# KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG *MORREY* YANG DIMODIFIKASI

**SKRIPSI**

**OLEH**
**ZIRA GEMILIA PUTRI**
**NIM. 18610041**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2024**

**KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG *MORREY* YANG DIMODIFIKASI**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada**
**Fakultas Sains dan Teknologi**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh**
**ZIRA GEMILIA PUTRI**
**NIM. 18610041**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2024**

# KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG *MORREY* YANG DIMODIFIKASI

**SKRIPSI**

**Oleh**
**ZIRA GEMILIA PUTRI**
**NIM. 18610041**

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 25 Juni 2024

| Dosen Pembimbing I | Dosen Pembimbing II |
| --- | --- |
| Dr. Hairur Rahman, M.Si. | Abdul Aziz, M.Si. |
| NIP. 19800429 200604 1 003 | NIP. 19760318 200604 1 002 |

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

# KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL DI RUANG *MORREY* YANG DIMODIFIKASI

**SKRIPSI**

**Oleh**
**ZIRA GEMILIA PUTRI**
**NIM. 18610041**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 28 Juni 2024

| | | |
|---|---|---|
| Ketua Penguji | : Dr. Elly Susanti, M.Sc. | ................................ |
| Anggota Penguji 1 | : Dian Maharani, S.Pd., M.Si. | ................................ |
| Anggota Penguji 2 | : Dr. Hairur Rahman, M.Si. | ................................ |
| Anggota Penguji 3 | : Abdul Aziz, M.Si. | ................................ |

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

## PERNYATAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan dibawah ini

| | |
|---|---|
| Nama | : Zira Gemilia Putri |
| NIM | : 18610041 |
| Program Studi | : Matematika |
| Fakultas | : Sains dan Teknologi |
| Judul Skrips | : Keterbatasan Operator Integral Fraksional di Ruang *Morrey* yang Dimodifikasi |

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 Juni 2024

Zira Gemilia Putri
NIM. 18610041

# HALAMAN MOTO

إِنَّ مَعِيَ رَبِّي سَيَهْدِينِ

"*Indeed, my lord is with me and he will guide me through*"
(QS. Asy-Syu'ara: 62)

"Tidak ada yang lebih baik daripada ketetapan Allah."
-Ustadz Muhammad Nuzul Dzikri

## HALAMAN PERSEMBAHAN

*Bismillahirrahmanirrahim*

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Seluruh keluarga penulis, terkhusus kepada kedua orang tua penulis, Bapak Bahruddin dan Ibu Desmi Ekawati yang mempercayai penulis dalam setiap proses demi proses yang penulis lewati serta senantiasa menemani penulis melalui doa yang tidak pernah lelah dipanjatkan di sepertiga malam. Tidak lupa atas besarnya pengorbanan dukungan material yang diberikan keduanya untuk kelancaran penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Serta kepada abang dan kakak penulis, Muhammad Ardhian Syah Harwi dan Zila Gemilia Putri, yang selalu bersedia menjadi pendengar keluh kesah penulis dan tak lupa memberi nasihat agar penulis semangat mengerjakan skripsi. *Last but not least,* kepada diri saya sendiri yang telah berjuang hingga sejauh ini, bertarung dengan pikiran-pikiran negatif dalam diri, dan memilih untuk membersamai Allah di setiap prosesnya, serta percaya atas segala ketetapan-Nya.

## KATA PENGANTAR

*Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Pertama-tama, puji dan syukur diucapkan atas kehadirat Allah *subhanahu wa ta'ala* yang telah melimpahkan segala rahmat serta hidayah-Nya, sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi yang berjudul "Keterbatasan Operator Integral Fraksional di Ruang *Morrey* yang Dimodifikasi" yang merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Kedua, sholawat beriring salam semoga tersampaikan kepada baginda Nabi Muhammad *shalallahu alaihi wassalam* yang telah membimbing manusia dari zaman kebodohan (jahiliyah) menuju zaman kebenaran.

Proses penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan serta masukan dari berbagai pihak. Untuk itu, pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan rasa hormat dan terimakasih sebanyak-banyaknya kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika dan ketua penguji skripsi, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dian Maharani, M.Si., selaku penguji I sekaligus dosen yang telah memberi arahan, bimbingan, serta memberikan semangat kepada penulis dalam proses menyelesaikan skripsi.
5. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah bersedia memberikan banyak ilmu, arahan serta masukan kepada penulis sehingga penulis bisa menyelesaikan skripsi.
6. Abdul Aziz, M.Si., selaku dosen pembimbing II dan dosen wali yang telah memberikan arahan serta bimbingan kepada penulis selama proses pengerjaan skripsi.
7. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

8. Kepada orang tua, Bapak Bahruddin dan Ibu Desmi Ekawati yang tidak putus selalu mengirimkan doa terbaik, serta memberikan semangat dan motivasi kepada penulis.
9. Seluruh teman-teman mahasiswa dari berbagai angkatan yang telah membantu memberikan informasi, dukungan, doa serta motivasi kepada penulis. Terutama teman-teman dari Angkatan 2018 yang telah membersamai setiap proses pengerjaan skripsi hingga penulis bisa menyelesaikan skripsi.
10. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah berkontribusi membantu penulis dalam penyusunan skripsi, baik dukungan moril maupun materil.

Semoga Allah *subhanahu wa ta'ala* memberikan rahmat serta karunia-Nya kepada kita semua. Dalam proses penyusunan skripsi ini, Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna sehingga mungkin terdapat banyak kesalahan. Tetapi, penulis berharap, terlepas dari ketidaksempurnaannya, skripsi ini bisa membawa manfaat khususnya bagi penulis dan pembaca, *aamiin ya rabbal alamin*. *Wassalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.*

Malang, 25 Juni 2024

Penulis

## DAFTAR ISI

**HALAMAN JUDUL** .......... **i**
**HALAMAN PENGAJUAN** .......... **ii**
**HALAMAN PERSETUJUAN** .......... **iii**
**HALAMAN PENGESAHAN** .......... **iv**
**PERNYATAN KEASLIAN TULISAN** .......... **v**
**HALAMAN MOTO** .......... **vi**
**HALAMAN PERSEMBAHAN** .......... **vii**
**KATA PENGANTAR** .......... **viii**
**DAFTAR ISI** .......... **x**
**DAFTAR GAMBAR** .......... **xii**
**DAFTAR SIMBOL** .......... **xiii**
**ABSTRAK** .......... **xiv**
**ABSTRACT** .......... **xv**
**مستخلص البحث** .......... **xvi**
**BAB I PENDAHULUAN** .......... **1**
1.1 Latar Belakang .......... 1
1.2 Rumusan Masalah .......... 4
1.3 Tujuan Penelitian .......... 4
1.4 Manfaat Penelitian .......... 4
1.5 Batasan Masalah .......... 4
**BAB II KAJIAN TEORI** .......... **5**
2.1 Teori Pendukung .......... 5
2.1.1 Ruang Vektor .......... 5
2.1.2 Ruang Bernorma .......... 7
2.1.3 Ruang Metrik .......... 9
2.1.4 Ukuran .......... 12
2.1.5 Fungsi Terukur .......... 15
2.1.6 Ruang *Lebesgue* .......... 15
2.1.7 Ruang *Morrey* .......... 16
2.1.8 Operator Linear .......... 17
2.1.9 Operator Integral .......... 18
2.1.10 Keterbatasan Operator .......... 18
2.2 Makna Keterbatasan Manusia .......... 18
2.3 Penaksiran Operator Integral Fraksional .......... 19
**BAB III METODE PENELITIAN** .......... **23**
3.1 Jenis Penelitian .......... 23
3.2 Pra Penelitian .......... 23
3.3 Tahapan Penelitian .......... 23
**BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN** .......... **25**
4.1 Keterbatasan Operator Integral Fraksional di Ruang *Morrey* yang Dimodifikasi .......... 25
4.2 Kesadaran akan Keterbatasan Ilmu Pengetahuan .......... 39
**BAB V PENUTUP** .......... **44**
5.1 Kesimpulan .......... 44
5.2 Saran .......... 44

**DAFTAR PUSTAKA** ........................................................................................ **45**
**RIWAYAT HIDUP** ........................................................................................ **48**

# DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Ilustrasi Bola Buka dan Bola Tutup ............................................ 10
Gambar 2.2 Ilustrasi Dekomposisi Diadik ...................................................... 20
Gambar 4.1 Skema posisi dari $y, Bk, Bk*$, dan $Bk$ ........................................ 31

## DAFTAR SIMBOL

| | |
|---|---|
| $\emptyset$ | : Himpunan kosong |
| $\in$ | : Anggota dari |
| $\cup$ | : Gabungan |
| $A \subseteq B$ | : Setiap elemen $A$ juga merupakan elemen $B$ |
| $\mathbb{R}$ | : Himpunan semua bilangan real |
| $\mathbb{R}^n$ | : Himpunan semua bilangan real berdimensi $n$ |
| $\overline{\mathbb{R}}$ | : Himpunan semua bilangan real digabung $\{-\infty, \infty\}$ |
| $I_\alpha$ | : Operator integral fraksional |
| $L^p(\mathbb{R}^n)$ | : Ruang *Lebesgue* pada himpunan bilangan real dimensi-$n$ |
| $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ | : Ruang *Morrey* pada himpunan bilangan real dimensi-$n$ |
| $L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ | : Ruang *Morrey* yang dimodifikasi pada himpunan bilangan real dimensi-$n$ |
| $B(x, R)$ | : Bola buka dengan pusat $x$ dan jari-jari $R$ |
| $\mu$ | : Ukuran |
| $\chi$ | : Fungsi karakteristik |
| $\|\cdot\|$ | : Norm |

# ABSTRAK

Putri, Zira Gemilia. 2024. **Keterbatasan Operator Integral Fraksional di Ruang *Morrey* yang Dimodifikasi**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Abdul Aziz, M.Si.

**Kata kunci:** Operator integral fraksional, Operator maksimal Hardy-Littlewood, Ruang *Morrey* yang dimodifikasi.

Keterbatasan operator integral fraksional pertama kalinya dibuktikan pada ruang *Lebesgue* pada tahun 1930 oleh Hardy-Littlewood-Sobolev. Salah satu studi lanjutan mengenai keterbatasan dari operator ini diteliti oleh Muhammad Idris, dkk pada tahun 2016 yang merupakan rujukan utama telah membahas tentang keterbatasan dari perluasan operator ini di ruang *Morrey*. Selanjutnya, dalam penelitian ini akan dibuktikan teorema yang merupakan gabungan dari hasil penelitian Adams, Chiarenza-Frasca mengenai keterbatasan operator integral fraksional di ruang *Morrey* yang dimodifikasi yang termuat pada sumber rujukan utama. Adapun dalam uraian pembuktiannya untuk membedakannya dengan pembuktian yang dilakukan oleh Chiarenza-Frasca, digunakan fakta ukuran *Lebesgue* pada proses penaksiran operatornya. Selain itu, dalam penelitian ini juga menggunakan dekomposisi diadik, ketaksamaan Holder dan operator maksimal Hardy-Littlewood beserta keterbatasannya di ruang *Morrey*. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa operator integral fraksional $I_\alpha$ merupakan operator yang terbatas di ruang *Morrey* yang dimodifikasi dari $L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$. Kedepannya operator ini dapat diteliti lebih lanjut pada ruang lain selain ruang *Morrey* atau mengenai bentuk perluasan dari operator ini dan keterbatasannya di ruang terkait.

## ABSTRACT

Putri, Zira Gemilia. 2024. **The Boundedness of Fractional Integral Operator in Modified Morrey Space.** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Abdul Aziz, M.Si.

**Keywords:** Integral fractional operator, Hardy-Littlewood maximal operator, Modified Morrey Space.

The boundedness of fractional integral operator was first proved on Lebesgue space in 1930 by Hardy-Littlewood-Sobolev. One of the advanced studies on the boundedness of this operator studied by Muhammad Idris, et al in 2016 which is the main reference has discussed the boundedness of the extension of this operator in Morrey space. Furthermore, this study will prove the theorem which is a combination of the research results of Adams, Chiarenza-Frasca regarding the boundedness of fractional integral operators in modified Morrey spaces contained in the main reference source. As for the description of the proof to distinguish it from the proof carried out by Chiarenza-Frasca, the fact of Lebesgue measure is used in the process of estimating the operator. In addition, this study also uses dyadic decomposition, Holder's inequality and the Hardy-Littlewood maximal operator and its boundedness in Morrey space. The results show that the fractional integral operator $I_\alpha$ is a finite operator in Morrey space modified from $L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ to $L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$. In the future, this operator can be further investigated in other spaces besides Morrey space or about the extension form of this operator and its boundedness in related spaces.

# مستخلص البحث

فتريو، زيرا غيمليا . ٢٠٢٤. **قيود المشغل الكسري التكامل في فضاء *Morrey* المعدل**. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: د. خير الرحمن، الماجستير.المشرف الثاني: عبد العزيز، الماجستير.

**الكلمات المفتاحية**: عامل التكامل الكسري ، مشغل هاردي ليتلوود الأقصى ، مساحة موري المعدلة

تم إثبات الحد من العوامل التكاملية الكسرية لأول مرة في فضاء *Lebesgue* في عام ١٩٣٠ بواسطة *Hardy-Littlewood-Sobolev*. تم بحث إحدى الدراسات الإضافية حول قيود هذا المشغل بواسطة محمد إدريس وآخرون في عام ٢٠١٦ وهو المرجع الرئيسي الذي ناقش حدود توسع هذا المشغل في فضاء موري ، ثم في هذه الدراسة سيتم إثبات نظرية وهي مزيج من نتائج بحث *Adams* و *Chiarenza-Frasca* فيما يتعلق بحدود عوامل التكامل الكسري في فضاء *Morrey* المعدل الموجود في المصدر المرجعي الرئيسي. ثم ,في هذه الدراسة ، تم إثبات النظرية التي هي مزيج من نتائج أبحاث *Adams* و *Chiarenza-Frasca* فيما يتعلق بقيود عوامل التكامل الكسري في مساحة *Morrey* المعدلة الموجودة في المصدر المرجعي الرئيسي. أما بالنسبة لوصف الدليل لتمييزه عن الدليل الذي قام به *Chiarenza-Frasca* ، تم استخدام حقيقة حجم *Lebesgue* في عملية تقييم المشغل. بالإضافة إلى ذلك ، تستخدم هذه الدراسة أيضا تحلل الحامل ، وعدم المساواة في مشغل *Hardy-Littlewood* الأقصى وحدوده في مساحة *Morrey*.أظهرت نتائج هذه الدراسة أن عامل التكامل الجزئي $I_\alpha$ هو عامل محدود في فضاء موري تم تعديله من $L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ إلى $L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$. في المستقبل ، يمكن إجراء مزيد من البحث عن هذا المشغل في غرف أخرى إلى جانب مساحة موري أو فيما يتعلق بشكل التوسع لهذا المشغل وقيوده في الغرف الذي له صلة.

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Analisis fungsional adalah salah satu cabang dari bidang analisis yang membahas mengenai operator. Suatu pemetaan/fungsi pada dua ruang bernorma atas lapangan yang sama disebut operator (Ulfa dkk., 2017). Suatu pemetaan linear dikatakan sebagai operator linear jika pemetaan antara ruang vektor mempertahankan operasi penjumlahan dan perkalian skalar. Salah satu contoh operator linear yang pernah diteliti sebelumnya adalah operator integral fraksional (Kinnunen dkk., 2021).

Adapun operator linear memiliki penerapan yang penting dalam studi kalkulus integral yakni pada kasus operator integral fraksional. Operator ini diperkenalkan oleh Marcel Riesz pada tahun 1886, oleh karena itu dalam beberapa sumber, beberapa menyebutkan operator ini sebagai operator *Riesz.* Operator ini terlibat dalam penyelesaian solusi dari persamaan diferensial parsial (PDP) yakni persamaan *Laplace.* Untuk $0 < \alpha < n$, dan $x \in \mathbb{R}^n$, operator integral fraksional $(I_\alpha)$ didefinisikan sebagai berikut (Kinnunen dkk., 2021)

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy.$$

Salah satu studi mengenai operator integral ialah berkaitan dengan keterbatasan dari operator tersebut. Keterbatasan operator integral fraksional pertama kalinya dibuktikan pada tahun 1930 oleh dua matematikawan asal Inggris yakni Hardy G.H dan Littlewood J.E. dan seorang matematikawan asal Rusia yang bernama Sobolev. Pada proses pembuktiannya, mereka memanfaatkan operator maksimal yang disebut dengan ketaksamaan Hardy−Littlewood dan fakta keterbatasannya di ruang yang terkait. Ketiganya membuktikan keterbatasan operator integral fraksional tersebut pada salah satu ruang homogen yaitu dari ruang *Lebesgue* $L^p(\mathbb{R}^n)$ ke ruang $L^q(\mathbb{R}^n)$ untuk $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, dan $1 < p < q < \infty$, dengan $0 < \alpha < n$. Hasil yang didapatkan oleh ketiga matematikawan tersebut dinamakan dengan ketaksamaan Hardy−Littlewood−Sobolev (G. Gunawan & Gunawan, 2006).

Pada tahun 1938, seorang matematikawan asal Inggris yang bernama C. B Morrey memperkenalkan suatu ruang yang merupakan perluasan dari ruang *Lebesgue* yang beranggotakan himpunan semua fungsi yang terintegralkan secara lokal di $\mathbb{R}^n$ yang dinamakan dengan ruang *Morrey*. Dengan demikian, penulis memilih untuk menggunakan ruang *Morrey* yang dimodifikasi yang didefinisikan sebagai berikut untuk $f \in L^{p_1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, dan $1 \le p_1 < q_1$

$$\|f\|_{p_1,q_1(\mathbb{R}^n)} \coloneqq \sup_{R>0, x\in\mathbb{R}^n} |B(x,R)|^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}} \left( \int_B |f(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty,$$

dengan $B(x, R)$ yang merupakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di $x$ dan berjari-jari $R > 0$, yaitu $B = B(x, R) := \{y \in \mathbb{R}^n: |x - y| < R\}$ (Idris et al., 2016).

Di ruang *Morrey*, operator integral fraksional telah dibuktikan keterbatasannya oleh Spanne dalam (Peetre, 1969) untuk $1 < p_1 < q_1 < \frac{n}{a}, \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1} - \frac{a}{n}$ dan $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{a}{n}$. Sedangkan, pada penelitian kali ini akan membahas keterbatasan operator integral fraksional di ruang *Morrey* yang berbeda dari sebelumnya, yakni ruang *Morrey* yang dimodifikasi. Adapun Jurnal yang merupakan rujukan utama dalam penelitian ini adalah (Idris et al., 2016) yang memuat suatu teorema yang belum pernah dibuktikan sebelumnya. Teorema tersebut merupakan gabungan dari hasil penelitian (Adams, 1975) dan (Chiarenza & Frasca, 1987) yang selanjutnya akan dibuktikan pada penelitian kali ini. Adapun dalam uraian pembuktiannya untuk membedakannya dengan pembuktian yang dilakukan oleh Chiarenza-Frasca, digunakan fakta ukuran *Lebesgue* pada proses penaksiran operatornya.

Layaknya operator, manusia juga mempunyai banyak keterbatasan. Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam QS. Al-Isra’ ayat 85 yang berbunyi:

وَيَسْـَٔلُونَكَ عَنِ ٱلرُّوحِ ۖ قُلِ ٱلرُّوحُ مِنْ أَمْرِ رَبِّى وَمَآ أُوتِيتُم مِّنَ ٱلْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا

*Artinya: “Dan mereka bertanya kepadamu (Muhammad) tentang roh. Katakanlah, “Roh itu termasuk urusan Tuhanku, sedangkan kamu diberi pengetahuan hanya sedikit.”* (Awaludin, 2012)

Ayat di atas bermaksud memberitahukan bahwa pengetahuan tentang roh merupakan urusan dan perkara yang besar yang disembunyikan oleh Allah *subhana wa taala* dan tidak dijelaskan secara detail agar manusia menyadari akan kelemahannya selaku seorang hamba. Kelemahan akal seorang makhluk menunjukkan bahwa yang mengetahuinya hanyalah Sang Pencipta (Rosyadi & Faturrahman, 2009). Jadi, tiada seorang pun yang mengetahui sesuatu dari pengetahuan-Nya melainkan bagi apa yang dikehendaki oleh-Nya. Oleh karena itu, berlandaskan pemaparan di atas, peneliti ingin melakukan penelitian mengenai operator integral fraksional dan keterbatasannya di ruang yang belum pernah dibahas pada penelitian-penelitian sebelumnya, yakni ruang *Morrey* yang dimodifikasi.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas, maka yang menjadi rumusan masalah pada penelitian ini adalah bagaimana keterbatasan operator integral fraksional $I_\alpha$ di ruang *Morrey* yang dimodifikasi dari $L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian yang bisa diambil berdasarkan rumusan masalah yang telah disebutkan sebelumnya adalah untuk mengetahui keterbatasan operator integral fraksional $I_\alpha$ di ruang *Morrey* yang dimodifikasi dari $L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Diharapkan penelitian ini bisa memberikan informasi terkait keterbatasan operator integral fraksional $I_\alpha$ di ruang *Morrey* yang dimodifikasi dari $L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$.

## 1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan dalam penelitian ini hanya membahas mengenai operator integral fraksional dan keterbatasannya pada ruang *Morrey* yang dimodifikasi atas $\mathbb{R}^n$.

# BAB II

# KAJIAN TEORI

## 2.1 Teori Pendukung

Pada bagian ini akan diberikan teori-teori pendukung yang meliputi beberapa definisi, lemma mapun teorema yang terkait dengan pembahasan, yakni mengenai ruang bernorma, ruang metrik, ruang *Lebesgue,* ruang *Morrey,* dan Operator.

### 2.1.1 Ruang Vektor

**Definisi 2.1 Lapangan (*field*)** (Gehret, 2019)

Suatu himpunan $F$ yang dilengkapi dengan dua operasi yakni $+$ dan $\cdot$ (masing-masing disebut penjumlahan (skalar) dan perkalian (skalar) serta dua elemen spesial 0 dan 1, sedemikian sehingga untuk $\forall a, b, c \in F$ :

a. $a + b = b + a$ dan $a \cdot b = b \cdot a$ (komutatif terhadap penjumlahan dan perkalian)
b. $(a + b) + c = a + (b + c)$ dan $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asosiatif)
c. $0 + a = a$ dan $1 \cdot a = a$ (penjumlahan dan perkalian identitas)
d. Terdapat elemen $-a \in F$ sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$ (invers penjumlahan) dan jika $b \neq 0$, maka terdapat elemen $b^{-1} \in F$ sedemikian sehingga $b \cdot b^{-1} = 1$ (invers perkalian)
e. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributif)

**Definisi 2.2 Ruang Vektor** (Gehret, 2019)

Ruang vektor atas lapangan $F$ merupakan himpunan $F$ dengan dua operasi:

a. (penjumlahan vektor) untuk $\forall x, y \in V$, terdapat $x + y \in V$

b. (perkalian skalar) untuk $\forall a \in F, x \in V$, terdapat $a \cdot x \in V$

Sedemikian sehingga aksioma berikut berlaku:

1) $x + y = y + x$, untuk $\forall x, y \in V$ (komutatif terhadap penjumlahan)
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ untuk $\forall x, y, z \in V$ (asosiatif terhadap penjumlahan)
3) Terdapat $0 \in V$, sedemikian sehingga $x + 0 = x$ untuk $\forall x \in V$ (vektor penjumlahan identitas)
4) Untuk $\forall x \in V$, terdapat $y \in V$ sedemikian sehingga $x + y = 0$ (vektor penjumlahan invers)
5) $1 \cdot x = x$ untuk $\forall x \in V$ (dengan 1 merupakan identitas penjumlahan dari $F$)
6) $a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x$ untuk $\forall a, b \in F$ dan $x \in V$ (asosiatif terhadap perkalian skalar)
7) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ untuk $\forall a \in F$ dan $x, y \in V$ (distributif)
8) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ untuk $\forall a, b \in F$ dan $x \in V$ (distributif)

**Contoh 2.1** (Gehret, 2019)

Diberikan $F$, dan bilangan asli $n \geq 1$, asumsikan himpunan

$$F^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in F\},$$

yang merupakan himpunan dari semua $n$-rangkap anggota di $F$. Kita lengkapi $F^n$ dengan operasi vektor penjumlahan untuk semua $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in F^n$,

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \coloneqq (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

dan perkalian skalar untuk semua $a \in F$ dan $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$.

$$a \cdot (x_1, \dots, x_n) \coloneqq (a \cdot x_1, \dots, a \cdot x_n)$$

Oleh karena itu $F^n$ dengan kedua operasi tersebut merupakan ruang vektor pada lapangan $F$ (karena syarat 1-8 terpenuhi). Sebagai contoh, jika $F = \mathbb{R}$ dan $n = 2$ atau $n = 3$, maka $\mathbb{R}^2$ (bidang kartesius) dan $\mathbb{R}^3$ (ruang Euklid 3D).

### 2.1.2 Ruang Bernorma

**Definisi 2.3 Ruang Bernorma** (Robinson, 2020)

Sebuah norm dari suatu ruang vektor $X$ adalah pemetaan $\|\cdot\|: X \to [0, \infty)$ sedemikian sehingga

a. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

b. $\|ax\| = |a|\|x\|$ untuk setiap $x \in X$, dengan $a$ merupakan skalar.

c. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y \in X$ (ketaksamaan segitiga).

Ruang bernorma adalah pasangan $(X, \|\cdot\|)$, dengan $X$ merupakan ruang vektor dan $\|\cdot\|$ adalah norm di $X$.

**Contoh 2.2** (Sumarni, 2022)

Didefinisikan norm dari suatu ruang bernorma berikut

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Buktikan bahwa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ adalah ruang bernorma.

**Penyelesaian**

a. Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}^n$ dan suatu skalar $a \in \mathbb{R}$ .

   Akan akan dibuktikan bahwa $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.

   Pertama-tama akan ditunjukkan $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$.

   Diketahui bahwa $\|x\| = 0$, yang berarti,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \quad = 0$$

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \quad = 0$$

$$x \quad = 0.$$

Selanjutnya, akan dibukti pada sisi sebaliknya, $(x = 0) \Rightarrow (\|x\| = 0)$.

Diketahui bahwa $x = 0$, yang berarti $x = x_1, x_2, \dots, x_n = 0,0, \dots, 0$. Maka dapat ditulis,

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = |0| + |0| + \cdots + |0| = 0.$$

Jadi, syarat pertama terpenuhi.

b. Akan akan dibuktikan bahwa $\|ax\| = |a|\|x\|$.

$$\|ax\| = \sum_{i=1}^{n} |ax_1| = \sum_{i=1}^{n} |a||x_1| = |a| \left( \sum_{i=1}^{n} |x_1| \right) = |a|\|x\|.$$

Jadi, syarat kedua terpenuhi.

c. Akan akan dibuktikan bahwa $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| = |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \cdots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \cdots + |x_n| + |y_n| \\ &= |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| + |y_1| + |x_2| + \cdots + |y_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Jadi, syarat terakhir terpenuhi.

Oleh karena ke-3 syarat telah terpenuhi, maka bisa disimpulkan bahwa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ialah ruang bernorma.

### 2.1.3 Ruang Metrik

Ruang metrik memainkan peran penting dalam menganalisis keterbatasan operator integral fraksional di ruang *Morrey,* dikarenakan untuk membuktikan *boundedness* (keterbatasan) operator, analisis dalam kerangka metrik diperlukan untuk menunjukkan bahwa ada batas norm dari operator yang diterapkan pada setiap fungsi dalam ruang *Morrey*.

**Definisi 2.4 Ruang Metrik** (Kreyszig, 1978)

Dikatakan ruang metrik jika pasangan $(X, d)$ dengan $X$ yang merupakan suatu himpunan sebarang dan $d$ ialah suatu metrik di $X$, sehingga untuk suatu fungsi yang didefinisikan di $X \times X$ untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi aksioma sebagai berikut:

a. $d(x, y) \geq 0$

b. $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$

c. $d(x, y) = d(y, x)$

d. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

**Contoh 2.3** (Alwi, 2021)

Misalkan $d$ didefinisikan pada $\mathbb{R}^2$ dengan $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ . Maka $(\mathbb{R}^2, d)$ merupakan ruang Metrik.

**Penyelesaian**

a. $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \geq 0$

b. Misalkan $d(x, y) = 0$, maka $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0$.

   Oleh karena $|x_1 - y_1| \geq 0$ dan $|x_2 - y_2| \geq 0$ yang sudah terpenuhi di *point* a, sehingga $|x_1 - y_1| = 0$ dan $|x_2 - y_2| = 0$, atau $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$. Jadi, $x = y$ terpenuhi.

c. $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$

$= d(y,x)$

d. $d(x,z) + d(z,y) = |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| + |z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|$

$= |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|$

$\geq |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|$

$= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$= d(x,y)$

Jadi, terbukti bahwa $(\mathbb{R}^2, d)$ merupakan ruang Metrik.

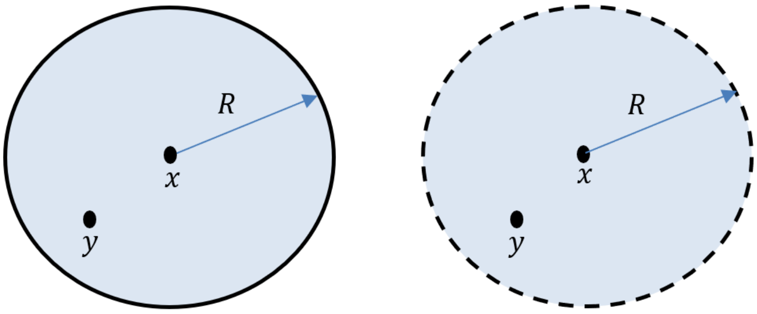
**Definisi 2.5 Bola Buka, Bola Tutup dan Kulit Bola** (Kreyszig, 1978)

Diberikan sebuah titik pusat $x \in \mathbb{R}$ beserta sebarang titik $y$ dan sebuah jari-jari $R > 0$, maka didefinisikan tiga tipe sebagai berikut

a. $B(x,R) = \{y \in \mathbb{R}: d(x,y) < R\}$ **(bola buka)**

b. $\bar{B}(x,R) = \{y \in \mathbb{R}: d(x,y) \leq R\}$ **(bola tutup)**

c. $S(x,R) = \{y \in \mathbb{R}: d(x,y) = R\}$ **(kulit bola)**




Gambar 2.1 Ilustrasi Bola Buka dan Bola Tutup

**Lemma 2.1 (Selimut Vitali)** (Stein & Murphy, 1993)

Misalkan E adalah sebuah subhimpunan terukur dari $\mathbb{R}^n$ yang merupakan gabungan dari suatu koleksi berhingga dari bola-bola $\{B_j\}$. Kemudian dapat dipilih subkoleksi yang saling lepas satu sama lain $B_1, \dots, B_m$ dari $\{B_j\}$ sedemikian sehingga

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(B_k) \geq c\mu(E).$$

**Bukti:**

Misalkan $B_1$ adalah sebuah bola dari koleksi $\{B_j\}$ dengan jari-jari maksimal. Selanjutnya pilih $B_2$ untuk memiliki jari-jari maksimal di antara subkoleksi bola-bola yang tidak bersinggungan dengan $B_1$. Lanjutkan proses tersebut, maka dari sini jelas bahwa sub-koleksi yang dipilih $B_1, B_2, \dots, B_m$ terdiri dari bola-bola yang tidak bersinggungan.

Berdasarkan definisi dari $B_1^*$, bahwa untuk setiap $B = B(x, R)$, diberikan $B^* = \bigcup B_1$ dengan $B_1$ mencakup semua bola berjari-jari $R$ yang memiliki irisan dengan $B$ dan berlaku

$$\mu\big(B^*(x,\delta)\big) \leq c_2\mu\big(B(x,\delta)\big).$$

Sehingga, $B_1^*$ memuat semua bola dari koleksi asli yang memotong $B_1$ dan yang jari-jarinya paling banyak sama dengan jari-jari $B_1$. Demikian pula $B_k^*$ berisi semua bola-bola yang tersisa yang berpotongan dengan $B_k$ dan yang jari-jarinya tidak lebih besar dari jari-jari $B_k$.

Dari sini dapat disimpulkan bahwa gabungan dari semua $B_k^*$ (untuk $k = 1,2, \dots, m$) memuat seluruh koleksi awal bola, dengan kata lain

$$\bigcup_{k=1}^{m} B_k^* \supseteq \bigcup_{j} B_j = E. \tag{2.1}$$

Karena $\mu(B_k^*) \leq c_2\mu(B_k)$ untuk suatu konstanta $c_2$, maka

$$\sum_{k=1}^{m} \mu(B_k^*) \leq \sum_{k=1}^{m} c_2\mu(B_k) = c_2 \sum_{k=1}^{m} \mu(B_k).$$

Menurut persamaan 2.1 bahwa $\bigcup_{k=1}^{m} B_k^*$ memuat $E$,

$$\mu\left(\sum_{k} B_k^*\right) \geq \mu(E)$$

Oleh karena itu, didapatkan

$$\sum_{k} \mu(B_k^*) \geq \mu\left(\sum_{k} B_k^*\right) \geq \mu(E).$$

Sehingga,

$$\sum_{k} \mu(B_k) \geq \frac{1}{c_2}\mu(E)$$

atau

$$\sum_{k} \mu(B_k) \geq c\mu(E),$$

untuk $c = \frac{1}{c_2}$.

### 2.1.4 Ukuran

**Definisi 2.6 $\sigma$ −Aljabar** (Nelson, 2015)

Misalkan $X$ merupakan himpunan tak kosong. Suatu koleksi $\mathcal{B}$ dari subhimpunan $X$ disebut dengan $\sigma -$ aljabar dari himpunan di $X$ jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

a. $\emptyset \in \mathcal{B}$,

b. Jika $\{A_n\} \in \mathcal{B}$ maka $\bigcup A_n \in \mathcal{B}$, dan

c. Jika $A \in \mathcal{B}$, maka $A^c \in \mathcal{B}$.

Syarat (b) dan (c) dapat dikatakan bahwa $\mathcal{B}$ tertutup di bawah gabungan yang bisa dihitung (*countable unions*) dan himpunan komplemen.

**Definisi 2.6 Ruang Terukur** (Nelson, 2015)

Ruang terukur didefinisikan sebagai pasangan terurut $(X, \mathcal{B})$ yang memuat himpunan $X$ dengan aljabar$-\sigma$ $\mathcal{B}$. Subhimpunan $A$ dari $X$ dikatakan himpunan terukur jika $A \in \mathcal{B}$.

**Definisi 2.7 Ruang Ukuran** (Nelson, 2015)

Ukuran pada ruang terukur $(X, \mathcal{B})$ merupakan suatu fungsi $\mu: \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ sedemikian sehingga

a. $\mu(\emptyset) = 0$, dan
b. Untuk koleksi $\{E_j\}$ yang merupakan sembarang barisan yang saling lepas di $\mathcal{B}$,

$$\mu\left(\bigcup_j E_j\right) = \sum_j \mu(E_j).$$

Pasangan terurut $(X, \mathcal{B}, \mu)$ disebut ruang ukuran.

**Contoh 2.4** (Nelson, 2015)

Didefinisikan $\mu$ di $\mathcal{B}$ yang merupakan $\sigma$ $-$aljabar di $\mathbb{R}$. $\pi$ adalah elemen tetap dalam ruang $\mathbb{R}$ yang digunakan untuk menentukan apakah suatu himpunan $A$ dalam $\mathcal{B}$ ($\sigma$-aljabar di $\mathbb{R}$) mengandung $\pi$ atau tidak. Nilai ukuran $\mu$ pada himpunan $A$ bergantung pada apakah $\pi$ termasuk dalam $A$ atau tidak, yakni

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{jika } \pi \in A \\ 0 & \text{jika } \pi \notin A \end{cases}$$

Buktikan bahwa $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ merupakan ruang ukuran.

**Penyelesaian**

Pertama-tama, $\mathcal{B}$ merupakan $\sigma$ $-$aljabar di $\mathbb{R}$ dan oleh karenanya $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ adalah ruang terukur. Selanjutnya, dari definisi $\mu(\emptyset) = 0$. Sehingga, jika $\{E_j\}$ adalah sebuah koleksi yang dapat dihitung dari pasangan himpunan-himpunan disjoint di $\mathcal{B}$, maka $\pi \in E_i$ untuk tepat satu $i \notin E_j$ untuk semua $j$. Dalam kasus pertama

$$\mu\left(\bigcup_j E_j\right) = 1 = \sum_j \mu(E_j),$$

dan untuk kasus selanjutnya,

$$\mu\left(\bigcup_j E_j\right) = 0 = \sum_j \mu(E_j).$$

Dengan demikian, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ merupakan ruang ukuran.

**Definisi 2.8 Konsep *Almost Everywhere*** (Mohanarangan, 2021).

Jika $(X, \mathcal{B}, \mu)$ merupakan ruang ukuran, dikatakan bahwa sifat hampir dimana-mana (*almost everywhere*) berlaku jika terdapat subhimpunan $E \in \mathcal{B}$, dengan $E^c$ maka berlaku $\mu(E) = 0$. Untuk selanjutnya, istilah "hampir dimana-mana" cukup dituliskan sebagai h.d.

**Contoh 2.5** (Khoirunnisa, 2015)

Diberikan suatu fungsi $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \text{ irasional} \\ 0, & x \in [a, b] \text{ rasional} \end{cases}$$

Diambil $E$ yang merupakan koleksi dari semua bilangan rasional yang termuat di $[a, b]$, maka $\mu(E) = 0$. Selanjutnya, untuk $f(x) = 1$, setiap $x \in [a, b] - E$. Maka, pernyataan $f(x) = 1$ dikatakan benar hampir di mana-mana atas $[a, b]$.

**Definisi 2.9 Fungsi Karakteristik** (Khoirunnisa, 2015)

Misalkan $E \subseteq X$. Fungsi $\chi_E: X \to \mathbb{R}$ dengan rumus

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in E \\ 0 & \text{jika } x \notin E \end{cases}$$

disebut dengan fungsi karakteristik (*characteristic function*) pada $E$.

### 2.1.5 Fungsi Terukur

**Definisi 2.10 Fungsi Terukur** (Nelson, 2015)

Misalkan $(X, \mathcal{B})$ merupakan ruang terukur. Fungsi $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ terukur jika untuk setiap $s \in \mathbb{R}$, himpunan $\{x \in X | f(x) > s\}$ merupakan anggota dari $\mathcal{B}$.

### 2.1.6 Ruang *Lebesgue*

**Definisi 2.11 Ruang *Lebesgue*** (G. Gunawan & Gunawan, 2006)

Notasi $L^p = L^p(\mathbb{R}^n)$ untuk $1 \leq p < \infty$ disebut dengan ruang *Lebesgue* yakni himpunan kelas-kelas ekuivalen fungsi sedemikian sehingga $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty$ atau dapat ditulis

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \left\{f : \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\}$$

dengan $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_p$ merupakan norm yang didefinisikan sebagai berikut

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}^n$.

Pada Bab IV, akan didefinisikan ruang *Lebesgue* lokal, oleh karena itu dibutuhkan beberapa definisi sebagai berikut.

**Definisi 2.12 Kekonvergenan** (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan $X = \{x_n\}$ pada $\mathbb{R}$ konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ atau $x$ merupakan limit dari $\{x_n\}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat suatu bilangan asli $N_\varepsilon$ sedemikian sehingga untuk semua $n \geq N_\varepsilon$, memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$. Dengan demikian, jika nilai limit barisan untuk $n \to \infty$ $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right)$, maka barisan tersebut konvergen dan sebaliknya jika barisan tidak mempunyai limit, maka barisan tersebut divergen.

**Definisi 2.13 Kekompakan** (Kreyszig, 1978)

Suatu ruang metrik $X$ dikatakan kompak jika setiap barisan di $X$ memiliki subbarisan yang konvergen, di mana limit dari subbarisan tersebut adalah elemen dari $X$. Suatu himpunan $K \subseteq X$ dikatakan kompak jika $K$ adalah subruang dari $X$ dan setiap barisan di $K$ memiliki subbarisan yang konvergen, di mana limit dari subbarisan tersebut adalah elemen dari $K$.

### 2.1.7 Ruang *Morrey*

Pada tahun 1938, Charles Bradfield Morrey yang merupakan ahli matematika asal Amerika memperkenalkan salah satu ruang yang bernama ruang *Morrey*. Ruang ini didefinisikan sebagai himpunan yang memuat semua fungsi $f$ yang terintegralkan secara lokal pada $\mathbb{R}^n$, yakni seperti yang dinyatakan dalam definisi berikut ini.

**Definisi 2.14** (Hazmy dkk., 2019).

Untuk $1 \leq p < \infty$ dan $0 \leq \lambda \leq n$, ruang *Morrey* $L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan oleh

$$L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}): \|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty\right\}$$

dengan norm

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B=B(x,R)} \left(\frac{1}{R^\lambda}\int_B |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

dengan $B(x,R)$ yang merupakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di $x$ dan berjari-jari $R > 0$, yaitu $B = B(x,R) := \{y \in \mathbb{R}: |x-y| < R\}$. Oleh karena ruang *Morrey* merupakan perluasan dari ruang *Lebegue,* maka jika $\lambda = 0$, maka $L^{p,0} = L^p$, seperti yang ditunjukkan di bawah ini

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_B \left(\frac{1}{R^\lambda}\int_B |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_B \left( \frac{1}{R^0} \int_B |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sup_B \left( \int_B |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|f\|_{L^p}.$$

### 2.1.8 Operator Linear

**Definisi 2.15 Operator Linear** (Dangga, 2010)

Sebuah pemetaan linear $T$ disebut dengan operator linear jika:

a. Domain $D(T)$ dari $T$ merupakan subruang vektor dan range $R(T)$ termuat di suatu ruang vektor.

b. Untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan skalar $\alpha$.

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

**Contoh 2.6** (Dangga, 2010)

a. Misalkan suatu operator identitas $I_x: X \to X$ didefinisikan oleh $I_x x = x, \forall x \in X$. Sehingga, berarti $I$ untuk $I_x$, misalkan sebarang $x, y \in X$, maka

$$I(x + y) = x + y = I_x x + I_x y$$

$$I(\alpha x) = \alpha x = \alpha I_x x.$$

Jadi, terbukti bahwa operator identitas merupakan operator linear.

b. Misalkan operator nol $0: X \to Y$ didefinisikan oleh $0x = 0, \forall x \in X$. Oleh karena itu jika diambil sebarang $x, y \in X$ maka

$$0(x + y) = 0 = 0x + 0y$$

$$0(\alpha x) = 0 = \alpha 0.$$

Jadi, terbukti bahwa operator nol merupakan operator linear.

### 2.1.9 Operator Integral

**Definisi 2.16 Operator Integral** (Levermore, 2009)

Misalkan $(X, \mathcal{B}_\mu, d\mu)$ dan $(Y, \mathcal{B}_\nu, d\nu)$ merupakan merupakan ruang ukuran $\sigma$ −berhingga positif. Operator integral $T$ didefinisikan sebagai berikut

$$Tu(y) = \int k(x, y)\, u(x)\, d\mu(x)$$

dengan kernel $k$ merupakan fungsi terukur bernilai kompleks berkaitan dengan $\sigma$ −aljabar $\mathcal{B}_{\mu\otimes\nu}$.

### 2.1.10 Keterbatasan Operator

**Definisi 2.17 Keterbatasan Operator** (Levermore, 2009)

Operator $T$ memetakan ruang bernorma $(X, \|\cdot\|_X)$ ke ruang bernorma $(Y, \|\cdot\|_Y)$ yang dikatakan terbatas jika pemetaan tersebut memetakan himpunan bagian terbatas dari $X$ ke dalam himpunan bagian terbatas dari $Y$, untuk suatu konstanta $C < \infty$ sedemikian sehingga

$$\|Tu\|_Y \leq C\|u\|_X,$$

untuk setiap $u \in X$.

## 2.2 Makna Keterbatasan Manusia

Di suatu kisah Nabi Musa dan Nabi Khidir, diceritakan bahwa Nabi Khidir melihat seekor burung pipit yang sedang bertengger di sisi perahu yang sedang dinaiki oleh keduanya, kemudian dengan paruhnya, burung pipit tersebut minum seteguk air dari sungai (laut). Maka Nabi Khidir pun berkata, “Hai Musa, tiadalah pengetahuanku dan pengetahuanmu serta pengetahuan semua makhluk bila dibandingkan dengan pengetahuan Allah, melainkan sama halnya dengan apa yang diambil burung pipit ini dari laut itu dengan laut itu sendiri” (Ad-Dimasyqi, 2012). Yang bermakna bahwa pengetahuan yang ada pada ahli ilmu sekalipun jika dibandingkan dengan ilmu yang Allah miliki hanyalah seperti seekor burung yang minum dengan pelatuknya di samudra luas.

Dalam Surah Al-Baqarah ayat 216, Allah *Subhanahu wa Ta'ala* berfirman:

كُتِبَ عَلَيْكُمُ ٱلْقِتَالُ وَهُوَ كُرْهٌ لَّكُمْ ۖ وَعَسَىٰٓ أَن تَكْرَهُوا۟ شَيْـًٔا وَهُوَ خَيْرٌ لَّكُمْ ۖ وَعَسَىٰٓ أَن تُحِبُّوا۟ شَيْـًٔا وَهُوَ شَرٌّ لَّكُمْ ۗ وَٱللَّهُ يَعْلَمُ وَأَنتُمْ لَا تَعْلَمُونَ

Artinya: *"Diwajibkan atas kamu berperang, padahal itu tidak menyenangkan bagimu. Tetapi boleh jadi kamu tidak menyenangi sesuatu, padahal itu baik bagimu dan boleh jadi kamu menyukai sesuatu, padahal itu tidak baik bagimu. Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui."* (Awaludin, 2012)

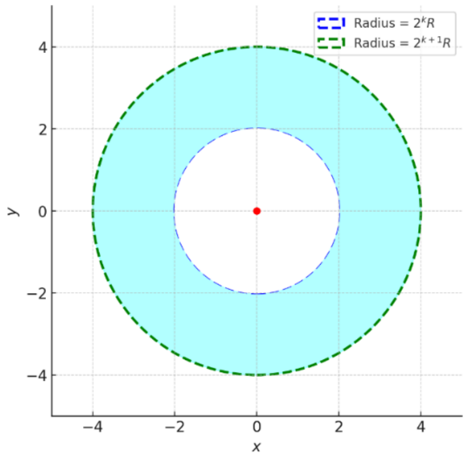
Kata (عسى) '*asa* berarti *bisa jadi* dan mengandung makna ketidakpastian. Tentu saja bukan dari sisi pengetahuan Allah, karena tidak ada sesuatu yang tersembunyi atau tidak pasti bagi-Nya. Ketidakpastian adalah dari sisi manusia, yang berarti jika kita dihadapkan dengan perintah Ilahi yang tidak dapat kita hindarkan walaupun hal tersebut tidak menyenangkan, maka hendaknya kita menanamkan rasa optimis dan berkata *bisa jadi* di balik ketetapan yang tidak berkenan di hati itu terdapat sesuatu yang baik. Begitu pula sebaliknya, jika kita sedang mendapatkan kebahagiaan hidup, maka hendaknya pula tidak bergembira hingga lupa diri. Karena *bisa jadi* di balik yang disenangi itu ada *mudharat* (Shihab, 2002). Jadi, pada dasarnya ayat ini mengingatkan manusia agar berserah diri kepada Allah, tidak menjadikan apa yang hanya terlihat oleh mata sebagai apa yang dipercaya, tetapi tetap berharap dan mengembalikan semua urusan kepada Allah yang pengetahuannya sempurna.

## 2.3 Penaksiran Operator Integral Fraksional

Terdapat salah satu proses penting pada bidang analisis dalam menaksir ketaksaman operator integral fraksional, operator tersebut dipartisi menjadi 2 bagian. Proses ini dinamakan dengan dekomposisi diadik.

**Definisi 2.19 Dekomposisi Diadik (*dyadic decomposition*)**

Dekomposisi diadik melibatkan transformasi Fourier secara eksplisit (atau implisit), memanfaatkan pembagian ruang (frekuensi) ganda menjadi kulit bola "diadik". Ide penguraian ini berasal dari karya Bernstein, Littlewood dan Paley (Stein & Murphy, 1993). Dekomposisi diadik digunakan ketika berhadapan dengan penjumlahan (*sum*) atau integral pada parameter yang berkisar pada rentang yang luas (Tao, 2009). Cara membentuk dekomposisi diadik pada kasus $\mathbb{R}$ yakni dengan mengatur masing-masing skala diadik dan menguraikannya sebagai gabungan dari interval yang saling lepas (*disjoint*) $[2^k, 2^{k+1}]$dan $[-2^k, -2^{k+1}]$ untuk $-\infty < k < \infty$, kemudian menjumlahkan seluruh skala diadik. Adapun koleksi interval ganda ini terdiri dari koleksi untuk setengah garis positif, dan selainnya untuk setengah garis negatif (Hao, 2016).




Gambar 2.2 Ilustrasi Dekomposisi Diadik

Dalam proses menaksir ketaksamaan operator integral fraksional memanfaatkan beberapa teorema salah satunya teorema yang menyatakan pertidaksamaan segitiga untuk integral sebagai berikut

**Teorema 2.1 Ketaksamaan segitiga** (Varberg et al., 2006)

Jika suatu fungsi $f$ dan $g$ terintegralkan di $[a,b]$ dan jika $f(x) \leq g(x)$ untuk semua $x$ di $[a,b]$, maka

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |g(x)|\,dx.$$

**Bukti.**

Misalkan $P: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ merupakan sebarang partisi dari $[a,b]$, dan untuk setiap $i$, $\bar{x}_i$ adalah sebarang titik di interval bagian ke-$i$ $[x_{i-1}, x_i]$. Maka, dapat disimpulkan bahwa

$$f(\bar{x}_i) \leq g(\bar{x}_i)$$

$$f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \leq g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$\lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \leq \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Adapun teorema di atas berimplikasi pada pertidaksamaan segitiga untuk integral yang menyatakan bahwa

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

untuk sebarang fungsi kontinu $f$ (Karageorgis, 2018).

Selain itu, diperlukan ketaksamaan Holder untuk menaksir ketaksamaan operator integral fraksional yang akan dipaparkan pada proposisi berikut ini

**Proposisi 2.1 Ketaksamaan Holder** (Kantorovich & Akilov, 1982)

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan funsgi terukur pada himpunan terukur $(X, \mu)$. Maka diperoleh ketaksamaan

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \left( \int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X |f(x)|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**Bukti:**

Asumsikan bahwa

$$0 < \alpha^p = \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty, \qquad 0 < \beta^q = \int_X |g(x)|^q d\mu < \infty,$$

karena ketaksamaan tersebut akan terbukti trivial jika salah satu dari integral tersebut bernilai nol atau tak hingga. Misalkan

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\alpha}, \quad g'(x) = \frac{g(x)}{\beta}$$

untuk setiap $x \in X$ diperoleh $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (bilangan konjugat), dan diperoleh

$$|f'(x)g'(x)| \leq \frac{|f'(x)|^p}{p} + \frac{|g'(x)|^q}{q}$$

atau ketika diintegralkan diperoleh

$$\int_X |f'(x)g'(x)| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_X |f'(x)|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_X |g'(x)|^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

sehingga

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu \leq \alpha\beta.$$

# BAB III

# METODE PENELITIAN

## 3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif. Jenis penelitian ini dilakukan dengan teknik pengumpulan data yang diperoleh dengan studi pustaka (*library research*). Adapun, pengumpulan data dilakukan dengan cara menghimpun berbagai sumber seperti buku, jurnal, artikel beserta website yang terkait.

## 3.2 Pra Penelitian

Seperti yang sudah disebutkan sebelumnya, penelitian ini dilakukan dengan cara menghimpun berbagai sumber seperti buku, jurnal, artikel beserta *website* yang terkait dengan topik yang dibahas dalam penelitian ini. Adapun jurnal yang menjadi menjadi rujukan utama dalam penelitian ini adalah (Idris et al., 2016).

## 3.3 Tahapan Penelitian

Metode penelitian dalam penelitian ini dilakukan dengan beberapa tahap, yakni:

a. Studi literatur
b. Melakukan dekomposisi diadik pada operator integral fraksional menjadi dua bagian.
c. Menaksir partisi pertama operator integral fraksional dengan menggunakan operator maksimal Hardy-Littlewood.
d. Menaksir partisi kedua operator integral fraksional dengan memanfaatkan ketaksamaan Holder dan lemma yang terkait.

e. Menjumlahkan kedua partisi, kemudian memilih suatu jari-jari $R > 0$ dan mensubstitusikannya kedalam partisi operator integral fraksional yang telah dijumlahkan tersebut.
f. Menggunakan fakta keterbatasan operator maksimal Hardy-Littlewood untuk menentukan hasil akhir.

# BAB IV

# HASIL DAN PEMBAHASAN

## 4.1 Keterbatasan Operator Integral Fraksional di Ruang *Morrey* yang Dimodifikasi

Pada penelitian ini, operator integral fraksional $I_\alpha$ atau bisa juga disebut sebagai operator *Riesz* mengikuti definisi sebagai berikut.

**Definisi 4.1 Operator Integral Fraksional** (H. Gunawan, 2003)

Misalkan fungsi $f$ bernilai real pada $\mathbb{R}^n$ untuk $0 < \alpha < n$, dengan orde $\alpha$ dan dimensi $n$. Operator *Riesz* $(I_\alpha)$ didefinisikan sebagai operator yang memetakan fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ke $I_\alpha f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dengan

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy,$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Sebelum mendefinisikan fungsi yang berada di ruang *Morrey* yang dimodifikasi, akan didefinisikan ruang *Lebesgue* lokal beserta contohnya sebagai berikut.

**Definisi 4.2 Ruang *Lebesgue* Lokal** (Castillo & Rafeiro, 2016).

Misalkan $1 \leq p \leq \infty$, fungsi $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegralkan secara lokal jika

$$\int_K |f|^p\, dx < \infty$$

untuk setiap himpunan kompak $K \subset \mathbb{R}^n$. Ruang dari semua fungsi yang terintegral secara lokal tersebut disebut dengan ruang *Lebegue* lokal yang dinotasikan sebagai $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

**Contoh 4.1**

Buktikan bahwa fungsi $\frac{1}{x}$ dan $\ln(|x|)$ pada $\mathbb{R}$ termuat di dalam $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

**Penyelesaian:**

a. Fungsi $\frac{1}{x}$

Pertimbangkan integral pada interval $(\epsilon, 1)$ untuk $\epsilon > 0$:

$$\int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x} dx = \ln(x)|_{\epsilon}^{1} = \ln(1) - \ln(\epsilon) = -\ln(\epsilon).$$

Ketika $\epsilon$ mendekati nol, $\ln(\epsilon)$ akan mendekati $-\infty$, sehingga:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^{1} \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} -\ln(\epsilon) = \infty.$$

Karena integral ini divergen, maka $\frac{1}{x}$ tidak termuat di $L^1_{loc}\big((0,1)\big)$. Dengan cara yang sama, integral dari $\frac{1}{x}$ pada interval $(-1, -\epsilon)$ juga akan divergen ketika $\epsilon$ mendekati nol. Maka dapat disimpulkan bahwa $\frac{1}{x}$ tidak termuat di $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

b. Fungsi $\ln(|x|)$

Pertimbangkan integral pada interval $(\epsilon, 1)$ untuk $\epsilon > 0$:

$$\int_{\epsilon}^{1} \ln(|x|) dx = x\ln(|x|) - x|_{\epsilon}^{1}$$

$$= (1 \cdot \ln(1) - 1) - (\epsilon \cdot \ln(\epsilon) - \epsilon)$$

$$= -1 - (\epsilon \cdot \ln(\epsilon) - \epsilon)$$

Selanjutnya, perlu dievaluasi limit dari $\epsilon$ mendekati nol. Diketahui bahwa $\epsilon \ln(\epsilon)$ mendekati nol saat $\epsilon$ mendekati nol. Selanjutnya,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon \ln(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\ln(\epsilon)}{1/\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{(-1/\epsilon)}{-1/\epsilon^2} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \epsilon = 0.$$

Jadi,

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \big(-1 - (\epsilon \ln(\epsilon) - \epsilon)\big) = -1 + 0 + 0 = -1.$$

Oleh karena itu, integral ini konvergen dan bernilai $-1$. Karena $\ln(|x|)$ adalah fungsi genap, maka bisa digunakan argumen yang sama untuk interval $(-1, -\epsilon)$. Dengan demikian, $\ln(|x|)$ terintegralkan secara lokal pada setiap himpunan bagian kompak dari $\mathbb{R}$.

Dengan demikian, telah terbukti bahwa $\ln(|x|)$ termuat di $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ sedangkan $\frac{1}{x}$ tidak termuat di $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

**Definisi 4.3 Ruang *Morrey* (yang dimodifikasi)** (Sawano et al., 2020).

Untuk $1 < p_1 \leq q_1 \leq \infty$, ruang *Morrey* $L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai berikut

$$L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ f \in L^{p_1}_{loc}(\mathbb{R}^n) \colon \|f\|_{p_1,q_1(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

dengan

$$\|f\|_{p_1,q_1(\mathbb{R}^n)} \coloneqq \sup_{R>0, x\in\mathbb{R}^n} |B(x,R)|^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}} \left( \int_B |f(x)|^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

dengan $B(x,R)$ yang merupakan bola buka di $\mathbb{R}^n$ yang berpusat di $x$ dan berjari-jari $R > 0$, yaitu $B = B(x,R) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < R\}$.

Adapun $p_1$ adalah parameter yang menentukan bagaimana fungsi $f$ terintegrasi secara lokal dalam norma $L^{p_1}$. Sedangkan $q_1$ merupakan parameter yang mengatur bagaimana fungsi berlaku pada bola buka $B(x,R)$. Dalam hal ini, digunakan $p_1$ dan $q_1$ untuk membedakannya dengan ruang *Morrey* klasik. Adapun perbedaan antara ruang *Morrey* klasik dan ruang *Morrey* yang dimodifikasi yakni terletak pada fungsi normnya. Fungsi norm ruang *Morrey* klasik didefinisikan sebagai berikut

$$\|f\|_{L^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{B=B(x,R)} \left( \frac{1}{R^\lambda} \int_B |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

untuk $1 \leq p < \infty$ dan $0 \leq \lambda \leq n$ (Hazmy et al., 2019).

Dalam proses menaksir ketaksamaan operator integral fraksional, (Adams, 1975; Chiarenza & Frasca, 1987) memanfaatkan operator maksimal Hardy-Littlewood.

**Definisi 4.4 Operator Maksimal Hardy-Littlewood** (Tao, 2018)

Didefinisikan operator maksimal Hardy-Littlewood untuk $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), 1 < p \leq \infty$,

$$Mf(x) = \sup_{0<R<\infty} \frac{1}{\mu\big(B(x,R)\big)} \int_B |f(y)|\, dy,$$

dengan $B = B(x,R) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |x - y| < R\}$ yang menunjukkan bola buka yang berpusat di $x$ dan berjari-jari $R$. Pada penelitian ini, penulis mengasumsikan bahwa $\mu$ memenuhi *growth condition* yakni jika terdapat konstanta $C > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap bola $B$ berlaku

$$\mu\big(B(x,R)\big) \leq CR^n \tag{4.1}$$

Karena pada persamaan (4.1) ukuran bola dikontrol oleh jari-jari bola berpangkat $n$, maka orang sering menyebut ukuran yang memenuhi *growth condition* sebagai *growth measure* berorde $n$. Ruang metrik yang dilengkapi dengan ukuran yang memenuhi kondisi pada persamaan (4.1) sering disebut ruang metrik tak homogen (Sihwaningrum, 2016).

Berbeda dengan sisi berikutnya, yakni $I_2(x)$ , (Adams, 1975) tetap menggunakan operator maksimal, sedangkan alih-alih menggunakan operator maksimal, (Chiarenza & Frasca, 1987) memanfaatkan ketaksamaan Holder yang pada proposisi 2.1. Selanjutnya, mengikuti ide dalam Gunawan (2007), selain menggunakan ketaksamaan Holder, akan digunakan Lemma berikut ini dalam proses menaksir $I_2(x)$,

**Lemma 4.1** (G. Gunawan, 2007)

Untuk setiap $\gamma > 0$, berlaku

$$\int_{\mathbb{R}^n \backslash B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}}\, dy \leq CR^{-\gamma}$$

untuk suatu konstanta real $C$.

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \backslash B(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}}\, dy \quad & \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j R \leq |x-y| < 2^j R} \frac{1}{|x-y|^{n+\gamma}}\, dy \\
& \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^{n+\gamma}} \left|B\left(x, 2^{j+1}R\right)\right| \\
& \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^{n+\gamma}} C\left(2^{j+1}R\right)^n \\
& = C \sum_{j-0}^{\infty} 2^{-\gamma j} R^{-\gamma} \\
& = CR^{-\gamma}
\end{aligned}$$

untuk suatu konstanta real $C$.

Selanjutnya, dibutuhkan suatu fakta bahwa operator maksimal yang terbatas di ruang *Morrey*, tetapi sebelum itu, untuk membuktikan fakta tersebut dibutuhkan teorema yang akan dijelaskan berikut ini.

**Teorema 4.1** ***(Fefferman-Stein)*** (Stein & Murphy, 1993)

Misalkan $\omega$ adalah fungsi tak negatif dan $f$ adalah fungsi yang terintegralkan secara lokal di $\mathbb{R}^n$. Maka terdapat $C_p > 0$ sedemikian sehingga (G. Gunawan & Gunawan, 2006)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p \omega(x)\, dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p M\omega(x)\, dx.$$

**Bukti.**

Sebelum membuktikan teorema tersebut, kita perlu membuktikan pertidaksamaan di bawah ini, karena teorema di atas merupakan implikasi dari pertidaksamaan (4.2) untuk $\omega$ adalah fungsi tak negatif dan $M$ merupakan operator maksimal, berlaku

$$\omega(x) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, M\omega(x)\, dx, \quad \text{dengan } x = \{Mf > \alpha\} \tag{4.2}$$

Pertama-tama, akan digunakan Lemma 2.1 Selimut Vitali: $\forall x \in E_\alpha$ untuk $E_\alpha = \{Mf > \alpha\}$, lalu ambil $E$ yang merupakan sebarang sub himpunan kompak dari $E_\alpha$. Maka, terdapat bola $B_x$ yang berpusat di $x$ dengan

$$|B_x| < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| dy \tag{4.3}$$

Kemudian, dipilih koleksi saling lepas $B_1, \dots, B_m$ dari bola $B_x$ tersebut, sehingga

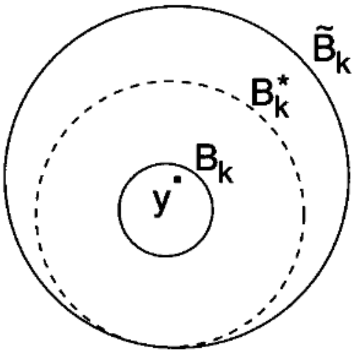
$$\bigcup_k B_k^* \supset E;$$

dengan $B_k^*$ yang merupakan bola dengan pusat yang sama dengan $B_k$ dan memiliki tiga kali jari-jari dari $B_k$.

Akan dibuktikan bahwa,

$$\int_{B_k^*} \omega\, dx \leq \frac{C}{\alpha} \int_{B_k} |f(y)|(M\omega)(y)\, dy \tag{4.4}$$

Sebelum itu, ingat posisi dari $y, B_k, B_k^*$, dan $\tilde{B}_k$ pada gambar di bawah ini.




Gambar 4.1 Skema posisi dari $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{B_k}, \boldsymbol{B_k^*}$, dan $\boldsymbol{\tilde{B}_k}$

Sumber: (Stein & Murphy, 1993)

Ingat bahwa jari-jari dari $\tilde{B}_k$ paling banyak empat kali dari jari-jari $B_k$, dengan demikian,

$$\left|\tilde{B}_k\right| \leq C|B_k|.$$

Maka, berdasarkan definisi dari operator maksimal,

$$\left|\tilde{B}_k\right|^{-1} \int_{\tilde{B}_k} \omega \, dx \leq M\omega(y)$$

$$\int_{\tilde{B}_k} \omega \, dx \leq C|B_k| M\omega(y)$$

untuk sebarang $y \in B_k$.

Jika gabungkan pertidaksamaan di atas dengan fakta yang berdasarkan pertidaksamaan (4.3)

$$|B_k| \leq \alpha^{-1} \int_{B_k} |f(y)| \, dy,$$

maka, didapatkan persamaan (4.4). Selanjutnya, dengan menjumlahkan kedua sisi dari (4.4) atas $k$, menggunakan sifat saling lepas dari $B_k$, untuk memperoleh

$$\omega(E) \leq \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, M\omega(x)\, dx,$$

yang berimplikasi dengan (4.2).

Dengan menggunakan ketaksamaan Fefferman-Stein ini diperoleh suatu fakta bahwa operator maksimal juga terbatas di ruang *Morrey*, seperti dinyatakan dalam teorema berikut,

**Teorema 4.2 (Chiarenza-Frasca)** (G. Gunawan & Gunawan, 2006)

Misal $1 < p < \infty$ dan $0 \leq \lambda < n$. Maka $\|Mf\|_{L^{p,\lambda}} \leq C\|f\|_{L^{p,\lambda}}$, untuk suatu konstanta $C$ yang tidak bergantung pada $f$.

**Bukti:**

Ambil $f \in L^{p,\lambda}$, dan $\chi_{B_R}$ adalah fungsi karakteristik pada bola $B_R = B(x_0, R)$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$\chi_{B_R}(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in B_R \\ 0 & \text{jika } x \notin B_R \end{cases}$$

Menurut ketaksamaan yang dinyatakan dalam Teorema 4.1, maka

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p\, \chi_{B_R}(x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \left(M\chi_{B_R}(x)\right) dx \tag{4.5}$$

untuk suatu fungsi $f$ dan $\chi_{B_R}$ yang tak negatif.

Selanjutnya, berdasarkan ketaksamaan (4.1) di atas diperoleh

$$\int_{B_R} |Mf(x)|^p\, dx$$

$$\leq C\left\{\int_{B_{2R}} |f(x)|^p \left(M\chi(x)\right) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{2^{k+1}R} \setminus B_{2^k R}} |f(x)|^p \left(M\chi(x)\right) dx\right\}$$

$$\leq C\left\{\int_{B_{2R}} |f(x)|^p\, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{2^{k+1}R} \setminus B_{2^k R}} |f(x)|^p \frac{R^n}{(|x - x_0| - R)^n}\, dx\right\}$$

$$\leq C\left\{\int_{B_{2R}} |f(x)|^p\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^n}{(2^{k-1}R)^n} \int_{B_{2^{k+1}R}} |f(x)|^p\,dx\right\}$$

$$\leq C\left\{\begin{array}{c} (2R)^{\lambda}\left[\left(\frac{1}{2R^{\lambda}}\int_{B_{2R}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \\ +\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^n}{(2^{k-1}R)^n}(2^{k+1}R)^{\lambda}\left[\left(\frac{1}{(2^{k+1}R)^{\lambda}}\int_{B_{2^{k+1}R}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \end{array}\right\}$$

$$\leq C\left\{(2R)^{\lambda}\|f\|_{L^{p,\lambda}}^p + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(k+1)\lambda-(k-1)n} R^{\lambda}\|f\|_{L^{p,\lambda}}^p\right\} \subseteq \|f\|_{L^{p,\lambda}}^p R^{\lambda}.$$

Jadi didapat,

$$\int_{B_R} |Mf(x)|^p\,dx \quad \leq C\|f\|_{L^{p,\lambda}}^p R^{\lambda}$$

$$\frac{1}{R^{\lambda}}\int_{B_R} |Mf(x)|^p\,dx \quad \leq C\|f\|_{L^{p,\lambda}}^p$$

$$\frac{1}{R^{\frac{\lambda}{p}}}\left(\int_{B_R} |Mf(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \leq C\|f\|_{L^{p,\lambda}}$$

untuk suatu konstanta $C$ ■ (G. Gunawan, 2007).

Berdasarkan pada fakta keterbatasan fungsi maksimal $Mf$ di ruang *Morrey*, maka peneliti dapat membuktikan suatu pernyataan teorema berikut bahwa operator integral fraksional $I_\alpha$ juga terbatas di ruang *Morrey* dimodifikasi.

**Teorema 4.3** (Adams, 1975; Chiarenza & Frasca, 1987)

Jika $0 < \alpha < n$ maka

$$\|I_\alpha f\|_{L^{p_2,q_2}} \leq C_{p_1,q_1}\|f\|_{L^{p_1,q_1}}$$

untuk setiap $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ dengan $1 < p_1 < q_1 < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1}\left(1 - \frac{\alpha q_1}{n}\right)$ dan $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{\alpha}{n}$.

**Bukti.**

Misalkan $f \in L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$, dan $f \neq 0$, maka untuk $0 < \alpha < n$, $x \in \mathbb{R}$ dan $R > 0$, operator integral fraksional $I_\alpha$ dipartisi menjadi dua bagian

$$I_\alpha f(x) = I_1(x) + I_2(x)$$

dengan

$$I_1(x) = \int_{|x-y|<R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \quad \text{dan} \quad I_2(x) = \int_{|x-y|\geq R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

Pertama-tama, dengan memanfaatkan ketaksamaan segitiga maka diperoleh

$$I_1(x) = \int_{|x-y|<R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

$$|I_1(x)| \leq \int_{|x-y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

selanjutnya dengan menggunakan dekomposisi diadik,

$$\begin{aligned}
|I_1(x)| &\leq \int_{|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy + \int_{\frac{1}{2}R\leq|x-y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&\leq \int_{|x-y|<\frac{1}{4}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy + \int_{\frac{1}{4}R\leq|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}R\leq|x-y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&\leq \int_{|x-y|<\frac{1}{8}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy + \int_{\frac{1}{8}R\leq|x-y|<\frac{1}{4}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&\quad + \int_{\frac{1}{4}R\leq|x-y|<\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy + \int_{\frac{1}{2}R\leq|x-y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^k R}\leq|x-y|<\frac{1}{2^{k+1}R}} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_{2^kR\leq|x-y|<2^{k+1}R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

$$\leq C_1 \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^kR)^{n-\alpha}} \int_{|x-y|<2^{k+1}R} |f(y)|\,dy$$

$$\leq C_2 \left( \frac{1}{(2^kR)^n} \int_{|x-y|<2^{k+1}R} |f(y)|\,dy \right) \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^kR)^{-\alpha}}$$

$$= C_2 Mf(x) \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^kR)^{-\alpha}}$$

$$\leq C_3 R^\alpha Mf(x).$$

Maka, diperoleh

$$I_1(x) \leq C_3 R^\alpha Mf(x). \tag{4.6}$$

Sementara itu, untuk penyelesaian $I_2(x)$, dengan memanfaatkan ketaksamaan segitiga maka diperoleh

$$I_2(x) = \int_{|x-y|\geq R} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

$$|I_2(x)| \leq \int_{|x-y|\geq R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

dengan menggunakan dekomposisi diadik diperoleh

$$|I_2(x)| \leq \int_{|x-y|\geq 2R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy + \int_{2R\leq|x-y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

$$\leq \int_{|x-y|\geq 4R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy + \int_{4R\leq|x-y|<2R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

$$+ \int_{2R\leq|x-y|<R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} |f(y)| \, dy$$

Selanjutnya, menurut ketaksamaan Holder, maka dapat ditulis

$$|I_2(x)| \leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} |f(y)|^{p_1} dy \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha) q_1}} |f(y)|^{q_1} dy \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R^{\left(\frac{n p_1}{q_1} - n\right)}}{R^{\left(\frac{n p_1}{q_1} - n\right)}} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} |f(y)|^{p_1} dy \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha) q_1}} |f(y)|^{q_1} dy \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leq C_4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)}} R^{n\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \left( \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} |f(y)|^{p_1} dy \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha) q_1}} |f(y)|^{q_1} dy \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leq C_4 R^{(-n)\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} \|f\|_{L^{p_1, q_1}}$$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha) q_1}} |f(y)|^{q_1} dy \right)^{\frac{1}{q_1}}$$

Jika dimisalkan bahwa

$$I' = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k R \leq |x-y| < 2^{k+1} R} \frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha) q_1}} dy$$

dan juga,

$$(n-\alpha)q_1 = n+\gamma, \text{ dengan } \gamma = n(q_1-1)-\alpha q_1, \tag{4.7}$$

maka,

$$\frac{\gamma}{q_1} = n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)-\alpha = \frac{n}{p_1}-\alpha > 0 \tag{4.8}$$

Selanjutnya, menggunakan cara yang digunakan pada Lemma 4.1, diperoleh

$$\begin{aligned}
I' &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^kR\le|x-y|<2^{k+1}R}\frac{1}{|x-y|^{(n-\alpha)q_1}}dy \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|B(x,2^{k+1}R)|}{(2^kR)^{(n-\alpha)q_1}} \\
&\le C_5\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2^{k+1}R)^n}{(2^kR)^{(n-\alpha)q_1}} \\
&= C_5\sum_{k=0}^{\infty}2^{kn+n-knq_1+k\alpha q_1}\,R^{n-nq_1+\alpha q_1} \\
&\le C_6R^{n-nq_1+\alpha q_1} \\
&= C_6R^{-\gamma} \text{ (berdasarkan persamaan 4.7)}
\end{aligned}$$

Sehingga, jika $I'$ disubstitusikan ke $I_2(x)$ dan memanfaatkan persamaan 4.8, maka dapat ditulis

$$\begin{aligned}
|I_2(x)| &\le C_7R^{(-n)\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}\|f\|_{L^{p_1,q_1}}(R^{-\gamma})^{\frac{1}{q_1}} \\
&= C_7R^{(-n)\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}\|f\|_{L^{p_1,q_1}}R^{-\left(\frac{n}{p_1}-\alpha\right)} \\
&= C_7R^{\left(-\frac{n}{q_1}-\alpha\right)}\|f\|_{L^{p_1,q_1}}
\end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$I_2(x) \le C_7R^{\left(-\frac{n}{q_1}-\alpha\right)}\|f\|_{L^{p_1,q_1}} \tag{4.9}$$

Dengan demikian, dari persamaan (4.6) dan (4.9) diperoleh

$$
\begin{aligned}
I_a f(x) &\leq C_3 R^{\alpha} Mf(x) + C_7 R^{\left(-\frac{n}{q_1}-\alpha\right)} \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \\
&\leq C\left(R^{\alpha} Mf(x) + R^{\left(-\frac{n}{q_1}-\alpha\right)} \|f\|_{L^{p_1,q_1}}\right) \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

dengan $C = \max\{C_3, C_7\}$. Selanjutnya, dengan memilih

$$R = \left(\frac{\|f\|_{L^{p_1,q_1}}}{Mf(x)}\right)^{\frac{q_1}{n}} > 0,$$

dan mensubstitusikannya ke dalam ketaksamaan (4.10), didapat

$$
\begin{aligned}
|I_a f(x)| &\leq C\left[\left(\left(\frac{\|f\|_{L^{p_1,q_1}}}{Mf(x)}\right)^{\frac{q_1}{n}}\right)^{\alpha} Mf(x)\right] \\
&\quad + \left[\left(\left(\frac{\|f\|_{L^{p_1,q_1}}}{Mf(x)}\right)^{\frac{q_1}{n}}\right)^{\left(-\frac{n}{q_1}-\alpha\right)} \|f\|_{L^{p_1,q_1}}\right] \\
&= C\left[\frac{(\|f\|_{L^{p_1,q_1}})^{\frac{\alpha q_1}{n}}}{\left(Mf(x)\right)^{\frac{\alpha q_1}{n}}} Mf(x) + \frac{(\|f\|_{L^{p_1,q_1}})^{\frac{\alpha q_1}{n}-1}}{\left(Mf(x)\right)^{\frac{\alpha q_1}{n}-1}} \|f\|_{L^{p_1,q_1}}\right] \\
&= C\left[\frac{(\|f\|_{L^{p_1,q_1}})^{\frac{\alpha q_1}{n}}}{\left(Mf(x)\right)^{\frac{\alpha q_1}{n}-1}} + \frac{(\|f\|_{L^{p_1,q_1}})^{\frac{\alpha q_1}{n}}}{\left(Mf(x)\right)^{\frac{\alpha q_1}{n}-1}}\right] \\
&\leq C(\|f\|_{L^{p_1,q_1}})^{\frac{\alpha q_1}{n}} \left(Mf(x)\right)^{1-\frac{\alpha q_1}{n}}
\end{aligned}
$$

Definisikan $\frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1}\left(1 - \frac{\alpha q_1}{n}\right)$ dan $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{\alpha}{n}$, sehingga dapat ditulis

$$|I_a f(x)| \leq C(\|f\|_{L^{p_1,q_1}})^{\frac{\alpha q_1}{n}} \left(Mf(x)\right)^{1-\frac{\alpha q_1}{n}} \leq C\|f\|_{L^{p_1,q_1}}^{1-\frac{p_1}{p_2}} \left(Mf(x)\right)^{\frac{q_1}{q_2}}$$

Terakhir, menggunakan sifat keterbatasan $Mf$ di ruang *Morrey* yang terdapat pada teorema 4.2 maka

$$\|I_a f(x)\|_{L^{p_2,q_2}} \leq C\|f\|_{L^{p_1,q_1}}$$

untuk suatu konstanta C yang bergantung pada $p_1$dan $q_1$.

## 4.2 Kesadaran akan Keterbatasan Ilmu Pengetahuan

Berdasarkan surah ke-17 ayat 85 yang telah disebutkan pada bagian sebelumnya, ilmu atau pengetahuan yang dimiliki oleh seorang manusia terbatas. Tapi, tentu hal ini bukan berarti menjadikan manusia tidak berusaha untuk mencari ilmu, karena sesungguhnya menuntut ilmu itu wajib bagi setiap muslim seperti yang disebutkan dalam hadis riwayat Ibnu Majah No. 224, dari Anas bin Malik ra, yang dishahihkan oleh al-Albani dalam Shahih al-Jaami ash-Shaghir No. 3913 sebagai berikut:

عن أنس بن مالك قال: قال رسول الله صلى الله عليه وسلم: طلب العلم فريضة على كل مسلم.

Artinya: *Dari Anas bin Malik beliau berkata: Rasulullah SAW bersabda "menuntut ilmu itu wajib bagi setiap muslim"* (Al-Qazwani, 2000).

Selain itu, Ibn Qayyim *rahimahullah* juga menjelaskan:

ولو لم يكن في االعلم إلا القرب من رب العالمين والالتحاق بعا لم الملائكة وصحبة الملأ الأعلى لكفى به فضلا وشرفا فكيف وعز الدنيا ولآخرة منوط به ومشروط بحصوله

Artinya: *"Seandainya keutamaan ilmu hanyalah kedekatan pada Rabbul 'alamin (Rabb semesta alam), dikaitkan dengan para malaikat, berteman dengan penduduk langit, maka itu sudah mencukupi untuk menerangkan akan keutamaan ilmu. Apalagi kemuliaan dunia dan akhirat senantiasa meliputi orang yang berilmu, dan dengan ilmulah syarat untuk mencapainya."* (Al- Jauziyah, 2012)

Berdasarkan hadist di atas maka dapat simpulkan tentang keutamaan orang yang berilmu sebagai berikut (Manik, 2020):

a. Allah SWT akan mempermudah jalan bagi para penimba ilmu menuju surga-Nya.
b. Sebagai penghormatan kepada penuntut ilmu malaikat-malaikat *tawadhu'* kepada mereka (penuntut ilmu).

c. Mahkluk yang ada di langit dan di bumi, termasuk ikan di lautan juga akan memohonkan ampunan kepada orang yang berjuang menuntut ilmu.
d. Orang berilmu lebih utama daripada ahli ibadah. Perbandingannya seperti bulan di malam badar dari bintang-bintang lainnya.
e. Ulama/orang-orang yang berilmu itu adalah pewaris para nabi.

Walaupun memang ilmu memiliki derajat yang tinggi di hadapan Allah, namun sesungguhnya etika/adab adalah hasil nyata dari ilmu itu sendiri. Para ulama lebih mengutamakan adab dibandingkan dengan ilmu, seperti pada beberapa nasihat para ulama sebagai berikut (Hanafi, 2017):

a. Imam Ibnul Mubarak berkata: "*Aku belajar adab selama tiga puluh tahun, dan aku belajar ilmu selama dua puluh tahun."*
b. Imam Syafi'i berkata: "*Ilmu bukanlah diukur dengan apa yang telah dihafal oleh seseorang, tetapi diukur dengan apa yang bermanfaat bagi dirinya*."
c. Imam Ibnu Wahab berkata: "*Aku lebih mengutamakan belajar adab kepada Imam Malik dibandingkan dengan belajar ilmu darinya.*"

Tapi, sangat disayangkan bahwa kini banyak orang yang menuntut ilmu dengan niat yang kurang baik, seperti berniat untuk tidak mengamalkannya, atau untuk menyombongkan diri sendiri di hadapan orang lain, bahkan lebih parahnya lagi menggunakan ilmu untuk men-*judge* orang lain. Oleh karena itu, adab sangat diperlukan agar ilmu yang kita peroleh juga bisa berkah dan bermanfaat.

Selain berhati-hati dalam menyikapi ilmu, tak kalah pentingnya juga memperhatikan bagaimana adab kita kepada orang yang menyalurkan ilmu kepada kita. Nabi Musa as menujukkan salah satu adab kepada guru yang terdapat pada Surah Al-Kahfi ayat 65-66 berbunyi

فَوَجَدَا عَبْدًا مِّنْ عِبَادِنَآ ءَاتَيْنَٰهُ رَحْمَةً مِّنْ عِندِنَا وَعَلَّمْنَٰهُ مِن لَّدُنَّا عِلْمًا٦٥ قَالَ لَهُۥ مُوسَىٰ هَلْ أَتَّبِعُكَ
عَلَىٰٓ أَن تُعَلِّمَنِ مِمَّا عُلِّمْتَ رُشْدًا٦٦

Artinya: *Lalu, mereka berdua bertemu dengan seorang hamba diantara hamba-hamba Kami, yang telah Kami berikan rahmat kepadanya dari sisi Kami, dan telah Kami ajarkan ilmu kepadanya dari sisi Kami. Musa berkata kepadanya, "Bolehkah aku mengikutimu agar engkau mengajarkan kepadaku (ilmu yang benar) yang telah diajarkan kepadamu (untuk menjadi) petunjuk?"* (Awaludin, 2012)

Ketika nabi Musa As meminta izin kepada nabi Khidir As untuk mengikutinya agar Khidir As mengajarkan ilmu kepadanya. Tafsir MarāḥLabīd menjelaskan bahwasanya jawaban Khidir As pada saat itu ialah "Cukuplah bagimu kitab Taurat sebagai ilmu dan bagi kaum Bani Israil, lupakanlah yang lainnya." Lalu Musa berkata, "Sesungguhnya Allah telah memerintahkannya kepadaku." Maka saat itu terjadilah perdebatan kecil antara nabi Musa As dan nabi Khidir As yang menganggap bahwa nabi Musa As tidak akan sanggup bersabar dalam mengikutinya, namun nabi Musa As meyakinkannya bahwasanya dia sanggup untuk bersabar dalam mengikutinya. Setelah perdebatan kecil tersebut, pada akhirnya nabi Khidir As mengijinkan nabi Musa As untuk mengikutinya dengan syarat tidak boleh bertanya mengenai apapun yang dilihat oleh nabi Musa As sampai nabi Khidir AS yang akan menjelaskannya sendiri. Lalu, nabi Musa As menyetujuinya, pada saat itulah awal perjalanan nabi Musa As mengikuti nabi Khidir As untuk memperoleh ilmu pengetahuan (Nawawi al-Jawi, n.d.).

Dari ayat tersebut dapat kita lihat bahwa sekalipun Musa As merupakan seorang nabi namun tetap *tawadhu'* di depan Khidir As sebagai gurunya, dengan akhlak yang baik dan bahasa yang indah ketika beliau berbicara kepada Khidir As meminta izin untuk mengikutinya agar beliau bisa mendapatkan ilmu yang belum diketahuinya (Khasanah, 2021). Kisah tersebut mengajarkan kita sebagai seorang pelajar, penuntut ilmu, hendaknya tetap hati-hati dalam bersikap serta rendah hati/*tawadhu'* kepada guru yang mengajarkan kita ilmu. Tak hanya itu, penting bagi kita untuk menyadari keterbatasan kita sebagai seorang hamba, bahwa sesungguhnya seluruh ilmu pengetahuan di muka bumi ini milik Allah, tiada seorang pun yang mengetahui sesuatu dari pengetahuan-Nya melainkan bagi apa yang dikehendaki oleh-Nya. Jika kita menuntut ilmu dengan cara yang tidak disukai oleh Allah, seperti berlaku kurang baik di hadapan guru, maka tidak menutup kemungkinan ketidakberkahan ilmu yang kita peroleh bisa menjadi dampaknya.

Di dalam Al-Qur'an menggunakan berbagai istilah yang berkaitan dengan ilmu pengetahuan. Misalnya, mengajak melihat, memperhatikan, dan mengamati kejadian-kejadian (Fathir: 27, Al-Hajj: 5, Luqman: 20, Al-Ghasyiyah: 17-20, Yunus: 101, Al-Anbiya': 30), untuk membaca (Al- 'Alaq: 1-5), untuk mengetahui suatu kejadian (Al-An'am: 97, Yunus: 5), untuk mendapatkan jalan (An-Nahl: 15), untuk menjadikan manusia yang aktif menalar berbagai fenomena yang terjadi (An-Nahl: 11, Yunus: 101, Ar-Ra'd: 4, Al-Baqarah: 164, Ar-Rum: 24, Al-Jasiyah: 5, 13), menjadi *ulul albab* (Ali-'Imran: 7,190-191, Az-Zumar: 18), dan mengambil pelajaran (Yunus: 3) (Fakhry, 2010). Keyakinan terhadap segala penciptaan Allah mendorong keyakinan tentang ketundukan, karakteristik dan keteraturan dari benda-benda yang Allah ciptakan (*sunatullah*), sehingga manusia bisa mempelajarinya. Semua ini akan memungkinkan tumbuhnya sikap positif, kagum akan kebesaran, kekuasaan dan kasih sayang Allah, yang semua itu menjadikan motivasi untuk bersyukur, meningkatkan keimanan dan ketaqwaan kepada Allah yang Maha Kuasa (Darmana, 2016).

Selain mengajarkan kita untuk berhati-hati dalam menyikapi ilmu, terbatasnya ilmu pengetahuan mengajari kita akan pentingnya mensyukuri ilmu pengetahuan. Kita menyadari bahwa pengetahuan kita memiliki batasan, maka kita lebih menerima bahwa ada begitu banyak hal yang belum kita ketahui. Ini mendorong apresiasi terhadap pengetahuan yang kita miliki, karena kita mengakui bahwa pengetahuan itu sendiri adalah anugerah yang perlu dihargai. Selain itu, kita menjadi lebih terbuka terhadap kebutuhan untuk terus belajar dan mengembangkan pemahaman kita. Kita merasa perlu belajar dan mencari pengetahuan baru. Mensyukuri ilmu pengetahuan bermakna menghargai kesempatan untuk belajar dan berkembang, serta memanfaatkannya sebaik mungkin untuk meningkatkan pemahaman kita tentang dunia.

# BAB V

# PENUTUP

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembuktian yang telah dibahas, maka operator integral fraksional $I_\alpha$ yang didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

merupakan operator yang terbatas di ruang *Morrey* yang dimodifikasi dari $L^{p_1,q_1}(\mathbb{R}^n)$ ke $L^{p_2,q_2}(\mathbb{R}^n)$. Sehingga, berlaku ketakasamaan

$$\|I_\alpha f(x)\|_{L^{p_2,q_2}} \leq C_{p_1,q_1} \|f\|_{L^{p_1,q_1}}$$

jika dan hanya jika $1 < p_1 < q_1 < \frac{n}{\alpha}, \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p_1}\left(1 - \frac{\alpha q_1}{n}\right)$ dan $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{\alpha}{n}$.

## 5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya, penelitian mengenai operator integral fraksional dapat diteliti keterbatasannya di ruang lain selain ruang *Morrey.* Selain itu, belum banyak yang membahas mengenai bentuk dari perluasan operator integral fraksional (operator *Riesz*) seperti operator *Bessel-Riesz* beserta keterbasannya di ruang terkait.

## DAFTAR PUSTAKA


Adams, D. R. (1975). A note on Riesz potentials. *Duke Mathematical Journal*, *42*(4). https://doi.org/10.1215/S0012-7094-75-04265-9

Ad-Dimasyqi, A.-I. A. F. I. I. K. (2012). *Tafsir Ibnu Kasir Juz 15*.

Al- Jauziyah, M. ibn A. B. ibn A. ibn S. S. ibn Q. (2012). *Miftahu Darussa'adah wa Mansyur wilayatul al-Ilmi wal Iradah*. Dar Kutub al-Imiyah.

Al-Qazwani, I. M. (2000). *Sunan Ibnu Majah Cet. 2*. Darussalam.

Alwi, W. (2021). *Analisis Real* (E. Santoso, Ed.). Penerbit Perkumpulan Rumah Cemerlang Indonesia (PRCI).

Awaludin, L. (2012). *Ummul Mukminin: Al-Qur'an dan Terjemahan untuk Wanita*. Wali.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (fourth edition). John Wiley & Sons, Inc.

Bielawa, E., Dong, Z., & Nydam, P. (2022). *Dyadic Decomposition Approaches in Harmonic Analysis and the T(1) Theorem*.

Castillo, R. E., & Rafeiro, H. (2016). *An Introductory Course in Lebesgue Spaces*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30034-4

Chiarenza, F., & Frasca, M. (1987). Morrey Spaces and Hardy-Littlewood Maximal Function. *Rendiconti Del Seminario Matematico Della Università Di Padova*, 273–279.

Dangga, A. U. L. (2010). *Perluasan Operator Linear Terbatas pada Suatu Ruang Hilbert* [Skripsi, Universitas Pendidikan Indonesia]. https://repository.upi.edu/108368/4/ta_mtk_0611188_chapter3.pdf

Darmana, A. (2016). Internalisasi Nilai Tauhid dalam Pembelajaran Sains. *Jurnal Pendidikan Islam*, *27*(1), 66. https://doi.org/10.15575/jpi.v27i1.496

Fakhry, J. (2010). Sains dan Teknologi dalam Al-Qur'an dan Implikasinya dalam Pembelajaran. *Ta'dib*, *15*(1), 121–142.

Gehret, A. (2019). Lecture Notes. In *University of California*.

Gunawan, G. (2007). Pembuktian Tentang Keterbatasan Operator Integral Fraksional Melalui Fakta Ukuran Lebesgue Di Ruang Lebesgue. *Jurnal Matematika*, *7*(1).

Gunawan, G., & Gunawan, H. (2006). *Keterbatasan Operator RIesz di Ruang Morrey*. *3*(1).

Gunawan, H. (2003). A Note on The Generalized Fractional Integral Operators. *J. Indones. Math. Soc*, *9*(1), 39–43.

Hanafi. (2017). gensi Pendidikan Adab dalam Islam. *Saintifika Islamica: Jurnal Kajian Keislaman*, *4*(1), 69–70.

Hao, C. (2016). *Introduction to Harmonic Analysis*. Institute of Mathematics, AMSS, CAS. http://www.math.ac.cn/kyry/hcc/teach/201912/P020200428625504254918.pdf

Hazmy, S. Al, Budhi, W. S., & Soeharyadi, Y. (2019). Boundedness of Modified Fractional Integral Operators on Morrey Spaces. *Journal of Physics: Conference Series*, *1127*, 012061. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1127/1/012061

Idris, M., Gunawan, H., Lindiarni, J., & Eridani. (2016). *The boundedness of Bessel-Riesz operators on Morrey spaces*. 020006. https://doi.org/10.1063/1.4946909

Kantorovich, L. V., & Akilov, G. P. (1982). *Functional Analysis*. Elsevier. https://doi.org/10.1016/C2013-0-03044-7

Karageorgis, P. (2018). *Calculus*. Trinity College Dublin.

Khasanah, W. (2021). Kewajiban Menuntut Ilmu dalam Islam. *Jurnal Riset Agama*, *1*(2), 296–307. https://doi.org/10.15575/jra.v1i2.14568

Khoirunnisa, K. (2015). *Pengantar Teori Ukuran dan Integral Lebesgue*. Universitas Gadjah Mada.

Kinnunen, J., Lehrbäck, J., & Vähäkangas, A. (2021). *Maximal Function Methods for Sobolev Spaces* (Vol. 257). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/surv/257

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*.

Levermore, C. D. (2009). *Integral Operators*. University of Maryland. https://math.umd.edu/~lvrmr/2008-2009-S/Classes/AMSC674/IntOps.pdf

Manik, W. (2020). Kewajiban Menuntut Ilmu. *WARAQAT : Jurnal Ilmu-Ilmu Keislaman*, *2*(2), 17. https://doi.org/10.51590/waraqat.v2i2.63

Nawawi al-Jawi, M. (n.d.). *Marâh Labîd Tafsir an-Nawawi*. Maktabah Usaha Keluarga Semarang.

Nelson, G. S. (2015). *A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration*.

Peetre, J. (1969). On the Theory of Lp,\lambda Spaces. In *JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS* (Vol. 4).

Robinson, J. C. (2020). *An Introduction to Functional Analysis*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781139030267

Rosyadi, D., & Faturrahman. (2009). *Tafsir Al Qurthubi*. Pustaka Azzam.

Sawano, Y., Di Fazio, G., & Hakim, D. I. (2020). *Morrey Spaces*. Chapman and Hall/CRC. https://doi.org/10.1201/9780429085925

Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah*. Lentera Hati.

Sihwaningrum, I. (2016). Ketaksamaan Tipe Lemah untuk Operator Integral Fraksional Di Ruang Morrey Atas Ruang Metrik Tak Homogen. *Prosiding Konferensi Nasional Penelitian Matematika Dan Pembelajarannya*, 924–933. https://publikasiilmiah.ums.ac.id/bitstream/handle/11617/7039/101_93_Makalah%20Rev%20Idha%20Sihwaningrum.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Stein, E. M., & Murphy, T. S. (1993). *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals* (Vol. 43). Princeton University Press.

Sumarni. (2022). *Kelengkapan Ruang Bernorma-2 pada Ruang l^p.* [Tesis, Universitas Hasanuddin]. https://repository.unhas.ac.id/id/eprint/22890/1/H011171001_skripsi_06-09-2022%20bab%201-2.pdf

Tao, T. (2009). *Exploring the toolkit of Jean Bourgain*. https://arxiv.org/pdf/2009.06736.pdf

Tao, T. (2018). *MATH 247A : Fourier analysis*. Universitas California. https://www.math.ucla.edu/~tao/247a.1.06f/notes3.pdf

Ulfa, R. A., Ansori, M., Suharsono, & Sutrisno, R. O. L. dari R. barisan ke R. B. R. O. L. dari R. barisan ke R. B. A. (2017). Representasi Operator Linear dari Ruang barisan l_3 ke Ruang Barisan l_3/2. *Prosiding Seminar Nasional Metode Kuantitatif*.

Varberg, D., Purcell, E., & Rigdon, S. (2006). *Calculus* (9th edition). Pearson.

## RIWAYAT HIDUP

Zira Gemilia Putri, atau yang biasa disapa dengan panggilan Zira, merupakan anak terakhir dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Bahruddin dan Ibu Desmi Ekawati yang dilahirkan di Tanjung Pinang, 22 Juli 2000. Rekam jejak pendidikan penulis dari pendidikan dasar hingga sekolah menengah akhir ditempuh di kampung halaman penulis yang bertempat di Kabupaten Natuna, Kepulauan Riau. Pendidikan dasar penulis ditempuh di TK Pertiwi Ranai dan lulus pada tahun 2006, dilanjutkan di SD Negeri 004 Ranai dan lulus pada tahun 2012. Kemudian, penulis melanjutkan jenjang sekolah menengah pertama di MTs Negeri 2 Natuna dan lulus pada tahun 2015. Setelah itu, untuk jenjang sekolah menengah akhir, penulis melanjutkan pendidikan di SMA Negeri 1 Bunguran Timur dan lulus pada tahun 2018. Setelah dinyatakan lulus dari SMA, pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan di bangku perkuliahan setelah diterima sebagai mahasiswa di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SBMPTN.

Selama menempuh pendidikan di bangku perguruan tinggi, penulis bukanlah mahasiswa yang cukup aktif dalam mengikuti kegiatan-kegiatan yang ada di lingkungan kampus. Tetapi, untuk sesekali penulis mengikuti kepanitian yang diadakan oleh HMJ pada tahun 2019, dan juga aktif sebagai *copywriter* di salah satu komunitas dakwah yang berada di luar lingkungan kampus pada tahun 2018-2022. Selain itu, penulis cukup aktif membuat konten bertemakan *self-improvement* di jejaring sosial media Instagram (https://www.instagram.com/ziragemilia). Penulis dapat dihubungi melalui *e-mail*: ziragemiliaputri@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Zira Gemilia Putri
NIM : 18610041
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Keterbatasan Operator Integral Fraksional di Ruang *Morrey* yang Dimodifikasi
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si.

| No | Tanggal | Hal | Tanda Tangan |
|---|---|---|---|
| 1. | 30 Agustus 2023 | ACC Pengajuan Topik | 1. |
| 2. | 11 September 2023 | Konsultasi Bab I, II, dan III | 2. |
| 3. | 22 September 2023 | Revisi Bab I, II, dan III | 3. |
| 4. | 25 September 2023 | Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II | 4. |
| 5. | 03 Oktober 2023 | Revisi Kajian Agama Bab I dan II | 5. |
| 6. | 16 Oktober 2023 | ACC Seminar Proposal | 6. |
| 7. | 20 Oktober 2023 | ACC Kajian Agama | 7. |
| 8. | 24 Januari 2024 | Konsultasi Bab IV | 8. |
| 9. | 28 Februari 2024 | Revisi Bab II | 9. |
| 10. | 29 Februari 2024 | Revisi Bab IV | 10. |
| 11. | 07 Maret 2024 | Konsultasi Kajian Agama Bab IV | 11. |
| 12. | 21 Maret 2024 | Konsultasi Bab IV dan V | 12. |
| 13. | 22 Maret 2024 | ACC Seminar Hasil | 13. |
| 14. | 26 Maret 2024 | ACC Kajian Agama BAB IV | 14. |
| 15. | 21 Mei 2024 | Konsultasi Revisi Seminar Hasil | 15. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16. | 30 Mei 2024 | Konsultasi Revisi Seminar Hasil | 16. |
| 17. | 12 Juni 2024 | Konsultasi Revisi Seminar Hasil | 17. |
| 18. | 13 Juni 2024 | Konsultasi Revisi Seminar Hasil | 18. |
| 19. | 25 Juni 2024 | ACC Sidang Skripsi | 19. |
| 20. | 28 Juni 2024 | ACC Keseluruhan | 20. |

Malang, 28 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005