

**KESTABILAN PERSAMAAN FUNGSIONAL JENSEN**

**SKRIPSI**

**OLEH  
HILWIN NISA'  
NIM. 11610028**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**KESTABILAN PERSAMAAN FUNGSIONAL JENSEN**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Hilwin Nisa'  
NIM. 11610028**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**KESTABILAN PERSAMAAN FUNGSIONAL JENSEN**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Hilwin Nisa'**  
**NIM. 11610028**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 24 April 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

**Hairur Rahman, M.Si**  
NIP. 19800429 200604 1 003

**Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd**  
NIP. 19630502 198703 1 005

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

**Dr. Abdussakir, M.Pd**  
NIP. 19751006 200312 1 001

**KESTABILAN PERSAMAAN FUNGSIONAL JENSEN**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Hilwin Nisa'**  
**NIM. 11610028**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal 29 Mei 2015

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si .....

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd .....

Sekretaris Penguji : Hairur Rahman, M.Si .....

Anggota Penguji : Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd .....

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hilwin Nisa'

NIM : 11610028

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 24 April 2015  
Yang membuat pernyataan,

Hilwin Nisa'  
11610028

## MOTO

“Diperjalankan untuk dapat berbagi dengan sesama dibersamai keyakinan penuh bahwa semua adalah hak milik Allah merupakan suatu nikmat terindah menuju

kestabilan hati”

(Penulis)

“Melakukan yang terbaik pada hari ini akan membawa Anda ke tempat terbaik di masa depan”

(Oprah Winfrey)

## **PERSEMBAHAN**

Segala puji bagi Allah Swt. atas ridha-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Imam Kurdi dan Ibunda Binti Koyimah, serta kakak dan adik-adik tersayang.

Semoga kasih sayang, rahmat, dan hidayah-Nya selalu menaungi mereka.



## KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Shalawat serta salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad Saw., yang dengan gigih memperjuangkan Islam sebagai agama pencerahan. Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi ilmunya yang berharga kepada penulis.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Alm. Prof. Dr. KH. Ahmad Mudhor, S.H dan Ny. Hj. Utin Nur Hidayati selaku pengasuh Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang yang telah menempea penulis dengan segudang ilmu agama dan ilmu-ilmu kehidupan yang lainnya.
8. Ayah dan Ibu yang kasih sayang, petuah, serta do'anya selalu menjadi motivasi penulis untuk tetap berusaha melakukan yang terbaik sampai saat ini.
9. Tri Wahyuni, Nafisatul Wakhidah, Yeni Lathifah, Firza Dwi Hasanah, Imam Mucholis, dan Ifa Alif, sahabat seperjuangan yang selalu memberikan motivasi dan menginspirasi.
10. Wuryaningsih, Sariatulisma, Sariyati Idzni Ridho, Ani, dan segenap Keluarga Besar Mahasiswa Bidikmisi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah menjadi keluarga kedua selama menuntut ilmu di Malang ini.
11. Segenap keluarga besar Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Lembaga Kajian, Penelitian, dan Pengembangan Mahasiswa (LKP2M) UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah menularkan segudang ilmu dan pengalamannya yang sangat bermanfaat bagi penulis.
12. Fitriatuz Zakiyah, Zukhrufun Nadhifa, Handrini, Yeti Astreandini, Dia Kusumawati, Enha Sofiana Firdaus, May Lion, Noor Millah, Ahmad Cholid Nadhori, Imam Mufid, M. Syaiful Arif, M. Irfan, dan seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011 yang telah mengajarkan banyak hal dan memberikan warna dalam hidup penulis.

13. Nurul Azizah, Hanifah, Siti Mutamimah, Robi'atul Adawiyah, Ayu Triria, dan segenap teman-teman seperjuangan di Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang yang selalu menemani dan mengajarkan banyak hal kepada penulis.

14. Semua pihak yang telah memberikan bantuan dan dukungan kepada penulis dalam penyusunan skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung.

Semoga segala yang telah diberikan kepada penulis, mendapatkan balasan terbaik dari Allah Swt. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan bagi para pembaca pada umumnya.

Malang, April 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xi
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>ABSTRACT</b> .....	xv
<b>ملخص</b> .....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	5
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Manfaat Penelitian .....	6
1.5 Batasan Masalah .....	6
1.6 Metode Penelitian .....	6
1.7 Sistematika Penulisan .....	8
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Persamaan Fungsional .....	9
2.1.1 Persamaan Fungsional Cauchy <i>Additive</i> .....	9
2.1.2 Persamaan Fungsional Jensen.....	10
2.2 Ruang Metrik .....	14
2.3 Ruang Vektor .....	15
2.4 Ruang Bernorma .....	16
2.5 Barisan Konvergen .....	19
2.6 Barisan Cauchy .....	20
2.7 Ruang Banach .....	23
2.8 Kestabilan Hyers-Ulam-Rassias .....	24
2.9 Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen .....	45

2.10	Inspirasi Kestabilan Persamaan Fungsional dalam Kajian Islam ..	46
------	---	----

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1	Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen .....	49
3.1.1	Teorema Hyers .....	49
3.1.2	Teorema Rassias .....	56
3.2	Contoh Persamaan Jensen .....	63
3.3	Analisis Kestabilan Persamaan Fungsional dalam Kajian Islam ..	73

### **BAB IV PENUTUP**

4.1	Kesimpulan .....	77
4.2	Saran .....	78

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	79
-----------------------------	----

### **LAMPIRAN-LAMPIRAN**

### **RIWAYAT HIDUP**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1 Grafik dari $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ .....	72
Gambar 3.2 Grafik dari $\frac{f(x)+f(y)}{2}$ .....	72
Gambar 3.3 Gabungan dari Grafik Persamaan $f\left(\frac{x+2}{2}\right)$ dan $\frac{f(x)+f(y)}{2}$ .....	73



## ABSTRAK

Nisa', Hilwin. 2015. **Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

**Kata Kunci:** persamaan fungsional Cauchy *additive*, persamaan fungsional Jensen, Kestabilan Hyers-Ulam-Rassias.

Persamaan fungsional Jensen merupakan salah satu variasi dari persamaan fungsional Cauchy *additive*. Suatu persamaan fungsional dapat diaplikasikan sebagai model dari suatu proses fisik ketika persamaan fungsional tersebut stabil. Sehingga dengan diketahuinya kestabilan dari persamaan fungsional Jensen, dapat dijadikan landasan para peneliti yang akan mengaplikasikan persamaan fungsional Jensen. Adapun konsep kestabilan yang digunakan dalam penelitian ini adalah konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias. Jika persamaan fungsional Jensen terbukti memenuhi teorema Hyers-Ulam-Rassias, maka dapat dikatakan bahwa persamaan fungsional Jensen tersebut stabil.

Pada skripsi ini ditunjukkan bahwa persamaan fungsional Jensen terbukti memenuhi teorema Hyers-Ulam-Rassias. Untuk mengilustrasikan kestabilan persamaan fungsional Jensen, pada skripsi ini diberikan contoh persamaan Jensen dan kemudian digambarkan grafiknya. Karena persamaan fungsional Jensen terbukti memenuhi teorema Hyers-Ulam-Rassias, maka dapat dikatakan bahwa persamaan fungsional Jensen tersebut stabil.

## ABSTRACT

Nisa', Hilwin. 2015. **Stability of Jensen Functional Equation**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Dr. H. Imam Sujarwo, M.Pd.

**Keyword:** additive Cauchy functional equation, Jensen functional equation, Hyers-Ulam-Rassias stability.

Jensen functional equation is one of variation of additive Cauchy functional equation. Jensen functional equation can be applied as a model of a physical process when it is stable. Therefore, by knowing the stability of Jensen functional equation, it give the other researchers reference to apply Jensen functional equation. The concept of stability that is used in this research is Hyers-Ulam-Rassias stability. If Jensen functional equation satisfy Hyers-Ulam-Rassias theorem, it can be said that Jensen functional equation is stable.

This thesis showed that Jensen functional equation has been proven to satisfy Hyers-Ulam-Rassias theorem. To illustrate the stability of Jensen functional equation, in this thesis the example of Jensen equation is given and then the graph is illustrated. Since the functional equation Jensen has proven to satisfy Hyers-Ulam-Rassias theorem, it can be said that Jensen functional equation is stable.

## ملخص

النساء، حلو. ٢٠١٥. استقرار المعادلة الوظيفية جنسن. بحث جامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) خير الرحمن، الماجستير. (٢) د.ه. إمام سوجاروو، الماجستير.

كلمات البحث: المعادلة الوظيفية كوشي المضافة، المعادلات، وظيفية جنسن استقرار -Hyers-Ulam-Rassias

المعادلة الوظيفية جنسن هي الاختلاف واحدة من المضافات المعادلة الوظيفية كوشي. المعادلة الوظيفية جنسن يمكن تطبيقها كنموذج للعملية الفيزيائية عندما المعادلة الوظيفية مستقرة. لذلك، من خلال معرفة استقرار المعادلة الوظيفية جنسن، يجوز الاحتجاج من قبل الباحثين الذين سيتم تطبيق المعادلة الوظيفية جنسن. مفهوم الاستقرار الذي يستخدم في البحوث من هذا البحث هو مفهوم الاستقرار Hyers-Ulam-Rassias. إذا كانت المعادلة الوظيفية جنسن أثبتت لتلبية نظرية Hyers-Ulam-Rassias، فإنه يمكن القول بأن المعادلة الوظيفية جنسن مستقرة. في هذا البحث أثبتت أن المعادلة الوظيفية ثبت جنسن لتلبية نظرية Hyers-Ulam-Rassias لتوضيح استقرار وظيفي معادلة جنسن، فأعطت في هذا البحث على سبيل المثال من المعادلة جنسن و ترسم بيانيه ثم المصورة. لأنه قد ثبت أن المعادلة الوظيفية جنسن لتلبية نظرية Hyers-Ulam-Rassias، فإنه يمكن القول بأن المعادلة الوظيفية جنسن مستقرة.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Seiring berkembangnya zaman, matematika terus mengalami perkembangan dalam pembahasannya. Di antara perkembangan pembahasan matematika adalah pembahasan mengenai persamaan fungsional. Al-Mosadder (2012:1) mengatakan bahwa bentuk persamaan fungsional merupakan salah satu pembahasan dari matematika modern. Persamaan fungsional merupakan suatu persamaan fungsi yang belum diketahui fungsinya. Ada beberapa macam persamaan fungsional, diantaranya adalah persamaan fungsional Cauchy *additive*, persamaan fungsional Jensen, persamaan fungsional Pompeiu, persamaan fungsional d'Alembert dan lain sebagainya. Menurut Sahoo dan Kannappan (2011:90-91) persamaan fungsional dapat diaplikasikan dalam banyak hal. Selain dapat diaplikasikan untuk menggambarkan suatu proses fisik, dewasa ini persamaan fungsional juga telah banyak ditemukan aplikasinya dalam kombinatorik *enumerative* dan pengolahan sinyal digital.

Di antara berbagai macam persamaan fungsional, persamaan fungsional yang paling terkenal adalah persamaan fungsional Cauchy *additive*. Misalnya suatu fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  disebut sebagai suatu fungsi *additive* jika fungsi tersebut memenuhi persamaan fungsional Cauchy *additive*  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ . Jung (2011:19) menyatakan bahwa sifat-sifat dari persamaan fungsional Cauchy *additive* sering diaplikasikan untuk menunjang perkembangan teori-teori dari persamaan fungsional yang lainnya.

Ada beberapa variasi dari persamaan fungsional Cauchy *additive*, seperti generalisasi dari persamaan Cauchy *additive*, persamaan Hoszu's, persamaan homogen, persamaan Jensen dan lain sebagainya. Jung (2011:155) menyatakan bahwa variasi persamaan Cauchy *additive* yang paling sederhana dan paling bagus adalah persamaan fungsional Jensen. Suatu fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  disebut sebagai persamaan fungsional Jensen jika memenuhi  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$ . Persamaan tersebut juga disebut sebagai persamaan fungsional Jensen *additive* atau biasa disebut sebagai persamaan fungsional Jensen.

Adapun formula atau persamaan tertentu dapat diaplikasikan sebagai model dari suatu proses fisik, jika terjadi perubahan kecil pada persamaan tersebut hanya akan menimbulkan perubahan yang kecil pula pada hasilnya. Jika kondisi tersebut terpenuhi, dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut adalah persamaan yang stabil. Dalam aplikasinya, misalkan suatu persamaan fungsional Cauchy *additive* yang dinotasikan sebagai  $f(x+y) - f(x) - f(y) = 0$  tidak selalu benar untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ , akan tetapi dapat menjadi benar jika menggunakan aproksimasi  $f(x+y) - f(x) - f(y) \approx 0$  untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ . Pernyataan tersebut secara matematis dapat dinotasikan sebagai  $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ , untuk sebarang bilangan  $\varepsilon$  yang positif dan untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dari sini juga dapat diketahui bahwa saat terjadi perubahan kecil pada suatu persamaan seperti persamaan Cauchy *additive* hanya akan menimbulkan perubahan yang kecil pula pada hasilnya. Hal inilah yang menjadi inti dari teori kestabilan (Sahoo dan Kannappan, 2011:293).

Sahoo dan Kannappan (2011) menyatakan bahwa pada tahun 1940, S.M. Ulam mempunyai sebuah pertanyaan mengenai pokok dari teori kestabilan. Untuk

lebih lanjut, Jung (2011) menyatakan bahwa D.H. Hyers merupakan matematikawan yang pertama kali menunjukkan hasil dari kestabilan persamaan fungsional. Hyers telah menjawab pertanyaan dari Ulam tersebut dengan mengasumsikan fungsinya terjadi di antara ruang Banach. Metode pembuktian dari Hyers yang menghasilkan suatu fungsi *additive* tersebut disebut dengan metode langsung. Metode ini merupakan alat yang paling penting dan sangat kuat untuk mempelajari kestabilan dari berbagai macam persamaan fungsional. Akan tetapi, pada tahun 1978, Rassias menegur teorema kestabilan Hyers dan mencoba melemahkan kondisi batas dari norm *Cauchy difference* serta memperluas hasil dari Hyers dengan menggunakan metode langsung. Penyempurnaan teorema dari Rassias terhadap teorema Hyers itulah yang saat ini dikenal sebagai teorema kestabilan Hyers-Ulam-Rassias.

Terdapat konsep dasar untuk memasuki konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias, yaitu ruang Banach. Al-Mosaddeh (2012:4) menyatakan bahwa ruang Banach merupakan ruang bernorma yang lengkap. Ruang bernorma dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy-nya konvergen. Ruang bernorma sendiri merupakan ruang vektor yang didalamnya terdapat norm dan memenuhi sifat bernorma. Menurut Darmawijaya (2007:94) setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik.

Pada skripsi ini yang dimaksud dengan kestabilan persamaan fungsional Jensen adalah kestabilan persamaan fungsional Jensen berdasarkan teorema kestabilan Hyers-Ulam-Rassias. Adapun persamaan fungsional yang menjadi acuan pada teorema kestabilan Hyers-Ulam-Rassias adalah persamaan fungsional Cauchy *additive*. Jika yang diteliti kestabilannya adalah persamaan fungsional lain, maka

persamaan fungsional Cauchy *additive* pada teorema kestabilan Hyers-Ulam-Rassias diganti dengan persamaan fungsional tersebut. Oleh karena itu, untuk meneliti kestabilan persamaan fungsional Jensen, persamaan fungsional Cauchy *additive* pada teorema Hyers-Ulam-Rassias tersebut diganti dengan persamaan fungsional Jensen.

Dalam al-Quran juga telah dibahas mengenai suatu kestabilan. Di antaranya adalah mengenai kestabilan dalam penciptaan bumi. Allah Swt. telah berfirman dalam al-Quran surat An-Naml ayat 61 sebagai berikut:

أَمْ مَنْ جَعَلَ الْأَرْضَ قَرَارًا وَجَعَلَ خِلَالَهَا أَنْهَارًا وَجَعَلَ لَهَا رَوَاسِيَ وَجَعَلَ الْبَحْرَيْنِ حَاجِزًا ۗ أَلَيْسَ اللَّهُ بِأَعْلَمَ  
أَكْثَرُهُمْ لَا يَعْلَمُونَ ﴿٦١﴾

*“Atau siapakah yang telah menjadikan bumi sebagai tempat berdiam, dan yang menjadikan sungai-sungai di celah-celahnya, dan yang menjadikan gunung-gunung untuk mengokohkannya dan menjadikan suatu pemisah antara dua laut? Apakah di samping Allah ada tuhan (yang lain)? Bahkan (sebenarnya) kebanyakan dari mereka tidak mengetahui” (QS. An-Naml:61).*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa gunung diciptakan untuk mengokohkan bumi. Dengan kata lain, gunung memiliki peran untuk menstabilkan bumi. Jika bumi yang tercipta tanpa tiang ini tidak dikokohkan oleh gunung-gunung, dapat dipastikan bumi tidak akan sekokoh ini.

Dalam pengamalannya, ayat di atas dapat dijadikan sebagai landasan bahwa sebelum mengaplikasikan suatu persamaan fungsional harus diketahui terlebih dulu kestabilannya. Hal ini bertujuan untuk mengetahui dapat diaplikasikan atau tidaknya suatu persamaan fungsional tersebut. Karena bagaimana pun suatu persamaan fungsional dapat dijadikan sebagai model dari suatu proses fisik ketika persamaan fungsional tersebut stabil. Dalam bukunya yang berjudul *Introduction to Functional Equations*, Sahoo dan Kannappan (2011) telah memaparkan bukti

kestabilan persamaan fungsional Cauchy *additive* dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias. Dalam pemaparan kestabilan persamaan fungsional tersebut telah dibuktikan bahwa persamaan fungsional Cauchy *additive* stabil. Untuk menambah referensi para peneliti yang akan mengaplikasikan suatu persamaan fungsional, penelitian mengenai kestabilan persamaan fungsional lain dirasa penting untuk dilakukan. Selain itu, karena persamaan fungsional termasuk pembahasan dalam matematika modern, maka penelitian mengenai kestabilan dari suatu persamaan fungsional ini dirasa penting guna memberikan kontribusi dan mengikuti perkembangan ilmu matematika.

Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian skripsi dengan judul “*Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen*”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimanakah kestabilan dari persamaan fungsional Jensen?
2. Bagaimanakah contoh dari persamaan fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen?
3. Bagaimanakah analisis kestabilan persamaan fungsional berdasarkan kajian Islam?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui:

1. Kestabilan dari persamaan fungsional Jensen.

2. Contoh persamaan fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen.
3. Analisis kestabilan persamaan fungsional berdasarkan kajian Islam.

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari dilakukannya penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah khazanah keilmuan matematika modern khususnya di bidang analisis, yaitu tentang kestabilan persamaan fungsional Jensen.
2. Menambah khazanah keilmuan kajian integrasi sains dan agama, khususnya analisis kestabilan persamaan fungsional berdasarkan kajian Islam.
3. Dapat digunakan sebagai pertimbangan dalam pengaplikasian persamaan fungsional Jensen.

#### 1.5 Batasan Masalah

Untuk membatasi permasalahan dalam penelitian ini, maka konsep kestabilan yang digunakan adalah konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias. Akan tetapi, penulis tetap menyertakan konsep kestabilan Hyers-Ulam yang telah memprakarsai munculnya konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias. Hal ini bertujuan untuk menambah khazanah keilmuan matematika. Adapun ruang Banach pada konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias yang digunakan hanyalah ruang Banach pada bilangan real ( $\mathbb{R}$ ).

#### 1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yaitu dengan mencari referensi

yang relevan dengan kasus atau permasalahan yang ditemukan. Adapun referensi yang dimaksud dalam penelitian ini adalah referensi yang berkaitan dengan:

1. Persamaan fungsional Jensen.
2. Konsep kestabilan persamaan fungsional Hyers-Ulam-Rassias.
3. Penelitian terdahulu mengenai kestabilan persamaan fungsional lain dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias.

Referensi tersebut dapat dicari dari buku, jurnal, artikel laporan penelitian, atau pun dari situs-situs internet.

Penelitian ini merupakan penelitian pengembangan dari penelitian sebelumnya, yaitu penelitian mengenai kestabilan persamaan fungsional Cauchy *additive* yang telah dipaparkan oleh Sahoo dan Kannappan (2011) dalam bukunya yang berjudul *Introduction to Functional Equations*. Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias untuk persamaan fungsional Jensen.
2. Melakukan pembuktian kestabilan persamaan fungsional Jensen dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias.
3. Memberikan contoh persamaan fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen dan mengilustrasikan kestabilannya.
4. Melakukan analisa kestabilan persamaan fungsional berdasarkan kajian Islam.
5. Membuat kesimpulan dari pembahasan penelitian.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari beberapa subbab yang dirinci sebagai berikut:

### Bab I Pendahuluan

Bab pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

### Bab II Kajian Pustaka

Bab kajian pustaka berisi konsep-konsep atau dasar-dasar teori yang mendukung bagian pembahasan, diantaranya persamaan fungsional Jensen, konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias, dan penelitian terdahulu mengenai kestabilan persamaan fungsional Cauchy *additive* dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias.

### Bab III Pembahasan

Bab pembahasan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian. Adapun tujuannya adalah untuk membuktikan kestabilan persamaan fungsional Jensen, memberikan contoh fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen, dan melakukan analisa kestabilan persamaan fungsional berdasarkan kajian Islam.

### Bab IV Penutup

Bab penutup memaparkan kesimpulan dari pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Fungsional

**Definisi 2.1.1.** *Persamaan fungsional adalah persamaan fungsi yang belum diketahui fungsinya (Sahoo dan Kannappan, 2011:2).*

Al-Mosadder (2012:7) menyatakan ada tiga subjek yang dipelajari dalam persamaan fungsional, yaitu:

1. Menemukan solusi khusus (*particular*),
2. Menemukan solusi umum,
3. Permasalahan kestabilan.

**Definisi 2.1.2.** *Solusi khusus dari persamaan fungsional adalah fungsi yang domainnya memenuhi persamaan fungsional tersebut (Al-Mosadder, 2012: 7).*

**Definisi 2.1.3.** *Jika diberikan suatu kelas fungsi  $F$ , solusi umum dari suatu persamaan fungsional adalah keseluruhan solusi khusus dari kelas fungsi tersebut (Al-Mosadder, 2012:7).*

##### 2.1.1 Persamaan Fungsional Cauchy Additive

**Definisi 2.1.1.1.** *Suatu fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan suatu fungsi additive jika fungsi tersebut memenuhi persamaan fungsional Cauchy additive*

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

*untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$  (Sahoo dan Kannappan, 2011:4).*

Misalkan suatu fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan misalkan  $f(x) = 8x, \forall x \in \mathbb{R}$ , maka fungsi tersebut merupakan fungsi *additive*.

Bukti:

$$f(x + y) = 8(x + y) = 8x + 8y = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

**Definisi 2.1.1.2.** Suatu fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan secara rasional homogen jika dan hanya jika

$$f(rx) = rf(x)$$

untuk setiap  $r \in \mathbb{R}$  dan setiap  $x$  bilangan rasional.

Definisi di atas menunjukkan bahwa setiap solusi dari persamaan Cauchy *additive* secara rasional homogen (Sahoo dan Kannappan, 2011:6).

Ada beberapa variasi dari persamaan fungsional Cauchy *additive*, misalnya persamaan Cauchy *additive* yang digeneralisasikan, persamaan Hosszu's, persamaan homogen, persamaan fungsional linier, dan lain sebagainya. Bagaimanapun, persamaan fungsional Jensen merupakan variasi persamaan fungsional Cauchy *additive* yang paling sederhana dan paling penting (Jung, 2011:155).

### 2.1.2 Persamaan Fungsional Jensen

**Definisi 2.1.2.1.** Suatu fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan *convex* jika dan hanya jika memenuhi pertidaksamaan

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \quad (2.1)$$

untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Fungsi *convex* pertama kali dikenalkan oleh J.L.W.V. Jensen tahun 1905, meskipun fungsi-fungsi yang memenuhi persamaan (2.1) telah diperlakukan oleh Hadamard (1983) dan Holder (1889) (Sahoo dan Kannappan, 2011:93).

Berikut ini merupakan contoh dari fungsi *convex*:

1.  $f(x) = mx + c$  di  $\mathbb{R}$  untuk setiap  $m, c \in \mathbb{R}$
2.  $f(x) = x^2$  di  $\mathbb{R}$
3.  $f(x) = e^{\alpha x}$  di  $\mathbb{R}$  untuk setiap  $\alpha \geq 1$  atau  $\alpha \leq 0$
4.  $f(x) = |x|^\alpha$  di  $\mathbb{R}$  untuk setiap  $\alpha \geq 1$
5.  $f(x) = x \log x$  di  $\mathbb{R}_+$
6.  $f(x) = \tan x$  di  $[0, \frac{\pi}{2}]$

Suatu penjumlahan berhingga dari fungsi-fungsi *convex* juga merupakan suatu fungsi *convex*. Akan tetapi, hasil kali dari fungsi-fungsi *convex* tidak selalu *convex*.

Contohnya,

$$f(x) = x^2 \text{ dan } g(x) = e^x$$

merupakan fungsi *convex* di  $\mathbb{R}$  akan tetapi hasil perkaliannya

$$h(x) = x^2 e^x$$

bukan fungsi *convex* di  $\mathbb{R}$ .

Jika  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  merupakan suatu fungsi *additive*, maka  $A$  juga merupakan fungsi *convex*. Karena

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}A(x+y) = \frac{1}{2}(A(x) + A(y)),$$

$A$  memenuhi

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{A(x) + A(y)}{2}.$$

Oleh karena itu  $A$  merupakan suatu fungsi *convex*.

Jika  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  merupakan suatu fungsi *additive* dan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  merupakan suatu fungsi *convex*, maka komposisinya  $f(A(x))$  merupakan suatu fungsi *convex* (Sahoo dan Kannappan, 2011:94-95).

Berikut adalah contoh dari fungsi *convex* yang memenuhi bentuk fungsi

*convex*

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{A(x) + A(y)}{2}.$$

Misal untuk  $A(x) = x^2$  dan  $x = y$ , maka

$$\begin{aligned} A\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(y+y)^2}{4} = \frac{(2y)^2}{4} = \frac{4y^2}{4} \\ &= y^2 \end{aligned} \quad \dots (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{A(x) + A(y)}{2} &= \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{y^2 + y^2}{2} = \frac{2y^2}{2} \\ &= y^2 \end{aligned} \quad \dots (2.3)$$

Berdasarkan persamaan (2.2) dan (2.3) dapat diketahui bahwa fungsi  $A(x)$  memenuhi

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{A(x) + A(y)}{2}.$$

Selanjutnya berikut adalah contoh fungsi *convex* yang memenuhi bentuk fungsi

*convex*

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{A(x) + A(y)}{2}.$$

Misal untuk  $A(x) = x^2$  dan misalkan  $x = 2y$ , maka

$$\begin{aligned} A\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(2y+y)^2}{4} = \frac{(3y)^2}{4} = \frac{9}{4}y^2 \\ &= 2\frac{1}{4}y^2 \end{aligned} \quad \dots (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{A(x) + A(y)}{2} &= \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{(2y)^2 + y^2}{2} = \frac{4y^2 + y^2}{2} = \frac{5}{2}y^2 \\ &= 2\frac{1}{2}y^2 \end{aligned} \quad \dots (2.5)$$

Berdasarkan persamaan (2.4) dan (2.5) dapat diketahui bahwa fungsi  $A(x)$  untuk  $x \neq y$  tersebut memenuhi

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{A(x)+A(y)}{2}.$$

Berikut adalah contoh lain dari fungsi *convex* yang memenuhi bentuk fungsi *convex*

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{A(x)+A(y)}{2}.$$

Misal untuk  $A(x) = |x|^3$  dan  $x = y$ , maka

$$\begin{aligned} A\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \left|\frac{x+y}{2}\right|^3 = \frac{|x+y|^3}{8} = \frac{|y+y|^3}{8} = \frac{|2y|^3}{8} = \frac{|8y^3|}{8} = \frac{8|y^3|}{8} \\ &= |y^3| = |y|^3 \end{aligned} \quad \dots (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{A(x)+A(y)}{2} &= \frac{|x|^3+|y|^3}{2} = \frac{|y|^3+|y|^3}{2} = \frac{2|y|^3}{2} \\ &= |y|^3 \end{aligned} \quad \dots (2.7)$$

Berdasarkan persamaan (2.6) dan (2.7) dapat diketahui bahwa fungsi  $A(x)$  memenuhi

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{A(x)+A(y)}{2}.$$

Selanjutnya berikut adalah contoh lain dari fungsi *convex* yang memenuhi bentuk fungsi *convex*

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{A(x)+A(y)}{2}$$

Misal untuk  $A(x) = |x|^3$  dan misalkan  $x = 2y$ , maka

$$\begin{aligned} A\left(\frac{x+y}{2}\right) &= \left|\frac{x+y}{2}\right|^3 = \frac{|x+y|^3}{8} = \frac{|2y+y|^3}{8} = \frac{|3y|^3}{8} = \frac{|27y^3|}{8} = \frac{27|y^3|}{8} \\ &= 3\frac{3}{8}|y^3| = 3\frac{3}{8}|y|^3 \end{aligned} \quad \dots (2.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{A(x) + A(y)}{2} &= \frac{|x|^3 + |y|^3}{2} = \frac{|2y|^3 + |y|^3}{2} = \frac{|8y^3| + |y|^3}{2} = \frac{8|y^3| + |y|^3}{2} \\ &= \frac{8|y|^3 + |y|^3}{2} = \frac{9|y|^3}{2} = 4\frac{1}{2}|y|^3 \end{aligned} \quad \dots (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.8) dan (2.9) dapat diketahui bahwa fungsi  $A(x)$  untuk  $x \neq y$  tersebut memenuhi

$$A\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{A(x) + A(y)}{2}.$$

**Definisi 2.1.2.2.** Suatu fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  disebut persamaan Jensen, jika persamaan tersebut memenuhi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  (Sahoo dan Kannappan, 2011:95).

## 2.2 Ruang Metrik

**Definisi 2.2.1.** Diberikan sebarang himpunan tak kosong  $X$ .

1. Fungsi  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  yang memenuhi sifat-sifat

a.  $d(x, y) \geq 0$  untuk setiap  $x, y \in X$ ,

$d(x, y) = 0$  jika dan hanya jika  $x = y$ ,

b.  $d(x, y) = d(y, x)$  untuk setiap  $x, y \in X$ , dan

c.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  untuk setiap  $x, y, z \in X$ ,

disebut metrik (metric) atau jarak (distance) pada  $X$ .

2. Himpunan  $X$  dilengkapi dengan suatu metrik  $d$ , dituliskan dengan  $(X, d)$ , disebut ruang metrik (metric space). Selanjutnya, jika metriknya telah diketahui (tertentu), maka ruang metrik cukup ditulis dengan  $X$  saja.

3. Anggota ruang metrik  $(X, d)$  disebut titik (*point*) dan untuk setiap  $x, y \in X$  bilangan nonnegatif  $d(x, y)$  disebut jarak (*distance*) titik  $x$  dengan titik  $y$ . (Darmawijaya, 2007:37).

Di bawah ini diberikan beberapa contoh ruang metrik.

1. Sistem bilangan real  $\mathbb{R}$  merupakan ruang metrik terhadap metrik  $d$ :

$$d(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Sistem bilangan kompleks  $\mathbb{C}$  merupakan ruang metrik terhadap modulusnya,

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

3. Diberikan himpunan tak kosong  $X$  dan didefinisikan  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  dengan

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } x \neq y \text{ dan } x, y \in X \\ 0 & \text{untuk } x = y \text{ dan } x, y \in X. \end{cases}$$

Maka  $(X, d)$  merupakan ruang metrik (Darmawijaya, 2007:38).

### 2.3 Ruang Vektor

**Definisi 2.3.1.** Misalkan  $V$  adalah suatu himpunan tak kosong dari objek-objek sebarang, dimana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Operasi penjumlahan (*addition*) dapat diartikan sebagai suatu aturan yang memasangkan setiap pasangan objek  $u$  dan  $v$  pada  $V$  dengan suatu objek  $u + v$ , yang disebut jumlah (*sum*) dari  $u$  dan  $v$ . Operasi perkalian skalar (*scalar multiplication*), dapat diartikan sebagai suatu aturan yang memasangkan setiap skalar  $k$  dan setiap objek  $u$  pada  $V$  dengan suatu objek  $ku$ , yang disebut kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari  $u$  oleh  $k$ . Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua objek  $u, v, w$  pada  $V$  dan semua skalar  $k$  dan  $l$ , maka  $V$  disebut sebagai ruang vektor (*vector space*) dan kita menyebut objek-objek pada  $V$  sebagai vektor.

1. Jika  $u$  dan  $v$  adalah objek-objek pada  $V$ , maka  $u + v$  berada pada  $V$ .
2.  $u + v = v + u$ .
3.  $u + (v + w) = (u + v) + w$ .
4. Di dalam  $V$  terdapat suatu objek  $0$ , yang disebut vektor nol (zero vector) untuk  $V$ , sedemikian hingga  $0 + u = u + 0$  untuk semua  $u$  pada  $V$ .
5. Untuk setiap  $u$  pada  $V$ , terdapat suatu objek  $-u$  pada  $V$ , yang disebut sebagai negatif dari  $u$ , sedemikian rupa sehingga  $u + (-u) = (-u) + u = 0$ .
6. Jika  $k$  adalah skalar sebarang dan  $u$  adalah objek sebarang pada  $V$ , maka  $ku$  terdapat pada  $V$ .
7.  $k(u + v) = ku + kv$ .
8.  $(k + l)u = ku + lu$ .
9.  $k(lu) = (kl)(u)$ .
10.  $1u = u$ .

Skalar dapat berupa bilangan real atau bilangan kompleks, tergantung pada aplikasinya. Ruang vektor dimana skalar-skalarnya adalah bilangan kompleks disebut ruang vektor kompleks (complex vector space), dan ruang vektor dimana skalar-skalarnya merupakan bilangan real disebut ruang vektor real (real vector space) (Anton dan Rorres, 2004:228-229).

## 2.4 Ruang Bernorma

**Definisi 2.4.1.** Misalkan  $E$  suatu ruang vektor. Suatu pemetaan  $\| \cdot \|: E \rightarrow \mathbb{R}$  disebut norm, jika  $\forall x, y \in E$  dan  $\lambda \in \mathbb{R}$  berlaku

1.  $\|x\| \geq 0$ ;
2.  $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$ ;

3.  $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ ;
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

$(E, \|\cdot\|)$  disebut ruang vektor bernorma dan  $\|x\|$  disebut norm dari  $x$ . Sifat yang keempat tersebut sering disebut sebagai ketaksamaan segitiga ruang vektor bernorma (Coleman, 2012:1).

**Teorema 2.4.2.** Setiap ruang bernorma  $(K, \|\cdot\|)$  merupakan ruang metrik terhadap metrik  $d$ :

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

untuk setiap  $x, y \in K$ .

**Bukti:**

Ruang bernorma  $(K, \|\cdot\|)$  merupakan ruang metrik terhadap  $d$  tersebut, sebab:

1. Untuk setiap  $x, y \in K$  benar bahwa

$$d(x, y) = \|x - y\| \geq 0,$$

menurut definisi 2.4.1 (1).

2. Untuk setiap  $x, y \in K$  benar bahwa

$$d(x, y) = \|x - y\| = 0 \leftrightarrow x - y = 0 \leftrightarrow x = y,$$

menurut definisi 2.4.1 (2).

3. Untuk setiap  $x, y \in K$  benar bahwa

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x),$$

menurut definisi 2.4.1 (3).

4. Untuk setiap  $x, y \in K$  benar bahwa

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|(x - z)\| + \|(z - y)\| = d(x, z) + d(y, z), \end{aligned}$$

menurut definisi 2.4.1 (4).

Berdasarkan teorema 2.4.2 di atas, yaitu setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik, maka semua konsep, pengertian, sifat-sifat, serta teorema-teorema yang berlaku pada ruang metrik berlaku pula pada ruang bernorma dengan definisi

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

(Darmawijaya, 2007:94).

Misalkan untuk  $\|x - y\| = |x - y|$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , maka  $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$  merupakan ruang bernorma.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan  $\|x - y\| \geq 0$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\|x - y\| = |x - y| \geq 0.$$

2. Akan ditunjukkan  $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$

Syarat perlu: akan ditunjukkan  $\|x - y\| = 0 \rightarrow x - y = 0$ .

Diketahui  $\|x - y\| = |x - y| = 0$  dan  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Berdasarkan sifat harga mutlak bahwa  $|x - y| = (x - y)$  untuk setiap  $(x - y) \geq 0$  dan  $|x - y| = -(x - y)$  untuk setiap  $(x - y) < 0$ . Karena  $|x - y| = 0$ , maka  $(x - y) = 0$ .

Syarat cukup: akan ditunjukkan  $x - y = 0 \rightarrow \|x - y\| = |x - y| = 0$ .

Diketahui  $x - y = 0$ .

$$\|x - y\| = |x - y| = |0| = 0.$$

3. Akan ditunjukkan  $\|\lambda(x - y)\| = |\lambda|\|x - y\|$

Misalkan  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\|\lambda(x - y)\| = |\lambda(x - y)| = |\lambda||x - y| = |\lambda|\|x - y\|.$$

4. Akan ditunjukkan  $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - z + z - y\| \\
&= |x - z + z - y| \\
&\leq |x - z| + |z - y| \\
&= \|x - z\| + \|z - y\|
\end{aligned}$$

sehingga, didapatkan

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|.$$

## 2.5 Barisan Konvergen

**Definisi 2.5.1.** Suatu barisan  $X = \{x_n\} \in \mathbb{R}$  dikatakan konvergen ke  $x \in \mathbb{R}$ , atau  $x$  dikatakan suatu limit dari  $\{x_n\}$ , jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat suatu bilangan asli  $K(\varepsilon)$  sedemikian hingga untuk setiap  $n \geq K(\varepsilon)$ ,  $x_n$  memenuhi  $|x - x_n| < \varepsilon$  (Bartle dan Sherbert, 2000:54).

**Contoh:**

1.  $\{x_n\} = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  merupakan suatu barisan konvergen ke  $0 \in \mathbb{R}$ .

Bukti:

Untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , pilih  $K > \frac{1}{\varepsilon}$ , maka untuk setiap  $n \geq K(\varepsilon)$  mengakibatkan

bahwa  $\frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \varepsilon$  dan

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} - 0 \right| = \left| \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \right| = \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \varepsilon.$$

Karena  $\left| \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$ , maka dapat dikatakan bahwa  $\{x_n\} = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in$

$\mathbb{R}$  konvergen ke  $0 \in \mathbb{R}$ .

2.  $\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  merupakan suatu barisan konvergen ke  $0 \in \mathbb{R}$ .

**Bukti:**

Untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , pilih  $K > \frac{1}{\varepsilon}$ , maka untuk setiap  $n \geq K(\varepsilon)$  mengakibatkan

bahwa  $\frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \varepsilon$  dan

$$\left| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \right| = \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \frac{1}{K} < \varepsilon.$$

Karena  $\left| \frac{(-1)^n n}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$ , maka dapat dikatakan bahwa  $\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  konvergen ke  $0 \in \mathbb{R}$ .

## 2.6 Barisan Cauchy

**Definisi 2.6.1.** Suatu barisan  $X = \{x_n\} \in \mathbb{R}$  dikatakan suatu barisan Cauchy jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat suatu bilangan asli  $H(\varepsilon)$  sedemikian hingga untuk setiap bilangan asli  $n, m \geq H(\varepsilon)$ ,  $x_n$  dan  $x_m$  memenuhi  $|x_n - x_m| < \varepsilon$  (Bartle dan Sherbert, 2000:81).

**Teorema 2.6.2.** Di dalam sembarang ruang metrik  $(X, d)$ , setiap barisan konvergen merupakan barisan Cauchy.

**Bukti:**

Ambil sebarang barisan  $\{x_n\}$  konvergen ke  $x \in X$ . Jika diberikan sebarang  $\varepsilon > 0$ , maka terdapat  $N \in \mathbb{N}$  sehingga untuk setiap  $n \geq N$  berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Demikian juga untuk setiap  $m \geq N$  berlaku

$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, untuk setiap  $n, m \geq N$  diperoleh

$$d(x_m, x) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ (Muslikh, 2012:81-82).}$$

Dalam beberapa ruang metrik terdapat barisan Cauchy yang tidak konvergen. Salah satu contohnya adalah ruang dari bilangan rasional dengan

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Barisan  $\{x_n\} = \{0,1., 0,101., 0,101001., 0,1010010001., \dots\}$  dengan mudah dapat dilihat bahwa barisan tersebut merupakan barisan Cauchy yang tidak konvergen (Goffman dan Pedrick, 1965:11). Untuk membuktikan bahwa barisan  $\{x_n\} = \{0,1., 0,101., 0,101001., 0,1010010001., \dots\}$  tidak konvergen, maka akan ditunjukkan bahwa ada  $\varepsilon > 0$  sedemikian hingga untuk setiap bilangan asli  $K$ , terdapat suatu bilangan asli  $n \geq K$ , dan berlaku  $|x - x_n| \geq \varepsilon$ .

Pilih  $\varepsilon = 0,001$  sedemikian hingga jika diambil sebarang bilangan asli  $K \geq 1$ , terdapat suatu bilangan asli  $n \geq K$ , dan berlaku

$$|x - x_1| = |0 - 0,1| = |-0,1| = 0,1 > 0,001 = \varepsilon,$$

$$|x - x_2| = |0 - 0,101| = |-0,101| = 0,101 > 0,001 = \varepsilon,$$

$$|x - x_3| = |0 - 0,101001| = |-0,101001| = 0,101001 > 0,001 = \varepsilon,$$

⋮

Karena ada  $\varepsilon = 0,001 > 0$  sedemikian hingga untuk setiap bilangan asli  $K$ , terdapat suatu bilangan asli  $n \geq K$ , dan berlaku  $|x - x_n| \geq \varepsilon$ . Oleh karena itu,

dapat dikatakan bahwa barisan  $\{x_n\} = \{0,1., 0,101., 0,101001., 0,1010010001., \dots\}$  tidak konvergen.

**Contoh:**

1.  $\{x_n\} = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  merupakan suatu barisan Cauchy.

Bukti:

Untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , pilih  $H > \frac{2}{\varepsilon}$ , maka untuk setiap  $n, m \geq H(\varepsilon)$  dapat

dikatakan bahwa bahwa  $\frac{1}{n} < \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$  dan dengan cara yang serupa diperoleh  $\frac{1}{m} <$

$\frac{\varepsilon}{2}$ . Oleh karena itu, jika  $n, m \geq H$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} - \frac{\sqrt{m}}{m^2+1} \right| \\ & \leq \left| \frac{n^2}{n^2+1} - \frac{m^2}{m^2+1} \right| = \left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 + 1 - \frac{m^2}{m^2+1} \right| \\ & \leq \left| \frac{n^2}{n^2+1} - 1 \right| + \left| 1 - \frac{m^2}{m^2+1} \right| = \left| \frac{n^2 - n^2 - 1}{n^2+1} \right| + \left| \frac{m^2 + 1 - m^2}{m^2+1} \right| \\ & = \left| -\frac{1}{n^2+1} \right| + \left| \frac{1}{m^2+1} \right| = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{m^2+1} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \\ & < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena  $\left| \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} - \frac{\sqrt{m}}{m^2+1} \right| < \varepsilon$ , maka dapat dikatakan bahwa  $\{x_n\} = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  merupakan barisan Cauchy.

2.  $\{x_n\} = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , pilih  $H > \frac{2}{\varepsilon}$ , maka untuk setiap  $n, m \geq H(\varepsilon)$  dapat dikatakan bahwa  $\frac{1}{n} < \frac{1}{H} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  dan dengan cara yang serupa diperoleh  $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Oleh karena itu, jika  $n, m \geq H$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} - \frac{(-1)^m m}{m^2 + 1} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} + \left( -\frac{(-1)^m m}{m^2 + 1} \right) \right| \leq \left| \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \right| + \left| -\frac{(-1)^m m}{m^2 + 1} \right| \\ &= \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} + \frac{(-1)^m m}{m^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{m}{m^2 + 1} < \frac{n}{n^2} + \frac{m}{m^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Karena  $\left| \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} - \frac{(-1)^m m}{m^2 + 1} \right| < \varepsilon$ , maka dapat dikatakan bahwa  $\{x_n\} =$

$\left\{ \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  merupakan barisan Cauchy.

## 2.7 Ruang Banach

**Definisi 2.7.1.** Ruang Banach merupakan ruang bernorma yang lengkap (Al-Mosadder, 2012:4).

Coleman (2012) menyatakan bahwa suatu ruang bernorma dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy-nya konvergen.

Diberikan ruang bernorma  $(\mathbb{R}, \| \cdot \|)$ . Misalkan  $\{x_n\} \in \mathbb{R}$  adalah barisan Cauchy, akan dibuktikan bahwa  $(\mathbb{R}, \| \cdot \|)$  merupakan ruang Banach.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa  $(\mathbb{R}, \| \cdot \|)$  merupakan ruang Banach, akan ditunjukkan bahwa jika  $\{x_n\} \in \mathbb{R}$  adalah barisan Cauchy maka  $\{x_n\}$  konvergen ke  $x \in \mathbb{R}$ .

Karena  $\{x_n\}$  merupakan barisan Cauchy, maka untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat suatu bilangan asli  $H(\varepsilon)$  sedemikian hingga untuk setiap bilangan asli  $n, m \geq H(\varepsilon)$ ,  $x_n$  dan  $x_m$  memenuhi  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ . Untuk membuktikan bahwa  $\{x_n\}$  barisan konvergen akan ditunjukkan bahwa untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat suatu bilangan asli  $K(\varepsilon)$ , sedemikian hingga untuk setiap  $n \geq K(\varepsilon)$ ,  $x_n$  memenuhi  $|x - x_n| < \varepsilon$ .

Selanjutnya untuk membuktikan bahwa  $\{x_n\}$  barisan konvergen, maka ambil sebarang  $\varepsilon > 0$  dan dipilih suatu bilangan asli  $K(\varepsilon) = H(\varepsilon)$ , sedemikian hingga untuk setiap bilangan asli  $n$  berlaku  $n \geq K(\varepsilon)$ . Selanjutnya dipilih  $x = x_m$ , sedemikian hingga untuk setiap bilangan asli  $n \geq K(\varepsilon)$ ,  $x_n$  memenuhi  $|x - x_n| < \varepsilon$ .

Jadi terbukti bahwa  $\{x_n\}$  barisan konvergen, sehingga dapat dikatakan bahwa  $(\mathbb{R}, \| \cdot \|)$  merupakan ruang Banach.

## 2.8 Kestabilan Hyers-Ulam-Rassias

Formula atau persamaan tertentu dapat diaplikasikan sebagai model dari suatu proses fisik apabila terjadi perubahan kecil pada persamaan tersebut hanya akan menimbulkan perubahan yang kecil pula pada hasilnya. Jika kondisi tersebut terpenuhi, dapat dikatakan bahwa persamaan tersebut adalah persamaan yang stabil. Dalam aplikasinya, misalkan suatu persamaan fungsional Cauchy *additive* yang dinotasikan sebagai  $f(x + y) - f(x) - f(y) = 0$  tidak selalu benar untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ , namun dapat menjadi benar jika menggunakan aproksimasi

$$f(x + y) - f(x) - f(y) \approx 0$$

untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ . Secara matematis dapat dinotasikan sebagai

$$|f(x + y) - f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

untuk sebarang bilangan  $\varepsilon$  yang positif dan untuk setiap  $x, y \in \mathbb{R}$ . Dapat diketahui bahwa saat terjadi perubahan kecil pada suatu persamaan seperti Cauchy *additive* hanya akan menimbulkan perubahan yang kecil pula pada hasilnya. Hal inilah yang menjadi inti dari teori kestabilan.

Pada tahun 1940, S.M. Ulam menemukan persoalan, jika diberikan suatu Grup  $G$ , grup *metric*  $H$  dengan *metric*  $(o, o)$ , dan sebarang bilangan positif  $\varepsilon$ , apakah ada  $\delta$  positif sedemikian hingga jika ada fungsi  $f: G \rightarrow H$  yang memenuhi

$$d(f(xy), f(x)f(y)) \leq \delta$$

untuk setiap  $x, y \in G$ , maka ada fungsi homomorfisme  $\varphi: G \rightarrow H$  dengan

$$d(f(x), \varphi(x)) \leq \varepsilon$$

untuk setiap  $x \in G$ ? Permasalahan tersebutlah yang dapat membentuk inti dari teori kestabilan. Pada ruang Banach, permasalahan di atas telah dipecahkan oleh D.H. Hyers pada tahun 1941 dengan  $\varepsilon = \delta$  dan  $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$  (Sahoo dan Kannappan, 2011:293).

Pada tahun 1978, Rassias menegur teorema kestabilan Hyers dan mencoba melemahkan kondisi batas dari norm Cauchy *difference*

$$f(x + y) - f(x) - f(y)$$

dan membuktikan suatu hasil dari Hyers yang diperluas dengan menggunakan suatu metode langsung (Jung, 2011:2).

Pembuktian Hyers terhadap permasalahan yang telah diberikan Ulam tersebut dikenal dengan teorema Hyers. Sedangkan pembuktian Rassias terhadap pembuktian teorema Hyers yang lebih diperluas tersebut dikenal dengan teorema Rassias. Teorema Rassias yang merupakan penyempurnaan terhadap teorema Hyers inilah yang disebut sebagai teorema Hyers-Ulam-Rassias.

Berikut adalah teorema Hyers dan teorema Rassias:

### **Teorema Hyers**

Misalkan  $f: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan suatu fungsi di antara ruang Banach sedemikian hingga

$$\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \quad (2.10)$$

untuk  $\delta > 0$  dan  $\forall x, y \in E_1$ . Maka ada limit

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

$\forall x \in E_1$  dan  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi additive yang tunggal, sedemikian hingga

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \delta \quad (2.11)$$

$\forall x \in E_1$  (Jung, 2011:21-22).

### **Bukti:**

Jika diambil  $y = x$ , maka persamaan (2.10) dapat diperoleh

$$\|f(x + x) - f(x) - f(x)\| \leq \delta$$

$$\|f(2x) - 2f(x)\| \leq \delta$$

dengan mengganti  $x = \frac{x}{2}$  dan kedua sisi dibagi 2, maka

$$\left\| \frac{1}{2} f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \right\| \leq \frac{\delta}{2} \quad (2.12)$$

$\forall x \in E_1$ . Selanjutnya, dibuat asumsi induksi

$$\left\| \frac{1}{2^n} f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right\| \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \delta. \quad (2.13)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (2.12), maka dapat diketahui pertidaksamaan (2.13) benar untuk  $n = 1$ . Pada pertidaksamaan (2.13) dianggap benar untuk  $n = k$ , sehingga diperoleh pertidaksamaan berikut

$$\left\| \frac{1}{2^k} f(x) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right\| \leq \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \delta. \quad (2.14)$$

Selanjutnya akan dibuktikan pertidaksamaan (2.13) benar untuk  $n = k + 1$ .

$$\left\| \frac{1}{2^{k+1}} f(x) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right\| = \left\| \left(\frac{1}{2^k}\right) \left(\frac{1}{2}\right) f(x) - f\left(\left(\frac{x}{2^k}\right) \left(\frac{1}{2}\right)\right) \right\|.$$

Karena persamaan fungsional Cauchy *additive* bersifat homogen, maka diperoleh pertidaksamaan berikut

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2^{k+1}} f(x) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right\| &= \left\| \left(\frac{1}{2^k}\right) \left(\frac{1}{2}\right) f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right\| \\ \left\| \frac{1}{2^{k+1}} f(x) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right\| &= \frac{1}{2} \left\| \frac{1}{2^k} f(x) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \delta \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \delta \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) \delta. \end{aligned}$$

Jadi, pertidaksamaan (2.13) benar  $\forall x \in E_1$  dan  $n \in N$ .

Anggap  $q_n(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x)$ , dimana  $x \in E_1$  dan  $n \in N$ . Maka

$$\begin{aligned} q_m(x) - q_n(x) &= \frac{1}{2^m} f(2^m x) - \frac{1}{2^n} f(2^n x) \\ &= \frac{1}{2^m} (f(2^{m-n} 2^n x) - 2^{m-n} f(2^n x)). \end{aligned}$$

Jadi, jika  $m < n$ , dengan mengaplikasikan pertidaksamaan (2.12) pada pertidaksamaan terakhir di atas, akan didapatkan

$$\|q_m(x) - q_n(x)\| \leq \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right) \delta$$

untuk setiap  $x \in E_1$ .

Berdasarkan definisi 2.6.1. barisan  $\{x_n\}$  dikatakan barisan Cauchy jika barisan  $\{x_n\}$  memenuhi  $|x_m - x_n| < \varepsilon$  untuk setiap  $\varepsilon > 0$ . Jika  $n \rightarrow \infty$ , maka  $\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right) \delta \rightarrow 0$ , sehingga dapat dikatakan bahwa  $\left\{\frac{1}{2^n} f(2^n x)\right\}_{n=1}^{\infty}$  merupakan barisan Cauchy untuk setiap  $x \in E_1$ . Oleh karena itu, terdapat fungsi  $A: E_1 \rightarrow E_2$  yang didefinisikan dengan

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$$

untuk setiap  $x \in E_1$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Pandang bahwa

$$\begin{aligned} & \|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2^n} f(2^n x + 2^n y) - \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^n} f(2^n y) \right\} \right\| \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \{f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\} \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \|\{f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\}\|. \end{aligned}$$

Misalkan  $x$  dan  $y$  sebarang titik-titik di  $E_1$ . Dengan mengikuti pertidaksamaan (2.10), maka didapatkan

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2^n} = 0.$$

Jadi,

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \leq 0.$$

Berdasarkan sifat pertama pada ruang bernorma dan  $\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \leq 0$ , maka didapatkan

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| = 0.$$

Berdasarkan sifat kedua pada ruang bernorma, maka didapatkan

$$A(x + y) - A(x) - A(y) = 0$$

$$A(x + y) = A(x) + A(y).$$

Dari definisi 2.1.1.1, maka dapat ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Misalkan  $n, m$  bilangan bulat nonnegatif dengan  $n < m$ , maka

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \\ & \leq \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) + \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) - \frac{1}{2^{n+2}} f(2^{n+2} x) + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2^{m-1}} f(2^{m-1} x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\|. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat keempat pada ruang Banach (ketaksamaan segitiga), maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \\ & \leq \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) \right\| + \left\| \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) - \frac{1}{2^{n+2}} f(2^{n+2} x) \right\| \\ & \quad + \dots + \left\| \frac{1}{2^{m-1}} f(2^{m-1} x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \\ & = \frac{1}{2^n} \left\| f(2^n x) - \frac{1}{2} f(2^{n+1} x) \right\| + \frac{1}{2^{n+1}} \left\| f(2^{n+1} x) - \frac{1}{2} f(2^{n+2} x) \right\| \\ & \quad + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \left\| f(2^{m-1} x) - \frac{1}{2} f(2^m x) \right\| \\ & \leq \frac{1}{2^n} \delta + \frac{1}{2^{n+1}} \delta + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \delta \end{aligned}$$

$$= \frac{\delta}{2} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} \right)$$

$$= \frac{\delta}{2} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A$  memenuhi  $\|f(x) - A(x)\| \leq \delta, \forall x \in E_1$ .

$$\|f(x) - A(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^0} f(2^0 x) - \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right\|$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{\delta}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

Karena

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Jika kedua sisi dikalikan  $\frac{1}{2}$ , maka didapatkan

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \\
 &= \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{\frac{2}{2^n}} \\
 &= \left(\frac{2^n - 1}{2^{n+1}}\right) \left(\frac{2}{1}\right) \\
 &= \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1}} \\
 &= \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}} \\
 &= 1 - \frac{1}{2^n}.
 \end{aligned}$$

Jadi

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

sehingga,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\
 &= 1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
 &= 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\|f(x) - A(x)\| &\leq \frac{\delta}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{\delta}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\
&= \frac{\delta}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \left( \frac{\delta}{2} \right) 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \delta - 0 \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Jadi,  $\|f(x) - A(x)\| \leq \delta$ .

Andaikan  $A$  tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain  $B: E_1 \rightarrow E_2$  sedemikian hingga

$$\|f(x) - B(x)\| \leq \delta$$

$\forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned}
\|A(x) - B(x)\| &= \|A(x) - f(x) + f(x) - B(x)\| \\
&\leq \|A(x) - f(x)\| + \|f(x) - B(x)\| \\
&= \|f(x) - A(x)\| + \|f(x) - B(x)\| \\
&\leq \delta + \delta.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\|A(x) - B(x)\| \leq 2\delta.$$

$$\begin{aligned}
\|A(x) - B(x)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^n} A(2^n x) - \frac{1}{2^n} B(2^n x) \right\| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \|A(2^n x) - B(2^n x)\| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2\delta \\
&= 2\delta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dimana  $n \in \mathbb{R}$ .

Karena  $\|A(x) - B(x)\| \leq 0$  dan berdasarkan sifat pertama pada ruang bernorma, maka

$$A(x) - B(x) = 0$$

$$A(x) = B(x), \forall x \in E_1.$$

Oleh karena itu,  $A$  merupakan fungsi *additive* yang tunggal dan memenuhi pertidaksamaan (2.11). Jadi teorema Hyers tersebut terbukti.

#### Contoh Teorema Hyers:

Misalkan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan misalkan  $f(x) = 8x$  dimana  $x \in \mathbb{R}$ , sehingga untuk setiap  $\delta > 0$  dapat diperoleh

$$|f(x + y) - f(x) - f(y)|$$

$$= |8(x + y) - 8(x) - 8(y)| = |8x + 8y - 8x - 8y| = |0| = 0 < \delta.$$

Jadi fungsi tersebut memenuhi  $|f(x + y) - f(x) - f(y)| < \delta$ .

Misalkan  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} f(2^n x) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  suatu barisan di  $\mathbb{R}$ , akan ditunjukkan bahwa  $\{x_n\}$  merupakan barisan Cauchy.

Untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , pilih  $H > \frac{1}{\varepsilon}$ , maka untuk setiap  $n, m \geq H(\varepsilon)$  dapat dikatakan bahwa  $\frac{1}{n} < \frac{1}{H} \leq \varepsilon$  dan dengan cara yang serupa diperoleh  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ . Oleh karena itu, jika  $n, m \geq H$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2^n} 8(2^n x) - \frac{1}{2^m} 8(2^m x) \right| = |8x - 8x| = |0| = 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi dapat dikatakan bahwa  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} f(2^n x) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  merupakan barisan Cauchy. Karena  $\mathbb{R}$  termasuk ruang Banach, maka barisan Cauchy tersebut konvergen, sehingga ada limit dari barisan Cauchy tersebut. Oleh karena itu, terdapat suatu fungsi  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $A$  didefinisikan dengan  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$  dimana  $x \in \mathbb{R}$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & |A(x + y) - A(x) - A(y)| \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(2^n(x + y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\} \right| \\ &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \{f(2^n(x + y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{f(2^n(x + y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{8(2^n(x+y)) - 8(2^n x) - 8(2^n y)\}| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{8(2^n x) + 8(2^n y) - 8(2^n x) - 8(2^n y)\}| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |0| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Jadi

$$|A(x+y) - A(x) - A(y)| = 0.$$

Berdasarkan sifat ruang metrik, maka didapatkan  $A(x+y) - A(x) - A(y) = 0$ , sehingga  $A(x+y) = A(x) + A(y)$ . Dari definisi 2.1.1.1, maka dapat ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A$  memenuhi  $|f(x) - A(x)| \leq \delta, \forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned}
|f(x) - A(x)| &= \left| f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right| \\
&= \left| 8x - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2^n f(x) \right| \\
&= |8x - f(x)| \\
&= |8x - 8x|
\end{aligned}$$

$$= |0|$$

$$= 0.$$

Karena  $\forall \delta > 0$ , maka  $|f(x) - A(x)| \leq \delta$ .

Andaikan  $A$  tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain  $B: E_1 \rightarrow E_2$  sedemikian hingga

$$|f(x) - B(x)| \leq \delta$$

$\forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= |A(x) - f(x) + f(x) - B(x)| \\ &\leq |A(x) - f(x)| + |f(x) - B(x)| \\ &= |f(x) - A(x)| + |f(x) - B(x)| \\ &\leq \delta + \delta. \end{aligned}$$

Jadi,

$$|A(x) - B(x)| \leq 2\delta.$$

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2^n} A(2^n x) - \frac{1}{2^n} B(2^n x) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |A(2^n x) - B(2^n x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2\delta \\ &= 2\delta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dimana  $n \in \mathbb{R}$ .

Karena  $|A(x) - B(x)| \leq 0$  dan berdasarkan sifat pertama pada ruang metrik, maka

$$A(x) - B(x) = 0$$

$$A(x) = B(x), \forall x \in E_1.$$

Jadi terbukti bahwa  $A$  tunggal dan pembuktian teorema Hyers di atas telah lengkap, sehingga terbukti bahwa contoh dari persamaan Cauchy *additive* tersebut stabil.

**Teorema Rassias**

Misalkan  $E_1$  dan  $E_2$  merupakan ruang Banach, dan misalkan  $f: E_1 \rightarrow E_2$  suatu fungsi yang memenuhi pertidaksamaan

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (2.15)$$

untuk  $\theta > 0, p \in [0,1)$ , dan  $\forall x, y \in E_1$ . Maka ada  $A: E_1 \rightarrow E_2$  suatu fungsi additive yang tunggal, sedemikian hingga

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} \|x\|^p \quad (2.16)$$

$\forall x \in E_1$  (Jung, 2011:24).

**Bukti:**

Jika diberikan fungsi  $f: E_1 \rightarrow E_2$  yang memenuhi

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

untuk  $\theta > 0, p \in [0,1)$  dan  $\forall x, y \in E_1$ . Dengan mengganti  $y = x$  pada persamaan (2.15) maka

$$\|f(2x) - 2f(x)\| \leq 2\theta\|x\|^p$$

$\forall x \in E_1$ . Jika  $x$  diganti dengan  $2^{k-1}x$  ( $\forall k \in N, k \geq 1$ ), maka akan didapatkan

$$\|f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\| \leq 2^{kp-p+1}\theta\|x\|^p \quad (2.17)$$

dengan mengalikan kedua ruas pada pertidaksamaan di atas dengan  $\frac{1}{2^k}$  dan

menambahkan sebanyak  $n$  pertidaksamaan yang dihasilkan, maka

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \|f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\| \leq \theta\|x\|^p \sum_{k=1}^n \frac{2^{kp-p+1}}{2^k}. \quad (2.18)$$

Karena

$$\frac{1}{2^n} \|f(2^n x) - 2f(2^{n-1}x)\| \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \|f(2^k x) - 2f(2^{k-1}x)\| \quad (2.19)$$

maka, berdasarkan (2.18) dan (2.19) diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \|f(2^n x) - 2f(2^{n-1}x)\| &\leq \theta \|x\|^p \sum_{k=1}^n 2^{k(p-1)} 2^{1-p} \\ \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{2}{2^n} f(2^{n-1}x) \right\| &\leq \theta \|x\|^p \sum_{k=1}^n 2^{k(p-1)} 2^{1-p}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Karena persamaan fungsional Cauchy *additive* bersifat homogen, maka

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - f\left(\frac{2}{2^n} 2^{n-1}x\right) \right\| &\leq \theta \|x\|^p \sum_{k=1}^n 2^{k(p-1)} 2^{1-p} \\ \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - f(x) \right\| &\leq \theta \|x\|^p \sum_{k=1}^n 2^{k(p-1)} 2^{1-p}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Karena

$$\sum_{k=1}^n 2^{k(p-1)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-1)} \quad (2.22)$$

dari pertidaksamaan (2.21) dan (2.22) didapatkan pertidaksamaan berikut

$$\left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - f(x) \right\| \leq \theta \|x\|^p 2^{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-1)} \quad (2.23)$$

Karena

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k(1-p)}} = \frac{\left(\frac{1}{2^{(1-p)}}\right)}{1 - \left(\frac{1}{2^{(1-p)}}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2^{(1-p)}}\right)}{\left(\frac{2^{(1-p)} - 1}{2^{(1-p)}}\right)} = \frac{1}{2^{(1-p)} - 1}$$

maka

$$\begin{aligned} \theta \|x\|^p 2^{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-1)} &= (\theta \|x\|^p 2^{1-p}) \left(\frac{1}{2^{(1-p)} - 1}\right) \\ &= \frac{2\theta \|x\|^p}{2^p(2^{(1-p)} - 1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\theta}{2-2^p} \|x\|^p.$$

Oleh karena itu, dari pertidaksamaan (2.23) didapatkan

$$\left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - f(x) \right\| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} \|x\|^p \quad (2.24)$$

$\forall x \in E_1$ .

Dengan menggunakan induksi dapat ditunjukkan bahwa (2.24) terdefinisi untuk setiap bilangan asli. Jika  $m > n > 0$ , maka  $m - n$  juga bilangan asli. Selanjutnya, pada persamaan (2.24),  $n$  diganti dengan  $m - n$ , sehingga didapatkan

$$\left\| \frac{1}{2^{m-n}} f(2^{m-n} x) - f(x) \right\| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} \|x\|^p \quad (2.25)$$

yang berarti

$$\left\| \frac{1}{2^m} f(2^m x) - \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right\| \leq \frac{1}{2^n} \left( \frac{2\theta}{2-2^p} \right) \|x\|^p \quad (2.26)$$

$\forall x \in E_1$ . Selanjutnya, pada persamaan (2.26),  $x$  diganti dengan  $2^n x$ , sehingga didapatkan pertidaksamaan berikut

$$\left\| \frac{1}{2^m} f(2^m x) - \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right\| \leq \frac{2^{np}}{2^n} \left( \frac{2\theta}{2-2^p} \right) \|x\|^p. \quad (2.27)$$

Karena  $0 \leq p < 1$ , maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n(p-1)} = 0,$$

sehingga berdasarkan (2.27) akan didapatkan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^m} f(2^m x) - \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right\| = 0.$$

Berdasarkan definisi 2.6.1. barisan  $\{x_n\}$  dikatakan barisan Cauchy jika barisan  $\{x_n\}$  memenuhi  $|x_m - x_n| < \varepsilon$  untuk setiap  $\varepsilon > 0$ . Jika  $n \rightarrow \infty$  maka  $\left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right) \delta \rightarrow 0$ , sehingga dapat dikatakan bahwa  $\left\{\frac{1}{2^n} f(2^n x)\right\}_{n=1}^{\infty}$  merupakan barisan Cauchy untuk

setiap  $x \in E_1$ . Oleh karena itu, terdapat fungsi  $A: E_1 \rightarrow E_2$  yang didefinisikan dengan

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$$

untuk setiap  $x \in E_1$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Pandang bahwa

$$\begin{aligned} \|A(x+y) - A(x) - A(y)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \|f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta(\|x\|^p + \|y\|^p) 2^{np}}{2^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi

$$\|A(x+y) - A(x) - A(y)\| = 0.$$

Berdasarkan sifat kedua pada ruang bernorma, maka

$$A(x+y) - A(x) - A(y) = 0$$

$$A(x+y) = A(x) + A(y)$$

$\forall x, y \in E_1$ . Selanjutnya,

$$\begin{aligned} \|A(x) - f(x)\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p. \end{aligned}$$

Oleh karena itu akan didapatkan

$$\|A(x) - f(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p$$

$\forall x \in E_1$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A$  adalah fungsi yang tunggal. Jika  $A$  tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* lain yang memenuhi

$$\begin{aligned}\|B(x) - f(x)\| &\leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p \\ \|B(x) - A(x)\| &\leq \|B(x) - f(x) + f(x) - A(x)\| \\ &\leq \|B(x) - f(x)\| + \|f(x) - A(x)\| \\ &\leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p + \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p \\ &= \frac{4\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p.\end{aligned}$$

Lebih lanjut, karena  $A$  dan  $B$  adalah fungsi *additive*, maka

$$\begin{aligned}\|A(x) - B(x)\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(2^n x)}{2^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(2^n x)}{2^n} \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \|A(2^n x) - B(2^n x)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \frac{4\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p \\ &= \frac{4\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0\end{aligned}\tag{2.28}$$

dimana  $n \in \mathbb{N}$ .

Karena

$$\|A(x) - B(x)\| \leq 0$$

dan berdasarkan sifat pertama pada ruang bernorma, sehingga didapatkan

$$\|A(x) - B(x)\| = 0.$$

Berdasarkan sifat kedua pada ruang bernorma, maka didapatkan

$$A(x) - B(x) = 0$$

sehingga

$$A(x) = B(x), \forall x \in E_1.$$

**Contoh Teorema Rassias:**

Misalkan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan misalkan  $f(x) = 8x$  dimana  $x \in \mathbb{R}$ , sehingga untuk setiap  $\delta > 0$  dapat diperoleh

$$\begin{aligned} & |f(x+y) - f(x) - f(y)| \\ &= |8(x+y) - 8(x) - 8(y)| = |8x + 8y - 8x - 8y| = |0| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Untuk  $\theta > 0$  dan  $p \in [0,1)$ , maka  $\theta(|x|^p + |y|^p) > 0$ . Jadi fungsi tersebut memenuhi  $|f(x+y) - f(x) - f(y)| < \theta(|x|^p + |y|^p)$ .

Misalkan  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} f(2^n x) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  suatu barisan di  $\mathbb{R}$ , akan ditunjukkan bahwa  $\{x_n\}$  merupakan barisan Cauchy.

Untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , pilih  $H > \frac{1}{\varepsilon}$ , maka untuk setiap  $n, m \geq H(\varepsilon)$  dapat dikatakan bahwa  $\frac{1}{n} < \frac{1}{H} \leq \varepsilon$  dan dengan cara yang serupa diperoleh  $\frac{1}{m} < \varepsilon$ . Oleh karena itu, jika  $n, m \geq H$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2^n} 8(2^n x) - \frac{1}{2^m} 8(2^m x) \right| = |8x - 8x| = |0| = 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi dapat dikatakan bahwa  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} f(2^n x) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  merupakan barisan Cauchy. Karena  $\mathbb{R}$  termasuk ruang Banach, maka barisan Cauchy tersebut konvergen, sehingga ada limit dari barisan Cauchy tersebut. Oleh karena itu,

terdapat suatu fungsi  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $A$  didefinisikan dengan  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$  dimana  $x \in \mathbb{R}$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 & |A(x + y) - A(x) - A(y)| \\
 &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(2^n(x + y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\} \right| \\
 &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \{f(2^n(x + y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{f(2^n(x + y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{8(2^n(x + y)) - 8(2^n x) - 8(2^n y)\}| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{8(2^n x) + 8(2^n y) - 8(2^n x) - 8(2^n y)\}| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{8(2^n x) + 8(2^n y) - 8(2^n x) - 8(2^n y)\}| \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Jadi

$$|A(x + y) - A(x) - A(y)| = 0.$$

Berdasarkan sifat pada ruang metrik, maka didapatkan  $A(x + y) - A(x) - A(y) = 0$ , sehingga  $A(x + y) = A(x) + A(y)$ . Dari definisi 2.1.1.1, maka dapat ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A$  memenuhi  $|f(x) - A(x)| \leq$

$$\frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p, \forall x \in E_1.$$

$$\begin{aligned}
|f(x) - A(x)| &= \left| f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right| \\
&= \left| 8x - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2^n f(x) \right| \\
&= |8x - f(x)| \\
&= |8x - 8x| \\
&= |0| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Karena  $\theta > 0$  dan  $p \in [0,1)$ ,  $\frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p > 0$ , maka  $|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p$ .

Andaikan  $A$  tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain  $B: E_1 \rightarrow E_2$  sedemikian hingga

$$|f(x) - B(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p$$

$\forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned}
|A(x) - B(x)| &= |A(x) - f(x) + f(x) - B(x)| \\
&\leq |A(x) - f(x)| + |f(x) - B(x)| \\
&= |f(x) - A(x)| + |f(x) - B(x)| \\
&\leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p + \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$|A(x) - B(x)| \leq 2 \left( \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p \right).$$

$$\begin{aligned}
|A(x) - B(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2^n} A(2^n x) - \frac{1}{2^n} B(2^n x) \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |A(2^n x) - B(2^n x)| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2 \left( \frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p \right) \\
&= 2 \left( \frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dimana  $n \in \mathbb{R}$ .

Karena  $|A(x) - B(x)| \leq 0$  dan berdasarkan sifat pertama pada ruang metrik, maka

$$A(x) - B(x) = 0$$

$$A(x) = B(x), \forall x \in E_1.$$

Jadi terbukti bahwa  $A$  tunggal dan pembuktian teorema Rassias di atas telah lengkap, sehingga terbukti bahwa contoh dari persamaan Cauchy *additive* tersebut stabil.

## 2.9 Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen

Kestabilan persamaan fungsional Jensen dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias merupakan suatu cara untuk membuktikan kestabilan persamaan fungsional Jensen dengan menggunakan teorema Rassias yang merupakan perluasan dari teorema Hyers seperti yang telah dipaparkan di atas. Pada konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias yang menjadi acuan adalah persamaan fungsional Cauchy *additive*. Oleh karena itu, untuk membuktikan kestabilan persamaan fungsional Jensen, persamaan fungsional Cauchy *additive* dalam

teorema tersebut diganti dengan persamaan fungsional Jensen. Jadi, untuk membuktikan kestabilan persamaan fungsional Jensen adalah dengan membuktikan teorema berikut:

### **Teorema Hyers**

Misalkan  $f: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan suatu fungsi di antara ruang Banach sedemikian hingga

$$\left\| 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \right\| \leq \delta$$

untuk  $\delta > 0$  dan  $\forall x, y \in E_1$ . Maka ada limit

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

$\forall x \in E_1$  dan  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi additive yang tunggal, sedemikian hingga

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \delta, \forall x \in E_1.$$

### **Teorema Rassias**

Misalkan  $E_1$  dan  $E_2$  merupakan ruang Banach, dan misalkan  $f: E_1 \rightarrow E_2$  suatu fungsi yang memenuhi pertidaksamaan

$$\left\| 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \right\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

untuk  $\theta > 0, p \in [0,1)$ , dan  $\forall x, y \in E_1$ . Maka ada  $A: E_1 \rightarrow E_2$  suatu fungsi additive yang tunggal, sedemikian hingga

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} \|x\|^p, \forall x \in E_1.$$

## **2.10 Inspirasi Kestabilan Persamaan Fungsional dalam Kajian Islam**

Persamaan fungsional dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, seperti digunakan untuk menggambarkan suatu proses fisik, jika persamaan

fungsional tersebut stabil. Oleh karena itu, untuk mengaplikasikan suatu persamaan fungsional harus diketahui terlebih dulu kestabilannya. Jika persamaan fungsional tersebut stabil, maka dapat dipastikan persamaan fungsional tersebut dapat diaplikasikan. Akan tetapi, jika persamaan fungsional tersebut tidak stabil, maka ada kemungkinan persamaan fungsional tersebut tidak dapat diaplikasikan. Begitu juga dengan bumi yang menjadi tempat tinggal manusia dan makhluk hidup yang lainnya ini. Bumi akan dapat digunakan sebagai tempat tinggal yang aman jika bumi ini stabil. Dapat dibayangkan jika keadaan bumi tidak stabil dan selalu mengalami guncangan-guncangan, maka bumi tidak lagi menjadi tempat yang aman untuk dihuni. Di antara yang menstabilkan bumi adalah gunung, sebagaimana firman Allah Swt. dalam al-Quran surat Luqman ayat 10 sebagai berikut:

خَلَقَ السَّمَوَاتِ بِغَيْرِ عَمَدٍ تَرَوْنَهَا ۗ وَالْأَرْضَ فِي الْأَرْضِ رَواسِيَ أَنْ تَمِيدَ بِكُمْ وَبَثَّ فِيهَا مِنْ كُلِّ دَابَّةٍ ۗ وَأَنْزَلْنَا مِنَ السَّمَاءِ مَاءً فَأَنْبَتْنَا فِيهَا مِنْ كُلِّ نَوْعٍ كَرِيمٍ

*“Dia menciptakan langit tanpa tiang yang kamu melihatnya dan Dia meletakkan gunung-gunung (di permukaan) bumi supaya bumi itu tidak menggoyangkan kamu dan memperkembangbiakkan padanya segala macam jenis binatang. Dan Kami turunkan air hujan dari langit, lalu Kami tumbuhkan padanya segala macam tumbuh-tumbuhan yang baik” (QS. Luqman:10).*

Dalam ayat di atas dijelaskan bahwa bumi diciptakan tanpa tiang dan gununglah yang mengokohkannya, sehingga bumi tidak menggoyangkan manusia (berguncang).

Di samping itu Achmad Sunarto (2007) dalam buku elektriknya yang berjudul Himpunan Hadits Qudsi memaparkan sebuah hadits berikut:

عَنْ أَنَسِ بْنِ مَالِكٍ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُ عَنِ النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ قَالَ: لَمَّا خَلَقَ اللَّهُ الْأَرْضَ جَعَلَتْ تَمِيدٌ، فَخَلَقَ الْجِبَالَ فَعَادَ بِهَا عَلَيْهَا فَاسْتَقَرَّتْ، فَعَجَبَتْ الْمَلَائِكَةُ مِنْ شِدَّةِ الْجِبَالِ، قَالُوا: يَا رَبِّ، هَلْ مِنْ خَلْقِكَ شَيْءٌ أَشَدُّ مِنَ الْجِبَالِ؟ قَالَ نَعَمْ الْحَدِيدُ، قَالُوا يَا رَبِّ، فَهَلْ مِنْ خَلْقِكَ شَيْءٌ أَشَدُّ مِنَ الْحَدِيدِ؟ قَالَ: نَعَمْ النَّارُ، فَقَالُوا: يَا رَبِّ، فَهَلْ مِنْ خَلْقِكَ شَيْءٌ أَشَدُّ مِنَ النَّارِ؟ قَالَ: نَعَمْ الْمَاءُ، قَالُوا: يَا رَبِّ، فَهَلْ مِنْ خَلْقِكَ شَيْءٌ أَشَدُّ مِنَ الْمَاءِ؟ قَالَ نَعَمْ الرِّيحُ، قَالُوا: يَا رَبِّ فَهَلْ مِنْ خَلْقِكَ شَيْءٌ أَشَدُّ مِنَ الرِّيحِ؟ قَالَ: نَعَمْ ابْنُ آدَمَ تَصَدَّقْ بِصَدَقَةٍ يَمِينِهِ، يُخَوِّفُهَا مِنْ شِمَالِهِ

*Dari Anas bin Malik ra. dari Nabi Saw. beliau bersabda: “Ketika Allah menciptakan bumi, bumi itu goyang, maka Dia menciptakan gunung-gunung, lalu bumi itu menjadi tetap (tidak goyang). Maka malaikat heran terhadap kehebatan gunung, mereka bertanya: ‘Wahai Tuhanku, adakah di antara makhluk-Mu yang lebih hebat daripada gunung?’ Dia berfirman: ‘Ya, besi.’ Mereka bertanya: ‘Wahai Tuhanku, adakah makhluk-Mu yang lebih hebat daripada besi?’ Dia berfirman: ‘Ya, api.’ Mereka bertanya: ‘Wahai Tuhanku, adakah makhluk-Mu yang lebih hebat daripada api?’ Dia berfirman: ‘Ya, air.’ Mereka bertanya: ‘Wahai Tuhanku, adakah makhluk-Mu yang lebih hebat daripada air?’ Dia berfirman: ‘Ya, angin.’ Mereka berkata: ‘Wahai Tuhanku, adakah makhluk-Mu yang lebih hebat daripada angin?’ Dia berfirman: ‘Ya, anak Adam yang tangan kanannya menyedekahkan sesuatu dengan tersembunyi dari tangan kirinya.” (Hadits ditakhrij oleh Tirmidzi).*

Hadits tersebut menjelaskan bahwa sifat bumi pada awal diciptakannya adalah tidak stabil (selalu berguncang-guncang). Setelah itu Allah Swt. menciptakan gunung di atas bumi sehingga bumi menjadi tenang (stabil).

## BAB III

### PEMBAHASAN

#### 3.1 Kestabilan Persamaan Fungsional Jensen

Untuk mengetahui kestabilan dari persamaan fungsional Jensen adalah dengan membuktikan teorema Rassias yang dikenal sebagai konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias. Teorema Rassias merupakan bentuk generalisasi dari teorema Hyers atau yang dikenal sebagai konsep kestabilan Hyers-Ulam. Berikut adalah pembuktian kestabilan persamaan fungsional Jensen dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias:

##### 3.1.1 Teorema Hyers

Misalkan  $f: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan suatu fungsi di antara ruang Banach sedemikian hingga

$$\left\| 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \right\| \leq \delta \quad (3.1)$$

Untuk  $\delta > 0$  dan  $\forall x, y \in E_1$ . Maka ada limit

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} f(2^n x)$$

$\forall x \in E_1$  dan  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi additive yang tunggal, sedemikian hingga

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \delta, \forall x \in E_1.$$

##### **Bukti:**

Karena  $f: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan suatu fungsi di antara ruang Banach dan  $\forall x, y \in E_1$ , dan karena ruang Banach merupakan ruang bernorma yang lengkap, maka berdasarkan definisi 2.4.1 akan berlaku sifat dari ruang bernorma sebagai berikut:

1.  $\|x\| \geq 0$ ;
2.  $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$ ;
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ;
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Untuk membuktikan teorema Hyers, maka harus ditunjukkan bahwa:

1.  $\left\{ \frac{f(2^n x)}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  merupakan suatu barisan Cauchy untuk setiap  $x \in E_1$ .
2. Jika  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ , maka  $A$  merupakan fungsi *additive*.
3.  $A$  memenuhi  $\|f(x) - A(x)\| \leq \delta, \forall x \in E_1$ .
4.  $A$  merupakan fungsi yang tunggal.

Jika diambil  $y = 0$ , dan asumsikan  $f(0) = 0$  maka

$$\left\| 2f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x) - f(0) \right\| \leq \delta.$$

Karena  $f(0) = 0$ , maka

$$\left\| 2f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x) \right\| \leq \delta.$$

Dengan mengganti  $x = 2x$  dan kedua sisi dibagi dengan 2, maka

$$\left\| f(x) - \frac{1}{2}f(2x) \right\| \leq \frac{\delta}{2}, \forall x \in E_1.$$

Misalkan  $n, m$  bilangan bulat nonnegatif dengan  $n < m$ , maka

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2^n}f(2^n x) - \frac{1}{2^m}f(2^m x) \right\| \\ & \leq \left\| \frac{1}{2^n}f(2^n x) - \frac{1}{2^{n+1}}f(2^{n+1}x) + \frac{1}{2^{n+1}}f(2^{n+1}x) - \frac{1}{2^{n+2}}f(2^{n+2}x) + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2^{m-1}}f(2^{m-1}x) - \frac{1}{2^m}f(2^m x) \right\|. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat keempat pada ruang Banach (ketaksamaan segitiga), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \\
& \leq \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) \right\| + \left\| \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) - \frac{1}{2^{n+2}} f(2^{n+2} x) \right\| \\
& + \dots + \left\| \frac{1}{2^{m-1}} f(2^{m-1} x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \\
& = \frac{1}{2^n} \left\| f(2^n x) - \frac{1}{2} f(2^{n+1} x) \right\| + \frac{1}{2^{n+1}} \left\| f(2^{n+1} x) - \frac{1}{2} f(2^{n+2} x) \right\| \\
& + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \left\| f(2^{m-1} x) - \frac{1}{2} f(2^m x) \right\| \\
& \leq \frac{1}{2^n} \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\delta}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \frac{\delta}{2} \\
& = \frac{\delta}{2} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \right) \\
& = \frac{\delta}{2} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \leq \frac{\delta}{2} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k}.$$

Berdasarkan definisi 2.6.1. barisan  $\{x_n\}$  dikatakan barisan Cauchy jika barisan  $\{x_n\}$  memenuhi  $|x_m - x_n| < \varepsilon$  untuk setiap  $\varepsilon > 0$ . Jika  $n \rightarrow \infty$ , maka  $\frac{\delta}{2} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} = 0$ .

Oleh karena itu,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| = 0$ , sehingga dapat dikatakan

bahwa  $\left\{\frac{f(2^n x)}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$  merupakan barisan Cauchy untuk setiap  $x \in E_1$ . Karena  $E_1$  merupakan ruang Banach, dimana setiap barisan Cauchy-nya konvergen, maka terdapat fungsi  $A: E_1 \rightarrow E_2$  yang didefinisikan dengan  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$  untuk setiap  $x \in E_1$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Pandang bahwa

$$\begin{aligned} & \|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2f\left(\frac{2^n(x+y)}{2}\right)}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\} \right\| \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \left\{ 2f\left(\frac{2^n(x+y)}{2}\right) - f(2^n x) - f(2^n y) \right\} \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \left\| \left\{ 2f\left(\frac{2^n(x+y)}{2}\right) - f(2^n x) - f(2^n y) \right\} \right\|. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.1), maka didapatkan

$$\begin{aligned} \|A(x + y) - A(x) - A(y)\| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \leq 0.$$

Berdasarkan sifat pertama pada ruang bernorma dan

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \leq 0,$$

maka didapatkan

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| = 0.$$

Berdasarkan sifat kedua pada ruang bernorma, maka didapatkan  $A(x + y) - A(x) - A(y) = 0$ , sehingga  $A(x + y) = A(x) + A(y)$ . Dari definisi 2.1.1.1, maka dapat ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A$  memenuhi  $\|f(x) - A(x)\| \leq \delta, \forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned} \|f(x) - A(x)\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^0} f(2^0 x) - \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{\delta}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

Karena

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Jika kedua sisi dikalikan  $\frac{1}{2}$ , maka didapatkan

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^n - 1}{2^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{2} \\
 &= \left(\frac{2^n - 1}{2^{n+1}}\right) \left(\frac{2}{1}\right) \\
 &= \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1}} \\
 &= \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}} \\
 &= 1 - \frac{1}{2^n}.
 \end{aligned}$$

Jadi

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

sehingga,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} \\
 &= 1 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\
 &= 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{\delta}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\
&= \frac{\delta}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \left( \frac{\delta}{2} \right) 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= \delta - 0 \\
&= \delta.
\end{aligned}$$

Jadi,  $\|f(x) - A(x)\| \leq \delta$ .

Andaikan  $A$  tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain  $B: E_1 \rightarrow E_2$  sedemikian hingga

$$\|f(x) - B(x)\| \leq \delta$$

$\forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned}
\|A(x) - B(x)\| &= \|A(x) - f(x) + f(x) - B(x)\| \\
&\leq \|A(x) - f(x)\| + \|f(x) - B(x)\| \\
&= \|f(x) - A(x)\| + \|f(x) - B(x)\| \\
&\leq \delta + \delta \\
&= 2\delta.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\|A(x) - B(x)\| \leq 2\delta.$$

$$\|A(x) - B(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^n} A(2^n x) - \frac{1}{2^n} B(2^n x) \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \|A(2^n x) - B(2^n x)\| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2\delta \\
&= 2\delta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dimana  $n \in \mathbb{R}$ .

Karena  $\|A(x) - B(x)\| \leq 0$  dan berdasarkan sifat pertama pada ruang bernorma, maka

$$A(x) - B(x) = 0$$

$$A(x) = B(x), \forall x \in E_1.$$

Jadi terbukti bahwa  $A$  tunggal dan pembuktian teorema Hyers di atas telah lengkap, sehingga terbukti bahwa persamaan Jensen tersebut stabil.

### 3.1.2 Teorema Rassias

Misalkan  $f: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan suatu fungsi antara ruang Banach. Jika  $f$  memenuhi pertidaksamaan fungsional

$$\left\| 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \right\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (3.2)$$

$\forall \theta \geq 0$ , dengan  $0 \leq p < 1$  dan  $\forall x, y \in E_1$  ada  $A: E_1 \rightarrow E_2$ , suatu fungsi additive yang tunggal, sedemikian hingga

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} \|x\|^p$$

$\forall x \in E_1$ .

**Bukti:**

Karena fungsi tersebut terjadi di antara ruang Banach ( $E_1$  dan  $E_2$ ) dan  $\forall x, y \in E_1$ , serta karena ruang Banach merupakan ruang bernorma yang lengkap, maka berdasarkan definisi 2.4.1 akan berlaku sifat dari ruang bernorma sebagai berikut:

1.  $\|x\| \geq 0$ ;
2.  $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$ ;
3.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ , dimana  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Untuk membuktikan teorema Rassias, maka harus ditunjukkan bahwa:

1.  $\left\{ \frac{f(2^n x)}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  merupakan suatu barisan Cauchy untuk setiap  $x \in E_1$ .
2. Jika  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$ , maka  $A$  merupakan fungsi *additive*.
3.  $A$  memenuhi  $\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} \|x\|^p, \forall x \in E_1$ .
4.  $A$  merupakan fungsi yang tunggal.

Asumsikan  $f(0) = 0$ ,

$$\left\| 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \right\| \leq \theta(\|x\|^p + \|y\|^p).$$

Jika diambil  $y = 0$  dan  $f(0) = 0$ , maka

$$\left\| 2f\left(\frac{x+0}{2}\right) - f(x) - f(0) \right\| \leq \theta(\|x\|^p + \|0\|^p)$$

$$\left\| 2f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x) \right\| \leq \theta(\|x\|^p).$$

Dengan mengganti  $x = 2x$  dan kedua sisi dibagi dengan 2, maka akan diperoleh

$$\left\| f(x) - \frac{1}{2}f(2x) \right\| \leq \frac{\theta}{2}(\|2x\|^p), \forall x \in E_1.$$

Misalkan  $n, m$  bilangan bulat nonnegatif dengan  $n < m$ , maka

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) + \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) - \frac{1}{2^{n+2}} f(2^{n+2} x) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2^{m-1}} f(2^{m-1} x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\|.
\end{aligned}$$

Karena  $f$  suatu fungsi di antara ruang Banach, dengan menggunakan sifat keempat pada ruang bernorma (ketaksamaan segitiga), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) \right\| + \left\| \frac{1}{2^{n+1}} f(2^{n+1} x) - \frac{1}{2^{n+2}} f(2^{n+2} x) \right\| + \dots \\
&\quad + \left\| \frac{1}{2^{m-1}} f(2^{m-1} x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \\
&= \frac{1}{2^n} \left\| f(2^n x) - \frac{1}{2} f(2^{n+1} x) \right\| + \frac{1}{2^{n+1}} \left\| f(2^{n+1} x) - \frac{1}{2} f(2^{n+2} x) \right\| + \dots \\
&\quad + \frac{1}{2^{m-1}} \left\| f(2^{m-1} x) - \frac{1}{2} f(2^m x) \right\| \\
&\leq \frac{1}{2^n} \frac{\theta}{2} (\|2^{n+1} x\|^p) + \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\theta}{2} (\|2^{n+2} x\|^p) + \dots + \frac{1}{2^{m-1}} \frac{\theta}{2} (\|2^m x\|^p) \\
&= \frac{2^p \theta}{2^n} (\|2^n x\|^p) + \frac{2^p \theta}{2^{n+1}} (\|2^{n+1} x\|^p) + \dots + \frac{2^p \theta}{2^{m-1}} (\|2^{m-1} x\|^p) \\
&= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \left( \frac{2^{pn}}{2^n} + \frac{2^{p(n+1)}}{2^{n+1}} + \dots + \frac{2^{p(m-1)}}{2^{m-1}} \right) \\
&= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \sum_{k=n}^{m-1} \frac{2^{kp}}{2^k}.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| \leq \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \sum_{k=n}^{m-1} \frac{2^{kp}}{2^k}.$$

Berdasarkan definisi 2.6.1. barisan  $\{x_n\}$  dikatakan barisan Cauchy jika barisan  $\{x_n\}$  memenuhi  $|x_m - x_n| < \varepsilon$  untuk setiap  $\varepsilon > 0$ . Jika  $n \rightarrow \infty$  dan karena  $0 \leq p < 1$ ,

maka  $\frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \sum_{k=n}^{m-1} \frac{2^{kp}}{2^k} = 0$ . Oleh karena itu,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right\| = 0$ , sehingga dapat dikatakan bahwa  $\left\{ \frac{f(2^n x)}{2^n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  merupakan barisan

Cauchy untuk setiap  $x \in E_1$ . Karena  $E_1$  merupakan ruang Banach, dimana setiap barisan Cauchy-nya konvergen, maka terdapat fungsi  $A: E_1 \rightarrow E_2$  yang didefinisikan dengan  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$  untuk setiap  $x \in E_1$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa fungsi  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Pandang bahwa

$$\begin{aligned} & \|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2f\left(\frac{2^n(x+y)}{2}\right)}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\} \right\| \\ &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \left\{ 2f\left(\frac{2^n(x+y)}{2}\right) - f(2^n x) - f(2^n y) \right\} \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \left\| \left\{ 2f\left(\frac{2^n(x+y)}{2}\right) - f(2^n x) - f(2^n y) \right\} \right\|. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan (3.2), maka didapatkan

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta(\|x\|^p + \|y\|^p)}{2^n}$$

$$= 0.$$

Jadi

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \leq 0.$$

Berdasarkan sifat pertama pada ruang bernorma dan

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| \leq 0,$$

maka didapatkan

$$\|A(x + y) - A(x) - A(y)\| = 0.$$

Berdasarkan sifat kedua pada ruang bernorma, maka didapatkan

$$A(x + y) - A(x) - A(y) = 0$$

$$A(x + y) = A(x) + A(y).$$

Dari definisi 2.1.1.1, maka dapat ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa A memenuhi

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p, \forall x \in E_1.$$

$$\|f(x) - A(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^0} f(2^0 x) - \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right\|$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{kp}}{2^k}$$

$$= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{(p-1)k}$$

$$= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{(1-p)k}}$$

... Karena  $p < 1$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{(1-p)k}} \right) \\
&= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\frac{1}{2^{(1-p)}}}{1 - \frac{1}{2^{(1-p)}}} \right) \\
&= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\frac{1}{2^{(1-p)}}}{\frac{2^{(1-p)} - 1}{2^{(1-p)}}} \right) \\
&= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2^{(1-p)} - 1} \right) \\
&= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^{(1-p)} - 1 + 1}{2^{(1-p)} - 1} \right) \\
&= \frac{2^p \theta}{2} (\|x\|^p) \left( \frac{2^{(1-p)}}{2^{(1-p)} - 1} \right) \\
&= \frac{2\theta}{2(2^{(1-p)} - 1)} (\|x\|^p) \\
&= \frac{\theta}{\left(\frac{2}{2^p} - 1\right)} (\|x\|^p) \\
&= \frac{\theta}{\left(\frac{2 - 2^p}{2^p}\right)} (\|x\|^p) \\
&= \frac{2^p \theta}{2 - 2^p} (\|x\|^p).
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2^p \theta}{2 - 2^p} (\|x\|^p).$$

Karena  $2^p < 2, \forall p \in [0,1)$ , maka

$$\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} (\|x\|^p).$$

Terbukti  $\|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p, \forall x \in E_1$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A$  tunggal. Andaikan  $A$  tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain  $B: E_1 \rightarrow E_2$  sedemikian hingga

$$\|f(x) - B(x)\| \leq \|f(x) - A(x)\| \leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p$$

$\forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned} \|A(x) - B(x)\| &= \|A(x) - f(x) + f(x) - B(x)\| \\ &\leq \|A(x) - f(x)\| + \|f(x) - B(x)\| \\ &= \|f(x) - A(x)\| + \|f(x) - B(x)\| \\ &\leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p + \frac{2\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\|A(x) - B(x)\| \leq \frac{4\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p.$$

$$\|A(x) - B(x)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2^n} A(2^n x) - \frac{1}{2^n} B(2^n x) \right\|$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \|A(2^n x) - B(2^n x)\| \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \frac{4\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p \\
&= \frac{4\theta}{2 - 2^p} \|x\|^p \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dimana  $n \in \mathbb{R}$ .

Karena

$$\|A(x) - B(x)\| \leq 0$$

dan berdasarkan sifat pertama pada ruang bernorma, maka

$$A(x) = B(x), \forall x \in E_1.$$

Jadi terbukti bahwa  $A$  tunggal dan pembuktian teorema Rassias di atas telah lengkap, sehingga terbukti bahwa persamaan Jensen tersebut stabil.

### 3.2 Contoh Persamaan Jensen

Seperti yang telah dipaparkan di atas pada definisi 2.1.2.2, bahwa suatu fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  disebut persamaan Jensen, jika persamaan tersebut memenuhi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Berikut adalah contoh dari persamaan Jensen:

1) Misalkan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dengan  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 4x + 4y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Bukti:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 4x + 4y + 2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8x + 2 + 8y + 2}{2} \\
 &= \frac{f(x) + f(y)}{2}
 \end{aligned}$$

dimana  $f(x) = 8x + 2$  dan  $f(y) = 8y + 2$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Berikut adalah bukti kestabilan dari contoh persamaan Jensen tersebut berdasarkan teorema Hyers-Ulam dan Hyers-Ulam-Rassias:

### **Teorema Hyers**

Misalkan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan misalkan  $f(x) = 8x + 2$  dimana  $x \in \mathbb{R}$ , sehingga untuk setiap  $\delta > 0$  dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\left| 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \right| \\
 &= \left| 2\left(8\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2\right) - (8x + 2) - (8y + 2) \right| \\
 &= \left| 2\left(\frac{8x + 8y}{2}\right) + 4 - 8x - 2 - 8y - 2 \right| = |8x + 8y + 4 - 8x - 2 - 8y - 2| \\
 &= |0| = 0 < \delta.
 \end{aligned}$$

Jadi fungsi tersebut memenuhi  $\left| 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \right| < \delta$ .

Misalkan  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} f(2^n x) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  suatu barisan di  $\mathbb{R}$ , akan ditunjukkan bahwa  $\{x_n\}$  merupakan barisan Cauchy.

Untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , pilih  $H > \frac{2}{\varepsilon}$ , maka untuk setiap  $n, m \geq H$  dapat dikatakan bahwa  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$  dan dengan cara yang serupa diperoleh  $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Oleh karena itu, jika  $n, m \geq H$  maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2^n} (8(2^n x) + 2) - \frac{1}{2^m} (8(2^m x) + 2) \right| = \left| 8x + \frac{2}{2^n} - 8x - \frac{2}{2^m} \right| \\
&= \left| \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^m} \right| = \left| \frac{2}{2^n} + \left( -\frac{2}{2^m} \right) \right| \leq \left| \frac{2}{2^n} \right| + \left| -\frac{2}{2^m} \right| = \frac{2}{2^n} + \frac{2}{2^m} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} \\
&\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Jadi dapat dikatakan bahwa  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} f(2^n x) \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$  merupakan barisan Cauchy. Karena  $\mathbb{R}$  termasuk ruang Banach, maka barisan Cauchy tersebut konvergen, sehingga ada limit dari barisan Cauchy tersebut. Oleh karena itu, terdapat suatu fungsi  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $A$  didefinisikan dengan  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x)$  dimana  $x \in \mathbb{R}$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
& |A(x + y) - A(x) - A(y)| \\
&= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(2^n(x + y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\} \right| \\
&= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \{f(2^n(x + y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\} \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{f(2^n(x + y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{(8(2^n(x + y)) + 2) - (8(2^n x) + 2) - (8(2^n y) + 2)\}| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{8(2^n x) + 8(2^n y) + 2 - 8(2^n x) - 2 - 8(2^n y) - 2\}|
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |-2|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 0.$$

Jadi

$$|A(x + y) - A(x) - A(y)| = 0.$$

Berdasarkan sifat ruang metrik, maka didapatkan  $A(x + y) - A(x) - A(y) = 0$ , sehingga  $A(x + y) = A(x) + A(y)$ . Dari definisi 2.1.1.1, maka dapat ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A$  memenuhi  $|f(x) - A(x)| \leq \delta, \forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned} |f(x) - A(x)| &= \left| f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right| \\ &= \left| 8x + 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2^n f(x) \right| \\ &= |8x + 2 - f(x)| \\ &= |8x + 2 - 8x - 2| \\ &= |0| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena  $\forall \delta > 0$ , maka  $|f(x) - A(x)| \leq \delta$ .

Andaikan  $A$  tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain  $B: E_1 \rightarrow E_2$  sedemikian hingga

$$|f(x) - B(x)| \leq \delta$$

$\forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= |A(x) - f(x) + f(x) - B(x)| \\ &\leq |A(x) - f(x)| + |f(x) - B(x)| \\ &= |f(x) - A(x)| + |f(x) - B(x)| \\ &\leq \delta + \delta. \end{aligned}$$

Jadi,

$$|A(x) - B(x)| \leq 2\delta.$$

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2^n} A(2^n x) - \frac{1}{2^n} B(2^n x) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |A(2^n x) - B(2^n x)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2\delta \\ &= 2\delta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dimana  $n \in \mathbb{R}$ .

Karena  $|A(x) - B(x)| \leq 0$  dan berdasarkan sifat pertama pada ruang metrik, maka

$$A(x) - B(x) = 0$$

$$A(x) = B(x), \forall x \in E_1.$$

Jadi terbukti bahwa  $A$  tunggal dan pembuktian teorema Hyers di atas telah lengkap, sehingga terbukti bahwa contoh dari persamaan Jensen tersebut stabil.

**Teorema Rassias**

Misalkan  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $f(x) = 8x + 2$  dimana  $x \in \mathbb{R}$ , sehingga untuk setiap  $\delta > 0$  dapat diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \right| \\ &= \left| 2\left(8\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2\right) - (8x + 2) - (8y + 2) \right| \\ &= \left| 2\left(\frac{8x + 8y}{2}\right) + 4 - 8x - 2 - 8y - 2 \right| = |8x + 8y + 4 - 8x - 2 - 8y - 2| \\ &= |0| = 0. \end{aligned}$$

Untuk  $\theta > 0$  dan  $p \in [0,1)$ , maka  $\theta(|x|^p + |y|^p) > 0$ . Jadi fungsi tersebut memenuhi  $\left| 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(x) - f(y) \right| < \theta(|x|^p + |y|^p)$ .

Misalkan  $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2^n} f(2^n x) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  suatu barisan di  $\mathbb{R}$ , akan ditunjukkan bahwa  $\{x_n\}$  merupakan barisan Cauchy.

Untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , pilih  $H > \frac{2}{\varepsilon}$ , maka untuk setiap  $n, m \geq H$  dapat dikatakan bahwa  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{H} < \frac{\varepsilon}{2}$  dan dengan cara yang serupa diperoleh  $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Oleh karena itu, jika  $n, m \geq H$  maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^m} f(2^m x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2^n} (8(2^n x) + 2) - \frac{1}{2^m} (8(2^m x) + 2) \right| = \left| 8x + \frac{2}{2^n} - 8x - \frac{2}{2^m} \right| \\ &= \left| \frac{2}{2^n} - \frac{2}{2^m} \right| = \left| \frac{2}{2^n} + \left(-\frac{2}{2^m}\right) \right| \leq \left| \frac{2}{2^n} \right| + \left| -\frac{2}{2^m} \right| = \frac{2}{2^n} + \frac{2}{2^m} = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{m-1}} \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jadi dapat dikatakan bahwa  $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}f(2^n x) \mid n \in \mathbb{N}\right\} \in \mathbb{R}$  merupakan barisan Cauchy. Karena  $\mathbb{R}$  termasuk ruang Banach, maka barisan Cauchy tersebut konvergen, sehingga ada limit dari barisan Cauchy tersebut. Oleh karena itu, terdapat suatu fungsi  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $A$  didefinisikan dengan  $A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}f(2^n x)$  dimana  $x \in \mathbb{R}$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
 & |A(x + y) - A(x) - A(y)| \\
 &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(2^n(x + y))}{2^n} - \frac{f(2^n x)}{2^n} - \frac{f(2^n y)}{2^n} \right\} \right| \\
 &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \{f(2^n(x + y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\} \right| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{f(2^n(x + y)) - f(2^n x) - f(2^n y)\}| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{(8(2^n(x + y)) + 2) - (8(2^n x) + 2) - (8(2^n y) + 2)\}| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |\{8(2^n x) + 8(2^n y) + 2 - 8(2^n x) - 2 - 8(2^n y) - 2\}| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |-2| \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Jadi

$$|A(x + y) - A(x) - A(y)| = 0.$$

Berdasarkan sifat ruang metrik, maka didapatkan  $A(x + y) - A(x) - A(y) = 0$ , sehingga  $A(x + y) = A(x) - A(y)$ . Dari definisi 2.1.1.1, maka dapat ditunjukkan bahwa  $A: E_1 \rightarrow E_2$  merupakan fungsi *additive*.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $A$  memenuhi  $|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p, \forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned} |f(x) - A(x)| &= \left| f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} f(2^n x) \right| \\ &= \left| 8x + 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2^n f(x) \right| \\ &= |8x + 2 - f(x)| \\ &= |8x + 2 - 8x - 2| \\ &= |0| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena  $\theta > 0$  dan  $p \in [0,1)$ ,  $\frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p > 0$ , maka  $|f(x) - A(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p$ .

Andaikan  $A$  tidak tunggal, maka akan ada fungsi *additive* yang lain  $B: E_1 \rightarrow E_2$  sedemikian hingga

$$|f(x) - B(x)| \leq \frac{2\theta}{2-2^p} |x|^p$$

$\forall x \in E_1$ .

$$\begin{aligned} |A(x) - B(x)| &= |A(x) - f(x) + f(x) - B(x)| \\ &\leq |A(x) - f(x)| + |f(x) - B(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |f(x) - A(x)| + |f(x) - B(x)| \\
&\leq \frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p + \frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p.
\end{aligned}$$

Jadi,

$$|A(x) - B(x)| \leq 2 \left( \frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p \right).$$

$$\begin{aligned}
|A(x) - B(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{2^n} A(2^n x) - \frac{1}{2^n} B(2^n x) \right| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} |A(2^n x) - B(2^n x)| \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} 2 \left( \frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p \right) \\
&= 2 \left( \frac{2\theta}{2 - 2^p} |x|^p \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

dimana  $n \in \mathbb{R}$ .

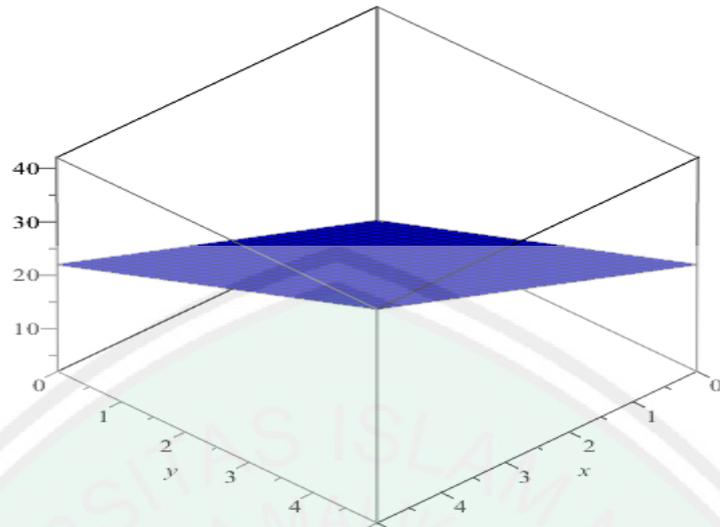
Karena  $|A(x) - B(x)| \leq 0$  dan berdasarkan sifat pertama pada ruang metrik, maka

$$A(x) - B(x) = 0$$

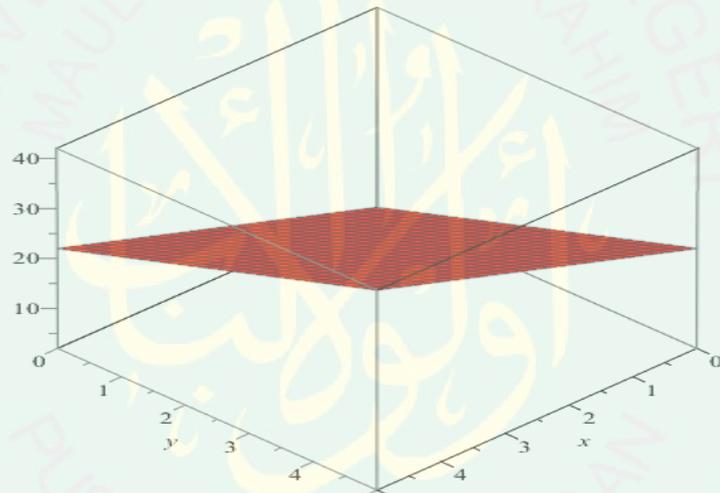
$$A(x) = B(x), \forall x \in E_1.$$

Jadi terbukti bahwa  $A$  tunggal dan pembuktian teorema Rassias di atas telah lengkap, sehingga terbukti bahwa contoh dari persamaan Jensen tersebut stabil.

Untuk mengilustrasikan kestabilan persamaan fungsional Jensen dengan persamaan fungsi  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 4x + 4y + 2$ ,  $f(x) = 8x + 2$ , dan  $f(y) = 8y + 2$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , dapat dilihat pada gambar di bawah ini. Dengan bantuan aplikasi maple, contoh persamaan Jensen tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:

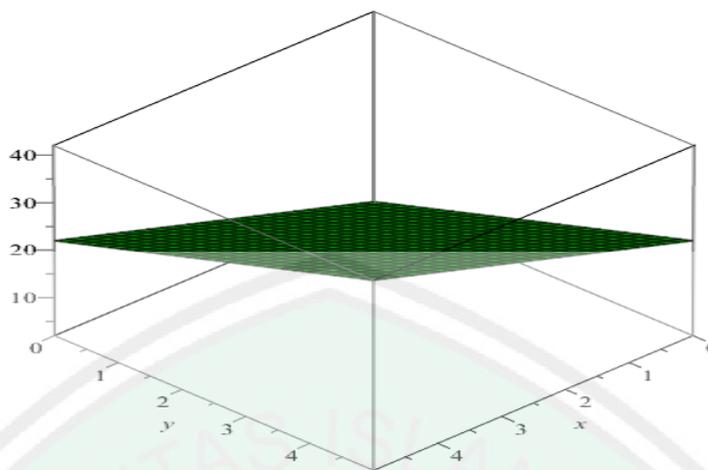


Gambar 3.1 Grafik dari  $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$



Gambar 3.2 Grafik dari  $\frac{f(x)+f(y)}{2}$

Jika persamaan  $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$  dan persamaan  $\frac{f(x)+f(y)}{2}$  digambar secara bersamaan, maka diperoleh gambar sebagai berikut:



**Gambar 3.3** Gabungan dari grafik persamaan  $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$  dan  $\frac{f(x)+f(y)}{2}$

Berdasarkan ketiga gambar di atas, dapat diketahui secara jelas bahwa persamaan fungsional Jensen dengan persamaan Jensen  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 8x + 2$ ,  $f(x) = 8x + 2$ , dan  $f(y) = 8y + 2, \forall x \in \mathbb{R}$  adalah stabil. Hal ini dapat diketahui melalui jarak antara  $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$  dengan  $\frac{f(x)+f(y)}{2}$  yang sangat kecil.

### 3.3 Analisis Kestabilan Persamaan Fungsional dalam Kajian Islam

Suatu persamaan fungsional dapat diaplikasikan secara maksimal jika persamaan fungsional tersebut stabil. Jika persamaan fungsional tersebut tidak stabil, maka belum dapat dipastikan dapat digunakan atau tidaknya persamaan fungsional tersebut. Berdasarkan pembahasan di atas, dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias dapat diketahui bahwa persamaan fungsional Jensen bersifat stabil. Oleh karena itu, persamaan fungsional Jensen ini dapat diaplikasikan secara maksimal.

Hal ini sesuai dengan tafsir QS. Luqman ayat 10 yang dijelaskan oleh Ar-Rifa'i (2000:786) dalam suatu ringkasan tafsir Ibnu Katsir yang menyatakan bahwa Allah menciptakan gunung-gunung di atas bumi sebagai pasak, agar bumi tidak

menggoyangkan penghuninya. Berdasarkan tafsir QS. Luqman ayat 10 tersebut dapat diketahui bahwa gunung berperan untuk menstabilkan bumi, agar bumi tidak mengalami guncangan-guncangan.

Menurut Al-Qurthubi (2008:140-141) dalam bukunya yang berjudul Tafsir Al-Qurthubi, dalam QS. Luqman ayat 10 tersebut yang berbunyi '*wa alqaa fil ardhi rawaasiya*' yang artinya '*dan Dia meletakkan gunung-gunung (di permukaan bumi)*' maksudnya adalah gunung-gunung yang tegar. Adapun '*an tamiida*' yang artinya '*supaya bumi itu tidak menggoyangkan*' berada pada posisi nashab. Maksudnya adalah tidak ingin bumi menggoyangkan. Para ulama Kufah memperkirakan maknanya supaya bumi tidak menggoyangkan.

Adapun menurut Bahreisy (1994:254) dalam bukunya yang berjudul Terjemah Singkat Tafsir Ibnu Katsier, dalam QS. Luqman ayat 10 tersebut Allah menerangkan kekuasaan-Nya yang besar yang telah menciptakan langit-langit tanpa tiang, baik yang terlihat maupun yang tidak terlihat. Allah juga telah meletakkan gunung-gunung di permukaan bumi untuk menahan bumi dari menggoyangkan penghuninya.

Kerak bebatuan bumi terpecah oleh jaring retak yang membentang puluhan kilometer dan yang mengelilingi bumi ini secara keseluruhan dengan kedalaman yang berkisar 65 km sampai 150 km. Hal ini mengakibatkan terpecah-pecahnya bebatuan bumi menjadi sejumlah lempengan bebatuan yang terpisah satu sama lain dengan tingkat perpecahan masing-masing. Lempengan-lempengan kerak bebatuan bumi ini mengapung di atas lapisan elastis bumi yang semi cair dan memiliki tingkat kepadatan dan kelekatan yang tinggi yang disebut "lapis lunak bumi".

Pada lapisan lunak ini, arus panas yang bergerak seperti kumparan yang berputar yang sangat kuat mengaktifkan arus-arus pembawa yang mendorong lempengan-lempengan kerak bebatuan bumi untuk menjauh satu sama lain atau berbenturan satu sama lain dengan tingkat kecepatan (luar biasa) yang membuatnya tidak layak dihuni oleh makhluk hidup apa pun.

Tidak ada yang mampu menenangkan dan menghentikan gerakan-gerakan “liar” lempengan-lempengan kerak bebatuan bumi ini selain terbentuknya rangkaian-rangkaian pegunungan selama berfase-fase hingga mencapai fase final yang ditandai dengan digunakannya kedalaman samudra yang memisahkan antara dua benua yang saling berjauhan secara penuh. Yaitu dengan mendorong salah satu benua pada kedalaman tersebut di bawah benua yang lain, sehingga kedua benua bertabrakan dan menekan bebatuan yang menggumpal di antara keduanya dalam bentuk rangkaian pegunungan besar yang membentangkan pasaknya untuk mengokohkan bebatuan salah satu benua dengan bebatuan yang lain. Pasak pegunungan juga mengokohkan penopang-penopang yang terpancang di bumi, sebagaimana yang terjadi dengan pergeseran ke arah Benua Asia, sehingga kedua benua (India dan Asia) pun bertabrakan dan menghasilkan terbentuknya Pegunungan Himalaya sebagai rangkaian pegunungan yang terbaru di muka bumi sekaligus yang paling tinggi.

Proses di atas merupakan proses pengokohan massa benua-benua di atas permukaan bumi. Sementara mengenai proses pengokohan bumi sebagai planet, sudah diketahui adanya akibat perputaran bumi ini pada porosnya, bentuk bumi berubah dari bulat sempurna menjadi elips (semi bulat). Kawasan di garis khatulistiwa bumi agak cembung (menonjol) sedangkan kawasan di dua kutub agak

datar. Kecembungan garis khatulistiwa ini membuat poros putarannya mengubah arah gerakannya menjadi lambat dan dikenal dengan istilah “gerakan *bidariyyah*”.

Dalam kondisi demikian, poros bumi bergoyang-goyang dan bergerak-gerak dengan gerakan yang berlawanan dengan gerakan bulan dan matahari, juga dengan benda-benda yang bergerak secara konstan dalam takaran dan arah kekuatan yang sama-sama cepat.

Kebuasan gerakan ini diperkecil oleh keberadaan gunung-gunung yang memiliki akar yang menancap di kerak bebatuan bumi (yang bentangan kedalamannya mencapai sepuluh hingga lima belas kali lipat ketinggiannya di atas permukaan bumi). Keberadaan gunung-gunung ini meminimalisir kebuasan goyangan poros putar bumi dan menjadikannya lebih stabil dan lebih teratur dalam proses rotasinya mengelilingi porosnya, juga menjadikan goyangan dan guncangannya lebih rendah (An-Najjar, 2006:210-212).

Dari sini dapat diketahui bahwa kestabilan persamaan fungsional dengan kestabilan berdasarkan kajian Islam yang dalam hal ini mengutip salah satu ayat dalam al-Quran mempunyai kesamaan. Suatu persamaan fungsional dapat diaplikasikan secara maksimal jika persamaan fungsional tersebut bersifat stabil. Begitu juga dengan bumi yang dapat dijadikan sebagai tempat tinggal yang aman dan nyaman jika bumi tidak mengalami guncangan-guncangan (stabil). Maknanya, baik persamaan fungsional maupun bumi sama-sama dapat digunakan secara maksimal jika keduanya stabil. Keterkaitan antara kestabilan persamaan fungsional dengan kestabilan dalam kajian Islam (al-Quran) ini semakin memperkuat bahwa al-Quran merupakan sumber pedoman kehidupan yang abadi. Segala sesuatu yang ada di jagad raya ini telah dijelaskan dalam kitab suci al-Quran.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat diambil kesimpulan mengenai kestabilan persamaan fungsional Jensen sebagai berikut:

1. Dengan menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias telah dibuktikan bahwa persamaan fungsional Jensen stabil.
2. Adapun contoh persamaan fungsi yang memenuhi persamaan fungsional Jensen adalah

$$\begin{aligned}f(x) &= 8x + 2, \\f(y) &= 8y + 2, \\f(x + y) &= 4x + 4y + 2,\end{aligned}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ . Berdasarkan grafik dari contoh persamaan fungsi tersebut serta setelah dianalisis menggunakan konsep kestabilan Hyers-Ulam-Rassias dapat diketahui bahwa contoh persamaan fungsi tersebut juga stabil.

3. Jika ditinjau berdasarkan kajian Islam, inti dari kestabilan ciptaan Allah Swt. telah menginspirasi inti dari kestabilan persamaan fungsional. Kestabilan ciptaan Allah Swt. yang dimaksud di sini adalah penciptaan gunung yang berfungsi untuk menstabilkan bumi yang tercipta dalam keadaan berguncang-guncang. Bumi yang awal mulanya mengalami guncangan-guncangan, setelah diciptakan gunung, bumi pun menjadi stabil sehingga dapat dijadikan sebagai tempat tinggal yang aman seperti sekarang ini. Sama halnya dengan persamaan fungsional, ketika persamaan fungsional tersebut stabil, maka persamaan

fungsional tersebut dapat diaplikasikan untuk menggambarkan suatu proses fisik. Jadi, baik bumi maupun persamaan fungsional sama-sama dapat digunakan dengan baik ketika keduanya stabil.

#### 4.2 Saran

Dalam penelitian ini, penulis hanya meneliti kestabilan persamaan fungsional Jensen saja. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya diharapkan pembaca dapat meneliti tentang aplikasi dari persamaan fungsional Jensen ataupun meneliti kestabilan persamaan fungsional lain yang belum diketahui kestabilannya.



## DAFTAR PUSTAKA

- Al-Mosadder, R.S. 2012. *On Stability of Some Types of Functional Equations*. Tesis tidak dipublikasikan. Gaza: Islamic University of Gaza.
- Al-Qurthubi, S.I. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- An-Najjar, Z. 2006. *Pembuktian Sains dalam Sunah*. Jakarta: Amzah.
- Ar-Rifa'i, N. 2000. *Kemudahan dari Allah Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid 3*. Jakarta: Gema Insani.
- Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Elementary Linear Algebra Applications Version, Jilid I*. Terjemahan R. Indriasari dan I. Harmein. Jakarta: Penerbit Erlangga.
- Bahreisy, S. 1994. *Terjemah Singkat Tafsir Ibnu Katsir*. Kuala Lumpur: Victory Agencie.
- Bartle, R.G. dan Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Coleman, R. 2012. *Calculus on Normed Vector Spaces*. London: Springer Science+Business Media New York.
- Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam UGM.
- Goffman, C. dan Pedrick, G. 1965. *First Course in Functional Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc.
- Jung, S.M. 2011. *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis*. London: Springer Science+Business Media.
- Muslikh, M. 2012. *Analisis Real*. Malang: Universitas Brawijaya Press.
- Sahoo, P.K. dan Kannappan, P. 2011. *Introduction to Functional Equations*. New York: CRC Press.
- Sunarto, A. 2007. *Himpunan Hadits Qudsi*. Rembang: Setia Kawan.

## LAMPIRAN-LAMPIRAN

### LAMPIRAN 1

#### Program Maple Grafik Contoh Persamaan Jensen

##### 1. Gambar 3.1

```
> with(plots) :  
f( $\frac{x+y}{2}$ ) := 4·x + 4·y + 2 :  
> plot3d([f( $\frac{x+y}{2}$ )], x=0..5, y=0..5);
```

##### 2. Gambar 3.2

```
> restart;  
with(plots) :  
f(x) := 8·x + 2 : f(y) := 8·y + 2 :  
> plot3d([( $\frac{f(x)+f(y)}{2}$ )], x=0..5, y=0..5);
```

##### 3. Gambar 3.3

```
> restart;  
with(plots) :  
f( $\frac{x+y}{2}$ ) := 4·x + 4·y + 2 : f(x) := 8·x + 2 : f(y) := 8·y + 2 :  
> plot3d([f( $\frac{x+y}{2}$ ), ( $\frac{f(x)+f(y)}{2}$ )], x=0..5, y=0..5);
```