EKSISTENSI BASIS SCHAUDER DI RUANG BANACH

SKRIPSI

OLEH
YUNITA NURFADILAH
NIM. 200601110059

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

EKSISTENSI BASIS SCHAUDER DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
YUNITA NURFADILAH
NIM. 200601110059

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

EKSISTENSI BASIS SCHAUDER DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Oleh
YUNITA NURFADILAH
NIM. 200601110059

Telah Disetujui Untuk Diuji
Malang, 26 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, M.Sc	M. Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19741129 200012 2 005	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

EKSISTENSI BASIS SCHAUDER DI RUANG BANACH

SKRIPSI

Oleh
YUNITA NURFADILAH
NIM. 200601110059

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi,
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)

Tanggal 28 Juni 2024

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudzi, M.Si., Ph.D	.....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, S.Pd., M.Si	.....
Anggota Penguji 2	: Dr. Elly Susanti, M.Sc	.....
Anggota Penguji 3	: M. Nafie Jauhari, M.Si	.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

Dipindai dengan CamScanner

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Yunita Nurfadilah

NIM : 200601110059

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudin hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatam tersebut.

Malang, 28 Juni 2024

Yang membuat pernyataan,

Yunita Nurfadilah
NIM. 200601110059

MOTO

“Allah Knows What Is the Best for Us, and When It Will Be Ours”

PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Dengan rasa syukur kepada Allah SWT, penulis persembahkan skripsi ini kepada: Ibu Kolidah, Bapak Mujianto, Mak Kujaimah, Muhammad Ali Gibran Al-farizi, dan seluruh keluarga baik yang ada di Nongkoseweu, maupun yang ada di Sidoarjo yang senantiasa dengan ikhlas mendoakan, memberi nasihat, mendukung dan menyemangati penulis dengan tulus, serta untuk seluruh teman seperjuangan dalam konsorsium analisis yang selalu menantikan kelulusan S1 penulis.

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam mudah-mudahan senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW yang telah membawa kita dari jalan gelap gulita (era jahiliah) mengarah jalur yang cerah benderang ialah addiynul islam (agama Islam).

Penyusunan skripsi ini disusun sebagai salah satu dari rangkaian aktivitas memenuhi sks sebagai persyaratan dalam penyelesaian mata kuliah Skripsi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi (Saintek) Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Selesainya penyusunan skripsi ini tidak lepas dari dorongan bermacam pihak, sebab itu ucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua sekaligus dosen pembimbing I Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah sabar memberikan bimbingan, motivasi, dan nasihat selama menyusun proposal skripsi.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II dan dosen wali yang telah sabar memberikan bimbingan, motivasi, saran, dan pengetahuan selama Menyusun proposal skripsi.
5. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim
6. Mak Khujaimah dan keluarga besar di Nongkosewu yang telah menyempatkan waktu untuk memberikan dukungan penuh dengan menjaga anak saya agar dapat segera menyelesaikan skripsi ini.
7. Ayah Mujianto, Ibu Kolidah dan keluarga besar di Sidoarjo yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, dan motivasi.

8. Ferira, Tegar, Lauha, Pingka, Ajeng selaku teman seperjuangan di konsorsium analisis yang selalu mengingatkan untuk segera menyelesaikan proposal skripsi.
9. Muhammad Ali Gibran Alfarizi yang menjadi inspirasi dan semangat saya untuk segera menyelesaikan proposal skripsi.
10. Seluruh mahasiswa angkatan 2020 yang saling mendukung dan mendoakan antar sesama.
11. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan penulis satu persatu, yang ikut serta dalam membantu menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Malang, 28 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL ..... **i**
HALAMAN PENGAJUAN ..... **ii**
HALAMAN PERSETUJUAN ..... **iii**
HALAMAN PENGESAHAN ..... **iv**
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN ..... **v**
MOTO ..... **vi**
PERSEMBAHAN ..... **vii**
KATA PENGANTAR ..... **viii**
DAFTAR ISI ..... **x**
ABSTRAK ..... **xi**
ABSTRACK ..... **xii**
مستخلص البحث ..... **xiii**
BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 5
1.3 Tujuan Penelitian 5
1.4 Batasan Masalah 5
1.5 Manfaat Penelitian 5
BAB II KAJIAN TEORI **7**
2.1 Teori Pendukung 7
2.1.1 Ruang Vektor 7
2.1.2 Kombinasi Linier 11
2.1.3 Basis 12
2.1.4 Basis Ortonormal 16
2.1.5 Ruang Bernorma 17
2.1.6 Operator Linier 25
2.1.7 Ruang Banach 27
2.1.8 Basis Schauder 29
2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Quran 30
2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung 32
BAB III METODE PENELITIAN **36**
3.1 Jenis Penelitian 36
3.2 Pra Penelitian 36
3.3 Tahapan Penelitian 36
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN **39**
4.1 Eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach 39
4.2 Integrasi Karakteristik Ulul Albab Dengan Topik 58
BAB V PENUTUP **63**
5.2 Kesimpulan 63
5.2 Saran 63
DAFTAR PUSTAKA **64**
RIWAYAT HIDUP **65**

ABSTRAK

Nurfadilah, Yunita. 2024. **Eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Elly Susanti, S.Si. M. Pd. (II) M. Nafie Jauhari, M.Si

Kata Kunci: Basis Schauder, Ruang Banach, Analisis Fungsional.

Penelitian ini mengkaji eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach. Basis Schauder adalah barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di Ruang Banach disebut Basis Schauder jika untuk setiap $x \in X$ terdapat barisan dari skalar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga x dapat dinyatakam sebagai bentuk kombinasi linier $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$. Dalam penelitian ini di gunakan pendekatan studi pustaka untuk menganalisis konsep dan membuktikan teorema eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach. Beberapa teorema dan proposisi terkait eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach menjadi dasar utama dalam pembahasan ini. Hasil penelitian menunjukkan bahwa setiap Ruang Banach berdimensi tak hingga memiliki Basis Schauder, dan berbagai kondisi serta sifat-sifat dari basis ini diuraikan secara rinci. Penelitian ini memberikan pemahaman tentang karakteristik Ruang Banach, serta pentingnya Basis Schauder dalam analisis fungsional.

ABSTRACK

Nurfadilah, Yunita (2024). **Existence Schauder Bases on Banach Space**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (1) Dr. Elly Susanti, S.Sc. M. Pd. (II) M. Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Schauder Bases, Banach Space, Analysis Functional.

This research examines the existence of Schauder Bases in Banach Space. A Schauder bases is a sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ in a Banach space X. It is called a Schauder bases if for every $x \in X$ there is a sequence of scalars $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that x can be expressed as a linear combination $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$. This research used a literature study approach to analyze concepts and to prove the existence theorem of Schauder Bases in Banach Space. Several theorems and propositions related to the existence of the Schauder Bases in Banach Space are the main foundation of this discussion. The results of the research show that every infinite-dimensional Banach Space has a Schauder Basis, and the various conditions and properties of this bases are described in detail. These findings give the understanding of the characteristics of Banach Space, as well as the importance of the Schauder Bases in functional analysis.

مستخلص البحث

يونيتا نور فضيلة. ٢٠٢٤.وجود قاعدة شودر في غرفة باناخ، البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الدولة الإسلامية الحكمية مالانج. المشرفةالأولى(١) د، إ يلي سوسانتي، الماجستيرة، المشرف الثانى(٢) محمد نافع جوهري ، الماجستير.

الكلمات المفتحية: قاعدة شودر، مساحة باناخ، التحليل الوظيفي .

تبحث هذه الدراسة في وجود قاعدة شودر في غرفة باناخ. قاعدة شودر عبارة عن صف $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ في مساحة باناخ يطلق عليه قاعدة شودر. إذا كان لكل $x \in X$ ، يوجد تسلسل من الأعداد $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ بحيث يمكن التعبير عن X كمجموع خطي $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$. استخدمت هذه الدراسة منهج دراسة الأدبيات لتحليل المفهوم وإثبات نظرية وجود قاعدة شودر في غرفة باناخ. العديد من النظريات والمقترحات المتعلقة بوجود قاعدة شودر في غرفة باناخ هي الأساس الرئيسي لهذا المناقشة. أظهرت نتائج البحث أن كل غرفة باناخ له قاعدة شودر غيرالأبعاد. ويتم وصف الطروف والخصائص المختلفة لهذه القاعدة بالتفصيل. توفر هذه الدرسة فهما لخصائص غرفة باناخ. بالأضافة إلى أهمّية قاعدة شودر في التحليل الوظيفي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang bernorma adalah Ruang Vektor yang dilengkapi dengan fungsi norma. Misalkan X adalah Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Norma pada X didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\| \, . \, \| : X \to \mathbb{R}$, di mana untuk setiap $v, w \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi beberapa sifat norma yaitu: (i) $\|v\|$ harus selalu tak negatif; (ii) $\|v\|$ hanya akan sama dengan nol jika dan hanya jika vektor v adalah vektor nol; (iii) hasil perkalian vektor v dengan skalar α harus sama dengan hasil nilai mutlak dari skalar α dikalikan dengan $\|v\|$; (iv) $\|v\|$ harus memenuhi ketaksamaan segitiga. Jika ruang tersebut sudah memenuhi sifat norma, maka $(X, \| \, . \, \|)$ disebut ruang bernorma (Kreyszig, 1978).

Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap. Kelengkapan pada Ruang Banach berarti bahwa setiap Barisan Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di ruang bernorma konvergen ke ruang tersebut (Kreyszig, 1978). Ruang Banach memiliki sifat *separable*, yaitu jika ada himpunan bagian *countable* (terhitung) dari vektor-vektor dalam ruang tersebut yang bersifat padat (Daws, 2005).

Salah satu konsep dalam Ruang Vektor adalah basis. Misalkan V adalah Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ dan S adalah himpunan yang memuat vektor-vektor dengan $S \subseteq V$, maka himpunan S disebut basis untuk V jika S merentang V dan S bebas linear (Syarifuddin et al., 2016). Bebas linier artinya tidak ada satupun vektor di S dapat dihasilkan oleh kombinasi linier dari vektor-vektor lain, dan S merentang V berarti setiap vektor di V dihasilkan dari kombinasi linier oleh vektor-vektor

dalam basis tersebut. Contoh basis dalam Ruang Vektor $\mathbb{R}^3$ adalah $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ (Howard, 2004). Terdapat berbagai jenis basis dalam Ruang Vektor, beberapa di antaranya yaitu basis Ortonormal, basis Kanonik, dan Basis Schauder.

Basis Ortonormal pada ruang vektor berdimensi tak hingga adalah himpunan dari vektor-vektor yang memenuhi dua sifat yaitu ortogonalitas dan normalisasi. Ortogonalitas artinya setiap pasangan vektor dalam basis tersebut orthogonal, artinya hasil kali dalam dua vektor yang berbeda adalah 0, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ untuk $i \neq j$. Kemudian normalisasi yang berarti setiap vektor dalam basis tersebut memiliki nilai norma satu, $\|v_i\| = 1$.

Basis Schauder merupakan generalisasi dari konsep basis pada Ruang Vektor dalam konteks Ruang Banach. Sebuah barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di Ruang Banach disebut Basis Schauder jika untuk setiap $x \in X$ terdapat barisan dari skalar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga x dapat dinyatakam sebagai bentuk kombinasi linier $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$ (Ahlfors et al., 1977). Contoh basis Schauder pada Ruang Banach adalah barisan vektor $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pada ruang barisan ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ yang didefinisikan dengan $\ell^p = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$ (Speckhofer, 2022).

Penelitian ini membahas tentang eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach yaitu setiap Ruang Banach berdimensi tak hingga memuat satu barisan *basic*. Barisan *basic* adalah barisan $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ yang merupakan Basis Schauder dengan rentang linier tertutup. Salah satu contoh eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach $\mathbb{R}^n$. Ruang $\mathbb{R}^n$ dengan salah satu Basis Schaudernya adalah $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ dengan x_i adalah vektor yang setiap elemennya bernilai 0, kecuali pada baris ke-i bernilai 1. Pembuktian eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach akan menggunakan

Lemma 2.5 yaitu misal X adalah Ruang Banach berdimensi tak hingga dan $B \subset X$ merupakan subruang berdimensi hingga dan $\varepsilon > 0$. Maka terdapat $x \in X$ dengan $\|x\| = 1$ sehingga $\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$ untuk setiap $y \in B$ dan setiap scalar λ.

Dalam QS. Al- Imron: 190, Allah berfirman:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَءَايَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ

(Kementrian Agama, 2020)

Artinya:

"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal,".

Menurut Al-Mahalli dan As-Suyuthi dalam tafsir Jalalain, QS. Al-Imron ayat 190 bermakna (sesungguhnya pada penciptaan langit dan bumi) dan keajaiban-keajaiban yang terdapat pada keduanya (serta pergantian malam dan siang) dengan datang dan pergi serta bertambah dan berkurang (menjadi tanda-tanda) atau bukti-bukti atas kekuasaan Allah SWT. (bagi orang-orang yang berakal) artinya yang mempergunakan pikiran mereka.

Ayat tersebut berisi tentang perintah Allah kepada seseorang untuk selalu mengingat Allah SWT melalui ciptaan-Nya dan kekuasaan-Nya. Seperti, terciptanya siang dan malam, luasnya semesta, serta pasang surut air laut. Hal ini berkaitan dengan teorema pada penelitian yang akan dibuktikan yaitu, setiap Ruang Banach berdimensi tak hingga memuat satu barisan *basic.* Di antara sekian banyak manusia yang diciptakan oleh Allah, yang melaksanakan perintah Allah tersebut termasuk orang-orang yang berakal atau ulul albab.

Untuk mengetahui ciri-ciri ulul albab, tertera pada ayat berikutnya pada ayat berikutnya yang berbunyi:

ٱلَّذِينَ يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمۡ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ رَبَّنَا مَا خَلَقۡتَ هَٰذَا بَٰطِلٗا سُبۡحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ

(Kementrian Agama, 2020)

Artinya:

"(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka".

Berdasarkan Tafsir Al-Madinah Al-Munawwarah karya Syukri, QS. Al-Imron ayat 191 bermakna dan beberapa sifat orang-orang berakal sehat ini adalah banyak berzikir kepada Allah dalam segala keadaan, menegakkan shalat baik itu dengan berdiri, duduk, maupun berbaring, senantiasa merenungi proses penciptaan langit dan bumi, serta senantiasa berdoa: "Ya Tuhan kami, Tidaklah Engkau menciptakan makhluk-makhluk ini untuk sesuatu yang sia-sia dan tanpa hikmah, Maha Suci Engkau, jauhkanlah kami dari siksa neraka". Secara eksplisit, ayat ini mengatakan bahwa ulul albab memiliki karakteristik tertentu yaitu orang beriman yang banyak berzikir kepada Allah dalam segala keadaan, menegakkan shalat baik itu dengan berdiri, duduk, maupun berbaring, senantiasa merenungi proses penciptaan langit dan bumi. Sebagaimana karakteristik dari suatu barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di Ruang Banach dapat dinyatakan sebagai Basis Schauder yaitu jika dan hanya jika memenuhi tiga kondisi. (i) $x_n \neq 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. (ii) Terdapat konstanta K sehingga untuk setiap pilihan skalar $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan bilangan bulat $n < m$, berlaku $\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq K\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|$. (iii) Rentang linier tertutup dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah X. Sehingga ketika suatu barisan memenuhi kondisi tersebut disebut sebagai Basis Schauder di Ruang Banach.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah penelitian ini adalah “Bagaimana Pembuktian Teorema Eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach?”

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk membuktikan teorema eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach dan memberikan contoh penerapannya pada Ruang Banach tertentu.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini membahas tentang eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach hanya atas lapangan bilangan Riil.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun beberapa manfaat yang terdapat dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Manfaat bagi penulis

   Manfaat penelitian ini bagi penulis yaitu menambah pengetahuan mengenai eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach selama penelitian berlangsung.

2. Manfaat bagi instansi

   Manfaat penelitian ini bagi instansi yaitu dapat digunakan sebagai sumber referensi di bidang matematika mengenai eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach.

3. Manfaat bagi pembaca

   Manfaat penelitian ini bagi pembaca yaitu dapat digunakan sebagai sumber referensi serta memberikan gambaran mengenai eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Berdasarkan latar belakang yang sudah dipaparkan, akan ditelaah beberapa teori dasar yang berkaitan teori yang akan dibuktikan pada penelitian ini.

2.1.1 Ruang Vektor

Pada penelitian kali ini konsep Ruang Vektor menjadi dasar dari konsep Basis Schauder, karena Basis Schauder adalah himpunan vektor-vektor dalam Ruang Banach yang dapat digunakan untuk merepresentasikan setiap vektor dalam ruang tersebut sebagai jumlah tak terhingga dari vektor-vektor tersebut dengan koefisien yang sesuai. Oleh karena itu, maka konsep tersebut akan dijelaskan terlebih dahulu. Berikut adalah definisi yang membahas konsep Ruang Vektor.

Definisi 2.1 Ruang Vektor (Howard, 2004)**.**

Misalkan V adalah vektor yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Dengan penjumlahan vektor, yang menggabungkan setiap pasangan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ di V dan dilambangkan dengan $+$, dan perkalian skalar yang menggabungkan bilangan dengan vektor dan dilambangkan dengan penjajaran. maka V dengan dua operasi tersebut dikatakan sebagai Ruang Vektor apabila untuk setiap vektor $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ dan untuk setiap skalar $k, l \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat berikut:

1. Tertutup penjumlahan

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$$

2. Komutatif penjumlahan

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

3. Asosiatif penjumlahan

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$$

4. Identitas Penjumlahan

Terdapat $\mathbf{0} \in V$ yang disebut identitas penjumlahan, sehingga

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}, \forall\, \boldsymbol{v} \in V$$

5. Invers penjumlahan

Untuk setiap $\boldsymbol{v} \in V$ terdapat $-\boldsymbol{v} \in V$ yang disebut invers penjumlahan, sehingga

$$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

6. Tertutup perkalian

$$k\boldsymbol{v} \in V$$

7. Distributif penjumlahan terhadap perkalian skalar

$$(k + l)\,\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v} + l\boldsymbol{v}$$

8. Distributif perkalian skalar terhadap penjumlahan vektor

$$k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$$

9. Asosiatif perkalian skalar

$$(kl)\boldsymbol{v} = k(l\boldsymbol{v})$$

10. Identitas perkalian

Terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sehingga $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Selanjutnya akan disepakati bahwa V adalah Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

Contoh 2.2

Buktikan bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ dan $k, l \in \mathbb{R}$ dengan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, dan $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$.

1. Akan dibuktikan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)$$
$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$$

2. Akan dibuktikan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)$$
$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$
$$= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n)$$
$$= \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$$

3. Akan dibuktikan $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \big((u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)\big) + (w_1, w_2, \dots, w_n)$$
$$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n)$$
$$= (u_1 + v_1 + w_1, u_2 + v_2 + w_2, \dots, u_n + v_n + w_n)$$
$$= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$$
$$= (u_1, u_2, \dots, u_n) + \big((v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n)\big)$$
$$= \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$$

4. Ada $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ sehingga $\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$, untuk setiap $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = (0,0, \dots ,0) + (v_1, v_2, \dots, v_n)$$
$$= (0 + v_1, 0 + v_2, \dots ,0 + v_n)$$
$$= (v_1 + 0, v_2 + 0, \dots, v_n + 0)$$

$$= (v_1, v_2, \dots, v_n) = \boldsymbol{v}$$

5. Terdapat $-\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ sehingga $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

$$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (-v_1, -v_2, \dots, -v_n)$$

$$= \big(v_1 + (-v_1), v_2 + (-v_2), \dots, v_n + (-v_n)\big)$$

$$= \big((-v_1) + v_1, (-v_2) + v_2, \dots, (-v_n) + v_n\big)$$

$$= (0,0, \dots 0) = \boldsymbol{0}$$

6. Akan dibuktikan $k\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$

$$k\boldsymbol{v} = k(v_1, v_2, \dots, v_n) = (kv_1, kv_2, \dots, kv_n) \in \mathbb{R}^n$$

7. Akan dibuktikan $(k + l)\,\boldsymbol{v} = k\boldsymbol{v} + l\boldsymbol{v}$

$$(k + l)\,\boldsymbol{v} = (k + l)(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$= (kv_1, kv_2, \dots, kv_n) + (lv_1, lv_2, \dots, lv_n)$$

$$= (kv_1 + lv_1, kv_2 + lv_2, \dots, kv_n + lv_n) = k\boldsymbol{v} + l\boldsymbol{v}$$

8. Akan dibuktikan $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$

$$k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\big((u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n)\big)$$

$$= k(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$= \big(k(u_1 + v_1), k(u_2 + v_2), \dots, k(u_n + v_n)\big)$$

$$= (ku_1 + kv_1, ku_2 + kv_2, \dots, ku_n + kv_n) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$$

9. Akan dibuktikan $(kl)\boldsymbol{v} = k(l\boldsymbol{v})$

$$(kl)\boldsymbol{v} = (kl)(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$= (klv_1, klv_2, \dots, klv_n)$$

$$= k(lv_1, lv_2, \dots, lv_n) = k(l\boldsymbol{v})$$

10. Akan dibuktikan terdapat $1 \in \mathbb{R}$ sehingga $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

$$1\boldsymbol{v} = 1(v_1, v_2, \dots, v_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \boldsymbol{v}$$

Karena $\mathbb{R}^n$ memenuhi sifat-sifat tersebut, maka terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ adalah Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$.

2.1.2 Kombinasi Linier

Sebelum membahas mengenai Basis Schauder, akan didefinisikan terlebih dahulu beberapa definisi dan contoh terkait kombinasi linier yang berkaitan dengan Basis Schauder.

Definisi 2.3 Kombinasi Linier (Howard, 2004)**.**

Jika V adalah Ruang Vektor, suatu vektor $\boldsymbol{u} \in V$ disebut suatu kombinasi linier dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$, jika terdapat skalar $k \in \mathbb{R}$ dengan $k = k_1, k_2, \dots, k_n$ sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}$$

Contoh 2.4

Buktikan apakah vektor $\boldsymbol{u}$ di $\mathbb{R}^3$ dengan $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)$ merupakan kombinasi linier dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1} = (1, 0, 0), \boldsymbol{v_2} = (0, 2, 1)$, dan $\boldsymbol{v_3} = (0, 0, 3)$.

Bukti:

Vektor u merupakan kombinasi linier dari v_1, v_2, v_3 jika dapat ditemukan skalar k_1, k_2, k_3. Amati persamaan berikut:

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n}$$

$$= k_1(1, 0, 0) + k_2(0, 2, 1) + k_3(0, 0, 3)$$

$$= (k_1, 0, 0) + (0, 2k_2, k_2) + (0, 0, 3k_3)$$

$$= (k_1, 2k_2, k_2 + 3k_3) = (1, 2, 1)$$

Dengan menyamakan elemen vektor yang berpadanan diperoleh persamaan

$$k_1 = 1,\ 2k_2 = 2,\ k_2 + 3k_3 = 3$$

Penyelesaian dari sistem tersebut adalah $k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ k_3 = 0,$ sehingga

$$\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{v_1} + 1\boldsymbol{v_2} + 0\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2}$$

Jadi, vektor $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)$ merupakan kombinasi linier dari $\boldsymbol{v_1} = (1, 0, 0), \boldsymbol{v_2} = (0, 2, 1),$ dan $\boldsymbol{v_3} = (0, 0, 3)$.

2.1.3 Basis

Sebelum membahas mengenai Basis Schauder, perlu dipahami terlebih dahulu mengenai beberapa definisi dan contoh terkait basis. Jika V adalah suatu Ruang Vektor dan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah himpunan vektor-vektor pada V, maka S disebut basis dari V jika memenuhi kedua syarat berikut: (i) S bebas linier; (ii) S merentang V. Berikut akan dibahas terlebih dahulu mengenai definisi bebas linier.

Definisi 2.5 Bebas linier (Howard, 2004)**.**

Jika $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah himpunan vektor tak kosong, maka persamaan

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n} = 0$$

memiliki paling sedikit satu penyelesaian, yaitu

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$$

Jika itu satu-satunya penyelesaian, maka S dinamakan himpunan bebas linier, tetapi jika ada penyelesaian lain selain nol, maka S dinamakan himpunan tak bebas linier.

Contoh 2.6

Tunjukkan apakah himpunan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ di $\mathbb{R}^3$, dengan $\boldsymbol{v_1} = (2,2,2), \boldsymbol{v_2} = (0,0,3), \boldsymbol{v_3} = (0,0,1)$ adalah himpunan bebas linier.

Jawab:

Amati persamaan berikut:

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{0}$$

$$k_1(2,2,2) + k_2(0,0,3) + k_3(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$(2k_1, 2k_1, 2k_1) + (0,0,3k_2) + (0,0,k_3) = (0,0,0)$$

$$(2k_1, 2k_1 + k_3, 2k_1 + 3k_2 + k_3) = (0,0,0)$$

Dengan menyamakan elemen vektor yang berpadanan, diperoleh sistem persamaan

$$2k_1 = 0$$

$$2k_1 + k_3 = 0 + k_3 = 0$$

$$2k_1 + 3k_2 + k_3 = 0 + 3k_2 + 0 = 0$$

Dapat dilihat bahwa sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian trivial, yaitu

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

Dengan demikian, S adalah himpunan bebas linier.

Definisi 2.7 Rentang Linier (Howard, 2004)**.**

Jika $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah himpunan vektor pada Ruang Vektor V dan W adalah subruang dari V yang memuat kombinasi linier S, jika setiap vektor dalam W dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di S, maka W direntang oleh S, dinotasikan dengan

$$W = \text{span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{v_i} \,|k_i \in \mathbb{R}, \boldsymbol{v_i} \in S, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Contoh 2.8

Tunjukkan apakah $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ merentang $\mathbb{R}^3$ dengan $\boldsymbol{v_1} = (2,2,2), \boldsymbol{v_2} = (0,0,3), \boldsymbol{v_3} = (0,0,1)$.

Jawab:

Pertama, tunjukkan bahwa suatu vektor sebarang $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ di $\mathbb{R}^3$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier.

$$\boldsymbol{u} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3}$$

Dari vektor-vektor pada S didapat persamaan berupa

$$\boldsymbol{u} = k_1(2,2,2) + k_2(0,0,3) + k_3(0,0,1)$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (2k_1, 2k_1, 2k_1) + (0,0,3k_2) + (0,0,k_3)$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (2k_1, 2k_1 + k_3, 2k_1 + 3k_2 + k_3)$$

Dengan menyetarakan komponen-komponen bersesuaian, diperoleh

$$u_1 = 2k_1$$

$$u_2 = 2k_1 + k_3$$

$$u_3 = 2k_1 + 3k_2 + k_3$$

Sistem persamaan tersebut akan berlaku untuk semua nilai $\boldsymbol{u}$ jika dan hanya jika matriks koefisien A dan memiliki nilai determinan tak nol (Howard, 2004).

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena $\det(A) = -6 \neq 0$, maka terbukti bahwa $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ dengan $\boldsymbol{v_1} = (2,2,2), \boldsymbol{v_2} = (0,0,3), \boldsymbol{v_3} = (0,0,1)$ merentang $\mathbb{R}^3$.

Definisi 2.8 Rentang Linier Tertutup (Axler et al., 1998)**.**

Jika S adalah himpunan vektor pada Ruang Vektor V dengan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$, rentang linier tertutup dari V adalah subruang tertutup terkecil yang memuat S di dalam V.

Definisi 2.10 Basis (Syarifuddin et al., 2016)**.**

Jika V adalah suatu Ruang Vektor dan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah himpunan vektor-vektor pada V, maka S disebut basis dari V jika memenuhi kedua syarat berikut.

1. S bebas linier
2. S merentang V

Contoh 2.11

Tunjukkan apakah himpunan $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ di $\mathbb{R}^3$, dengan $\boldsymbol{v_1} = (2,2,2)$, $\boldsymbol{v_2} = (0,0,3)$, dan $\boldsymbol{v_3} = (0,1,1)$ adalah basis dari $\mathbb{R}^3$.

Jawab:

Pada *Contoh 2.6* telah dibuktikan bahwa S bebas linier dan pada *Contoh 2.8* telah dibuktikan pula S merentang $\mathbb{R}^3$. Berdasarkan *Definisi 2.10*, maka S memenuhi syarat sebagai basis sehingga terbukti bahwa S merupakan basis di $\mathbb{R}^3$.

Untuk selanjunya, notasi vektor tidak tebal mengikuti rujukan utama yaitu "*Classical Banach Space*".

2.1.4 Basis Ortonormal

Basis Ortonormal digunakan untuk membuktikan lemma yang akan digunakan dalam pembuktian eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach. Berikut akan dibahas mengenai definisi dan contoh terkait Basis Ortonormal.

Definisi 2.12 Ruang Hasil Kali Dalam (Kreyszig, 1978).

Misal V adalah Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$, hasil kali dalam pada V adalah fungsi $\langle \therefore \rangle: V \times V \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ memenuhi aksioma berikut

1. $\langle x \cdot x \rangle \geq 0$
2. $\langle x \cdot x \rangle = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\langle x \cdot y \rangle = \langle y \cdot x \rangle$
4. $\langle \alpha x + \beta y \cdot z \rangle = \alpha \langle x \cdot z \rangle + \beta \langle y \cdot z \rangle$

Definisi 2.13 Norma Yang Diinduksi Dari Hasil Kali Dalam (Kreyszig, 1978).

Misal X adalah ruang hasil kali dalam atas lapangan $\mathbb{R}$. Norma pada X didefinisikan dengan

$$\|x\| = \sqrt{\langle x \cdot x \rangle}$$

Definisi 2.14 Basis Ortonormal (Howard, 2004)**.**

Himpunan vektor $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dikatakan basis ortonormal untuk Ruang Vektor V, jika memenuhi dua kondisi untuk setiap $i, j \in \mathbb{N}$

1. $\langle v_i \cdot v_j \rangle = 0, i \neq j$
2. $\| v_i \| = 1$

Contoh 2.15

Diberikan himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ dengan $v_1 = (0,1,0)$, $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, dan $v_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ dilengkapi dengan hasil kali dalam Euclid. Tunjukkan bahwa himpunan V merupakan basis ortonormal.

Jawab:

Akan ditunjukkan bahwa V memenuhi 2 kondisi:

1. Akan ditunjukkan bahwa $\langle v_1 \cdot v_2 \rangle = 0, \langle v_1 \cdot v_3 \rangle = 0, \langle v_2 \cdot v_3 \rangle = 0$

$$\langle v_1 \cdot v_2 \rangle = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 0 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\langle v_1 \cdot v_2 \rangle = 0 \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 0 + 0 \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\langle v_2 \cdot v_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

2. Akan ditunjukkan $\| v_i \| = 1$, untuk $i = 1,2,3$

$$\| v_1 \| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$$

$$\| v_2 \| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$\| v_1 \| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Karena kondisi satu dan dua terpenuhi, maka V merupakan basis ortonormal.

2.1.5 Ruang Bernorma

Ruang bernorma berkaitan dengan penelitian karena objek pada penelitian ini adalah Ruang Banach di mana Ruang Banach adalah ruang bernorma yang

lengkap. Berikut akan ditelaah definisi dan teorema yang berkaitan dengan ruang bernorma dan kekonvergenan pada ruang bernorma.

Teorema 2.1 Ketaksamaan Holder (Kreyszig, 1978).

Misal $p \geq 1$ dan $q < \infty$ sedemikian sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dan misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = x, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = y$ dengan $x, y \in \ell^p$, maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Bukti:

Untuk membuktikan ketaksamaan Holder dapat menggunakan ketaksamaan Young.

Misal

$$\overline{x_n} = \frac{x_n}{(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}}, \text{dan } \overline{y_n} = \frac{y_n}{(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}}$$

Dengan $\{x_n\}, \{y_n\} \in \ell^p$.

Perhatikan bahwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{x_n}|^p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}}\right|\right)^p$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}{(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}(p)}}$$

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p}{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p} = \frac{|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \cdots}{|x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p + \cdots} = 1$$

Sehingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{x_n}|^p = 1$$

sama halnya dengan $\overline{y_n}$, sehingga diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{y_n}|^p = 1$$

misal $a = |\overline{x_n}|$ dan $b = |\overline{y_n}|$, sehingga dengan mensubstitusikan nilai a dan b pada ketaksamaan Young, diperoleh

$$ab = |\overline{x_n}||\overline{y_n}| \leq \frac{|\overline{x_n}|^p}{p} + \frac{|\overline{y_n}|^p}{q}$$

Dengan menjumlahkan dari 1 sampai ∞ kedua ruas pada persamaan tersebut, maka didapatkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{x_n}||\overline{y_n}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{|\overline{x_n}|^p}{p} + \frac{|\overline{y_n}|^p}{q}\right]$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\overline{x_n}|^p}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\overline{y_n}|^q}{q}$$

$$\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Sehingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\overline{x_n}||\overline{y_n}| \leq 1$$

Dengan mensubstitusikan nilai $\overline{x_n}$ dan $\overline{y_n}$, diapatkan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \left(\frac{x_n}{(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}} \right) \left(\frac{y_n}{(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q)^{\frac{1}{q}}} \right) \right| \right) \leq 1$$

$$\sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Teorema 2.2 Ketaksamaan Minkowski (Kreyszig, 1978).

Jika $x, y \in \ell^p$ untuk $1 \leq p < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dan $x + y \in \ell^p$, maka

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Bukti:

Jika $p = 1$, maka berdasarkan ketaksamaan segitiga, untuk $1 < p < \infty$, diperoleh

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{p-1}|x_i + y_i|^1$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{p-1}[|x_i| + |y_i|]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^{p-1}|y_i|$$

Menggunakan ketaksamaan Holder, didapatkan

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i + y_i|^{p-1}|x_i| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

dan

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^{p-1}|y_i| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

sehingga

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Karena $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, maka $p+q=pq$ dan $p=(p-1)q$.

Sehingga bentuk persamaannya menjadi

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|\right)^{\frac{1}{q}}$$

Kemudian kedua ruas dibagi dengan $(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|)^{\frac{1}{q}}$, menjadi

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p}{(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|)^{\frac{1}{q}}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1-\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Karena $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, maka

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sehingga terbukti bahwa

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Definisi 2.16 Ruang Bernorma (Bartle & Sherbert, 2010)**.**

Misalkan X adalah Ruang Vektor atas lapangan $\mathbb{R}$. Norma pada X didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\,.\,\|: X \to \mathbb{R}$, dimana untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi yaitu:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| > 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in X$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

Jika X sudah memenuhi sifat norma tersebut, maka $\|\,.\,\|$ dikatakan norma untuk X dan $(X, \|\,.\,\|)$ disebut ruang bernorma.

Contoh 2.17

Untuk $1 \leq p < \infty$, diberikan ℓ^p ruang barisan yang didefinisikan

$$\ell^p = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

Dilengkapi dengan norma

$$\|a_n\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Buktikan bahwa $(\ell^p, \|a_n\|)$ adalah ruang bernorma (Bartle & Sherbert, 2010).

Bukti:

Akan dibuktikan $(\ell^p, \|a_n\|)$ adalah ruang bernorma.

1. Akan ditunjukkan $\|a_n\| \geq 0$

   Berdasarkan yang diketahui $\|a_n\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ karena $|a_n|^p \geq 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$, maka

$$|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \geq 0$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

Sehingga $\|a_n\| \geq 0$.

2. Akan ditunjukkan $\|a_n\| > 0$ jika dan hanya jika $a_n = 0$

   $(\rightarrow)$ Jika $\|a_n\| = 0$, akan ditunjukkan $a_n = 0$

   Karena $\|a_n\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$, maka

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$$

   Karena nilai $|a_n|^p \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka untuk mendapatkan $\|a_n\| = 0$ maka nilai $|a_n|^p$ haruslah 0. Sehingga $a_n = 0 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$.

   $(\leftarrow)$ Jika $a_n = 0$, akan ditunjukkan $\|a\| = 0$

   $a_n = 0$ maka $|a_n| = 0$. Sehingga $|a_n|^p = 0$ untuk $1 \leq p < \infty$ sehingga $|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p = 0$. Kemudian

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

   Sehingga $\|a_n\| = 0$.

3. Akan ditunjukkan $\|\alpha(a_n)\| = |\alpha| \|a_n\|$

   Berdasarkan definisi, maka

$$\|\alpha(a_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha(a_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^p |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Karena $\alpha \in \mathbb{R}$ merupakan skalar, maka diperoleh

$$= |\alpha| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |\alpha| \|a_n\|$$

4. Akan ditunjukkan $\|a_n + b_n\| \leq \|a_n\| + \|b_n\|$ dengan $a_n, b_n \in \ell^p$

$$\|a_n + b_n\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Menggunakan ketaksamaan Minkowski diperoleh

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Sehingga $\|a_n + b_n\| \leq \|a_n\| + \|b_n\|$.

Karena ke-iv sifat terbukti, maka $(\ell^p, \|a_n\|_{\ell^p})$ adalah ruang bernorma.

Definisi 2.18 Kekonvergenan Pada Ruang Bernorma (Kreyszig, 1978).

1. Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pada ruang bernorma X konvergen ke $x \in X$ jika

   $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq N$ berlaku

   $$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

   sehingga $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$ atau dapat di notasikan dengan $x_n \to x$

   dengan x merupakan nilai limit X.

2. Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pada ruang bernorma X merupakan barisan Cauchy jika

   $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall\, m, n \geq H(\varepsilon)$ berlaku

   $$\|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

2.1.6 Operator Linier

Operator linier digunakan untuk memetakan vektor ke dalam vektor lain. Hubungan operator linier dengan Basis Schauder terletak pada kegunaan operator linier yang dapat memetakan Basis Schauder ke Ruang Banach lain.

Definisi 2.19 Operator Linier (Kreyszig, 1978).

Operator T yang memetakan Ruang Vektor V ke Ruang Vektor lain atas lapangan yang sama disebut operator linier jika memenuhi dua sifat utama untuk semua vektor $u, v \in V$ dan untuk semua skalar $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Additivitas (Penjumlahan vektor)

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

2. Homogenitas (Penggandaan skalar)

$$T(ku) = \alpha T(u)$$

Contoh 2.20

Misalkan X adalah Ruang Banach. Operator identitas $I : X \to X$ didefinisikan oleh $I(x) = x$ untuk semua $x \in X$. Buktikan bahwa operator identitas pada Ruang Banach tersebut merupakan operator linier.

Bukti:

Untuk menujukkan bahwa operator tersebut merupakan operator linier, maka akan ditunjukkan $I : X \to X$ memenuhi dua sifat:

1. Untuk setiap $x, y \in X$, berlaku:

$$I(x + y) = I(x) + I(y)$$

Bukti:

$I(x+y) = x+y$, disisi lain $I(x) + I(y) = x+y$. Sehingga terbukti bahwa $I(x+y) = I(x) + I(y) = x+y$

2. Untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar $k \in \mathbb{R}$, berlaku:

$$I(kx) = kI(x)$$

Bukti:

$I(kx) = kx,$ di sisi lain $kI(x) = kx$. Sehingga terbukti bahwa $I(kx) = kI(x) = kx.$

Karena ke-2 sifat dipenuhi oleh operator identitas, maka operator identitas merupakan operator linier.

Definisi 2.21 Operator Linier Terbatas

Misal X dan Y adalah ruang bernorma dan $T: Z \to Y$ adalah operator linier dengan di mana $Z \subset X$. Operator T dikatakan terbatas jika terdapat $K \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\forall x \in Z$, berlaku

$$\|Tx\| \leq K\|x\|$$

Definisi 2.22 Ruang Dual (Kreyszig, 1978).

Misal X adalah ruang bernorma. Maka himpunan semua fungsi linier terbatas di X merupakan ruang bernorma yang didefinisikan

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

disebut ruang dual dari X dan dinotasikan dengan X^*.

Definisi 2.23 Pemetaan Ruang Dual (Straatman, 2014).

Misal X adalah Ruang Banach. Misal $x \in X$ dengan $x \neq 0$ dan ϕ adalah fungsi linier dan terbatas. Maka $T: X \to X^*$ yang didefinisikan sebagai

$$T(x) = \{\phi \in X^*: \|\phi\| = 1 \cdot \phi(x) = \|x\|\}$$

disebut pemetaan dual.

2.1.7 Ruang Banach

Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap (Bartle & Sherbert, 2010). Ruang Banach berperan sebagai objek pada penelitian "Eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach". Berikut akan dipaparkan beberapa definisi dan teorema yang mendukung materi yang akan dibahas.

Definisi 2.24 Ruang Banach (Bartle & Sherbert, 2010)**.**

Ruang Banach adalah ruang bernorma yang lengkap, kelengkapannya berarti bahwa setiap barisan Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dalam ruang bernorma konvergen ke suatu titik dalam ruang tersebut.

Contoh 2.25

Untuk $1 \leq p < \infty$, diberikan ℓ^p ruang barisan yang didefinisikan

$$\ell^p = \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\}$$

Dilengkapi dengan norma

$$\|a_n\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Buktikan bahwa $(\ell^p, \|a_n\|_{\ell^p})$ adalah Ruang Banach (Bartle & Sherbert, 2010).

Bukti:

Pada *Contoh 2.17* telah dibuktikan bahwa $(\ell^p, \|a_n\|_{\ell^p})$ adalah ruang bernorma. Selanjutnya akan dibuktikan kelengkapan ruang bernorma $(\ell^p, \|a_n\|)$. Misal barisan $\{a_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$ dengan $k \in \mathbb{N}$ merupakan barisan Cauchy di ℓ^p, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$\left\|a_i^{(m)} - a_i^{(n)}\right\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i^{(m)} - a_i^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

barisan $\{a_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$ dengan $k \in \mathbb{N}$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap, maka barisan $\{a_i^{(k)}\}_{i=1}^{\infty}$ dengan $k \in \mathbb{N}$ konvergen ke suatu barisan $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ Kemudian akan ditunjukkan $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \in \ell^p$, untuk setiap $\varepsilon > 0$, dipilih N sedemikian sehingga untuk semua $m, n \geq N$ berlaku

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i^{(m)} - a_i^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

untuk $m \geq N$ terdapat $a_i^{(n)}$ konvergen ke a_i. Sehingga diperoleh

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i^{(m)} - a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_i^{(m)} - a_i\right|^p < \varepsilon^p$$

Karena $a_i^{(m)} \in \ell^p$ dan $\left\|a_i^{(m)}\right\|$ berhingga, menggunakan ketaksamaan segitiga diperoleh

$$\|a_i\| \leq \left\|a_i^{(m)}\right\| + \left\|a_i^{(m)} - a_i\right\| < \left\|a_i^{(m)}\right\| + \varepsilon$$

Sehingga $a_i \in \ell^p$ karena ε bernilai sebarang dan $\|a_i\|$ berhingga.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa ${a_i}^{(k)}$ konvergen ke a_i.

Diberikan $\varepsilon > 0$ dipilih N sedemikian sehingga $m, n \geq N$ berlaku

$$\left\| {a_i}^{(m)} - {a_i}^{(n)} \right\| < \varepsilon$$

Ketika $m \geq N$ untuk setiap $k \geq N$, diperoleh

$$\left\| {a_i}^{(k)} - a_i \right\| < \left\| {a_i}^{(k)} - {a_i}^{(m)} \right\| + \left\| {a_i}^{(m)} - a_i \right\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Sehingga ${a_i}^{(k)}$ konvergen ke a_i.

2.1.8 Basis Schauder

Basis Schauder adalah konsep dalam Ruang Banach yang mirip dengan basis dalam Ruang Vektor. Peran basis Schauder dalam Ruang Banach sangat penting karena dapat digunakan untuk merepresentasikan elemen-elemen dalam ruang tersebut sebagai jumlah tak terhingga linier dari elemen-elemen basis.

Definisi 2.26 Basis Schauder di Ruang Bernorma (Bartle & Sherbert, 2010).

Terdapat barisan vektor $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ di ruang bernorma X dengan sifat: $\forall\, x \in X$ terdapat suatu barisan skalar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sehingga berlaku

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \right\| \to \infty$$

Contoh 2.27

Diketahui $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dengan $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Apakah (e_1, e_2, e_1) merupakan Basis Schauder.

Jawab:

Jika $\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ terpenuhi maka (e_1, e_2, e_1) merupakan Basis Schauder. $\beta = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, +3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Sehingga (e_1, e_2, e_1) merupakan Basis Schauder.

2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Al-Quran

Pada bab 1 telah dijelaskan mengenai perintah Allah kepada seseorang untuk selalu mengingat Allah SWT. melalui ciptaan-Nya, dan orang yang melaksanakan perintah Allah tersebut termasuk ulul albab. Pada subbab ini, akan dibahas mengenai karakteristik dari ulul albab, sebagaimana firman Allah dalam QS. Az-Zumar ayat 18 yang berbunyi:

ٱلَّذِينَ يَسْتَمِعُونَ ٱلْقَوْلَ فَيَتَّبِعُونَ أَحْسَنَهُۥٓ ۚ أُو۟لَٰٓئِكَ ٱلَّذِينَ هَدَىٰهُمُ ٱللَّهُ ۖ وَأُو۟لَٰٓئِكَ هُمْ
أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ

(Kementrian Agama, 2020)

Artinya:

"Yang mendengarkan perkataan lalu mengikuti apa yang paling baik di antaranya. Mereka itulah orang-orang yang telah diberi Allah petunjuk dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal."

Menurut Al- Ashqar dalam kitab Tafsir Zubdatut Tafsir Min Fathil Qadir, QS. Az-Zumar ayat 18 bermakna " الَّذِينَ يَسْتَمِعُونَ الْقَوْلَ فَيَتَّبِعُونَ أَحْسَنَهُۥٓ yaitu "orang-orang yang mendengarkan perkataan kemudian mengikuti yang terbaik di antaranya." Ini merujuk pada mereka yang mendengar kebenaran dari kitab Allah atau sunnah Rasulullah, lalu menjalankan perintah baik yang diberikan dan

mengamalkannya. Pendapat lain menyebutkan bahwa ayat ini merujuk pada orang yang mendengar baik perkataan baik maupun buruk, tetapi hanya mengucapkan yang baik dan meninggalkan yang buruk. Kemudian أُوْلَٰٓئِكَ الَّذِينَ هَدَىٰهُمُ اللَّهُ ۖ وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمْ أُوْلُواْ الْأَلْبَٰبِ "Mereka itulah orang-orang yang telah diberi Allah petunjuk dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal." Mereka adalah orang-orang yang diberi petunjuk oleh Allah menuju kebenaran dan memiliki akal sehat.

Dijelaskan pula dalam hadis Hilyatul Auliya, no. 12893 karya Al-Ashfahani, Abu Nuaim, mengenai karakteristik ulul albab dimana Sufyan bin Uyainah mengatakan:

لَيْسَ الْعَاقِلُ الَّذِي يَعْرِفُ الْخَيْرَ وَالشَّرَّ , إِنَّمَا الْعَاقِلُ الَّذِي إِذَا رَأَى الْخَيْرَ اتَّبَعَهُ وَإِذَا رَأَى الشَّرَّ اجْتَنَبَهُ (Kementrian Agama, 2020)**.**

Artinya:

"Orang yang berakal bukanlah orang yang mengetahui kebaikan dan keburukan. Tiada lain orang yang berakal adalah seseorang yang apabila melihat kebaikan, ia pun mengikutinya. Dan apabila melihat keburukan, ia pun menjauhinya."

Berdasarkan ayat dan hadis tersebut, dapat diketahui bahwa ulul albab memiliki kriteria tertentu yaitu orang-orang yang mampu membedakan mana yang baik dan mana yang tidak baik, mana yang mesti didahulukan dan mana yang tidak,. Sebagaimana karakteristik dari suatu barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di Ruang Banach dapat dinyatakan sebagai Basis Schauder yaitu jika dan hanya jika memenuhi tiga kondisi. (i) $x_n \neq 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. (ii) Terdapat konstanta K sehingga untuk setiap pilihan skalar $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan bilangan bulat $n < m$, berlaku $\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq K\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\|$. (iii) Rentang linier tertutup dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah X. Sehingga ketika

suatu barisan memenuhi kondisi tersebut disebut sebagai Basis Schauder di Ruang Banach.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Pada subbab ini diawali dengan memaparkan definisi Basis Schauder di Ruang Banach yang tertulis pada buku "*Classical Banach Space*".

Definisi 2.28 Basis Schauder di Ruang Banach (Ahlfors et al., 1977).

Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di Ruang Banach X disebut Basis Schauder dari X apabila untuk setiap $x \in X$ terdapat barisan skalar dengan tunggal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$. Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang merupakan Basis Schauder dengan rentang linier tertutup disebut barisan *basic*.

Proposisi 2.3 (Ahlfors et al., 1977).

Misal X menjadi Ruang Banach dengan Basis Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, maka proyeksi $P_n: X \to X$ didefinisikan oleh $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ adalah operator linier terbatas dan $\sup_n \|P_n\| < \infty$.

Proposisi 2.4 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan vektor di Ruang Banach X, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder di X jika dan hanya jika memenuhi tiga kondisi.

1. $x_n \neq 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
2. Terdapat konstanta K sehingga untuk setiap pilihan skalar $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan bilangan bulat $n < m$, berlaku

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

3. Rentang linier tertutup dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah X.

Lemma 2.5 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Misal X adalah Ruang Banach berdimensi tak hingga dan $B \subset X$ merupakan subruang berdimensi hingga dan $\varepsilon > 0$. Maka terdapat $x \in X$ dengan $\|x\| = 1$ sehingga $\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$ untuk setiap $y \in B$ dan setiap skalar λ.

Teorema 2.6 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Setiap Ruang Banach berdimensi tak hingga memuat satu barisan *basic.*

Definisi 2.29 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Dua basis $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari X dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari Y disebut ekuivalen apabila deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ konvergen.

Teorema 2.7 (Ahlfors et al., 1977)

Misal X adalah Ruang Banach berdimensi tak hingga dengan Basis Schauder. Maka terdapat banyak sekali basis normalisasi yang tidak ekuivalen di X.

Proposisi 2.8 (Ahlfors et al., 1977)

1. Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah basis normalisasi dari Ruang Banach X dengan konstanta basis K. Misal $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan dari vektor-vektor di X dengan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2K}$$

Maka $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah basis dari X yang mana ekuivalen ke $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hanya barisan *basic*, maka $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ akan menjadi barisan *basic* juga yang ekuivalen dengan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$)

2. Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan *basic* normalisasi di Ruang Banach X dengan konstanta basis K. Asumsikan bahwa terdapat proyeksi P dari X onto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Misal $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan vektor di X sedemikian hingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{8K\|P\|}$$

Maka $Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ lengkap di X.

Definisi 2.30 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan *basic* di Ruang Banach X. Barisan vektor tak-nol $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ di X dengan bentuk

$$u_i = \sum_{n=p_i+1}^{p_i+1} a_n x_n$$

dengan barisan skalar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $p_1 < p_2 < \cdots$ sebuah barisan bilangan bulat meningkat disebut basis blok *basic* atau singkatnya basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposisi 2.9 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Misalkan X adalah Ruang Banach dengan Basis Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Misal Y adalah subruang tertutup berdimensi tak hingga dari X. Maka terdapat subruang Z dari Y yang mempunyai basis yang mana ekuivalen dengan basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposisi 2.10 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Misalkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder dari Ruang Banach X. Misal y_k adalah barisan vektor yang didefinisikan dengan

$$y_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^{(k)} x_n \, , k = 1,2, \ldots$$

sedemikian sehingga $\lim_k \sup \|y_k\| > 0$ dan $\lim_k a_n{}^{(k)} = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (hal ini khusus terjadi jika $y_k \to 0$ dan $\|y_k\| \nrightarrow 0$). Maka terdapat sub barisan $\{y_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ dari $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ yang ekuivalen dengan basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan jenis atau pendekatan penelitian Studi Kepustakaan (*Library Research*). Menurut Mestika Zed, Studi pustaka atau kepustakaan dapat diartikan sebagai serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian (Zed, 2003). Pada bagian ini dilakukan pengkajian mengenai konsep dan teori yang digunakan berdasarkan literatur yang tersedia, terutama dari artikel-artikel yang dipublikasikan dalam berbagai jurnal ilmiah. Dengan menggunakan metode penelitian ini penulis dapat dengan mudah menyelesaikan masalah yang hendak diteliti.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian yang dilakukan penulis adalah dengan mengumpulkan beberapa referensi sebagai rujukan terkait topik yang di bahas. Penulis menggunakan rujukan utama dari buku "*Classical Banach Space"* dan objek penelitiannya yaitu "Eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach".

3.3 Tahapan Penelitian

Penelitian ini dilakukan melalui beberapa tahap:

1. Melakukan analisis terhadap teorema-teorema eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach yang akan dibuktikan, yaitu:

a. Mengetahui definisi barisan *basic*, yaitu barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang merupakan Basis Schauder dengan rentang linier tertutup disebut barisan *basic*.

b. Mengetahui definisi Basis Schauder di Ruang Banach, yaitu barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di Ruang Banach X apabila untuk setiap $x \in X$ terdapat barisan skalar dengan tunggal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$.

c. Membuktikan bahwa proyeksi $P_n: X \to X$ pada Basis Schauder yang didefinisikan oleh $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ adalah operator linier terbatas dan $\sup_n \|P_n\| < \infty$.

d. Membuktikan kondisi suatu barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan Basis Schauder jika dan hanya jika memenuhi tiga kondisi.

e. Membuktikan lemma "Misal X adalah Ruang Banach berdimensi tak hingga dan $B \subset X$ merupakan subruang berdimensi hingga dan $\varepsilon > 0$. Maka terdapat $x \in X$ dengan $\|x\| = 1$ sehingga $\|y\| \leq (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\|$ untuk setiap $y \in B$ dan setiap skalar λ".

f. Mengetahui definisi dua basis $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari X dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari Y disebut ekuivalen apabila deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ konvergen.

g. Mengetahui definisi basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, yaitu Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan *basic* di Ruang Banach X. Barisan vektor tak-nol $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ di X dengan bentuk $u_i = \sum_{n=p_i+1}^{p_i+1} a_n x_n$ dengan barisan skalar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $p_1 < p_2 < \cdots$ sebuah barisan bilangan bulat meningkat.

h. Membuktikan teorema yang berkaitan dengan eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach:

i. Setiap Ruang Banach berdimensi tak hingga memuat setidaknya satu barisan *basic.*

ii. Terdapat banyak basis normalisasi yang tidak ekuivalen pada Ruang Banach berdimensi tak hingga.

iii. Terdapat barisan *basic* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ekuivalen dengan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan barisan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ lengkap pada basis yang ternormalisasi dengan konstanta K.

iv. Terdapat subruang Z dari Y mempunyai basis yang ekuivalen dengan basis blok $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ pada Y di mana Y merupakan subruang tertutup berdimensi tak hingga dari Ruang Banach X.

v. Misalkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder dari Ruang Banach X. Misal y_k adalah barisan vektor yang didefinisikan dengan $y_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^{(k)} x_n$, $k = 1,2, \ldots$ sedemikian sehingga $\limsup_{k} \|y_k\| > 0$ dan $\lim_{k} a_n{}^{(k)} = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (hal ini khusus terjadi jika $y_k \to 0$ dan $\|y_k\| \nrightarrow 0$). Maka terdapat sub barisan $\left\{y_{k_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ dari $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ yang ekuivalen dengan basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Membuat pembahasan mengenai pembuktian teorema eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach.
3. Mengkaji penerapan integrasi dengan Al– Qur’an.
4. Penyusunan skripsi.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach

Eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach yaitu setiap Ruang Banach berdimensi tak hingga memuat satu barisan *basic*. Barisan *basic* adalah barisan $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ yang merupakan Basis Schauder dengan rentang linier tertutup. Berikut pembahasan mengenai teorema eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach diawali dengan memaparkan definisi Basis Schauder.

Definisi 4.1 Basis Schauder di Ruang Banach (Ahlfors et al., 1977).

Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di Ruang Banach X disebut Basis Schauder dari X apabila untuk setiap $x \in X$ terdapat barisan skalar yang tunggal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$. Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang merupakan Basis Schauder dengan rentang linier tertutup disebut barisan *basic.*

Proposisi 4.1 (Ahlfors et al., 1977).

Misal X adalah Ruang Banach dengan Basis Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, maka proyeksi $P_n: X \to X$ didefinisikan oleh $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ adalah operator linier terbatas dan $\sup_n \|P_n\| < \infty$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa P_n merupakan proyeksi linier.

   Misal $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ dan $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i$ dengan $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ adalah skalar, maka

a. Akan ditunjukkan sifat additivitas (penjumlahan vektor)

$$P_n(x+y) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i\right)$$

$$= P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)\ x_i\right)$$

Karena P_n hanya berlaku sampai indeks ke-n, maka

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)\ x_i\right) = P_n\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)\ x_i\right)$$

$$= P_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)$$

$$= P_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) + P_n\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)$$

$$= P_n(x) + P_n(y)$$

b. Akan ditunjukkan sifat homogenitas (penggandaan skalar)

$$P_n(\alpha x) = P_n\left(\alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha a_i)\ x_i\right)$$

Karena P_n hanya berlaku sampai indeks ke-n, maka

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha a_i)\ x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i)\ x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \alpha P_n(x)$$

Jadi, P_n linier.

2. Untuk membuktikan P_n merupakan operator linier terbatas dan $\sup_n \|P_n\| < \infty$

Berdasarkan definisi $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, maka akan ditunjukkan bahwa

$$\|P_n(x)\| \leq K\|x\|.$$

Diberikan $(X, \|\,.\,\|)$ merupakan Ruang Banach dengan Basis Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ untuk setiap $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ diekspresikan

$$|||x||| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| < \infty$$

dengan $|||x||| \geq \|x\|$ untuk setiap $x \in X$ (Ahlfors et al., 1977).

Konstanta basis dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah bilangan $\sup_n \|P_n\|$. Basis dikatakan monoton jika untuk setiap deret skalar $\{a_n\}$, $\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|$ tidak menurun sebagai fungsi dari n. Jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder, maka proyeksi P_n akan memenuhi

$$|||P_n(x)||| = \sup_m \|P_m P_n(x)\|$$

$$= \sup_{1 \leq m \leq n} \|P_m(x)\| \leq \sup_n \|P_n(x)\| = |||x|||$$

untuk semua $x \in X$, sehingga

$$|||P_n(x)||| \leq |||x||| = \sup_n \|P_n(x)\| < \infty$$

Selanjutnya terdapat beberapa kondisi suatu barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$dikatakan Basis Schauder.

Proposisi 4.2

Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan vektor di Ruang Banach X, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder di X jika dan hanya jika memenuhi tiga kondisi.

1. $x_n \neq 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

2. Terdapat konstanta K sehingga untuk setiap pilihan skalar $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan bilangan bulat $n < m$, berlaku

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

3. Rentang linier tertutup dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah X.

Bukti:

($\rightarrow$) Apabila $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder, maka akan ditunjukkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ memenuhi tiga kondisi:

1. Akan dibuktikan $x_n \neq 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

   Bukti:

   Berdasarkan definisi Basis Schauder, barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di Ruang Banach X disebut Basis Schauder dari X apabila untuk setiap $x \in X$ terdapat barisan skalar yang tunggal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$. Andaikan $x_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + \cdots$$

   karena $x_n = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka

$$= a_1(0) + a_2(0) + \cdots + a_n(0) + \cdots$$

   yang artinya $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak dapat menjadi basis untuk X, karena salah satu syarat suatu himpunan dikatakan basis berdasarkan *Definisi 2.9* haruslah bebas linier. Oleh karena itu $x_n \neq 0$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

2. Akan dibuktikan terdapat konstanta K sehingga untuk setiap memilih skalar $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan bilangan bulat $n < m$, berlaku

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

Bukti:

Menggunakan *Proposisi 4.1* proyeksi $P_n: X \to X$ didefinisikan oleh

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

adalah operator linier terbatas, sehingga

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

berlaku.

3. Akan dibuktikan rentang linier tertutup dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah X.

   Bukti:

   Berdasarkan *Definisi 4.1*, maka rentang linear tertutup dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ haruslah seluruh X.

($\leftarrow$) Apabila $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ memenuhi tiga kondisi tersebut, maka akan dibuktikan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan Basis Schauder.

Bukti:

Karena diketahui $x_n \neq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan vektor, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dapat didefinisikan

$$x_1{}^{(i)} = \left(x_1{}^{(1)}, x_1{}^{(2)}, x_1{}^{(3)}, \dots, x_n{}^{(i)}, \dots\right),$$

$$x_2{}^{(i)} = \left(x_2{}^{(1)}, x_2{}^{(2)}, x_2{}^{(3)}, \dots, x_4{}^{(i)}, \dots\right),$$

$$\vdots$$

$$x_n{}^{(i)} = \left(x_n{}^{(1)}, x_n{}^{(2)}, x_n{}^{(3)}, \dots, x_n{}^{(i)}, \dots\right),$$

$$\vdots$$

Sehingga terdapat $\left\{{x_n}^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty} \neq 0$ pula untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Dipilih ${x_n}^{(i)} = 1$, karena terdapat konstanta K sehingga untuk setiap memilih skalar $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan bilangan bulat $n < m$, memenuhi

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|.$$

Maka terdapat proyeksi linier $P_n: X \to X$ didefinisikan oleh

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Sehingga

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| = \left\|P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right)\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

Dengan demikian terdapat kombinasi linier $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ dengan $x_i = x_n$. Kemudian karena rentang linier linier tertutup dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah X, maka berdasarkan *Definisi 4.1* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan Basis Schauder.

Contoh 4.2

Untuk $1 \leq p < \infty$, diberikan ℓ^p ruang barisan yang didefinisikan

$$\ell^p = \left\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\}$$

Dilengkapi dengan norma

$$\|a_n\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Kemudian didefinisikan

$$x_1 = (1,0,0,\dots),$$

$$x_2 = (0,1,0,\dots),$$

$$x_3 = (0,0,1,\dots),$$

$$\vdots$$

Maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan Basis Schauder ℓ^p untuk $1 \leq p < \infty$.

Bukti:

Berdasarkan *Contoh 2.24* terbukti bahwa $(\ell^p, \|a_n\|_{\ell^p})$ merupakan Ruang Banach. Berdasarkan *Definisi 4.1* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan Basis Schauder, jika $\forall\, x \in \ell^p$, ada barisan skalar tunggal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$ untuk setiap $x \in X$.

Diambil sebarang $x \in \ell^p$, berdasarkan definisi ℓ^p pada *Contoh 4.2* terdapat barisan skalar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$. Misal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dinyatakan dalam bentuk

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

Kemudian akan ditunjukkan bahwa barisan skalar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tunggal dengan

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n \ = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \cdots$$

$$= (1,0,0,\dots)a_1 + (0,1,0,\dots)a_2 + (0,0,1,\dots)a_3 + \cdots$$

$$= (a_1, 0,0,\dots) + (0, a_2, 0,\dots) + (0,0, a_3,\dots) + \cdots$$

$$= (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

$$= \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Karena $x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ \ell^p$ maka $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan skalar yang tunggal.

Untuk membuktikan bahwa barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan Basis Schauder ℓ^p untuk $1 \leq p < \infty$. Akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ memenuhi tiga kondisi yang tertera pada *Proposisi 4.2*

1. Akan dibuktikan bahwa $x_n \neq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

   Setiap elemen dari barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah vektor kanonik dalam ruang ℓ^p. Artinya setiap x_n memiliki elemen ke-n bernilai 1 dan semua elemen lainnya bernilai 0. Karena setiap x_n memiliki setidaknya 1 komponen yang bukan 0, yaitu komponen ke-n yang bernilai 1, maka $x_n \neq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

2. Akan dibuktikan bahwa terdapat konstanta K sehingga untuk setiap pilihan skalar $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan bilangan bulat $n < m$, berlaku

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

   Berdasarkan contoh norma $\|a_n\|_{\ell^p}$ didefinisikan dengan

$$\|a_n\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

   sehingga

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

   dan

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|_{\ell^p} = \left(\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

   Karena $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p$ adalah bagian dari $\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p$ ketika $n < m$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \leq \sum_{i=1}^{m} |a_i|^p$$

Oleh karena itu,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{m}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Ini menunjukkan bahwa dapat dipilih $K = 1$, karena

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|_{\ell^p} \leq 1 \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|_{\ell^p}$$

3. Akan dibuktikan bahwa rentang linier Rentang linier tertutup dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah X.

   Karena $x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \dots) \in \ell^p$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari elemen-elemen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Oleh karena itu, setiap elemen dari ℓ^p merupakan rentang linier dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Karena ketiga kondisi terpenuhi, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan Basis Schauder dari ruang ℓ^p untuk $1 \leq p < \infty$.

Lemma 4.3 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Misal X adalah Ruang Banach berdimensi tak hingga dan $B \subset X$ merupakan subruang berdimensi hingga dan $\varepsilon > 0$. Maka terdapat $x \in X$ dengan $\|x\| = 1$ sehingga $\|y\| \leq (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\|$ untuk setiap $y \in B$ dan setiap skalar λ.

Bukti:

Diketahui X adalah Ruang Banach berdimensi tak hingga. Kemudian karena $B \subset X$ berdimensi hingga, maka dapat dipilih suatu basis Ortonormal $\{y_i\}_{i=1}^{n}$ dari B dengan $i, n \in \mathbb{N}$. Sehingga untuk setiap $y \in B$ dengan $\|y\| = 1$, terdapat $\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dengan mengasumsikan $\varepsilon < 1$. Karena jika $\varepsilon < 1$ terbukti, maka berlaku pula untuk $\varepsilon > 0$. Dipilih $\{y_i{}^*\}_{i=1}^{n}$ dari X^* dengan X^* merupakan ruang dual

dari X sehingga untuk setiap $y^* \in X^*$ berlaku $\|y^*\| = 1$. Karena ${y_i}^*$ merupakan fungsi linier kontinu yang memetakan y_i ke skalar 1, sehingga ${y_i}^*(y_i) = 1$ untuk semua $i \in \mathbb{N}$. Kemudian dipilih $x \in X$ dengan $\|x\| = 1$ dan ${y_i}^*(x) = 0$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Diberikan $\|y\| = 1$ terdapat $\|y - y_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$, maka untuk setiap skalar λ, diperoleh

$$\|y + \lambda x\| \geq \|y_i + \lambda x\| - \|y - y_i\|$$

dengan ${y_i}^*(y_i + \lambda x) = {y_i}^*(y_i) + {y_i}^*(\lambda x) = 1$, maka

$$\|y_i + \lambda x\| \geq |{y_i}^*(y_i + \lambda x)| = 1$$

sehingga

$$\|y + \lambda x\| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

Oleh karena itu,

$$\|y\| \leq 1 \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \varepsilon) \leq \|y + \lambda x\|(1 + \varepsilon)$$

Karena $\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < (1 + \varepsilon)$

sehingga terbukti untuk setiap $y \in B$ dan setiap scalar λ, berlaku

$$\|y\| \leq (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\|$$

Menggunakan *Lemma 4.3* akan dibuktikan teorema eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach berikut.

Teorema 4.4 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Setiap Ruang Banach berdimensi tak hingga memuat satu barisan *basic*.

Bukti:

Berdasarkan *Definisi 4.1*. Maka akan ditunjukkan *Teorema 4.4* bahwa setiap Ruang Banach berdimensi tak hingga memuat Basis Schauder dengan rentang linier tertutup. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang dihasilkan adalah suatu barisan *basic*. Terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Basis Schauder

Akan ditunjukkan bahwa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ memenuhi tiga kondisi sehingga $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan Basis Schauder.

1. Akan ditunjukkan $x_n \neq 0$

   Karena dipilih x_n dengan $\|x_n\| = 1$, maka jelas bahwa $x_n \neq 0$.

2. Akan ditunjukkan terdapat konstanta K sehingga untuk setiap pilihan skalar $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan bilangan bulat $n < m$, berlaku

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

   Berdasarkan *Proposisi 4.2* terdapat proyeksi P_n didefinisikan dengan

$$P_n\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|\right) = \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|$$

   Berdasarkan *Lemma 4.3* dipilih $\varepsilon > 0$, terdapat barisan $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, sedemikian sehingga

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + \varepsilon_n) \leq 1 + \varepsilon.$$

   dapat dipilih $x_1 \in X$ dengan $\|x_1\| = 1$ dan dapat ditemukan x_2 dengan $\|x_2\| = 1$, sehingga untuk $y \in \text{span}\{x_1\}$ dan setiap skalar λ. Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ berdasarkan *Lemma 4.3* ditemukan $\|x_{n+1}\| = 1$ dengan $y \in \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan setiap skalar λ berlaku

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon)\|y+\lambda x_{n+1}\|$$

Berdasarkan *Lemma 4.3* karena setiap vektor baru x_{n+1} berkaitan dengan vektor $\{x_1, \dots, x_n\}$ berada pada rentang yang sama. Sehingga berdasarkan *Lemma 4.3* dan kontruksi barisan, setiap elemen $x \in X$ dapat didekati sebagai kombinasi linier $\{x_n\}$. Dengan demikian x dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \cdots$$

Berdasarkan *Lemma 4.3* dan kontruksi barisan

$\|x_1\| = 1$ dan $\|x_{n+1}\| = 1$

Sehingga ketika ada konstanta basis K untuk setiap pilihan skalar $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ dan bilangan bulat $n < m$

$$\|x\| \leq K\|x_{n+1}\|$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i\right\|$$

dengan $n+1 = m$. Dengan demikian,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| < K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|$$

berlaku.

3. Akan ditunjukkan rentang linier tertutup dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah semua di X.

   Berdasarkan *Lemma 4.3* dan kontruksi barisan, setiap elemen $x \in X$ dapat didekati sebagai kombinasi linier $\{x_n\}$.

Karena ketiga kondisi terpenuhi, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan Basis Schauder. Kemudian akan ditunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tunggal.

Asumsikan ada dua Basis Schauder yang berbeda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ untuk Ruang Banach X, berdasarkan *Definisi 4.1*, maka setiap elemen x dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ maupun $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_j y_j$$

Karena $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder, proyeksi ke arah masing-masing adalah unik (tunggal). Jika terdapat dua Basis Schauder yang berbeda, maka setidaknya terdapat satu elemen $x \in X$ yang proyeksinya ke arah $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ yang berbeda, yang kontradiksi dengan keunikan representasi elemen di Ruang Banach tersebut. Sehingga untuk setiap $x \in X$ terdapat proyeksi P_n dan Q_n yang didefinisikan masing-masing untuk $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ tidak mungkin berbeda. Oleh karena itu, asumsi bahwa ada dua Basis Schauder yang berbeda tidak mungkin benar. Dengan demikian, Basis Schauder di Ruang Banach berdimensi tak hingga adalah tunggal. Sehingga *Teorema 4.4* terbukti.

Definisi 4.4 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Dua basis $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari X dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dari Y disebut ekuivalen apabila deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ konvergen.

Teorema 4.5 (Ahlfors et al., 1977)

Misal X adalah Ruang Banach berdimensi tak hingga dengan Basis Schauder. Maka terdapat banyak sekali basis normalisasi yang tidak ekuivalen di X.

Bukti:

Karena X adalah Ruang Banach berdimensi tak hingga dengan Basis Schauder, maka terdapat barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang merupakan basis schauder untuk X.

Akan ditunjukkan bahwa ada banyak basis normalisasi yang tidak ekuivalen di X. Basis $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut ternormalisasi jika $\|x\| = 1$ untuk semua n. Dengan kata lain, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder dari X, barisan $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\right\}_{n=1}^{\infty}$ adalah basis ternormalisasi di X (Ahlfors et al., 1977). Dua basis normalisasi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan ekuivalen jika ada operator linier terbatas $T: X \to X$ merupakan bijeksi sedemikian sehingga $T(x_n) = y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah basis normalisasi dari X dengan dengan $x_n = \frac{e_n}{\|e_n\|}$ sehingga $\|x_n\| = 1$. Karena X berdimensi tak hingga, dipilih I adalah himpunan tak hingga sehingga terdapat $\{y_n\}$ dengan $n \in I$ juga tak hingga. Sehingga terdapat basis Schauder $\{y_n\}$ dengan $n \in I$ dapat didefinisikan dengan $y_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$ sehingga $\|y_n\| = 1$.

Karena I adalah himpunan tak hingga, sehingga dapat dipilih sebarang y_n dengan $n \in I$ di X dengan $e_n \neq f_n$.

Karena x_n dan y_n merupakan elemen basis, dan karena masing-masing memiliki norma yang berbeda, maka $T(x_n) \neq y_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga terdapat banyak sekali basis normalisasi yang tidak ekuivalen di X.

Proposisi 4.6 (Ahlfors et al., 1977)

1. Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah basis normalisasi dari Ruang Banach X dengan konstanta basis K. Misal $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan dari vektor-vektor di X dengan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{1}{2K}$$

   Maka $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah basis dari X yang mana ekuivalen ke $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ hanya barisan dasar, maka $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ akan menjadi barisan dasar juga yang ekuivalen dengan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

2. Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan dasar normalisasi di Ruang Banach X dengan basis konstan K. Asumsikan bahwa terdapat proyeksi P dari X onto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Misal $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan vektor di X sedemikian hingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{8K\|P\|}$$

   Maka $Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ lengkap di X.

Bukti:

1. Diberikan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah basis dengan konstanta basis K, yang berarti bahwa untuk setiap vektor $x \in X$, terdapat $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ dengan $\|x\| \leq K\|x\|$. Untuk setiap $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dapat didefenisikan operator $T: X \to X$ sebagai $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ dengan $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

   Akan dibuktikan bahwa T adalah automorfisme, yaitu T bijeksif dan kontinu dengan T^{-1} juga kontinu. Sehingga perlu ditinjukkan terlebih dahulu bahwa $\|I - T\| < 1$, di mana I merupakan operator identitas.

$$\|x - T(x)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_n - y_n)\right\|$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, dan definisi bahwa x_n adalah basis dengan konstanta K, maka diperoleh

$$\|x - T(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, \|x_n - y_n\|$$

Karena X memiliki konstanta basis K

$$\|x - T(x)\| \leq K\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|$$

Karena $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{2K}$ dan x_n merupakan basis yang ternormalisasi, maka

$$\|x - T(x)\| \leq \frac{K\|x\|}{2K} = \frac{1}{2} \, \|x\|$$

Sehingga $\|I - T\| < \frac{1}{2} < 1$. Oleh karena itu T adalah automorfisma.

2. Didefenisikan operator $T: X \to X$ sebagai $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ dengan $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Diberikan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah basis dengan konstanta basis K, yang berarti bahwa untuk setiap vektor $x \in X$, terdapat $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ dengan $\|x\| \leq K\|x\|$. Akan ditunjukkan bahwa Y adalah subruang komplementer, yang artinya terdapat proyeksi dari X ke Y

$$\|x - T(x)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x_n - y_n)\right\|$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, dan definisi bahwa x_n adalah basis dengan konstanta K, maka diperoleh

$$\|x - T(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, \|x_n - y_n\|$$

Karena X memiliki konstanta basis K

$$\|x - T(x)\| \leq K\|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|$$

Berdasarkan asumsi pada proposisi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{8K\|P\|}$$

Maka

$$\|Tx - x\| \leq K\|x\| \frac{1}{8K\|P\|} = \frac{\|x\|}{8\|P\|}$$

yang menunjukkan bahwa $\|x\| < 2\|y\|$ karena $\|y - x\| < \frac{\|x\|}{4}$ yang sama halnya dengan $\|x\| \leq 4\|y - x\| \leq 4.\left(\frac{1}{8}\|P\|\right)\|x\|$=$\left(\frac{1}{2}\right)\|x\|$.

Sehingga T adalah bijektif dan kontinu dengan $\|T^{-1}\| \leq 2$.

Karena T adalah bijektif dan T^{-1} juga kontinu, dapat difenisikan $S = TP$ sebagai operator proyeksi dari X ke Y. Di mana adanya operator S menunjukkan bahwa Y adalah subruang komplementer pada X.

Definisi 4.5 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Misal $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan dasar di Ruang Banach X. Barisan vektor tak-nol $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ di X dengan bentuk $u_i = \sum_{n=p_i+1}^{p_i+1} a_n x_n$, dengan barisan skalar $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $p_1 < p_2 < \cdots$ sebuah barisan bilangan bulat meningkat disebut basis blok *basic* atau singkatnya basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposisi 4.7 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Misalkan X adalah Ruang Banach dengan Basis Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Misal Y adalah subruang tertutup berdimensi tak hingga dari X. Maka terdapat subruang Z dari Y yang mempunyai basis yang mana ekuivalen dengan basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Bukti:

Karena Y adalah subruang tertutup berdimensi tak hingga dari X, dapat ditemukan untuk setiap bilangan bulat p, elemen $y \in Y$ dengan $\|y\| = 1$ dapat dinyatakan dalam bentuk $y = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n x_n$.

Akan dikontruksi basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ secara induktif. Dipilih $y_1 \in Y$ dengan $\|y_1\| = 1$ dan bentuk $y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^{(1)} x_n$. Kemudian menentukan $u_1 = \sum_{n=1}^{p_1} {a_n}^{(1)} x_n$ di mana p_1 adalah suatu bilangan bulat sehingga $\|y_1 - u_1\| < \frac{1}{4K}$, dengan K adalah konstanta basis dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Kemudian lakukan proses iterasi dengan memilih $y_2 \in Y$ dengan $\|y_2\| = 1$ dan bentuk $y_2 = \sum_{n=p_1+1}^{\infty} {a_n}^{(2)} x_n$. Kemudian menentukan $u_2 = \sum_{n=p_i+1}^{p_2} {a_n}^{(2)} x_n$ di mana p_2 adalah suatu bilangan bulat sehingga $\|y_2 - u_2\| < \frac{1}{4^{(2)}K}$, dengan K adalah konstanta basis dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Kemudian lanjutkan proses iterasi hingga ke-i sehingga dipilih $y_i \in Y$ dengan $\|y_i\| = 1$ dan menentukan $u_i = \sum_{n=p_{i-1}+1}^{p_i} {a_n}^{(i)} x_n$ dengan $i \in \mathbb{N}$ di mana p_i adalah suatu bilangan bulat sehingga $\|y_i - u_i\| < \frac{1}{4^{(i)}K}$. Barisan $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ merupakan basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Karena $\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i - u_i\| < \frac{1}{3K}$, berdasarkan *Proposisi 4.6*, dapat disimpulkan bahwa $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ merupakan barisan *basic* yang ekuivalen dengan $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$. Ruang $Z = \text{span}\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ memiliki sifat yang diinginkan, yaitu Z adalah subruang dari Y yang memiliki basis yang ekuivalen dengan basis blok $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposisi 4.8 (Ahlfors et al., 1977)**.**

Misalkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder dari Ruang Banach X. Misal y_k adalah barisan vektor yang didefinisikan dengan $y_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^{(k)} x_n$, $k = 1,2, \ldots$ sedemikian sehingga $\limsup_k \|y_k\| > 0$ dan $\lim_k a_n{}^{(k)} = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (hal ini khusus terjadi jika $y_k \to 0$ dan $\|y_k\| \nrightarrow 0$). Maka terdapat sub barisan $\{y_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ dari $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ yang ekuivalen dengan basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Bukti:

Diketahui $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah Basis Schauder dari X, artinya setiap $x \in X$ terdapat barisan skalar dengan tunggal $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$. Diberikan $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga $\limsup_k \|y_k\| > 0$ dan $\lim_k a_n{}^{(k)} = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Akan ditunjukkan bahwa terdapat sub barisan $\{y_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ dari $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ yang ekuivalen dengan basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Setiap $\{y_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ dapat dinyatakan sebagai $y_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^{(k)} x_n$ dengan $k \in \mathbb{N}$ di mana $\lim_{k\to\infty} a_n{}^{(k)} = 0$ untuk setiap n, koefisien $a_n{}^{(k)}$ menjadi semakin kecil saat k bertambah besar. Karena $\limsup_k \|y_k\| > 0$, berarti bahwa ada sub barisan dari $\{y_k\}$ yang normanya tidak mendekati 0. Dengan kata lain, ada sub barisan $\{y_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga $\|y_{k_i}\| > \varepsilon$ untuk suatu $\varepsilon > 0$ dan semua $i \in \mathbb{N}$.

Untuk menunjukkan bahwa sub barisan $\{y_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ekuivalen dengan basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa ada konstanta $K > 0$ sedemikian sehingga untuk semua deret skalar $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$,

$$\frac{1}{K}\left\|\sum_{i=1}^{m} b_i z_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} b_i y_{k_i}\right\| \leq K\left\|\sum_{i=1}^{m} b_i z_i\right\|$$

di mana $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ adalah basis blok dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Karena $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan Basis Schauder, dapat dipilih sub barisan y_{k_i} dengan sifat basis blok. Misal $z_i = \sum_{i=p_i}^{p_i+1^{-1}} x_j$ dengan $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ adalah partisi dari indeks n.

Karena ${a_n}^{(k)}$ konvergen, dapat dipastikan bahwa koefisien ${a_n}^{(k)}$ cukup kecil untuk semua n di luar blok yang dipilih, yang memungkinkan y_{k_i} untuk mendekati z_i dengan baik.

4.2 Integrasi Karakteristik Ulul Albab Dengan Topik

Manusia adalah mahluk Allah SWT yang paling mulia dibandingkan dengan makhluk lainnya. Karena Allah telah mengutamakannya dengan memberikannya akal untuk berfikir. Pada bab sebelumnya telah dibahas mengenai ciri-ciri ulul albab. Sebelum membahas secara rinci karakteristik dari ulul albab. Dalam Q.S. Az-Zumar:17-18, Allah berfirman

وَالَّذِينَ اجْتَنَبُوا الطَّاغُوتَ أَنْ يَعْبُدُوهَا وَأَنَابُوا إِلَى اللَّهِ لَهُمُ الْبُشْرَىٰ ۚ فَبَشِّرْ عِبَادِ ١٧ ٱلَّذِينَ يَسْتَمِعُونَ ٱلْقَوْلَ
فَيَتَّبِعُونَ أَحْسَنَهُۥٓ ۚ أُو۟لَٰٓئِكَ ٱلَّذِينَ هَدَىٰهُمُ ٱللَّهُ ۖ وَأُو۟لَٰٓئِكَ هُمْ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ١٨

(Kementrian Agama, 2020)

Artinya:

"Dan orang-orang yang menjauhi Tagut (yaitu) tidak menyembahnya dan kembali kepada Allah, mereka pantas mendapat berita gembira; sebab itu sampaikanlah kabar gembira itu kepada hamba-hamba-Ku (17), yang mendengarkan perkataan

lalu mengikuti apa yang paling baik di antaranya. Mereka itulah orang-orang yang telah diberi Allah petunjuk dan mereka itulah orang-orang yang mempunyai akal (18).”

Berdasarkan tafsir Jalalain karya Al-Mahalli dan As-Suyuthi, ayat tersebut memiliki makna bahwa orang-orang yang menjauhi thaghut yaitu berhala-berhala, dengan tidak menyembahnya dan kembali kepada Allah, akan mendapat kabar gembira berupa surga. Oleh karena itu, sampaikanlah kabar gembira tersebut kepada hamba-hamba-Ku. Ayat selanjutnya menjelaskan bahwa orang-orang yang mendengarkan perkataan dan mengikuti apa yang terbaik di antaranya, yaitu yang mengandung kemaslahatan bagi mereka, adalah orang-orang yang telah diberi petunjuk oleh Allah dan merupakan orang-orang yang berakal. Berdasarkan ayat tersebut, diketahui bahwa orang-orang yang berakal akan mendapat petunjuk dari Allah di dunia dan di akhirat.

Manusia ulul albab harus dijadikan contoh atau tauladan di dalam kehidupan, karena ia adalah manusia yang berilmu, yang dengan ilmunya itu ia mampu mengarahkan akalnya, agar mengetahui mana yang baik dan buruk supaya bisa melaksanakan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Sehingga ia mampu mengatasi setiap permasalah yang ada.

Untuk menjadi ulul albab, seseorang harus memenuhi beberapa kriteria ulul albab, yaitu:

1. Mampu mengambil pelajaran atas yang terjadi, berdasarkan firman Allah dalam Q.S. Al- Baqarah ayat 269 yang berbunyi:

   يُؤْتِى ٱلْحِكْمَةَ مَن يَشَآءُ ۚ وَمَن يُؤْتَ ٱلْحِكْمَةَ فَقَدْ أُوتِىَ خَيْرًا كَثِيرًا ۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ

   (Kementrian Agama, 2020)**.**

Artinya:

Allah menganugerahkan al hikmah (kefahaman yang dalam tentang Al Quran dan As Sunnah) kepada siapa yang dikehendaki-Nya. Dan barangsiapa yang dianugerahi hikmah, ia benar-benar telah dianugerahi karunia yang banyak. Dan hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah).

Menurut Mashudi dalam kitab Tafsir Al-Muyassar, ayat tersebut bermakna bahwa Allah memberikan kebenaran dalam perkataan dan perbuatan hamba-hamba yang dikehendaki-Nya. Dan barang siapa menerima anugerah ini, sesungguhnya ia telah mendapatkan kebaikan yang sangat besar. Namun, hanya mereka yang memiliki akal yang diterangi oleh cahaya dan petunjuk dari Allah yang mampu mengingat dan memanfaatkan hal ini.

2. Mampu membedakan yang haq dan batil, berdasarkan firman Allah Q.S. Al-Maidah ayat 100 yang berbunyi:

قُل لَّا يَسْتَوِى ٱلْخَبِيثُ وَٱلطَّيِّبُ وَلَوْ أَعْجَبَكَ كَثْرَةُ ٱلْخَبِيثِ ۚ فَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ يَٰٓأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ لَعَلَّكُمْ تُفْلِحُونَ

(Kementrian Agama, 2020)

Artinya:

Katakanlah: "Tidak sama yang buruk dengan yang baik, meskipun banyaknya yang buruk itu menarik hatimu, maka bertakwalah kepada Allah hai orang-orang berakal, agar kamu mendapat keberuntungan".

Berdasarkan penafsiran Mashudi dalam kitab Tafsir Muyassar, ayat tersebut memiliki makna: “Katakanlah (wahai rasul) bahwa yang buruk tidaklah sama dengan yang baik dalam segala hal. Maka orang kafir berbeda dengan orang Mukmin, pelaku maksiat berbeda dengan orang yang taat, orang bodoh tidak sebanding dengan orang yang berilmu, pelaku bid’ah berbeda dengan pengikut Sunnah, dan harta haram tidak setara dengan harta halal. Meskipun kamu mungkin heran (wahai manusia) dengan banyaknya hal-hal buruk dan pendukungnya, bertakwalah kepada Allah wahai orang-orang yang

memiliki pemikiran matang, dengan menjauhi segala keburukan dan melakukan kebaikan, agar kalian sukses mencapai tujuan tertinggi, yaitu mendapatkan keridhaan Allah dan masuk surga."

3. Senantiasa berbekal ketaqwaan dalam hidupnya, berdasarkan firman Allah pada Q.S. Al-Baqarah ayat 197, yang berbunyi:

ٱلْحَجُّ أَشْهُرٌ مَّعْلُومَٰتٌ ۚ فَمَن فَرَضَ فِيهِنَّ ٱلْحَجَّ فَلَا رَفَثَ وَلَا فُسُوقَ وَلَا جِدَالَ فِى ٱلْحَجِّ ۗ وَمَا تَفْعَلُوا۟ مِنْ خَيْرٍ يَعْلَمْهُ ٱللَّهُ ۗ وَتَزَوَّدُوا۟ فَإِنَّ خَيْرَ ٱلزَّادِ ٱلتَّقْوَىٰ ۚ وَٱتَّقُونِ يَٰٓأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ

(Kementrian Agama, 2020)**.**

Artinya:

"(Musim) haji adalah beberapa bulan yang dimaklumi, barangsiapa yang menetapkan niatnya dalam bulan itu akan mengerjakan haji, maka tidak boleh rafats, berbuat fasik dan berbantah-bantahan di dalam masa mengerjakan haji. Dan apa yang kamu kerjakan berupa kebaikan, niscaya Allah mengetahuinya. Berbekallah, dan sesungguhnya sebaik-baik bekal adalah takwa dan bertakwalah kepada-Ku hai orang-orang yang berakal."

Berdasarkan Tafsir Al-Mukhtashar, waktu pelaksanaan ibadah haji adalah bulan-bulan tertentu yang dimulai dari bulan Syawal dan berakhir pada sepuluh hari pertama bulan Zulhijah. Barang siapa yang mewajibkan dirinya untuk melaksanakan haji pada bulan-bulan tersebut dan melakukan ihram haji, maka ia dilarang berhubungan suami istri dan melakukan hal-hal yang mengarah kepada hubungan tersebut. Selain itu, ia juga dilarang keras melanggar ketaatan kepada Allah dengan melakukan perbuatan dosa, menghormati kesucian waktu dan tempat tersebut. Dia juga tidak boleh berdebat yang bisa menimbulkan kemarahan dan konflik. Segala perbuatan baik yang kalian lakukan pasti diketahui oleh Allah dan akan diberikan balasan. Laksanakanlah ibadah haji dengan mempersiapkan bekal makanan dan minuman yang kalian butuhkan. Ketahuilah bahwa bekal terbaik yang

dapat memperlancar semua urusan kalian adalah ketakwaan kepada Allah. Maka, takutlah kepada-Ku dengan menjalankan perintah-perintah-Ku dan menjauhi larangan-larangan-Ku, wahai orang-orang yang berakal sehat.

Oleh karena itu, ketika seorang memenuhi karakteristik dari ulul albab, maka orang tersebut mendapat petunjuk dari Allah. Hal ini selaras dengan eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach dengan membuktikan teorema bahwa pada Ruang Banach berdimensi tak hingga memuat satu barisan *basic*, di mana barisan *basic* sendiri merupakan kondisi ke-tiga dari karakteristik Basis Schauder. Maka ketika suatu barisan memenuhi tiga kondisi dari basis schauder, maka barisan tersebut merupakan barisan *basic*.

BAB V

PENUTUP

5.2 Kesimpulan

Dari hasil penelitian ini, dapat disimpulkan bahwa teorema eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach yang berbunyi: "Setiap Ruang Banach Berdimensi Tak Hingga Memuat Satu Barisan *Basic*" telah dibuktikan. Barisan *basic* yaitu barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang merupakan Basis Schauder di Ruang Banach X dengan rentang liniernya tertutup. Karena kondisi ke-tiga suatu barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan Basis Schauder adalah rentang liniernya tertutup adalah X, di mana kondisi tersebut merupakan definisi dari barisan *basic*. Sehingga eksitensi Basis Schauder di Ruang Banach tebukti.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, penulis hanya berfokus pada eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach atas lapangan riil. pada Diharapkan pada penelitian selanjutnya eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach dapat diperluas atas lapangan $\mathbb{F}$ yang mencakup riil dan kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

Ahlfors, L. V, Baer, R., Bauer, F. L., Dold, A., Doob, J. L., Eilenberg, S., Gruenberg, K. W., Kneser, M., Muller, G. H., Postnikov, M. M., Segre, B., & Sperner, E. (1977). *Classical Banach Space I Sequence Space*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

Al- Ashfahani, A. N. (2014). *Hilyatul Auliya*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Al- Asyqar, M. S. (2006). *Zubdatut Tafsir Min Fathil Qadir*. Universitas Islam Madinah.

Al-Mahalli, J., & As-Suyuthi, J. (2007). *Tafsir Jalalain*. Jakarta: Sinar Baru Algensindo.

Axler, S., Gehring, F. W., & Ribet, K. A. (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*. University of Michigan.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction To Real Analysis Fourth Edition*. United States: John Wiley and Sons.

Daws, M. (2005). *Introduction to Bases in Banach Spaces*.

Howard, A. (2004). *Elementary Linear Algebra Ninth Edition*. In American College of Radiology Network.

Humaid, S. (2003). *Mukhtassar Fii Tafsir*. Mesir: Dār al-Kitāb

Kementrian Agama. (2020). *Quran Kemenag*.

Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*. Mesir: Wikey

Mashudi. (2020). *Al- Muyassar*. Malang: Inteligensia Media. *2020*.

Speckhofer, T. (2022). *Schauder Bases and the Factorization Property*. Linz, 2022

Straatman, M. (2014). The duality map. *Mathematicsh Instituut, Universitiet Leiden*.

Syarifuddin, Mikrayanti, & Muslim. (2016). *Buku Aljabar Linear 2016*. : Lembaga Penelitian dan Pendidikan (LPP) Mandala.

Syukri, M. (2017). *Tafsir Al-Madinah Al-Munawwarah*. Jakarta: Insan Kamil.

Zed, M. (2003). *Metode Penelitian Kepustakaan*. Jakarta: Yayasan Obor Indonesia.

RIWAYAT HIDUP

Yunita Nurfadilah adalah seorang mahasiswi di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Lahir di Malang pada tanggal 08 Agustus 2001. Putri satu-satunya dari Bapak Sutomo dan Ibu Kolidah. Penulis dilahirkan dan dibesarkan di rumah sederhana yang terletak di Nongkosewu RT.17 RW.04 No.64 Kelurahan Karangnongko Kecamatan Poncokusumo Kabupaten Malang.

Penulis menempuh pendidikan dasar di MI KH Hasyim Asy'ari dari tahun 2007 hingga 2013. Kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTs. Al-Ittihad dari tahun 2013 hingga 2016, dan pendidikan menengah atas di MA Al-Ittihad dari tahun 2016 hingga 2019.

Sebelum memasuki dunia perkuliahan setelah lulus dari pendidikan menengah atas, penulis sempat bekerja pada agustus 2019 hingga desember 2020 sebagai pegawai di Nurjaya Collection. Kemudian selama perkuliahan libur, Penulis mengisi kegiatan dengan bekerja di beberapa tempat sebagai pegawai, yaitu: (i) Departemen Produksi CV. Kharisma Abadi Plastindo dari Juli 2021 hingga September 2021; (ii) RosToast dari September 2021 hingga November 2021; (iii) Sinar Mart dari Juli 2022 hingga September 2022. Di samping pekerjaan-pekerjaan tersebut, penulis juga memberikan les privat sejak tahun 2018 hingga 2024 di sela-sela waktu luangnya.

Penulis adalah seorang individu yang berdedikasi, adaptif, dan terus berusaha meningkatkan keahliannya melalui berbagai pengalaman kerja dan pelatihan yang ia ikuti. Penulis telah mengikuti beberapa pelatihan, di antaranya: (i) MAKESTA IPNU-IPPNU pada November 2018; (ii) LAKMUD IPNU-IPPNU pada November 2019; (iii) DIKLATAMA IPNU-IPPNU pada Desember 2020; (iii) KKN UIN Malang pada Desember 2022; (iv) PKL UIN Malang pada Juni 2023.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Yunita Nurfadilah
NIM : 200601110059
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Eksistensi Basis Schauder di Ruang Banach
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc.
Pembimbing II : M. Nafie Jauhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	15 Juni 2023	Konsultasi Topik dan Referensi	1.
2.	24 September 2023	Konsultasi Bab I	2.
3.	27 September 2023	Konsultasi Bab I dan II	3.
4.	27 November 2023	Konsultasi Bab I, II dan III	4.
5.	13 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II dan III	5.
6.	13 Maret 2024	Diskusi Terkait Integrasi Topik dengan Al- Qur'an	6.
7.	25 Maret 2024	ACC Bab I, II dan III	7.
8.	27 Maret 2024	Konsultasi Integrasi topik dengan Al- Qur'an	8.
9.	29 April 2024	ACC Seminar Proposal	9.
10.	14 Mei 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	15 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	21 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	27 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	30 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	3 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	15.
16.	3 Juni 2024	Konsultasi Kajian Agama	16.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	4 Juni 2024	ACC Bab IV dan V	17.
18.	4 Juni 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	18.
19.	14 Juni 2024	ACC Seminar Hasil	19.
20.	19 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	20.
21.	26 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	21.
22.	28 Juni 2024	ACC Keseluruhan	22.

Malang, 28 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005