

**PENYELESAIAN NUMERIK
PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL LINIER 1D
MENGUNAKAN METODE VOLUME HINGGA**

SKRIPSI

**OLEH
LIA IZZATUN NIKMAH
NIM. 11610009**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**PENYELESAIAN NUMERIK
PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL LINIER 1D
MENGUNAKAN METODE VOLUME HINGGA**

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Lia Izzatun Nikmah
NIM. 11610009

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**PENYELESAIAN NUMERIK
PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL LINIER 1D
MENGUNAKAN METODE VOLUME HINGGA**

SKRIPSI

Oleh
Lia Izzatun Nikmah
Nim. 11610009

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 11 Juni 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 19810502 200501 1 004

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN NUMERIK
PERSAMAAN GELOMBANG AIR DANGKAL LINIER 1D
MENGUNAKAN METODE VOLUME HINGGA**

SKRIPSI

Oleh
Lia Izzatun Nikmah
NIM. 11610009

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lia Izzatun Nikmah
NIM : 11610009
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Air Dangkal
Linier 1D Menggunakan Metode Volume Hingga

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Juni 2015
Yang Membuat Pernyataan,

Lia Izzatun Nikmah
NIM. 11610009

MOTO

“Seorang pemenang takkan pernah berhenti untuk berusaha dan orang yang berhenti untuk berusaha takkan menjadi seorang pemenang”

“Kerjakan apa yang menjadi hak dan kewajibanmu, karena kebahagiaan hidupmu terletak di situ” (Musthafa al-Gholayani).



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda tercinta Supariyono, ibunda Satun, dan adik tersayang Fatin Fadhilah,

serta segenap keluarga penulis yang selalu memberikan doa, semangat, dan

motivasi bagi penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang dengan gigih memperjuangkan Islam sebagai agama pencerahan. Kegelapan dan kebodohan telah berlalu dan sekarang mari menuju cakrawala ilmu dan terus mengembangkan ilmu.

Dalam penyelesaian penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan, arahan, dan sumbangan pemikiran dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul M., M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.

4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Kedua orang tua yang menjadi inspirasi penulis untuk selalu memberikan yang terbaik dalam segala hal.
7. Seluruh teman-teman “abelian” Jurusan Matematika angkatan 2011, khususnya Moh. Irfan, Moh. Syaiful Arif, dan Srisasi Yuni N.H, serta keluarga Matematika 2011 “Sukada 5B” yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi, terima kasih atas kenang-kenangan indah, motivasi, dukungan, doa, inspirasi, dan bantuan yang tak ternilai.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga segala yang telah diberikan kepada penulis, mendapatkan balasan terbaik dari Allah Swt. Penulis berharap skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
<u>HALAMAN PENGAJUAN</u>	
<u>HALAMAN PERSETUJUAN</u>	
<u>HALAMAN PENGESAHAN</u>	
<u>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</u>	
HALAMAN MOTO	
<u>HALAMAN PERSEMBAHAN</u>	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
<u>ملخص</u>	xvi
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Manfaat Penelitian	6
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Metode Penelitian	7
1.7 Sistematika Penulisan	8
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Gelombang Air Dangkal	9
2.2 Metode Volume Hingga	11
2.2.1 Daerah Kontrol Volume	11
2.2.2 Diskritisasi	12
2.3 Skema Godunov	14
2.4 <i>Well Posed</i>	16
2.5 Konvergensi	16
2.5.1 Kestabilan dan Konsistensi	17
2.5.2 Deret Taylor	18

2.6 Penyelesaian Masalah dalam Islam	20
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Diskritisasi	23
3.2 Analisis Konvergensi	31
3.2.1 Analisis Kestabilan	31
3.2.2 Analisis Konsistensi	39
3.3 Simulasi dan Interpretasi	42
3.4 Kajian Keagamaan	46
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	49
4.2 Saran	49
DAFTAR PUSTAKA	50
LAMPIRAN	
RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Ilustrasi Persamaan (3.12) untuk u	27
Tabel 3.2 Ilustrasi Persamaan (3.12) untuk η	27



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Geometri Persamaan (2.1).....	11
Gambar 2.2 Ketentuan Umum Metode Volume Hingga Persamaan Difusi	12
Gambar 2.3 Hubungan Konseptual antara Konvergensi, Stabilitas dan Konsistensi	17
Gambar 3.1 Daerah Kontrol Volume Persamaan Gelombang Air dangkal Linier 1D	24
Gambar 3.2 Simulasi Persamaan (3.27) dan (3.28) dengan Nilai Awal $\eta(x, 0) = 0,2 \sin(x)$, $u(x, 0) = 0,2 \sin(x)$, $\Delta x = 0,1375$, dan $\Delta t = 0,0125$, serta $h = 0,01$	43
Gambar 3.3 Simulasi Persamaan (3.27) dan (3.28) dengan Nilai Awal $\eta(x, 0) = 0,2 \sin^2(x)$, $u(x, 0) = 0,2 \sin^2(x)$, $\Delta x = 0,45$, dan $\Delta t = 0,025$, serta $h = 0,05$	44
Gambar 3.3 Simulasi Persamaan (3.27) dan (3.28) dengan Nilai Awal $\eta(x, 0) = \operatorname{sech}^2(0,2x)$, $u(x, 0) = \operatorname{sech}^2(0,2x)$, $\Delta x = 0,65$, dan $\Delta t = 0,05$, serta $h = 0,08$	45
Gambar 3.5 Simulasi Persamaan (3.27) dan (3.28) dengan Nilai Awal $\eta(x, 0) = 0$ sampai $0,5$, $u(x, 0) = 0$, $\Delta x = 0,45$, dan $\Delta t = 0,025$, serta $h = 0,05$	45

BAB I

PENDAHULUAN


1.1 Latar Belakang

Persamaan gelombang air dangkal merupakan salah satu persamaan yang sering terkait pada berbagai fenomena alam. Hapsari (2014:1) menyebutkan bahwa gelombang air dangkal adalah gelombang yang terjadi pada permukaan air dangkal di mana panjang gelombang cukup besar dibandingkan kedalamannya. Salah satu contoh dari persamaan gelombang air dangkal yaitu gelombang tsunami yang memiliki periode gelombang yang sangat besar dan gelombangnya tidak mudah hilang ataupun tereduksi (Camfield, 1980:17).

Persamaan gelombang air dangkal merupakan salah satu model gelombang permukaan yang banyak digunakan untuk mensimulasikan penyebaran gelombang permukaan yang berjalan dua arah dalam ruang 1D. Persamaan air dangkal 1D mengasumsikan gelombang air sebagai masalah satu dimensi, yakni sebagai fungsi satu variabel ruang x dan variabel waktu t . Dinamika dari fenomena gelombang air dangkal dapat diketahui melalui solusi dari persamaan diferensial parsial tersebut. Solusi yang diperoleh bermanfaat untuk memprediksi kemana air akan mengalir, kecepatan aliran air, luas daerah dampak air yang datang dan rute penyelamatan untuk lari ke daerah yang lebih aman (Hapsari, 2014:1). Sehingga persamaan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah persamaan air dangkal 1D. Hal ini dilakukan untuk menyederhanakan masalah sehingga mempermudah dalam perhitungan.

Secara umum, untuk mencari solusi dari suatu permasalahan yang rumit dapat dilakukan estimasi atau perkiraan. Sebagaimana konsep dari metode

numerik adalah menghampiri solusi eksak dengan proses atau teknik tertentu untuk mendapatkan solusi numerik dari suatu persoalan matematika. Metode numerik dalam bahasa matematika lainnya dapat disebut dengan estimasi atau taksiran (Mufida, 2014:1). Konsep estimasi juga telah dijelaskan dalam al-Quran sebagaimana Allah Swt. berfirman dalam surat al-Shaffat/37:147:


 وَأَرْسَلْنَاهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ

“Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih” (QS. al-Shaffat/37:147).

Berdasarkan ayat tersebut dapat diketahui bahwasanya Allah Swt. telah memberikan petunjuk-Nya kepada umat manusia tentang konsep estimasi. Estimasi dalam ayat tersebut tidak disebutkan secara langsung, namun dari ayat tersebut tersirat makna hampiran atau kesan ketidakyakinan akan jumlah “seratus ribu atau lebih”. Menurut penulis, kata “aw yaziiduun” dalam ayat tersebut memberikan kesan ketidakpastian jumlah orang yang disebutkan. Dapat diambil kesimpulan bahwa jumlah orang yang dimaksud dalam ayat tersebut dimungkinkan lebih dari seratus ribu. Seratus ribu bukanlah jumlah yang sebenarnya melainkan jumlah hampiran atau taksiran (Abdussakir, 2014:95-96). Jumlah taksiran dalam ayat tersebut seperti yang ada pada konsep metode numerik yang menghasilkan solusi numerik. Sehingga berdasarkan ayat tersebut maka untuk mendapatkan solusi dari persamaan gelombang air dangkal yang mendekati solusi eksak dapat digunakan metode numerik. Dengan demikian, dari penelitian ini didapatkan ilmu pengetahuan yang baru yang merupakan salah satu bukti kekuasaan Allah Swt..

Salah satu metode numerik yang biasa digunakan selain metode elemen

beda hingga adalah metode volume hingga yang merupakan pendekatan yang digunakan dalam perhitungan dinamika fluida dengan menyelesaikan persamaan yang akan dicari solusinya melalui kontrol diskrit serta didiskritkan menjadi persamaan baru (Mungkasi dan Robert, 2012:13). Metode volume hingga merupakan metode yang sesuai untuk simulasi numerik dari berbagai macam tipe (misalnya: *elliptic*, *parabolic*, atau *hyperbolic*) dalam hukum konservasi, lebih khusus digunakan dalam beberapa bidang teknik seperti mekanika fluida, panas, dan perpindahan massa. Kelebihan dari metode volume hingga adalah dapat digunakan dalam kondisi struktur dasar yang berubah-ubah dan memberikan hasil yang stabil (Eymard, dkk, 2006:4). Metode ini juga memberikan *error* yang kecil.

Skema Godunov merupakan salah satu skema yang sering digunakan dalam metode volume hingga, yang mana skema Godunov merupakan salah satu contoh dari skema numerik yang dalam penurunannya dilakukan dengan mengaproksimasi penyelesaian sebagai jumlah dari fungsi linier/polinomial sepotong-sepotong yang didefinisikan atas setiap sel-grid (LeVeque, 2002:76). Skema Godunov ini akan mempermudah dalam perhitungan dengan menyelesaikan masalah Riemann. Dalam metode volume hingga, skema Godunov digunakan untuk menghitung indeks setengah yang muncul dari pendiskritan dengan menggunakan metode volume hingga, sehingga mempermudah dalam perhitungan.

Suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil (Zauderer, 2006:793-795). Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam metode volume hingga skema Godunov ini. Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan adalah kestabilan *von*

Neumann atau juga dikenal dengan stabilitas *Fourier* yang mana syarat kestabilannya adalah mutlak dari ρ kurang dari atau sama dengan 1. Selanjutnya, konsistensi dari solusi dengan sendirinya akan terpenuhi jika limit Δx dan Δt dengan nilai yang sekecil-kecilnya akan menuju 0. Jika syarat kestabilan dan konsistensi terpenuhi maka solusi numerik tersebut akan mendekati solusi analitik.

Pada penelitian sebelumnya, Hapsari (2014:74-75) menyatakan bahwa persamaan gelombang air dangkal linier 1D memiliki solusi analitik pada kasus bendungan bobol. Pada penelitian tersebut, Hapsari membatasi topografi dasar permukaan yang mendatar dan tanpa adanya gesekan air. Hapsari (2014:3) juga menyatakan bahwa persamaan gelombang air dangkal sebelumnya telah diteliti oleh Stoker (1957), Liggett (1994), dan Acheson (1990), serta Billingham dan King (2000) yang meneliti gelombang air dangkal pada topografi mendatar. Topografi mendatar membuat model gelombang tersebut menjadi lebih sederhana dibandingkan pada topografi miring atau sembarang.

Besson, dkk (2005:2-4) menyatakan persamaan gelombang air dangkal dengan menggunakan metode elemen hingga memiliki solusi numerik yang stabil dengan kondisi geometri yang tidak berubah-ubah. Dalam jurnal tersebut mengansumsikan bahwa kondisi geometri yang sudah ditentukan adalah mengabaikan gundukan dan efek lelehan endapan, serta kemiringan dari domain sangat kecil. Oleh karenanya untuk kondisi geometri yang memiliki kemiringan besar serta terdapat efek lelehan endapan dan gundukan yang tidak diabaikan, metode ini tidak memberikan hasil yang akurat.

Pada penelitian Kampf (2009:69-70), membahas tentang persamaan gelombang air dangkal linier 1D dengan menggunakan metode beda hingga dan diberikan satu kondisi awal yaitu $\eta(x, 0) = \eta_0 \sin(\frac{2\pi x}{\lambda})$ dan $u(x, 0) = u_0 \sin(\frac{2\pi x}{\lambda})$. Dari hasil penelitian tersebut diperoleh bahwa persamaan gelombang air dangkal linier 1D stabil dengan nilai awal yang telah diberikan tersebut. Sehingga pada penelitian ini, penulis mengembangkan penelitian Kampf yaitu dengan menggunakan metode volume hingga skema eksplisit dan memberikan nilai awal yang berlaku umum. Dengan demikian, maka harapan penulis dalam penelitian ini adalah mendapatkan penyelesaian yang mendekati solusi analitik dengan menggunakan metode volume hingga pada persamaan gelombang air dangkal linier 1D.

Berdasarkan uraian di atas maka judul yang diangkat dalam penelitian ini adalah “Penyelesaian Numerik Persamaan Gelombang Air Dangkal Linier 1D Menggunakan Metode Volume Hingga”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linier 1D menggunakan metode volume hingga?
2. Bagaimana syarat kestabilan dan kekonsistenan dari persamaan gelombang air dangkal linier 1D menggunakan metode volume hingga?
3. Bagaimana hasil simulasi penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linier 1D menggunakan metode volume hingga?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui penyelesaian persamaan gelombang air dangkal linier 1D menggunakan metode volume hingga.
2. Mengetahui syarat kestabilan dan kekonsistenan dari persamaan gelombang air dangkal linier 1D menggunakan metode volume hingga.
3. Mengetahui hasil simulasi penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linier 1D menggunakan metode volume hingga

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan mengenai prosedur penyelesaian persamaan gelombang air dangkal linier 1D dengan menggunakan metode volume hingga, serta dapat menemukan metode yang akurat dalam menyelesaikan persamaan tersebut.

1.5 Batasan Masalah

Untuk mendekati sasaran yang diharapkan, maka perlu adanya pembatasan permasalahan, antara lain:

1. Persamaan gelombang air dangkal linier 1D yang digunakan adalah

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial(uh)}{\partial x}$$

(Kampf, 2009:69).

2. Asumsi yang digunakan untuk syarat awal dan kondisi batas yang digunakan yaitu:

kondisi batas untuk η ,

$$\eta(0, t) = f_1(t) \quad \text{dan} \quad \eta(L, t) = f_2(t)$$

kemudian untuk u ,

$$u(0, t) = s_1(x) \quad \text{dan} \quad u(L, t) = s_2(x)$$

dan syarat awal untuk η dan u adalah:

$$\eta(x, 0) = \phi(x) \quad \text{dan} \quad u(x, 0) = \psi(x)$$

3. Skema yang digunakan dalam penelitian ini adalah skema eksplisit Godunov.

1.6 Metode Penelitian

Teknik kajian yang digunakan dalam pembahasan penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*library research*) dan deskriptif kualitatif dengan data simulasi. Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan penelitian ini antara lain:

1. Melakukan diskritisasi pada persamaan gelombang air dangkal linier 1D menggunakan metode volume hingga skema eksplisit Godunov.
2. Menentukan syarat kestabilan.
3. Menentukan syarat konsistensi.
4. Melakukan simulasi dari metode yang digunakan.
5. Interpretasi hasil.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan sistematika penulisan

yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

- Bab I Pendahuluan, yang meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- Bab II Kajian Pustaka, yang meliputi: penyelesaian masalah dalam Islam, persamaan gelombang air dangkal, metode volume hingga, skema Godunov, kestabilan, konsistensi, konvergensi, dan deret Taylor.
- Bab III Pembahasan, yang meliputi diskritisasi, konvergensi, analisis kestabilan, analisis konsistensi, simulasi dan interpretasi hasil, serta kajian keagamaan.
- Bab IV Penutup, pada bab ini terdiri atas kesimpulan serta saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linier 1D pada penelitian ini adalah dengan menggunakan metode volume hingga, serta menentukan syarat kestabilan dan kekonsistenan dari metode tersebut. Untuk menentukan kekonsistenan maka digunakan deret Taylor. Oleh sebab itu pada bagian ini dijelaskan tentang persamaan gelombang air dangkal, metode volume hingga, skema Godunov, stabilitas, konsistensi dan konvergensi, serta deret Taylor dalam penentuan kekonsistenan.

2.1 Persamaan Gelombang Air Dangkal

Hapsari (2014:1) menyatakan bahwa gelombang air dangkal adalah gelombang yang terjadi pada permukaan air dangkal di mana panjang gelombang cukup besar dibandingkan kedalamannya. Persamaan gelombang air dangkal merupakan salah satu model gelombang permukaan yang banyak digunakan untuk mensimulasikan penyebaran gelombang permukaan yang berjalan dua arah dalam ruang 1D dan ke segala arah untuk ruang 2D. Pada perairan yang sangat dangkal, kecepatan vertikal dalam air dapat diabaikan dan gelombangnya dinamakan sebagai gelombang panjang, profil dari gelombang dan penyebarannya dapat dimodelkan menggunakan pengintegralan secara vertikal terhadap persamaan dari prinsip konservasi massa dan konservasi momentum.

Persamaan air dangkal merupakan persamaan bagi gelombang air yang permukaannya dipengaruhi oleh kedalaman. Sistem dianggap air dangkal jika

kedalaman fluida jauh lebih kecil daripada panjang gelombangnya atau persamaan air dangkal hanya berlaku untuk gelombang yang memiliki perbandingan amplitudo gelombang dan panjang gelombangnya sebesar 1:10. Persamaan air dangkal berlaku untuk fluida yang memiliki masa jenis konstan, tidak kental, tidak dapat ditekan yang mengalir secara *irrotational*. Dalam hal ini, persamaan air dangkal merupakan persamaan bagi gelombang air yang profil permukaannya dipengaruhi oleh kedalaman (Kampf, 2009:68-70).

Persamaan gelombang air dangkal terdiri atas dua persamaan yang diperoleh dari konservasi massa dan konservasi momentum. Hapsari (2014:3-4) menyatakan bahwa penurunan secara fisis persamaan gelombang air dangkal 1D telah dikaji melalui tulisan ilmiah yang berasal dari Massachusetts Institute of Technology, serta penurunan dan penjabaran hukum konservasi secara matematis diberikan lebih tuntas oleh LeVeque (1992) dan Liggett (1994). Selain itu, peneliti lain yang mengkaji penurunan persamaan gelombang air dangkal adalah Billingham dan King (2000), Mungkasi (2011), Stoker (1957), dan Acheson (1990).

Kampf (2009:69) menyebutkan persamaan gelombang air dangkal linier 1D memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial(uh)}{\partial x}$$

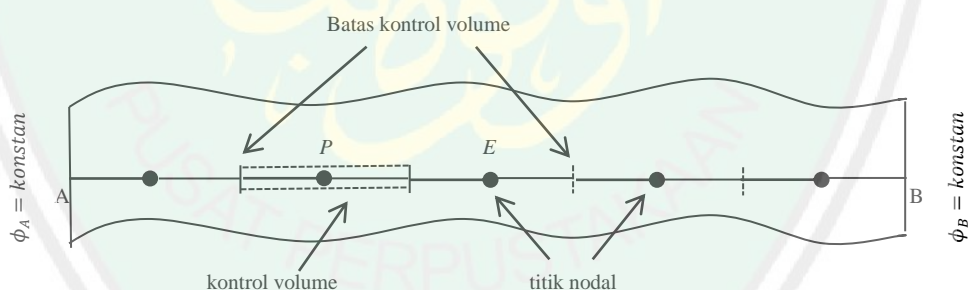
2.2 Metode Volume Hingga

Metode Volume Hingga adalah metode diskritisasi yang sesuai untuk simulasi numerik dari berbagai macam tipe hukum konservasi, biasanya digunakan pada perubahan secara geometri, baik permukaan terstruktur maupun tidak terstruktur, dan mengarah pada skema yang lebih kuat (Eymard, dkk, 2006:4).

Sebagai contoh penggunaan persamaan difusi kesetimbangan yang dimiliki oleh ϕ pada domain 1D didefinisikan seperti Gambar 2.1 di bawah ini. Proses tersebut ditentukan dengan

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (2.1)$$

dimana Γ adalah koefisien difusi dan S adalah sumber massa. Syarat batas ϕ pada titik A dan B sudah ditentukan (Versteeg dan Malalasekera, 2007:115).



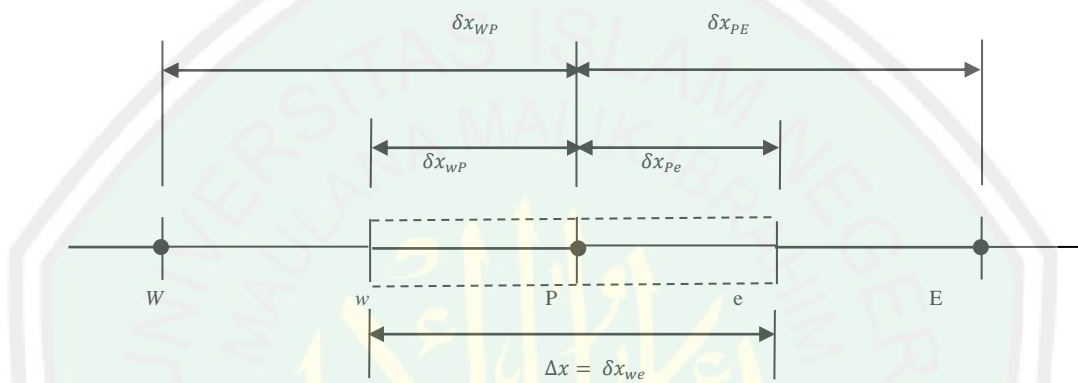
Gambar 2.1 Geometri Persamaan (2.1) (Versteeg dan Malalasekera, 2007:115)

2.2.1 Daerah Kontrol Volume

Langkah pertama dalam volume hingga adalah membagi domain ke dalam kontrol diskrit volume, yaitu dengan menempatkan nilai pada titik nodal dalam ruang antara A dan B seperti pada Gambar 2.1. Batas (permukaan) pada kontrol volume berada pada tengah antara *node* yang berdekatan. Sehingga setiap *node* dikelilingi oleh kontrol volume atau *cell*, yang merupakan titik yang umum untuk

mengatur kontrol volume didekat tepi domain (Versteeg dan Malalasekera, 2007:116).

Bagian ini adalah bagian yang tepat untuk membuat notasi sistem yang akan digunakan dalam pengembangan selanjutnya. Ketentuan umum dari metode volume hingga untuk persamaan difusi ditunjukkan seperti Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Ketentuan Umum Metode Volume Hingga Persamaan Difusi (Versteeg dan Malalasekera, 2007:115)

Secara umum titik nodal didefinisikan dengan P dan persekitarannya pada 1D, *node* sebelah barat dan timur didefinisikan dengan W dan E . Perbatasan sebelah barat pada kontrol volume disebut dengan w dan sebelah timur dengan e . Jarak antara *node* W dan P , P dan E didefinisikan dengan δx_{WP} dan δx_{PE} . Dengan cara yang sama jarak antara w dan titik P dan antara P dan e dinotasikan dengan δx_{wP} dan δx_{Pe} , seperti terlihat pada Gambar 2.2 (Versteeg dan Malalasekera, 2007:116).

2.2.2 Diskritisasi

Langkah utama dalam metode volume hingga adalah mengintegrasikan persamaan atas kontrol volume untuk menghasilkan diskritisasi persamaan pada titik nodal P . Kontrol volume yang didefinisikan di atas memberikan persamaan sebagai berikut:

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) dV + \int_{\Delta V} S dV = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (2.2)$$

dimana A adalah luas penampang yang menyalang pada sisi kontrol volume, ΔV adalah volume dan \bar{S} adalah rata-rata nilai pada S atas kontrol volume (Versteeg dan Malalasekera, 2007:116).

Agar diperoleh bentuk persamaan diskrit, koefisien difusi permukaan Γ dan gradien $\frac{d\phi}{dx}$ pada sebelah timur e dan barat w tersebut diperlukan, sehingga nilai dari ϕ dan koefisien difusi terdefinisi dan terevaluasi pada titik nodal. Untuk menghitung gradien pada sisi kontrol volume yaitu dengan mendekati sifat distribusi antar titik nodal yang digunakan. Dalam grid yang sama, nilai untuk Γ_e dan Γ_w diberikan dengan

$$\Gamma_w = \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2}$$

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2}$$

dan bentuk difusi fluks dievaluasi dengan

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{WP}} \right) \quad (2.3)$$

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right)$$

Dalam beberapa kasus metode volume hingga didekati dengan bentuk linier yaitu:

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_P \quad (2.4)$$

kemudian substitusi persamaan (2.3) dan (2.4) ke dalam persamaan (2.2). Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}} \right) + \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}} \right) + (S_u + S_p \phi_P) = 0 \quad (2.5)$$

Identifikasi koefisien dari ϕ_W dan ϕ_E pada persamaan (2.5) sebagai a_w dan a_E , dan koefisien dari ϕ_P dan a_p pada persamaan di atas dapat ditulis

$$a_p \phi_P = a_w \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (2.6)$$

dimana,

$$a_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$$

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{WE}} A_e$$

$$a_p = a_w + a_E + S_u$$

Persamaan (2.6) dan (2.4) merepresentasikan bentuk diskrit dari persamaan (2.1) (Versteeg dan Malalasekera, 2007:117-118).

Persamaan diskrit pada bentuk (2.6) harus diatur pada setiap titik nodal untuk mendapatkan penyelesaian masalah. Untuk kontrol volume yang berbatasan terhadap domain batas persamaan umum diskrit (2.6) merupakan modifikasi untuk menggabungkan kondisi batas (Versteeg dan Malalasekera, 2007:118).

2.3 Skema Godunov

Skema Godunov merupakan salah satu contoh dari skema numerik yang dalam penurunannya dilakukan dengan mengaproksimasi penyelesaian sebagai jumlah dari fungsi linier/polinomial sepotong-sepotong yang didefinisikan atas setiap sel-grid (LeVeque, 2002:76). Skema tersebut merupakan aproksimasi masalah Riemann pada setiap batas *cell*. Dalam metode volume hingga pada kasus

1D membagi domain ke dalam jaringan *node*, dimana jaringan *node* tersebut dinotasikan dengan

$$C_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$$

Metode ini tidak lepas dari hukum konservasi yaitu $q(x, t)_t + f(q(x, t))_x = 0$, setelah didiskritkan dengan metode volume hingga, bentuk diskrit dari persamaan tersebut adalah

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n)$$

di mana $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ adalah aproksimasi rata-rata fluks di sekitar $x = x_{i-\frac{1}{2}}$ adalah sebagai berikut:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t_{n+1}} f\left(q\left(x_{i-\frac{1}{2}}, t\right)\right) dt \quad (2.7)$$

Secara umum fungsi $q\left(x_{i-\frac{1}{2}}, t\right)$ terhadap t tidak dapat ditentukan solusi eksaknya. Sehingga dengan mengansumsikan bahwa $q\left(x_{i-\frac{1}{2}}, t\right) = q^\downarrow(Q_{i-1}^n, Q_i^n)$, dengan q^\downarrow adalah aproksimasi solusi eksak masalah Riemann. Maka persamaan (2.7) menjadi

$$\begin{aligned} F_{i-\frac{1}{2}}^n &= \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t_{n+1}} f(q^\downarrow(Q_{i-1}^n, Q_i^n)) dt \\ &= f(q^\downarrow(Q_{i-1}^n, Q_i^n)) \\ &= \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) \end{aligned} \quad (2.8)$$

dimana \mathcal{F} adalah fungsi *numerical flux*. Sehingga didapatkan solusi masalah Riemann persamaan (2.8) yaitu:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \min(f(Q_{i-1}^n), f(Q_i^n)), & Q_{i-1}^n < Q_i^n \\ \max(f(Q_{i-1}^n), f(Q_i^n)), & Q_{i-1}^n > Q_i^n \end{cases} \quad (2.9)$$

Bentuk persamaan (2.9) adalah bentuk skema Godunov secara umum untuk hukum konservasi (LeVeque, 2002:76-78).

2.4 Well Posed

Strauss (2007:25) menyatakan bahwa suatu persamaan diferensial parsial dengan syarat awal dan syarat batas dikatakan *well posed* jika memenuhi syarat:

1. Eksistensi: paling tidak terdapat satu solusi.
2. Keunikan: hanya terdapat satu solusi.
3. Stabilitas: jika data berubah sedikit, maka solusi akan berubah sedikit.

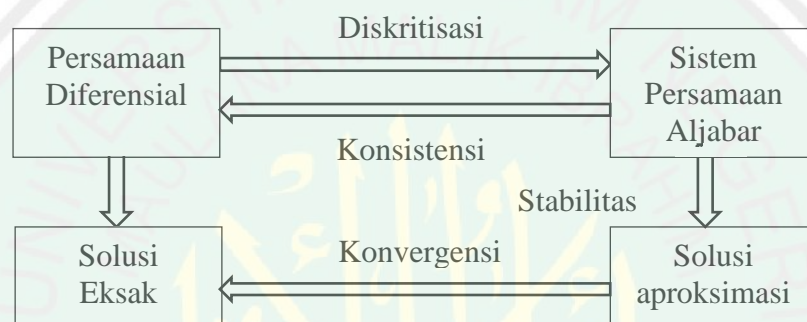
Dalam Strauss (2007:25-26) para ilmuwan biasanya mencoba mengatur kondisi fisik dari suatu permasalahan yang dapat dimodelkan dengan persamaan diferensial parsial supaya masalah tersebut menjadi *well posed*, sedangkan matematikawan mencoba untuk membuktikan apakah model beserta kondisi yang diberikan tersebut *well posed* atau tidak. Jika kondisi yang diberikan terlalu sedikit, maka kemungkinan akan terdapat lebih dari satu solusi (*nonuniqueness*) sedangkan jika kondisi yang diberikan terlalu banyak, maka kemungkinan tidak terdapat solusi (*nonexistence*).

2.5 Konvergensi

Candra (2011:22) menyebutkan bahwa kesuksesan solusi numerik diukur berdasarkan kriteria konvergensi, konsistensi, serta stabilitas. Konvergensi berhubungan dengan besarnya penyimpangan solusi pendekatan oleh metode

numerik terhadap solusi eksak. Kriteria konvergen dipahami sebagai kriteria di mana solusi metode numerik merupakan solusi pendekatan Persamaan Diferensial Parsial (PDP), jika Δx dan Δt mendekati 0.

Zauderer (2006:742) menyebutkan bahwa aproksimasi solusi pasti konvergen ke solusi analitiknya, jika konsistensi dari persamaan dan kestabilan dari skema yang diberikan terpenuhi.



Gambar 2.3 Hubungan Konseptual antara Konvergensi, Stabilitas, dan Konsistensi (Candra, 2011:22)

2.5.1 Kestabilan dan Konsistensi

Zauderer (2006:793-795) menyebutkan bahwa suatu permasalahan persamaan diferensial parsial dapat menjadi stabil dan tidak stabil. Suatu konsep kestabilan dan ketidakstabilan dapat diterapkan dalam metode volume hingga. Ketidakstabilan metode volume hingga menghasilkan kesalahan dalam aproksimasi numerik terhadap solusi eksak dari masalah yang diberikan, sehingga solusi numerik kurang mendekati nilai eksak. Candra (2011:23) menyebutkan bahwa kriteria stabilitas merupakan kondisi perlu dan cukup agar diperoleh solusi yang konvergen. Terminologi stabilitas menunjukkan karakteristik persamaan diferensial tertentu jika Δt mendekati 0 serta berhubungan dengan amplifikasi solusi selama proses komputasi. Jika amplifikasi solusi semakin besar, maka

proses komputasi akan divergen dan tidak memperoleh hasil (tidak konvergen), atau menunjukkan bahwa stabilitas komputasi sangat rendah.

Salah satu metode untuk menganalisis kestabilan adalah stabilitas *von Neumann* atau dikenal juga dengan stabilitas *Fourier*. Dengan menerapkan analisis kestabilan *von Neumann* terhadap metode volume hingga, maka dapat dicari kestabilan dari persamaan beda dengan mensubstitusikan $u_j^n = \rho^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan tersebut, yang mana superskrip $i = \sqrt{-1}$, n menunjukkan waktu, j merupakan vektor dan untuk semua a dalam interval $[0, 2\pi]$. Syarat perlu dan cukup kestabilan *von Neumann* adalah:

$$|\rho| \leq 1$$

Candra (2011:24) menyatakan bahwa solusi kriteria konsistensi dengan sendirinya akan terpenuhi jika Δx dan Δt mendekati 0, artinya skema dikatakan konsisten terhadap Persamaan Differensial Parsial (PDP), jika selisih antara persamaan tersebut dengan suku-suku *truncation error* pada PDP menuju nol jika lebar grid menuju nol. Kriteria kekonsistenan ini ditentukan dengan menggunakan deret Taylor.

2.5.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Deret Taylor untuk fungsi multivariabel sebagai berikut:

Misalkan diberikan fungsi f dengan variabel bebas x dan t diekspansi dengan deret

Taylor di sekitar (x) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}, t_{i+1}) &= f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_{i+1} - x_i) + \frac{\partial f}{\partial t}(t_{i+1} - t_i) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_{i+1} - x_i)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x_{i+1} - x_i)(t_{i+1} - t_i) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_{i+1} - t_i)^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

(Chapra dan Canale, 2010:96).

Sehingga untuk fungsi $f(x + \Delta x, t)$, $f(x - \Delta x, t)$, $f(x + 2\Delta x, t)$, $f(x, t - \Delta t)$, $f(x, t + \Delta t)$ dan $f(x + \Delta x, t + \Delta t)$ diekspansi ke dalam deret Taylor di sekitar (x, t) sebagai berikut:

$$f(x + \Delta x, t) = f(x, t) + f_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx}(x, t) \Delta x^2 + \frac{1}{6} f_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots$$

$$f(x - \Delta x, t) = f(x, t) - f_x(x, t) \Delta x + \frac{1}{2} f_{xx}(x, t) \Delta x^2 - \frac{1}{6} f_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \dots$$

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + f_t(x, t) \Delta t + \frac{1}{2} f_{tt}(x, t) \Delta t^2 + \frac{1}{6} f_{ttt}(x, t) \Delta t^3 + \dots$$

$$f(x, t - \Delta t) = f(x, t) - f_t(x, t) \Delta t + \frac{1}{2} f_{tt}(x, t) \Delta t^2 - \frac{1}{6} f_{ttt}(x, t) \Delta t^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, t + \Delta t) &= f(x, t) + f_x(x, t) \Delta x + f_t(x, t) \Delta t + \frac{1}{2} (f_{xx}(x, t) \Delta x^2 \\ &+ 2f_{xt}(x, t) \Delta x \Delta t + f_{tt}(x, t) \Delta t^2) + \frac{1}{6} (f_{xxx}(x, t) \Delta x^3 + \\ &3f_{xxt}(x, t) \Delta x^2 \Delta t + 3f_{xtt}(x, t) \Delta x \Delta t^2 + f_{ttt}(x, t) \Delta t^3) + \dots \end{aligned}$$

Dalam Strauss (2007:201) disebutkan bahwa terdapat dua jenis galat (*error*) dalam sebuah komputasi yaitu *truncation error* (*error* pemotongan) *roundoff error* (*error* pembulatan). *Roundoff error* adalah *error* yang terjadi

akibat pembulatan suatu bilangan sampai pada beberapa digit tertentu. *Truncation error* merupakan *error* yang terjadi karena pemotongan dari suatu deret tak hingga menjadi deret berhingga. Pendekatan yang sering dipakai pada penyelesaian numerik adalah deret Taylor.

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktik hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan, sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Ada kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan. Untuk menyederhanakan permasalahan biasanya hanya ditunjukkan pada beberapa suku deret Taylor tersebut, sedangkan suku yang lainnya diabaikan (Triatmojo, 2002:9).

2.6 Penyelesaian Masalah dalam Islam

Berbagai cara penyelesaian dilakukan oleh manusia dalam kehidupan untuk menyelesaikan suatu masalah. Seperti halnya dalam matematika, suatu permasalahan dapat diselesaikan dengan berbagai metode. Munir (2008:5) menyatakan bahwa secara umum suatu persamaan terdapat dua solusi yaitu solusi analitik atau disebut solusi sesungguhnya dan solusi numerik yang disebut sebagai solusi hampiran. Sehingga dapat diketahui bahwasannya setiap permasalahan selalu ada solusinya meskipun harus melalui proses yang sulit dan bertahap. Hal ini sesuai dengan firman Allah Swt. dalam al-Quran surat al-Insyiroh/94:5 yaitu:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. al-Insyiroh/94:5).

Dari ayat tersebut disebutkan bahwa sesudah mengalami kesulitan terdapat kemudahan. Allah Swt. telah menunjukkan bahwa setelah mengalami kesulitan pasti terdapat kemudahan, seperti halnya suatu masalah dalam matematika pasti mempunyai penyelesaian.

Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat al-Shaff/61:4 yaitu:

إِنَّ اللَّهَ يُحِبُّ الَّذِينَ يُقَاتِلُونَ فِي سَبِيلِهِ صَفًّا كَأَنَّهُمْ بُنْيَانٌ مَّرْصُومٌ ﴿٤﴾

“Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang berperang di jalan-Nya dalam barisan yang teratur seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh” (QS. ash-Shaff/61:4).

Dari ayat tersebut, Allah Swt. telah menunjukkan kepada manusia bahwa suatu permasalahan memiliki banyak cara untuk menyelesaikan permasalahan tersebut. Cara tersebut memiliki tahapan-tahapan dalam penyelesaiannya secara runtun. Allah Swt. berfirman dalam al-Quran surat al-Ankabut/29:69 yaitu:

وَالَّذِينَ جَاهَدُوا فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَا وَإِنَّ اللَّهَ لَمَعَ الْمُحْسِنِينَ ﴿٦٩﴾

“Dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) Kami, Kami akan tunjukkan kepada mereka jalan-jalan kami. Dan sungguh, Allah beserta orang-orang yang berbuat baik” (QS. al-Ankabut/29:69).

Menurut Shihab (2002:256-257) kata *subul* adalah bentuk jamak dari kata *sabil*. Ketika menafsirkan ayat 6 surat al-Fatihah, penulis antara lain mengemukakan bahwa kata *shirath* berarti jalan lebar bagaikan jalan tol yang dapat menelan si pejalan. Kata *shirath* selalu digunakan al-Quran dalam bentuk tunggal, berbeda dengan kata *sabil* yang sering kali diterjemahkan dengan jalan.

Tetapi dia adalah jalan kecil dan digunakan oleh al-Quran dalam bentuk tunggal serta jamak. Di sisi lain, kata *shirath* dikaitkan dengan Allah atau hamba-hambanya yang taat atau sesuatu yang *haq*. Berbeda dengan kata *sabil* yang dinisbahkan kepada Allah, seperti *sabilillah*, atau kepada orang bertakwa seperti *sabil al-muttaqin*, dan ada juga yang dinisbahkan kepada setan dan tirani (*sabil ath-thaghut*) atau orang-orang berdosa (*sabil al-mujrimin*). Sebagaimana dijelaskan pula dalam surat Yasin ayat 36 dan al-An'am ayat 161, maka agaknya tidak keliru jika dikatakan bahwa rincian ajaran agama dan rincian ibadah secara berdiri sendiri adalah *sabilillah*. Bersedekah adalah *sabilillah*, berperangpun demikian. Berhaji, berpuasa, menuntut ilmu dan lain-lain kebajikan adalah *sabilillah*. Sehingga sesuai dengan ayat tersebut, siapa yang ber-*mujahadah*, maka mereka akan diantarkan menuju ke aneka *subul* itu, lalu ini pada gilirannya mengantar mereka menuju *ash-Shirat al-Mustaqim*.

Demikian Allah Swt. telah menegaskan kepada manusia bahwa dalam mencari suatu penyelesaian terdapat banyak jalan, yang berarti banyak cara ataupun metode-metode. Ketika suatu persamaan sulit atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik karena melibatkan bentuk dan proses yang rumit, maka masih ada jalan lain untuk mendapatkan solusinya yakni secara numerik. Namun perhitungan dengan metode numerik secara manual memerlukan waktu yang lama dan berulang-ulang sehingga dibutuhkan ketelitian agar tidak terdapat kesalahan dalam melakukannya.

BAB III

PEMBAHASAN

Penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linier 1D pada penelitian ini yaitu dengan menggunakan metode volume hingga, yang terlebih dahulu menentukan bentuk diskrit, kemudian menentukan syarat kestabilan dan kekonsistenan dari metode tersebut, serta simulasi.

3.1 Diskritisasi

Dalam pembahasan ini, penulis menggunakan persamaan gelombang air dangkal linier 1D seperti yang disebutkan oleh Kampf (2009:69) yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial(uh)}{\partial x} \quad (3.2)$$

di mana u adalah kecepatan pada arah x , t adalah waktu, g adalah percepatan gravitasi, η adalah perubahan ketinggian permukaan air, dan h adalah total kedalaman air.

Asumsi syarat awal dan kondisi batas yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan ini yaitu:

kondisi batas untuk η ,

$$\eta(0, t) = f_1(t) \quad \text{dan} \quad \eta(L, t) = f_2(t)$$

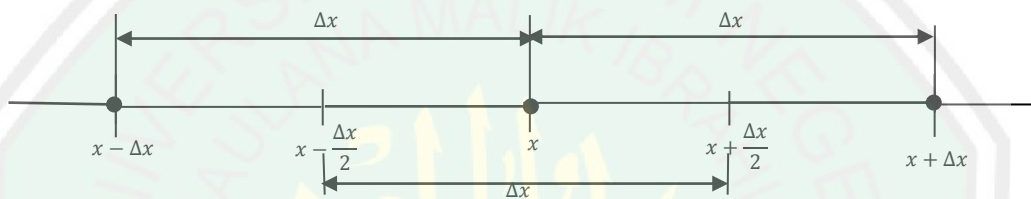
dan kondisi batas untuk u ,

$$u(0, t) = s_1(x) \quad \text{dan} \quad u(L, t) = s_2(x)$$

serta syarat awal untuk η dan u adalah:

$$\eta(x, 0) = \phi(x) \quad \text{dan} \quad u(x, 0) = \psi(x)$$

Dengan menggunakan metode volume hingga skema eksplisit, maka selanjutnya dilakukan diskritisasi sistem persamaan gelombang air dangkal (3.1) dan (3.2), dengan daerah kontrol volume yang digunakan seperti pada Gambar 3.1 berikut:



Gambar 3.1 Daerah Kontrol Volume Persamaan Gelombang Air Dangkal Linier 1D

Persamaan (3.1) dan (3.2) merupakan persamaan yang bergantung terhadap variabel x dan t , sehingga diskritisasi persamaan (3.1) terhadap kontrol volume di sekitar *node* x yaitu dengan mengintegrasikan persamaan (3.1) terhadap x dan t , sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dt \quad (3.3)$$

dengan mendahulukan integral terhadap t untuk ruas kiri, maka persamaan (3.3)

menjadi

$$\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dt \quad (3.4)$$

Integral persamaan (3.4) untuk ruas kiri terhadap kontrol volume adalah sebagai berikut:

$$\int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t} dt dx = \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) dx$$

$$\approx (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))\Delta x \quad (3.5)$$

Selanjutnya adalah integral persamaan (3.4) untuk ruas kanan terhadap kontrol volume yaitu:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} -g \frac{\partial \eta}{\partial x} dx dt = \int_t^{t+\Delta t} -g \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) dt \quad (3.6)$$

Secara umum integral persamaan (3.6) terhadap t tidak dapat ditentukan solusi eksaknya. Sehingga untuk menentukan integral persamaan (3.6) terhadap t digunakan pendekatan parameter pembobot θ antara 0 dan 1 yaitu:

$$\int_t^{t+\Delta t} \eta(x, t) dt \approx (\theta \eta(x, t + \Delta t) + (1 - \theta) \eta(x, t)) \Delta t \quad (3.7)$$

Dengan menggunakan persamaan (3.7) pada (3.6), maka persamaan (3.6) menjadi sebagai berikut:

$$\int_t^{t+\Delta t} -g \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) dt$$

$$= -g \left(\theta \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t \right) \right) \right. \quad (3.8)$$

$$\left. + (1 - \theta) \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) \right) \Delta t$$

Berdasarkan persamaan (3.5) dan (3.8), maka bentuk diskrit persamaan (3.1) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& (u(x, t + \Delta t) - u(x, t))\Delta x \\
&= -g \left(\theta \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \theta) \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) \right) \Delta t
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Persamaan (3.9) adalah bentuk akhir diskritisasi persamaan (3.1) yang bergantung pada nilai dari θ . Ketika $\theta = 1$ maka bentuk persamaan tersebut dinamakan skema implisit, ketika $\theta = \frac{1}{2}$ maka akan membentuk skema Crank-Nicolson, dan ketika $\theta = 0$ maka bentuk tersebut dinamakan skema eksplisit. Sehingga skema eksplisit persamaan (3.9) adalah

$$(u(x, t + \Delta t) - u(x, t))\Delta x = -g \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) \Delta t \tag{3.10}$$

Persamaan (3.10) dapat ditulis sebagai berikut:

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) - \eta \left(x - \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) \tag{3.11}$$

Karena x merupakan indeks terhadap ruang misalkan j , dan t merupakan indeks terhadap waktu misalkan n , sehingga $x + \Delta x = j + 1$, serta $t + \Delta t = n + 1$, maka persamaan (3.11) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\eta_{j+\frac{1}{2}}^n - \eta_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \tag{3.12}$$

Persamaan (3.12) dapat dijelaskan dalam tabel 3.1 dan Tabel 3.2. Dengan * adalah nilai yang sudah diketahui berdasarkan kondisi batas dan nilai awal yang diberikan, dan $\forall n = 1, 2, 3, \dots, m$, serta $\forall j = 1, 2, 3, \dots, L$. Sehingga untuk mengisi ruang yang kosong pada Tabel 3.1 maka digunakan persamaan (3.12).

Tabel 3.1 Ilustrasi Persamaan (3.12) untuk u

$j \backslash N$	1	2	3	4	...	m
1	*	*	*	*	*	*
2	*	u_2^2	u_2^3			
3	*					
4	*					
⋮	*					
L	*	*	*	*	*	*

Tabel 3.2 Ilustrasi Persamaan (3.12) untuk η

$j \backslash n$	1	2	3	4	...	m
1	*	*	*	*	*	*
2	*	η_2^2				
3	*	η_3^2				
4	*					
⋮	*					
L	*	*	*	*	*	*

Oleh karena itu untuk $n = 1$, dan $j = 2$ diperoleh bentuk persamaan (3.12) yaitu:

$$u_2^2 = u_2^1 - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\eta_{1+\frac{1}{2}}^1 - \eta_{1-\frac{1}{2}}^1 \right)$$

Nilai dari u_2^1 , g , Δt , dan Δx sudah diberikan atau diketahui, sedangkan untuk $\eta_{1+\frac{1}{2}}^1$

dan $\eta_{1-\frac{1}{2}}^1$ tidak dapat dicari dikarenakan terdapat indeks setengah. Oleh sebab itu

untuk menangani indeks setengah yang muncul akibat pendiskritan menggunakan

metode volume hingga seperti pada persamaan (3.12), maka digunakan skema

Godunov seperti yang sudah dijelaskan pada Bab II. Sehingga untuk $\eta_{j+\frac{1}{2}}^n, \eta_{j-\frac{1}{2}}^n$,

berlaku:

$$\eta_{j+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \min(\eta_j^n, \eta_{j+1}^n), & \eta_j^n < \eta_{j+1}^n \\ \max(\eta_j^n, \eta_{j+1}^n), & \eta_j^n > \eta_{j+1}^n \end{cases}$$

dan

$$\eta_{j-\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} \min(\eta_{j-1}^n, \eta_j^n), & \eta_{j-1}^n < \eta_j^n \\ \max(\eta_{j-1}^n, \eta_j^n), & \eta_{j-1}^n > \eta_j^n \end{cases}$$

Kemudian dengan menerapkan kondisi batas pada persamaan (3.12), maka persamaan (3.12) untuk kondisi batas $\eta(0, t) = f_1(t)$ yaitu:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\eta_{j+\frac{1}{2}}^n - f_1(t) \right) \quad (3.13)$$

dan $\eta(L, t) = f_2(t)$ yaitu:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_2(t) - \eta_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (3.14)$$

Diskritisasi persamaan (3.2) terhadap kontrol volume di sekitar *node* $x + \frac{\Delta x}{2}$, dan mendahulukan integral terhadap t pada ruas kiri, dan h bernilai konstan, maka diperoleh persamaan berikut:

$$\int_x^{x+\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \eta}{\partial t} dt dx = \int_t^{t+\Delta t} -h \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \quad (3.15)$$

Integral persamaan (3.15) untuk ruas kiri dilakukan pada daerah kontrol volume disekitar *node* $x + \frac{\Delta x}{2}$, karena untuk *node* $x + \frac{\Delta x}{2}$ pada η telah didapatkan nilainya pada persamaan (3.12). Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \eta}{\partial t} dt dx &= \int_x^{x+\Delta x} \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t \right) - \eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) dx \\ &\approx \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t \right) - \eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) \Delta x \end{aligned} \quad (3.16)$$

Selanjutnya adalah integral persamaan (3.15) untuk ruas kanan terhadap kontrol volume yaitu:

$$\int_t^{t+\Delta t} -h \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial u}{\partial x} dx dt = \int_t^{t+\Delta t} -h(u(x + \Delta x, t) - u(x, t)) dt \quad (3.17)$$

Secara umum integral persamaan (3.17) terhadap t tidak dapat ditentukan solusi eksaknya. Sehingga untuk menentukan integral persamaan (3.17) terhadap t digunakan pendekatan parameter pembobot θ antara 0 dan 1 yaitu:

$$\int_t^{t+\Delta t} u(x, t) dt \approx (\theta u(x, t + \Delta t) + (1 - \theta)u(x, t))\Delta t \quad (3.18)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (3.18) pada (3.17), maka persamaan (3.17) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} -h(u(x + \Delta x, t) - u(x, t)) dt \\ = -h \left(\theta(u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t + \Delta t)) \right. \\ \left. + (1 - \theta)(u(x + \Delta x, t) - u(x, t)) \right) \Delta t \end{aligned} \quad (3.19)$$

Berdasarkan persamaan (3.16) dan (3.19), maka diperoleh bentuk diskrit persamaan (3.2) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t \right) - \eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) \Delta x \\ = -h \left(\theta(u(x + \Delta x, t + \Delta t) - u(x, t + \Delta t)) \right. \\ \left. + (1 - \theta)(u(x + \Delta x, t) - u(x, t)) \right) \Delta t \end{aligned} \quad (3.20)$$

Bentuk eksplisit (3.20) yaitu ketika $\theta = 0$ adalah sebagai berikut:

$$\left(\eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t \right) - \eta \left(x + \frac{\Delta x}{2}, t \right) \right) \Delta x = -h(u(x + \Delta x, t) - u(x, t)) \Delta t \quad (3.21)$$

Persamaan (3.21) dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\eta_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \eta_{j+\frac{1}{2}}^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (3.22)$$

Kemudian dengan menerapkan kondisi batas pada persamaan (3.22), maka persamaan (3.22) untuk kondisi batas $u(0, t) = s_1(t)$ yaitu:

$$\eta_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \eta_{j+\frac{1}{2}}^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - s_1(t)) \quad (3.23)$$

dan untuk kondisi batas $u(L, t) = s_2(t)$ yaitu:

$$\eta_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \eta_{j+\frac{1}{2}}^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} (s_2(t) - u_j^n) \quad (3.24)$$

Persamaan (3.13), (3.14), (3.23), dan (3.24) merupakan modifikasi bentuk diskrit persamaan (3.1) dan (3.2) dengan menggabungkan kondisi batas. Sehingga dari uraian di atas didapatkan bentuk diskrit persamaan (3.1) dan (3.2) terhadap kontrol volume skema eksplisit adalah sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\eta_{j+\frac{1}{2}}^n - \eta_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (3.25)$$

$$\eta_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \eta_{j+\frac{1}{2}}^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) \quad (3.26)$$

Karena nilai dari u_{j+1}^n dan u_j^n telah didapatkan sebelumnya pada persamaan (3.25), maka nilai tersebut digantikan dengan u_{j+1}^{n+1} dan u_j^{n+1} , serta agar skema yang diberikan stabil. Sehingga bentuk diskrit persamaan (3.1) dan

(3.2) secara umum adalah sebagai berikut:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\eta_{j+\frac{1}{2}}^n - \eta_{j-\frac{1}{2}}^n \right) \quad (3.27)$$

$$\eta_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \eta_{j+\frac{1}{2}}^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \quad (3.28)$$

3.2 Analisis Konvergensi

Dalam suatu teorema ekuivalensi lax menyatakan bahwa untuk suatu masalah nilai awal yang *well posed*, dan jika suatu persamaan konsisten dan stabil, maka persamaan tersebut konvergen. Sehingga dapat disimpulkan bahwa kriteria konvergensi dengan sendirinya akan terpenuhi, jika dalam skema yang digunakan stabil dan konsisten. Dalam hal ini akan digunakan analisis stabilitas *von Neumann* yang mana syarat kestabilannya adalah $|\rho| \leq 1$, oleh karena itu jika skema yang digunakan stabil dan konsisten maka konvergensi dari skema tersebut akan terpenuhi.

3.2.1 Analisis Kestabilan

Untuk mengetahui apakah metode yang digunakan untuk mendekati persamaan air dangkal tersebut stabil atau tidak, maka perlu melakukan uji kestabilan dengan menggunakan analisa stabilitas *von Neumann*, dengan cara mensubstitusikan $u_j^n = p^n e^{iaj}$, $\eta_j^n = q^n e^{iaj}$ dan $i = \sqrt{-1}$ ke dalam bentuk diskrit persamaan (3.1) dan (3.2).

Untuk membuktikan bahwa persamaan (3.25) dan (3.26) tidak stabil, maka digunakan analisa stabilitas *von Neumann*. Sehingga untuk persamaan (3.25) menjadi sebagai berikut:

$$p^{n+1}e^{iaj} = p^n e^{iaj} - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(q^n e^{ia(j+\frac{1}{2})} - q^n e^{ia(j-\frac{1}{2})} \right) \quad (3.29)$$

atau dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$p^{n+1}e^{iaj} = p^n e^{iaj} - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(e^{ia(j+\frac{1}{2})} - e^{ia(j-\frac{1}{2})} \right) q^n \quad (3.30)$$

untuk menyederhanakan, maka persamaan (3.30) dibagi dengan e^{iaj} , sehingga didapatkan bentuk persamaan (3.30) sebagai berikut:

$$p^{n+1} = p^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(e^{\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ia}{2}} \right) q^n \quad (3.31)$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$, maka persamaan (3.31) dapat ditulis sebagai berikut:

$$p^{n+1} = p^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\cos \left(\frac{a}{2} \right) + i \sin \left(\frac{a}{2} \right) - \cos \left(\frac{a}{2} \right) + i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) q^n$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$p^{n+1} = p^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) q^n \quad (3.32)$$

Selanjutnya substitusi $u_j^n = p^n e^{iaj}$, $\eta_j^n = q^n e^{iaj}$, dan $i = \sqrt{-1}$ ke dalam persamaan (3.26), sehingga diperoleh:

$$q^{n+1}e^{ia(j+\frac{1}{2})} = q^n e^{ia(j+\frac{1}{2})} - h \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(p^n e^{ia(j+1)} - p^n e^{iaj} \right) \quad (3.33)$$

Kemudian dengan membagi kedua ruas terhadap e^{iaj} persamaan (3.33), maka didapatkan bentuk persamaan (3.33) adalah sebagai berikut:

$$q^{n+1}e^{\frac{ia}{2}} = q^n e^{\frac{ia}{2}} - h \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{ia} - 1)p^n \quad (3.34)$$

Untuk menyederhanakan, maka persamaan (3.34) dibagi dengan $e^{\frac{ia}{2}}$, sehingga didapatkan bentuk persamaan (3.34) sebagai berikut:

$$q^{n+1} = q^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(e^{\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ia}{2}} \right) p^n \quad (3.35)$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$, maka persamaan (3.35) dapat ditulis sebagai berikut:

$$q^{n+1} = q^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) p^n \quad (3.36)$$

Berdasarkan persamaan (3.32) dan (3.36), maka diperoleh

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) q^n \\ q^{n+1} &= q^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) p^n \end{aligned} \quad (3.37)$$

Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) \\ -2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^n \\ q^n \end{bmatrix}$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} p^n \\ q^n \end{bmatrix}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) \\ -2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kriteria kestabilan *von Neumann*, maka norm nilai eigen dari matriks amplifikasi A haruslah kurang dari atau sama dengan 1. Sehingga diperoleh nilai eigen dari A sebagai berikut:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{matrix} 1 - \lambda & -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) & 1 - \lambda \end{matrix} \right| = 0$$

sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$(1 - \lambda)^2 + 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

atau dapat disederhanakan menjadi persamaan sebagai berikut:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \quad (3.38)$$

Misalkan,

$$c = 1 + 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \quad (3.39)$$

maka persamaan (3.38) dapat ditulis dalam bentuk persamaan berikut:

$$\lambda^2 - 2\lambda + c = 0$$

sehingga akar-akar dari persamaan (3.39) adalah

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - c}$$

atau dapat ditulis

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1 - c}$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{1 - c}$$

Dalam kajian pustaka di atas telah dijelaskan bahwa syarat kestabilan akan terpenuhi jika $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$. Sehingga diperoleh syarat kestabilan untuk

λ_1 yaitu

$$-1 \leq 1 + \sqrt{1-c} \leq 1 \quad (3.40)$$

Syarat I:

$$-1 \leq 1 + \sqrt{1-c}$$

Nilai yang memenuhi syarat 1, yaitu ketika $c \leq 1$.

Syarat II:

$$1 + \sqrt{1-c} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-c} \leq 0$$

Karena tidak mungkin $\sqrt{1-c} < 0$, sehingga nilai yang memenuhi syarat II yaitu $c = 1$.

Sedangkan untuk λ_2 yaitu

$$-1 \leq 1 - \sqrt{1-c} \leq 1 \quad (3.41)$$

Syarat I:

$$-1 \leq 1 - \sqrt{1-c}$$

maka nilai c yang memenuhi yaitu $c \geq -3$.

Syarat II:

$$1 - \sqrt{1-c} \leq 1$$

maka nilai c yang memenuhi yaitu $c \leq 1$.

Berdasarkan syarat yang telah diperoleh pada persamaan (3.40) dan (3.41), maka nilai c yang memenuhi yaitu $c = 1$. Sehingga persamaan (3.39) menjadi sebagai berikut:

$$1 = 1 + 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \quad (3.42)$$

Berdasarkan persamaan (3.42) maka dapat diketahui bahwa bentuk diskrit persamaan gelombang air dangkal yaitu persamaan (3.25) dan (3.26) tidak stabil. Sehingga analisis kestabilan dilakukan pada persamaan (3.27) dan (3.28).

Untuk membuktikan bahwa persamaan (3.27) dan (3.28) stabil, maka digunakan analisa stabilitas *von Neumann*. Karena persamaan (3.27) sama seperti persamaan (3.25), sehingga bentuk persamaan (3.27) berdasarkan susbtitusi $u_j^n = p^n e^{iaj}$, $\eta_j^n = q^n e^{iaj}$, dan $i = \sqrt{-1}$ berubah menjadi:

$$p^{n+1} = p^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) q^n \quad (3.43)$$

Selanjutnya substitusi $u_j^n = p^n e^{iaj}$, $\eta_j^n = q^n e^{iaj}$, dan $i = \sqrt{-1}$ ke dalam persamaan (3.28), sehingga diperoleh:

$$q^{n+1} e^{ia(j+\frac{1}{2})} = q^n e^{ia(j+\frac{1}{2})} - h \frac{\Delta t}{\Delta x} (p^{n+1} e^{ia(j+1)} - p^{n+1} e^{iaj}) \quad (3.44)$$

Kemudian dengan membagi kedua ruas terhadap e^{iaj} pada persamaan (3.44), maka didapatkan bentuk persamaan (3.44) adalah sebagai berikut:

$$q^{n+1} e^{\frac{ia}{2}} = q^n e^{\frac{ia}{2}} - h \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{ia} - 1) p^{n+1} \quad (3.45)$$

Untuk menyederhanakan, maka persamaan (3.45) dibagi dengan $e^{\frac{ia}{2}}$, sehingga didapatkan bentuk persamaan (3.45) sebagai berikut:

$$q^{n+1} = q^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(e^{\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ia}{2}} \right) p^{n+1} \quad (3.46)$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \pm i \sin a$, maka persamaan (3.46) dapat ditulis sebagai berikut:

$$q^{n+1} = q^n - h \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) p^{n+1} \quad (3.47)$$

Berdasarkan persamaan (3.43) dan (3.47), maka diperoleh persamaan berikut:

$$p^{n+1} = p^n - g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) q^n \quad (3.48)$$

$$q^{n+1} + h \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(2i \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) p^{n+1} = q^n$$

Persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^n \\ q^n \end{bmatrix}$$

atau dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} p^{n+1} \\ q^{n+1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} p^n \\ q^n \end{bmatrix}$$

dengan

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) \\ -2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) & 1 - 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kriteria kestabilan *von Neumann*, maka norm nilai eigen dari matriks amplifikasi B haruslah kurang dari atau sama dengan 1. Sehingga diperoleh determinan dari A adalah

$$|B| = \left(1 - 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \right) - \left(\left(2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) \left(2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \left(\frac{a}{2} \right) \right) \right)$$

$$= 1 - 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) + 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right)$$

$$= 1$$

Kemudian nilai eigen dari B dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) & 1 - 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -2ig \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2ih \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin\left(\frac{a}{2}\right) & 1 - 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) - \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$(1 - \lambda) \left(1 - 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) - \lambda \right) + 4gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = 0$$

atau dapat disederhanakan menjadi persamaan sebagai berikut:

$$\lambda^2 - 2 \left(1 - 2gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \right) \lambda + 1 = 0 \quad (3.49)$$

Misalkan,

$$b = 1 - 2gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

maka persamaan (3.49) dapat ditulis

$$\lambda^2 - 2b\lambda + 1 = 0$$

sehingga akar-akar dari persamaan (3.49) adalah

$$\lambda_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 1}$$

atau dapat ditulis

$$\lambda_1 = 1 - 2gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) + \sqrt{\left(1 - 2gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \right)^2 - 1}$$

$$\lambda_2 = 1 - 2gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) - \sqrt{\left(1 - 2gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \right)^2 - 1}$$

Dalam kajian pustaka di atas telah dijelaskan bahwa syarat kestabilan akan terpenuhi jika $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$. Sehingga nilai yang memenuhi syarat kestabilan tersebut adalah ketika b kurang dari atau sama dengan 1. Sehingga diperoleh,

$$-1 \leq 1 - 2gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \leq 1$$

atau dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut:

$$gh \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \leq 1 \quad (3.50)$$

Karena $0 \leq \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right) \leq 1$, maka persamaan (3.50) dapat direduksi menjadi persamaan berikut:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gh} \leq 1 \quad (3.51)$$

Sehingga persamaan (3.51) merupakan syarat kestabilan dari persamaan gelombang air dangkal linier 1D dengan menggunakan metode volume hingga skema eksplisit.

3.2.2 Analisis Konsistensi

Konsistensi metode volume hingga skema eksplisit dapat dicari dengan menggunakan ekspansi deret Taylor yang disubstitusikan ke dalam persamaan (3.27) dan (3.28). Ekspansi deret Taylor yang digunakan dalam persamaan (3.27) dan (3.28) yaitu:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n + \dots \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} = & u_j^n + \Delta x u_x |_j^n + \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx} |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n \\ & + \Delta x \Delta t u_{xt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n \\ & + \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt} |_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt} |_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\eta_{j+\frac{1}{2}}^n = \eta_j^n + \frac{1}{2} \Delta x \eta_x |_j^n + \frac{1}{8} \Delta x^2 \eta_{xx} |_j^n + \frac{1}{48} \Delta x^3 \eta_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.54)$$

$$\eta_{j-\frac{1}{2}}^n = \eta_j^n - \frac{1}{2} \Delta x \eta_x |_j^n + \frac{1}{8} \Delta x^2 \eta_{xx} |_j^n - \frac{1}{48} \Delta x^3 \eta_{xxx} |_j^n + \dots \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \eta_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = & \eta_j^n + \frac{1}{2} \Delta x \eta_x |_j^n + \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{8} \Delta x^2 \eta_{xx} |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n \\ & + \frac{2}{4} \Delta x \Delta t \eta_{xt} |_j^n + \frac{1}{48} \Delta x^3 \eta_{xxx} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n \\ & + \frac{3}{24} \Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt} |_j^n + \frac{3}{12} \Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt} |_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.56)$$

Untuk penyederhanaan, maka persamaan (3.52), (3.54) dan (3.55) dapat disubstitusikan ke dalam persamaan (3.27), sehingga dapat diuraikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n = & \left(u_j^n + \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n + \dots \right) - u_j^n \\ = & \Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n + \dots \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned}
\eta_{j+\frac{1}{2}}^n - \eta_{j-\frac{1}{2}}^n &= (\eta_j^n + \frac{1}{2}\Delta x \eta_x |_j^n + \frac{1}{8}\Delta x^2 \eta_{xx} |_j^n + \frac{1}{48}\Delta x^3 \eta_{xxx} |_j^n + \dots) \\
&\quad - (\eta_j^n - \frac{1}{2}\Delta x \eta_x |_j^n + \frac{1}{8}\Delta x^2 \eta_{xx} |_j^n - \frac{1}{48}\Delta x^3 \eta_{xxx} |_j^n + \dots) \\
&= \eta_j^n + \frac{1}{2}\Delta x \eta_x |_j^n + \frac{2}{48}\Delta x^3 \eta_{xxx} |_j^n + \dots
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Selanjutnya untuk mengetahui pemotongan pertama dari persamaan (3.27), maka dengan mensubstitusikan persamaan (3.57) dan (3.58) ke dalam persamaan (3.27).

Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
\Delta t u_t |_j^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 u_{tt} |_j^n + \frac{1}{6} \Delta t^3 u_{ttt} |_j^n + \dots &= g \frac{\Delta t}{\Delta x} (\eta_j^n + \frac{1}{2}\Delta x \eta_x |_j^n \\
&\quad + \frac{2}{48}\Delta x^3 \eta_{xxx} |_j^n + \dots)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Bentuk persamaan (3.59) dapat disederhanakan menjadi persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
(u_t + g\eta_x)|_j^n + \frac{1}{2}u_{tt}|_j^n \Delta t + \frac{1}{6}u_{ttt}|_j^n \Delta t^2 + \frac{2}{48}g\eta_{xxx}|_j^n \Delta x^2 \\
+ \frac{2}{3840}g\eta_{xxx}|_j^n \Delta x^4 + \dots = 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

dari persamaan (3.60) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde $(\Delta t, \Delta x^2)$.

Kemudian untuk penyederhanaan, substitusi persamaan (3.52), (3.53), (3.54) dan (3.56) ke dalam persamaan (3.28). Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
\eta_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \eta_{j+\frac{1}{2}}^n &= \Delta t \eta_t |_j^n + \frac{1}{2}\Delta t^2 \eta_{tt} |_j^n + \frac{2}{4}\Delta x \Delta t \eta_{xt} |_j^n + \frac{1}{6}\Delta t^3 \eta_{ttt} |_j^n \\
&\quad + \frac{3}{4}\Delta x^2 \Delta t \eta_{xxt} |_j^n + \frac{3}{12}\Delta x \Delta t^2 \eta_{xtt} |_j^n + \dots
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= \Delta x u_x|_j^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 u_{xx}|_j^n + \Delta x \Delta t u_{xt}|_j^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 u_{xxx}|_j^n \\
&+ \frac{3}{6} \Delta x^2 \Delta t u_{xxt}|_j^n + \frac{3}{6} \Delta x \Delta t^2 u_{xtt}|_j^n + \dots
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Selanjutnya untuk mengetahui pemotongan pertama dari persamaan (3.28), maka substitusikan persamaan (3.61) dan (3.62) ke dalam persamaan (3.28). Sehingga diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
&(\eta_t + hu_x)|_j^n + \left(\frac{2}{4}\eta_{xt} + \frac{1}{2}hu_{xx}\right)|_j^n \Delta x + \left(\frac{1}{2}\eta_{tt} + hu_{xt}\right)|_j^n \Delta t \\
&+ \left(\frac{3}{12}\eta_{xtt} + \frac{3}{6}hu_{xxt}\right)|_j^n \Delta x \Delta t + \left(\frac{3}{24}\eta_{xxt} + \frac{1}{6}hu_{xxx}\right)|_j^n \Delta x^2 \\
&+ \left(\frac{1}{6}\eta_{ttt} + \frac{3}{6}hu_{xtt}\right)|_j^n \Delta t^2 + \dots = 0
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Dari persamaan (3.63) dapat diketahui bahwa *error* pemotongan yang dihasilkan mempunyai orde $(\Delta x, \Delta t)$. Persamaan (3.63) dikatakan konsisten jika:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0} \left(\frac{2}{4}\eta_{xt} + \frac{1}{2}hu_{xx}\right)|_j^n \Delta x + \left(\frac{1}{2}\eta_{tt} + hu_{xt}\right)|_j^n \Delta t = 0 \tag{3.64}$$

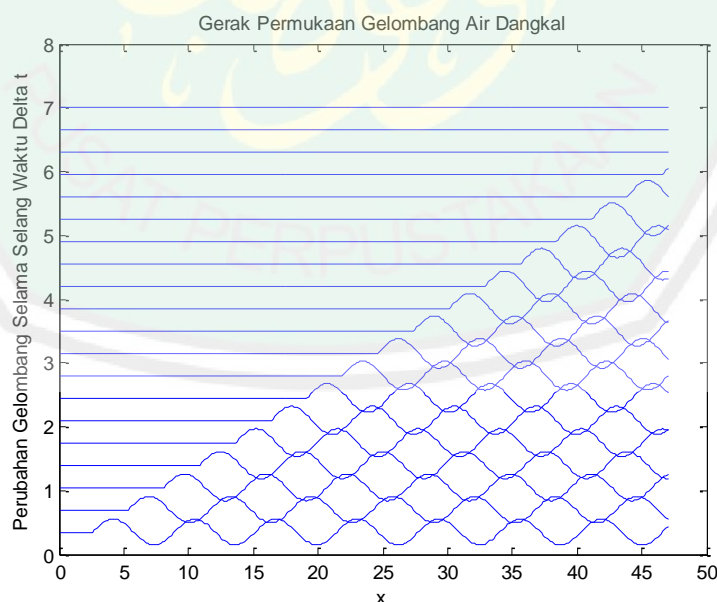
Jika Δx dan Δt sangat kecil maka jumlah dari limit tersebut akan semakin kecil, karena berapapun nilai η_{xt} , u_{xx} , η_{tt} , dan u_{xt} jika dikalikan dengan nilai dari Δx dan Δt akan ikut mengecil. Sehingga *error* pemotongan akan menuju nol.

3.3 Simulasi dan Interpretasi

Pada subbab ini simulasi dilakukan dengan menggunakan program MATLAB. Setelah syarat kestabilan diperoleh dari skema yang digunakan, maka dapat dipilih nilai dari Δx dan Δt yang memenuhi syarat kestabilan yang akan digunakan dalam simulasi. Persamaan yang digunakan dalam program tersebut yaitu persamaan (3.27) dan (3.28) yang merupakan bentuk diskrit dari persamaan

gelombang air dangkal linier 1D. Solusi persamaan gelombang air dangkal linier 1D akan stabil jika $\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gh} \leq 1$.

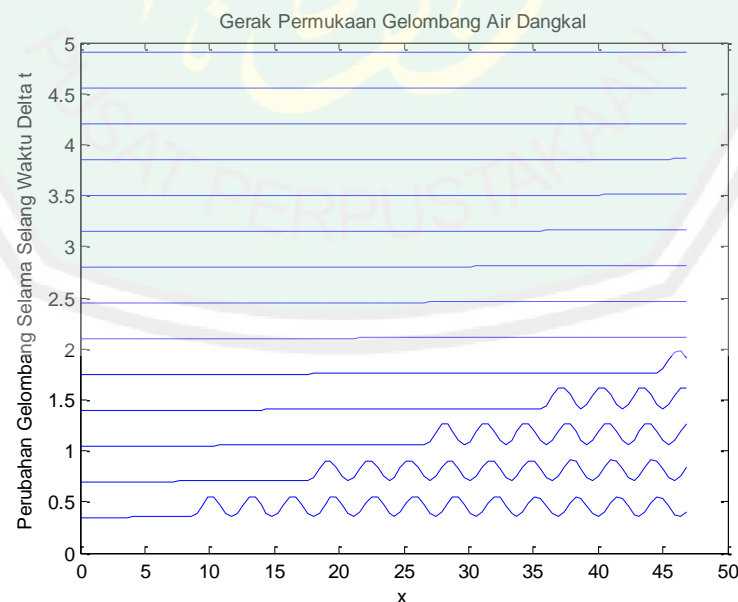
Simulasi pertama, berdasarkan syarat kestabilan yang diperoleh yaitu saat $\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gh} \leq 1$ serta diberikan nilai awal $\eta(x, 0) = 0,2 \sin(x)$ dan $u(x, 0) = 0,2 \sin(x)$, sehingga simulasi persamaan gelombang air dangkal linier 1D yaitu persamaan (3.27) dan (3.28) dapat dilihat pada Gambar 3.2. Gambar tersebut menunjukkan solusi persamaan gelombang air dangkal linier 1D dengan kondisi batas sinusoidal dan $\Delta x = 0,1375$, $\Delta t = 0,0125$, $g = 9,8$ serta $h = 0,01$, yang memenuhi syarat kestabilan. Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa gelombang bergerak dari arah kiri yang melekat pada saat $x = 0$ dan bergerak ke arah kanan yang merambat jauh ke $x = 50$, selama selang waktu Δt dan kemudian menghilang dan tidak berulang.



Gambar 3.2 Simulasi Persamaan (3.27) dan (3.28) dengan Nilai Awal $\eta(x, 0) = 0,2 \sin(x)$, $u(x, 0) = 0,2 \sin(x)$, $\Delta x = 0,1375$, dan $\Delta t = 0,0125$, serta $h = 0,01$

Pada Gambar 3.2 terlihat juga bahwa gelombang berbentuk mengikuti nilai awal yang diberikan. Dari grafik solusi tersebut terlihat juga bahwa perilaku solusi persamaan gelombang air dangkal linier 1D memiliki bentuk yang serupa dengan persamaan transport, dimana pada kasus pias 1D pada persamaan transport, jika kuantitas material dapat dinyatakan dengan konsentrasi material tersebut, maka pada suatu periode Δt , perubahan konsentrasi polutan dalam pias harus sama dengan jumlah netto fluks yang masuk selama periode tersebut. Amplitudo gelombang tersebut menunjukkan bahwa gelombang permukaan tersebut berjalan stabil.

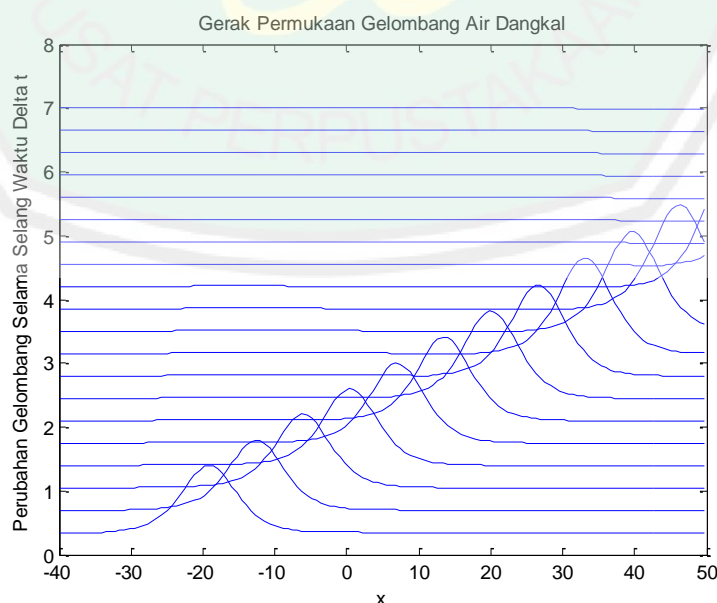
Simulasi kedua, pada saat diberikan kondisi awal yaitu $\eta(x, 0) = 0,2 \sin^2(x)$ dan $u(x, 0) = 0,2 \sin^2(x)$ dengan $\Delta x = 0,45$, $\Delta t = 0,025$ dan $h = 0,05$, sehingga simulasi persamaan gelombang air dangkal linier 1D yaitu persamaan (3.27) dan (3.28) dapat dilihat pada Gambar 3.3 berikut:



Gambar 3.3 Simulasi Persamaan (3.27) dan (3.28) dengan Nilai Awal $\eta(x, 0) = 0,2 \sin^2(x)$, $u(x, 0) = 0,2 \sin^2(x)$, $\Delta x = 0,45$, dan $\Delta t = 0,025$, serta $h = 0,05$

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa model gelombang permukaan tersebut bergerak ke arah hulu yang melekat pada langkah positif saat $x = 0$ dan bergerak ke arah hilir yang merambat jauh $x = 50$, selama selang waktu Δt dan kemudian menghilang serta tidak berulang. Pada simulasi kedua ini gelombang berjalan lebih cepat dibandingkan simulasi pertama. Amplitudo gelombang tersebut menunjukkan bahwa gelombang permukaan tersebut berjalan stabil.

Simulasi ketiga, pada saat diberikan kondisi awal $\eta(x, 0) = \text{sech}^2(0,2x)$ dan $u(x, 0) = \text{sech}^2(0,2x)$, dengan $\Delta x = 0,65$, $\Delta t = 0,05$, $g = 9,8$ dan $h = 0,08$, sehingga simulasi persamaan gelombang air dangkal linier 1D yaitu persamaan (3.27) dan (3.28) dapat dilihat pada Gambar 3.4. Gambar tersebut menunjukkan solusi bahwa model gelombang permukaan tersebut bergerak dari arah kiri yang melekat pada saat $x = -40$ dan bergerak ke arah kanan yang merambat jauh $x = 50$, dalam selang waktu 0 sampai 10. Amplitudo gelombang tersebut menunjukkan bahwa gelombang permukaan tersebut berjalan stabil.



Gambar 3.4 Simulasi Persamaan (3.27) dan (3.28) dengan Nilai Awal $\eta(x, 0) = \text{sech}^2(0,2x)$, $u(x, 0) = \text{sech}^2(0,2x)$, $\Delta x = 0,65$, dan $\Delta t = 0,05$, serta $h = 0,08$

Simulasi keempat, pada simulasi ini akan diberikan kondisi awal diskrit yaitu $\eta(x, 0) = 0$ sampai 0,5 dan $u(x, 0) = 0$, dengan $\Delta x = 0,45$, $\Delta t = 0,025$, $g = 9,8$ dan $h = 0,05$ maka simulasi persamaan gelombang air dangkal linier 1D yaitu persamaan (3.27) dan (3.28) dapat dilihat pada Gambar 3.5 berikut:



Gambar 3.5 Simulasi Persamaan (3.27) dan (3.28) dengan Nilai Awal $\eta(x, 0) = 0$ sampai 0,5, $u(x, 0) = 0$, $\Delta x = 0,45$, dan $\Delta t = 0,025$, serta $h = 0,05$

Gambar 3.5 menunjukkan solusi bahwa model gelombang permukaan tersebut bergerak dari arah kiri yang melekat pada saat $x = 0$ dan bergerak ke arah kanan yang merambat jauh $x = 50$, dalam selang waktu 0 sampai 7. Amplitudo gelombang tersebut menunjukkan bahwa gelombang permukaan tersebut berjalan stabil dan tidak berulang. Permukaan gelombang tampak tidak kontinu, hal ini disebabkan karena diberikan kondisi awal dalam bentuk diskrit. Model bentuk diskrit ini dilakukan untuk mengetahui kestabilan dari gelombang dengan nilai awal yang berbeda-beda. Sehingga berdasarkan simulasi yang

dilakukan, persamaan gelombang air dangkal linier 1D stabil sesuai dengan syarat kestabilan yang diperoleh.

3.4 Kajian Keagamaan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, bahwa solusi persamaan gelombang air dangkal linier 1D dapat diselesaikan secara numerik salah satunya dengan menggunakan metode volume hingga skema eksplisit. Hal ini menunjukkan bahwa semua permasalahan dapat diselesaikan sekalipun melalui beberapa kesulitan, sebagaimana yang terdapat dalam surat Al-Insyiroh ayat 5 yakni sesudah kesulitan akan terdapat kemudahan, pada hakikatnya semua kemudahan akan terwujud jika Allah menghendaki, dan Allah memberikan kemudahan bagi umatnya untuk menyelesaikan suatu masalah, baik itu dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam bidang matematika.

Kemudahan dalam ilmu matematika dapat memberikan jalan yang benar untuk menyelesaikan persamaan gelombang air dangkal linier 1D tersebut. Dalam menyelesaikan persamaan tersebut terdapat banyak metode dan tahapan yang harus dikerjakan untuk mendapatkan hasil yang tepat dalam perhitungan secara matematis. Dalam Islam telah dijelaskan bahwa dalam menyelesaikan suatu masalah memiliki banyak cara atau metode, sebagaimana terdapat dalam surat al-Ankabut ayat 69. Dari ayat tersebut menunjukkan bahwa Allah Swt. telah menegaskan kepada manusia bahwa dalam mencari suatu penyelesaian terdapat banyak jalan, yang berarti banyak cara ataupun metode-metode. Seperti halnya dalam bidang ilmu matematika, untuk menyelesaikan persamaan gelombang air dangkal linier 1D salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode volume

hingga. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut terdapat banyak tahapan yang harus dikerjakan sehingga diperoleh hasil yang tepat. Tahapan-tahapan tersebut di antaranya yaitu mendiskritkan persamaan tersebut menjadi persamaan baru, selanjutnya menentukan syarat kestabilan dan kekonsistenan, kemudian baru dilakukan simulasi dan interpretasi. Sebagaimana dalam surat al-Shaff ayat 4 yakni *sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang berperang di jalan-Nya dalam barisan yang teratur seakan-akan mereka seperti suatu bangunan yang tersusun kokoh*, dari ayat tersebut bahwasannya Allah Swt. menghendaki untuk menyelesaikan suatu permasalahan dengan teratur. Oleh karenanya dalam pengerjaan langkah demi langkah harus teliti, cermat dan sesuai dengan tahapan-tahapan yang harus dikerjakan. Sehingga diperoleh hasil yang tepat seperti yang telah ditunjukkan pada simulasi persamaan gelombang air dangkal linier 1D dengan menggunakan MATLAB.

Ilmu matematika banyak memberikan manfaat bagi manusia baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam bidang ilmu pengetahuan. Seperti dalam kehidupan sehari-hari, ilmu matematika sering digunakan dalam hal menghitung dan mengukur. Di sisi lain ilmu matematika banyak mengungkap rahasia Allah Swt. yang sebelumnya belum diketahui oleh manusia. Melalui perantara al-Quran Allah Swt. memberikan petunjuk tentang rahasia-rahasia Allah. Sebagaimana dalam hal ilmu pengetahuan Allah Swt. memberikan petunjuk untuk mengembangkan ilmu pengetahuan sehingga diperoleh ilmu-ilmu baru yang benar berdasarkan penalaran dan observasi tentang keajaiban dan rahasia Allah. Seperti halnya solusi numerik persamaan gelombang air dangkal ini yang dapat digunakan untuk memprediksi ke mana gelombang akan berjalan.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan berikut:

1. Penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linier 1D menggunakan metode volume hingga memiliki bentuk sebagaimana disebutkan dalam persamaan (3.27) dan (3.28).
2. Syarat kestabilan dari metode volume hingga skema eksplisit untuk persamaan gelombang air dangkal linier 1D adalah $\frac{\Delta t}{\Delta x} \sqrt{gh} \leq 1$, dengan *error* pemotongan pertama dari model diskrit yang digunakan memiliki orde $(\Delta x, \Delta t)$, hal tersebut dapat dilihat pada persamaan (3.63). Model diskrit yang digunakan tersebut memenuhi syarat konsistensi karena *error* pemotongannya menuju nol untuk Δx dan Δt mendekati 0.
3. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linier 1D stabil dan bergerak sepanjang x dalam selang waktu Δt dengan perilaku gelombang yang memiliki bentuk serupa dengan persamaan transport.

4.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, maka untuk selanjutnya dapat dikembangkan pada persamaan gelombang air dangkal 2D atau lebih.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2014. *Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN-MALIKI PRESS.
- Besson, O., Kane, S., dan Mamadou. 2005. On a 1D-Shallow Water model: Existence of Solutions and Numerical Simulations, (Online), (<http://www2.unine.ch>), diakses 12 November 2014.
- Camfield, F. 1980. *Tsunami Engineering*. Belvoir: Coastal Engineering Research Center.
- Candra, R. 2011. *Analisis Stabilitas Metode Forward Time Central Space dan Lax Wendroff pada Simulasi Penyelesaian Persamaan Adveksi*. Skripsi tidak dipublikasikan. Medan: Universitas Sumatera Utara.
- Chapra, S dan Canale P., Raymond. 2010. *Numerical Methods for Engineers Sixth*. New York: McGraw-Hill Company, Inc.
- Eymard, R., Gallou, T., dan Herbin, R. 2006. *Finite Volume Method*. Marseille: P.G Ciarlet.
- Hapsari, N.R. 2014. *Persamaan Gelombang Air Dangkal Satu Dimensi dan Aplikasinya pada Masalah Bendungan Bobol*. Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada
- Kampf, J. 2009. *Ocean Modelling for Beginners Using Open-Source Software*. London: Springer Heidelberg Dordrecht .
- LeVeque, R.J. 2002. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mufida, F. 2014. *Solusi Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis pada Koordinat Polar*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
- Mungkasi, S dan Robert, S.G. 2012. Anuga Software for Numerical Simulation of Shallow Water Flows. *Jurnal Ilmu Komputer dan Informasi*. 5(1):1-8.
- Munir, R. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Triatmojo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Shihab, M. Q. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Volume 10*. Jakarta: Lentera Hati.

Strauss, A. 2007. *Partial Differential Equations An Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Ltd.

Versteeg, H.K dan Malalasekera, W. 2007. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics the Finite Volume Method*. New York: Logman Group.

Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics Third Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.



Lampiran 1. Script M-file Solusi Persamaan Gelombang Air Dangkal dengan Nilai Awal Kontinu

```
clc, clf, clear

g=9.8;
h=0.01;

dx=0.1375;
x=0:dx:15*pi;

dt=0.0125;
t=0:dt:5;

k=(dt/dx)*(h*g);

U=zeros(length(x),length(t));
E=zeros(length(x),length(t));

%kondisi awal dan kondisi batas untuk u
U(:,1)=0.2*sin(x);

%kondisi awal dan kondisi batas untuk eta
E(:,1)=0.2*sin(x);

s=0;

figure(1)
for n=1:length(t)-1

    for j=2:length(x)-1
        if E(j,n)<E(j+1,n)
            Eplus=min(E(j,n),E(j+1,n));
        else
            Eplus=max(E(j,n),E(j+1,n));
        end

        if E(j-1,n)<E(j,n)
            Emin=min(E(j-1,n),E(j,n));
        else
            Emin=max(E(j-1,n),E(j,n));
        end

        U(j,n+1)=U(j,n)-(g*(dt/dx)*(Eplus-Emin));
        E(j+1,n+1)=Eplus-(h*(dt/dx)*(U(j+1,n+1)-U(j,n+1)));

    end

    max(E(:,n));

    if mod(n,20)==0
        s=s+1;
    end
end
```

```

plot(x,E(:,n)+0.35*s), hold on
xlabel('x');
ylabel('Perubahan Gelombang Selama Selang Waktu Delta t');
title('Gerak Permukaan Gelombang Air Dangkal');
pause(0.01)
n;
Tinggi=max(E(:,n));

end

end

figure(2)
for n=1:length(t)-1

for j=2:length(x)-1
if E(j,n)<E(j+1,n)
Eplus=min(E(j,n),E(j+1,n));
else
Eplus=max(E(j,n),E(j+1,n));
end

if E(j-1,n)<E(j,n)
Emin=min(E(j-1,n),E(j,n));
else
Emin=max(E(j-1,n),E(j,n));
end

U(j,n+1)=U(j,n)-(g*(dt/dx)*(Eplus-Emin));
E(j+1,n+1)=Eplus-(h*(dt/dx)*(U(j+1,n+1)-U(j,n+1)));

end

area(x,E(:,n),-1)
title(['t = ' num2str(t(n))])
xlabel('x');
ylabel('Tinggi Permukaan Gelombang Air Dangkal (eta)');
ylim([-1 4])
pause(0.1)

end

figure(3), mesh(t,x,E)
xlabel('t');
ylabel('x');
zlabel('Ketinggian Permukaan Gelombang Air Dangkal (eta)');

```

Lampiran 2. Script M-file Solusi Persamaan Gelombang Air Dangkal dengan Nilai Awal Diskrit

```
clc, clf, clear
%simulasi untuk bentuk diskrit

g=9.8;
h=0.05;

dx=0.45;
x=0:dx:50;

dt=0.025;
t=0:dt:7;

k=(dt/dx)*(h*g);

U=zeros(length(x),length(t));
E=zeros(length(x),length(t));

%kondisi awal untuk u(x,0)=0
%kondisi awal untuk eta yaitu
for j=1:length(x)
    if and(x(j)>2,x(j)<5)
        E(j,1)=0.5;
    else
        E(j,1)=0;
    end
end

s=0;

figure(1)
for n=1:length(t)-1

    for j=2:length(x)-1
        if E(j,n)<E(j+1,n)
            Eplus=min(E(j,n),E(j+1,n));
        else
            Eplus=max(E(j,n),E(j+1,n));
        end

        if E(j-1,n)<E(j,n)
            Emin=min(E(j-1,n),E(j,n));
        else
            Emin=max(E(j-1,n),E(j,n));
        end

        U(j,n+1)=U(j,n)-(g*(dt/dx)*(Eplus-Emin));
        E(j+1,n+1)=Eplus-(h*(dt/dx)*(U(j+1,n+1)-U(j,n+1)));
    end
end
```

```

end

max(E(:,n));

if mod(n,20)==0
    s=s+1;
    plot(x,E(:,n)+0.35*s), hold on
    xlabel('x');
    ylabel('Perubahan Gelombang Selama Selang Waktu Delta t');
    title('Gerak Permukaan Gelombang Air Dangkal');
    pause(0.01)
    n;
    Tinggi=max(E(:,n));
end

end

figure(2)
for n=1:length(t)-1

    for j=2:length(x)-1
        if E(j,n)<E(j+1,n)
            Eplus=min(E(j,n),E(j+1,n));
        else
            Eplus=max(E(j,n),E(j+1,n));
        end

        if E(j-1,n)<E(j,n)
            Emin=min(E(j-1,n),E(j,n));
        else
            Emin=max(E(j-1,n),E(j,n));
        end

        U(j,n+1)=U(j,n)-(g*(dt/dx)*(Eplus-Emin));
        E(j+1,n+1)=Eplus-(h*(dt/dx)*(U(j+1,n+1)-U(j,n+1)));

    end

    area(x,E(:,n),-1)
    title(['t = ' num2str(t(n))])
    xlabel('panjang x');
    ylabel('tinggi permukaan gelombang air dangkal (eta)');
    ylim([-1 4])
    pause(0.1)
end

figure(3), mesh(t,x,E)
xlabel('waktu (t)');
ylabel('x');
zlabel('tinggi permukaan gelombang air dangkal (eta)');

```

RIWAYAT HIDUP

Lia Izzatun Nikmah, lahir di kota Jombang pada tanggal 16 Pebruari 1993, biasa dipanggil Lia, berdomisili di Jl. Sunan Kalijaga Dalam No. 5B Merjosari Lowokwaru Malang, tempat tinggal asalnya di Dusun Kandangan Desa Sidomulyo RT 03 RW 03 Kec. Megaluh Kab. Jombang. Anak pertama dari dua bersaudara dari Bapak Supariyono dan Ibu Satun.

Pendidikan dasarnya ditempuh di RA Perwanida Dempok Sidomulyo Megaluh Jombang, kemudian melanjutkan ke MI KH Sundusin Dempok Sidomulyo dan lulus pada tahun 2005. Kemudian dia melanjutkan pendidikan ke MTsN Tambakberas Jombang dan lulus pada tahun 2008, kemudian melanjutkan ke MAN Tambakberas Jombang yang bertempat di Pondok Pesantren Bahrul Ulum dan lulus pada tahun 2011. Selama menempuh studi di MTsN dan MAN, dia aktif dalam Organisasi OSIS. Pada saat di MTsN, dia Menjabat sebagai Bendahara Umum OSIS putri periode 2006-2007, dan pada saat di MAN menjabat sebagai Ketua II OSIS periode 2009-2010. Selain aktif dalam organisasi intra sekolah, dia juga aktif dalam organisasi sosial kemasyarakatan. Pada tahun 2009-2011 dia mendapat amanah sebagai Sekretaris REMAS Bustanul Muslimin Dusun Kandangan Desa Sidomulyo. Selanjutnya pada tahun 2011 menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil Jurusan Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi. Sampai saat ini dia aktif di organisasi sosial kemasyarakatan Himpunan Mahasiswa Alumni Bahrul Ulum (HIMMABA) cabang Malang.