup dengan tanpa bantuan orang lain, karena sejatinya manusia merupakan makhluk sosial. Adapun hubungan baik yang dimaksud yaitu seperti saling tolong menolong satu sama lain. Jika hubungan baik dengan manusia dapat terjalin dengan baik, begitu pula hubungan baik dengan Allah, maka kehidupan manusia akan sangat berharga baik di dunia maupun di akhirat.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan mengenai bilangan kromatik graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral yaitu sebagai berikut:

1. Bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *commuting* grup dihedral yaitu $\chi(C(D_{2n})) = n$, untuk n ganjil dan genap.
2. Bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *commuting* grup dihedral ialah $\chi'(C(D_{2n})) = 2n - 1$, untuk n ganjil dan genap.
3. Bilangan kromatik dari pewarnaan titik graf *noncommuting* grup dihedral ialah:

$$\chi(\Gamma(D_{2n})) = \begin{cases} n+1, & n\ ganjil \\ \frac{n}{2}+1, & n\ genap \end{cases}$$

4. Bilangan kromatik dari pewarnaan sisi graf *noncommuting* grup dihedral ialah:

$$\chi'(\Gamma(D_{2n})) = \begin{cases} 2n-1, & n\ ganjil \\ 2n-3, & n\ genap \end{cases}$$

4.2 Saran

Dalam penulisan penelitian ini, penulis hanya membatasi pembahasan dari graf yang dibentuk dari grup dehidral saja. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kepada pembaca untuk mengembangkannya lebih luas dan menyeluruh untuk kajian graf lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H.. 2006. Noncommuting Graph of a Group. *Journal of Algebra*. 298: 468-492.

Abdussakir, Azizah, N.N., & Nofandika, F.F.. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Ali, A.Y.. 2009. *Tafsir Yusuf Ali*. Jakarta: PT. Pustaka Litera AntarNusa.

Al-Jazairi, A.B.J.. 2004. *Tafsir Al-Quran Al-AISAR*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Jazairi, A.B.J.. 2007. *Tafsir Al-Quran Al-AISAR*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Mahalli, A.J.M.. 2010. *Tafsir Jalalain*. Surabaya: Pustaka eLBA.

Al-Qarni, 'Aidh. 2008. *Tafsir Muyassar*. Jakarta Timur: Qisthi Press.

Ash-Shiddieqy, T.M.H.. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nuur*. Semarang: PT. Pustaka Rizki Putra.

As-Sa'di, S.A.N.. 2007. *Tafsir As-Sa'di.* Jakarta: Pustaka Shahifa.

Budayasa, I.K.. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: UNESA University Press.

Chartrand, G. & Lesniak, L.. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Chelvam, Tamizh, T., Selvakumar, K., & Raja, S.. 2011. Commuting Graphs on Dihedral Groups. *The Journal of Mathematics and Computer Science*. 2 (2): 402-406.

Dummit, D.S. & Foote, R.M.. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Haq, A.A.. 2010. *Pewarnaan pada Graf Bipartisi Komplit* $K_{m,n}$ *dan Graf Tripartisi* $T_2, n-1, n$ *dengan* m, n *Adalah Bilangan Asli*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Imani, A.K.F.. 2005. *Tafsir Nurul Quran.* Jakarta: Al-Huda.

Imani, A.K.F.. 2006. *Tafsir Nurul Quran.* Jakarta: Al-Huda.

Muhib. 2013. *Bilangan Kromatik Pewarnaan Titik pada Graf Dual dari Graf Piramid (Pr n*)*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Nawawi, A., & Preeley. 2012. *On Commuting Graphs for Element of Order 3 in Symetry Groups.* Manchester: The Mims Secretary.

Raisinghania, M., & Aggrawal, R.. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

Vahidi, J. & Talebi, A.A.. 2010. The Commuting Graphs on Groups D_{2n} and Q_n. *Journal of Mathematics and Computer Science*. 1 (2): 123-127.