BARISAN *R*-KONVERGEN DI RUANG METRIK *CONE*

SKRIPSI

OLEH
PINGKA ARI SAFITRA WIRATNO
NIM. 200601110078

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

BARISAN *R*-KONVERGEN DI RUANG METRIK *CONE*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Pingka Ari Safitra Wiratno
NIM. 200601110078

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

BARISAN *R*-KONVERGEN DI RUANG METRIK *CONE*

SKRIPSI

Oleh
Pingka Ari Safitra Wiratno
NIM. 200601110078

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 26 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dian Maharani, M.Si	Erna Herawati, M.Pd
NIP. 199400217 202012 2 001	NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

BARISAN *R*-KONVERGEN DI RUANG METRIK *CONE*

SKRIPSI

Oleh
Pingka Ari Safitra Wiratno
NIM. 200601110078

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 28 Juni 2024

Ketua Penguji	: Dr. Hairur Rahman, S.Pd., M.Si.,	…………………
Anggota Penguji 1	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.,	…………………
Anggota Penguji 2	: Dian Maharani, M.Si.,	…………………
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd.,	…………………

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan dibawah ini:

Nama	:	Pingka Ari Safitra Wiratno
NIM	:	200601110078
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Barisan R-Konvergen di Ruang Metrik *Cone*

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halam terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juni 2024

METERAI TEMPEL
B74ALX228004767

Pingka Ari Safitra Wiratno
NIM. 200601110078

MOTO

“Jika diperintahkan pada sesuatu, maka lakukanlah semampu kalian.”

-HR. Bukhari no.7288 dan Muslim no. 1337

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmaanirrahiim

Alhamdulillahi robbil aalamiin

Dengan segenap hati skripsi ini dipersembahkan untuk :

Seluruh keluarga terkhusus Bapak Suratno dan Ibu Dwi Ernawati yang memberikan kesempatan bagi penulis untuk memilih jalan perjuangan selama ini. Mendukung setiap langkah dan keputusan penulis hingga dapat menyelesaikan tugas akhir dengan doa–doa dan harapan yang selalu dilangitkan. Untuk diriku yang terus berusaha tidak menyerah dan mengakui bahwa rencana Allah selalu lebih indah, dan tak ada daya kekuatan tanpa kasih sayang Allah yang begitu luas memberikan penulis kesempatan untuk selalu memperbaiki diri setiap harinya melalui proses menyelesaikan tugas akhir.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillaahirobbil'alamiin, penulis ucapkan kepada Allah SWT atas rahmat dan pertolongan-Nya, sehingga penyusunan skripsi yang berjudul "Barisan *R*-Konvergen di Ruang Metrik *Cone*" ini dapat terselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam kami haturkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW yang telah memberikan uswatun hasanah kepada kita dalam menjalankan kehidupan ini. Semoga kita tergolong orang-orang yang beriman dan mendapatkan syafaatnya di hari akhir kelak, Aamiin.

Penulis sadar bahwa terdapat beberapa pihak yang membantu dalam proses penyelesaian skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ibu Dian Maharani, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang berkenan membimbing penulis dalam penyusunan skripsi dari awal hingga akhir.
5. Ibu Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang berkenan membimbing penulis dalam penulisan kajian topik Al-Qur'an dalam penyusunan skripsi ini.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan dukungan dan saran pada penyusunan skripsi ini.
7. Bapak Suratno dan Ibu Dwi Ernawati serta seluruh keluarga yang telah mendo'akan sekaligus memberi dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Seluruh mahasiswa konsorsium analisis dari angkatan 2018, 2019, dan 2020 khususnya Ferira Febri, Dwi Ajeng yang turut membangun motivasi untuk mengerjakan sripsi ini.

9. Seluruh penghuni kost Cak To yang turut memberikan dukungan dan semangat dalam menghadapi rintangan pengerjaan skripsi ini.
10. Seluruh member seventeen sebagai boygroup Korea yang telah memberikan karya lagu terbaiknya sebagai lagu pendamping yang digunakan penulis dalam penyususnan skripsi.
11. Pihak–pihak lain yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Berkah dan ridho dari Allah-lah penyusunan ini dapat terselesaikan. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis denngan rendah hati memohon kritik dan saran yang membangun dari pembaca. Penulis juga berharap semoga penelitian ini dapat bermanfaat untuk penelitian selanjutnya dan mohon maaf atas segala kekurangan.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 28 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

r	:	*roughness degree* (derajat kekasaran)
P	:	*Cone*
(x_n)	:	Barisan
$int\ P$	:	Himpunan semua titik-titik interior dari P
$\|.\|$	:	Norm
$d_p(x,y)$	:	Metrik *cone*
(X,d_p)	:	Ruang metrik *cone*
$LIM^r x_n$	:	Himpunan seluruh titik limit-r dari barisan (x_n)
$x_n \xrightarrow{r} x$	:	Barisan (x_n) r-konvergen ke x
$\ll$	:	*Much Less Then* (Sangat Kurang Dari)

ABSTRAK

Wiratno, Pingka Ari Safitra.2024. Barisan *R*-Konvergen di Ruang Metrik *Cone*. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dian Maharani, M.Si. (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata kunci: Ruang Metrik, Ruang Metrik *Cone*, konvergen, *r*-konvergen.

Konsep Ruang Metrik *Cone* merupakan bentuk perluasan dari ruang metrik. Perbedaan metrik dengan metrik *cone* terletak pada kodomainnya yang merupakan ruang Banach dengan menggunakan notasi urutan parsial. Barisan di ruang metrik memiliki sifat kekonvergenan. Selain sifat kekonvergenan, terdapat juga sifat barisan *r*-konvergen di ruang metrik. Pada beberapa barisan di ruang metrik *cone* juga memiliki sifat *r*-konvergen..Dalam penelitian ini akan dibahas tentang barisan *r*-konvergen dan *r*-Cauchy di ruang metrik *cone*. Metode penelitian yang digunakan adalah studi Pustaka dengan mengumpulkan sumber yang relevan dengan topik. Dari hasil penelitian diperoleh sifat-sifat barisan *r*-konvergen melalui pembuktian teorema-teorema yang terkait dengan barisan *r-konvergen* di ruang metrik *cone,* hubungan antar dua barisan *r*-konvergen di ruang metrik *cone*, serta *r-Cauchy* di ruang metrik *cone*.

ABSTRACT

Wiratno, Pingka Ari Safitra. 2024. **Sequences of R-Convergent in Cone Metric Spaces**. Undergraduate Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dian Maharani, M.Si. (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Metric Spaces, Cone Metric Spaces, convergent, r-convergent.

The concept of cone metric spaces is an extension of metric spaces. The difference between a metric and a cone metric lies in the codomain, which is a Banach space equipped with a partial order notation. Sequences in a metric space possess convergence properties. In addition to convergence, there is also the property of r-convergence sequences in a metric space. Some sequences in a cone metric space also exhibit r-convergence properties. This study discusses r-convergent and r-Cauchy sequences in cone metric spaces. The research method used is a literature study by collecting sources relevant to the topic. The research results obtained properties of r-convergent sequences through the proof of theorems related to r-convergent sequences in cone metric spaces, the relationship between two r-convergent sequences in cone metric spaces, and r-Cauchy sequences in cone metric spaces.

مستخلص البحث

ويراتنو، بينجكا آري سافيترا. ٢٠٢٤. الخط المتقارب $R-$ في منسا حة المتري المخروطي. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة الأولي: (١) ديان مهاراني، الماجستيرة. المشرفة الثانية (٢) إرنا هيراواتي، الماجستيرة.

الكلمات المفتاحية: الفضاء المتري، محزوطا الفضاء المتري، التقارب، التقارب r.

مفهوم الفضاء المتري المخروطي هو الشكل الموسع من الفضاء المتري. الفرق بين الفضاء المتري والفضاء المتري المخروطي في مجاله الرمزي الذي هو فضاء باناخ باستخدام ترميز الترتيب الجزئي. الصفوف في الفضاء المتري لها خاصية التقارب. و إلى جانب خاصية التقارب، هناك أيضًا خاصية الخطوط المتقاربة في الفضاء المتري المخروط أيضا علي حاصية متقاربة. وفي هذه الدراسة صفو المتقرب r و r Cauchy في الفضاء المتري المخروطي. و مستخدم هذا البحث بطريقة دراسة الأ دبيت من خلال جمع المصادر التي لها صلّة بالموضوع . ومن نتائج هذه الدراسة هي قد يتم الحصول على خصا ئص الخط المتقرب r من خلال إثبات النظريات المتعلقة بالحط التقارب r في الفضاء المتري المخروطي، والعلاقة بين حطين متقاربيىن r في الفضاءالمتري المخروطي و r Cauchy في الفضاء المترئ المخروطئ .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep ruang metrik diperkenalkan pertama kali oleh matematikawan yang bernama Murice Frechet (1906). Metrik adalah suatu fungsi dengan domain suatu himpunan tak kosong yang menuju ke bilangan riil dan memenuhi sifat-sifat tertentu (Rahmat dkk, 2021). Ruang metrik merupakan suatu himpunan yang di dalamnya berlaku aturan metrik. (X, d) adalah ruang metrik di mana X adalah himpunan dan d (*distance*) adalah metrik pada X, fungsi didefinisikan pada $X \times X$ yang mana untuk seluruh anggota $x, y, z \in X$, d (*distance*) memenuhi:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) \in \mathbb{R}$, $d(x, y) < \infty$
2. $d\ (x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Kreyszig, 1978).

Seiring dengan perkembangan zaman, konsep ruang metrik berkembang dengan pesat contohnya seperti Huang Long Guang dan Zhang Xian (2007)yang memperkenalkan ruang metrik *cone*. Selanjutnya banyak penelitian yang mengkaji lebih dalam tentang ruang metrik *cone* seperti Bahtiar, dkk (2014) dengan penelitiannya yang berjudul “Konsep Dasar Ruang Metrik *Cone*”. Perbedaan dari ruang metrik dengan ruang metrik *cone* terletak pada kodomainnya. Kodomain dari ruang metrik yaitu bilangan riil, sedangkan kodomain dari ruang metrik *cone* adalah ruang *Banach* yaitu ruang bernorma yang lengkap. Definisi dari *cone* sendiri yaitu $P \subset E$ dan P dikatakan *cone* jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut:

1. Himpunan P bukan himpunan kosong, dan $P \neq \{0\}$.
2. Himpunan P merupakan himpunan tertutup.
3. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b \geq 0$, jika $x, y \in P$ maka $ax + by \in P$.
4. $x \in P$ dan $-x \in P$ maka $x = 0$ (Huang & Zhang, 2007).

Selanjutnya, pada *cone* P berlaku urutan parsial sebagai berikut :

1. $x \preccurlyeq y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$, untuk setiap $x, y \in E$.
2. $x \prec y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$, tetapi $x \neq y$.
3. $x \ll y$ jika dan hanya jika $y - x \in int\ P$ (Huang & Zhang, 2007).

Notasi tersebut merupakan notasi yang menjadi dasar pengertian pada notasi yang terdapat di dalam definisi metrik *cone*. Misalkan X himpunan tak kosong dan E ruang Banach atas lapangan riil yang dilengkapi dengan urutan parsial $\preccurlyeq$ terhadap *cone* $P \subseteq E$. Didefinisikan pemetaan $d_p : X \times X \to E$ di mana $d_p(x, y)$ sebagai vektor di *cone P* sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

1. $0 \preccurlyeq d_p(x, y)$ dan $d_p(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
2. $d_p(x, y) = d_p(y, x)$
3. $d_p(x, y) \preccurlyeq d_p(x, z) + d_p(z, y)$

Maka d_p yang memenuhi ketiga kondisi si atas disebut metrik *cone* pada X, sedangkan (X, d_p) disebut ruang metrik *cone* **(**Huang & Zhang, 2007)**.**

Beberapa barisan di ruang metrik memiliki sifat kekonvergenan. Barisan (x_n) di ruang metrik (X, d) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n \geq k$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$. Beberapa barisan di ruang metrik *cone* juga memiliki sifat kekonvergenan yang akan dibahas lebih lanjut pada pembahasan.

Sebagaimana firman Allah SWT dalam Q.S An-Najm ayat 39 - 40

وَأَن لَّيْسَ لِلْإِنسَٰنِ إِلَّا مَا سَعَىٰ ﴿٣٩﴾ وَأَنَّ سَعْيَهُۥ سَوْفَ يُرَىٰ ﴿٤٠﴾

Artinya: *"Dan bawasannya seorang manusia tiada memperoleh selain apa yang telah diusahakannya, dan bahwasannya usaha itu kelak akan diperlihatkan (kepadanya)."*(Kemenag RI, 2019).

Ibnu Katsir menjelaskan bahwa maksud dari kalimat *"manusia tiada memperoleh selain apa yang telah diusahakannya"* adalah seseorang tidak memperoleh pahala kecuali dari apa yang telah diusahakannya. Sedangkan menurut Syaikh Wahbah Az-Zuhaili, seorang manusia tidak akan mendapatkan apa-apa melainkan ganjaran usahanya dan balasan amal perbuatannya, dengan begitu ia tidak berhak menerima ganjaran atas suatu amal yang ia kerjakan. Buya menfasirkan ayat ini dengan lebih luas terhadap konteks kesuksesan dunia. Menurut Buya Hamka, hasil pekerjaan kita dapati sekedar usaha yang telah kita lakukan, kita akan mendapat sedikit atau tidak sama sekali jika kita malas. Tidak boleh menyalahkan orang lain atas hasil yang diperoleh. Selanjutnya dalam kalimat "*usaha itu kelak akan diperlihatkan (kepadanya)"*, Syaikh Wahbah Az-Zuhaili menjelaskan bahwa apa yang telah diusahakan akan dilihat oleh penduduk langit sebagai kehormatan dan kemuliaan bagi orang yang berbuat baik. Sedangkan bagi orang yang berbuat buruk, akan dilihat sebagai celaan dan hinaan.

Ayat tersebut menerangkan pentingnya ihktiar. Jika ingin mencapai apa yang diimpikan haruslah disertai dengan usaha yang sungguh-sungguh. Seperti halnya kesuksesan yang harus diraih dengan usaha yang tekun. Apa pun usaha dan amal perbuatan yang dilakukan, maka kelak akan diperlihatkan dan dibalaskan. Begitu pula kekonvergenan yang akan menuju ke suatu titik jika terdapat suatu bilangan asli dengan syarat tertentu sehingga barisan tersebut dikatakan konvergen.

Konsep ikhtiar sangat relevan dengan kekonvergenan, di mana dibutuhkan suatu usaha yang sungguh-sungguh untuk mencapai suatu tujuan.

Selain kekonvergenan yang telah dibahas sebelumnya, terdapat pula *rough convergence* yang diperkenalkan oleh Phu (2001) dengan penelitiannya tentang barisan *r*-konvergen di ruang linear bernorma. Selanjutnya, Banerjee & Mondal (2019) menerapkan *rough convergence* ini di ruang metrik *cone*. Dalam penelitiannya, Amar dan Mondal mendefinisikan kekonvergenan kasar di ruang metrik *cone* beserta sifat-sifat kekonvergenan kasar di ruang metrik *cone*. Sehingga penelitian ini dimaksudkan untuk mengkaji mengenai kekonvergenan kasar atau barisan *r*-konvergen di ruang metrik *cone.*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang sudah dijelaskan sebelumnya, maka rumusan masalah pada penelitian ini adalah "Bagaimana sifat-sifat barisan *r*-konvergen di ruang metrik *cone*?"

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian yang dapat diambil berdasarkan rumusan masalah di atas adalah menjelaskan tentang barisan *r*-konvergen di ruang metrik *cone*.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat membantu penelitian berikutnya terkait kekonvergenan kasar di ruang metrik *cone* dan dapat ditemukan sifat-sifat lainnya dengan *r*-konvergen di ruang metrik *cone*.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya membahas mengenai barisan *r*-konvergen dengan ruang yang digunakan hanyalah ruang metrik *cone*.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada subbab ini berisi dasar-dasar teori sebelum mengkaji sifat-sifat kekonvergenan kasar di ruang metrik *cone*.

2.1.1 Ruang Metrik

Dalam bilangan riil $\mathbb{R}$ terdefinisi fungsi jarak $d(x, y) = |x - y|$ dengan setiap pasangan titik $x, y \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.1 (Kreyszig, 1978) (X, d) adalah ruang metrik di mana X adalah himpunan tak kosong dan d (*distance*) adalah metrik pada X, fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}$ yang mana untuk seluruh anggota $x, y, z \in X$, d (*distance*) memenuhi :

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) \in \mathbb{R}$, $d(x, y) < \infty$
2. $d\ (x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Contoh 2.1 Difenisikan suatu fungsi $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$d(x, y) = |x - y| \ , \forall x, y \in \mathbb{R}$$

d merupakan metrik pada $\mathbb{R}$ dan $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$, akan dibuktikan d adalah metrik pada $\mathbb{R}$.

1. $d(x,y) \geq 0$

   Dari definisi $d(x,y) = |x - y|$ di mana$\forall x, y \in \mathbb{R}$, karena nilai mutlak selalu bernilai tak negartif, mengakibatkan nilai $d(x,y) = |x - y| \geq 0$. Karena $\forall x, y \in \mathbb{R}$ berlaku pula $d(x,y) = |x - y| \in \mathbb{R}$, dan karena $\forall x, y \in \mathbb{R}$ terbukti pula $d(x,y) = |x - y| < \infty$.

2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

   ($\Rightarrow$) Jika $d(x,y) = 0$ akan ditunjukkan bahwa $x = y$

   $d(x,y) = 0$

   $|x - y| = 0$

   $x - y = 0$

   $x = y$

   ($\Leftarrow$) Jika $x = y$, akan ditunjukkan bahwa $d(x,y) = 0$

   $x = y$

   $|x - y| = |x - x| = |0| = 0$

   Maka, $d(x,y) = 0$

3. $d(x,y) = d(y,x)$

   Diketahui, $d(x,y) = |x - y|$ dapat dituliskan dengan

   $|x - y| = |(-1)(y - x)| \ = |-1||y - x|$.

   Karena fungsi nilai mutlak selalu non negatif dan $|-1| = |1| = 1$ berakibat

   $|-1||y - x| = |1||y - x| = |y - x|$

   Sehingga

   $|x - y| = |y - x|$

   $d(x,y) = d(y,x)$

4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Dengan ketaksamaan segitiga, $d(x,y)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |x-z+z-y| \\ &\leq |x-z| + |z-y| \\ &= d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Karena telah terpenuhi dari $1-4$, maka d merupakan ruang metrik pada $\mathbb{R}$ dan $(\mathbb{R}, d)$ merupakan ruang metrik.

Selanjutnya akan dibahas mengenai contoh yang bukan termasuk ruang metrik.

2.1.2 Ruang Bernorma

Pengertian dari ruang bernorma didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2 (Kreyszig, 1978) Misalkan X suatu ruang vektor. Norm pada X adalah suatu fungsi bernilai riil yang dinotasikan oleh $\|.\|$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$ dan α suatu skalar berlaku:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \|.\|)$ disebut ruang bernorma.

Contoh 2.2: Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ merupakan suatu ruang vektor, didefinisikan suatu norm $\|x\| = |x_1| + |x_2|$, maka $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ adalah ruang bernorma.

Ambil sembarang $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in \mathbb{R}^2$ dimana $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$.

1. Karena $|x_i| \geq 0$ untuk setiap $i = 1,2$. Maka $\|x\| = |x_1| + |x_2| \geq 0$.

Dengan begitu terbukti bahwa $\|x\| \geq 0$

2. Akan dibuktikan bahwa $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

   $\Rightarrow$ Misalkan $\|x\| = 0$ akan ditunjukkan $x = 0$.

   Karena nilai mutlak $|x| \geq 0$ yang artinya $|x| = 0$ atau $|x| > 0$.

   Untuk $|x| = 0$ hanya akan terpenuhi ketika $x = 0$.

   Karena $\|x\| = 0$

   Maka $|x_1| + |x_2| = 0$

   Nilai yang terpenuhi ketika $|x_1| + |x_2| = 0$ adalah $x_1 = 0$ dan $x_2 = 0$.

   $\Leftarrow$ Misalkan $x = 0$, maka $x = (x_1, x_2) = (0,0)$ berakibat $\|x\| = |x_1| + |x_2| = |0| + |0| = 0$.

   Terbukti bahwa $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

3. Akan dibuktikan $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

   $$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| \\ &= |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2| = |\alpha|(|x_1| + |x_2|) \\ &= |\alpha|\|x\|\end{aligned}$$

4. Akan dibuktikan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

   $$\begin{aligned}\|x + y\| &= \|(x_1, x_2) + (y_1, y_1)\| \\ &= \|(x_1 + y_1), (x_2 + y_2)\| \\ &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| \\ &= |x_1| + |x_2| + +|y_1| + |y_2| \\ &= \|x\| + \|y\|\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah ruang bernorma.

Teorema 2.3 Setiap ruang bernorma X merupakan ruang metrik terhadap metrik d dengan $d(x,y) = \|x - y\|$ untuk setiap $x, y \in X$ (Ahsar K & Yulida, 2009).

Bukti:

1. Untuk setiap $x, y \in X$, menurut Definisi 2.2 pada sifat 1

   karena $\|x\| \geq 0$ berakibat bahwa $\|x - y\| \geq 0$ yang artinya $d(x,y) \geq 0$

2. Untuk setiap $x, y \in X$, menurut Definisi 2.2 pada sifat 2

   karena $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$ berakibat bahwa

   $\|x - y\| = 0$ jika dan hanya jika $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

   Artinya $d(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

3. Untuk setiap $x, y \in X$, meurut Definisi 2.2 pada sifat 3

   karena $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ berakibat bahwa

   $d(x,y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\|$

   $= |-1|. \|y - x\| = \|y - x\| = d(y,x)$

4. Untuk setiap $x, y \in X$, meurut Definisi 2.2 pada sifat 4

   karena $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ berakibat bahwa

   $d(x,y) = \|x - y\|$

   $= \|x - z + z - y\|$

   $\leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x,z) + d(z,y)$

   Terbukti bahwa $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Hal ini berarti bahwa setiap ruang bernorma merupakan ruang metrik terhadap metrik d dengan $d(x,y) = \|x - y\|$.

2.1.3 Kekonvergenan di Ruang Metrik

Sebelum dibahas lebih lanjut mengenai barisan konvergen dan *r*-konvergen di ruang metrik *cone*, akan dibahas terlebih dahulu tentang barisan konvergen di ruang metrik dan keterkaitannya dengan barisan *r*-konvergen di ruang metrik.

Definisi 2.4 Misalkan (x_n) barisan di ruang metrik (X, d), barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

Definisi 2.5 Barisan (x_n) di (X, d) dikatakan *r*-konvergen di mana $r \geq 0$ ke titik $x^* \in X$ jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku

$$d(x_n, x) < r + \varepsilon$$

Hal ini merupakan barisan *r*-konvergen denngan *r* yang merupakan derajat kekasaran. Untuk $r = 0$, barisan *r*-konvergen menjadi definisi barisan konvergen biasa di ruang metrik. Namun berbeda untuk kasus $r > 0$. Misalkan (y_n) adalah barisan yang konvergen ke x^* . Anggap bahwa elemen-elemen di (y_n) tidak ditetapkan dengan tepat, tetapi elemen-elemen (y_n) berbeda dengan elemen-elemen di (x_n) dalam metrik (jarak) dengan jumlah yang kurang dari atau sama dengan r, maka situasi yang terjadi secara matematis adalah:

$$d(y_n, x^*) < \varepsilon, \forall n \geq k$$

Begitu pula dengan jarak antara (x_n) dan (y_n) yaitu:

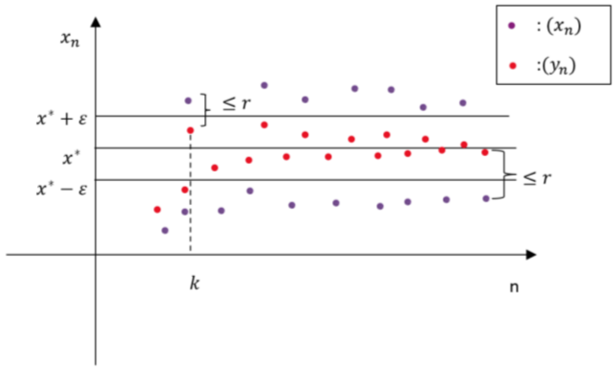
$$d(y_n, x_n) \leq r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dengan demikian diperoleh

$$d(x_n, x^*) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x^*) < r + \varepsilon$$

Oleh karena itu, barisan (x_n) r-konvergen ke $x^* \in X$.

Berikut akan diilustrasikan hubungan antara barisan (x_n), barisan (y_n), dan r sebagai derajat kekasarannya.



Gambar 2.1 Ilustrasi hubungan barisan $(x_n), (y_n)$, dan r

Contoh 2.5 Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$. Misalkan barisan $(x_n) = 1$ ketika n ganjl dan $(x_n) = 2$ ketika n genap, akan ditunjukkan barisan (x_n) tidak konvergen namun r-konvergen di ruang metrik.

Pada Contoh 2.1 telah mencakup pembuktian bahwa $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$ merupakan ruang metrik. Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa barisan (x_n) tidak konvergen.

1. Akan ditunjukkan barisan (x_n) tidak konvergen ke 1.

   Andaikan barisan (x_n) konvergen ke 1, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.

   Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ketika $(x_n) = 2$ untuk n genap maka

   $d(x_n, x) = |2 - 1| = |1| = 1$

Karena $1 > \frac{1}{2}$, artinya pernyataan $d(x_n, 1) < \frac{1}{2}$ salah. Akibatnya pengandaian bahwa barisan (x_n) konvergen ke 1 salah dan terbukti bahwa (x_n) tidak konvergen ke 1.

2. Akan ditunjukkan barisan (x_n) tidak konvergen ke 2.

   Andaikan barisan (x_n) konvergen ke 2, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.

   Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}$, ketika $(x_n) = 1$ untuk n ganjil maka

   $d(x_n, x) = |1 - 2| = |-1| = 1$

   Karena $1 > \frac{1}{2}$, artinya pernyataan $d(x_n, 2) < \frac{1}{2}$ salah. Akibatnya pengandaian bahwa barisan (x_n) konvergen ke 2 salah dan terbukti bahwa (x_n) tidak konvergene ke 2.

3. Akan ditunjukkan barisan (x_n) tidak konvergen ke x, dengan $x \neq 1$ dan $x \neq 2$.

   Andaikan barisan (x_n) konvergen ke x dengan $x \neq 1$ dan $x \neq 2$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.

   Pilih $\varepsilon = \min\{|1 - x|, |2 - x|\}$, ketika $(x_n) = 1$ untuk n ganjil maka

   $d(x_n, x) = |1 - x|$

   Karena di mana $\varepsilon = \min\{|1 - x|, |2 - x|\}$ adalah nilai minimum dari $|1 - x|$ dan $|2 - x|$ artinya $|1 - x| \geq \min\{|1 - x|, |2 - x|\}$ yang artinya pernyataan $d(x_n, x) < \min\{|1 - x|, |2 - x|\}$ salah. Akibatnya pengandaian bahwa barisan (x_n) konvergen ke x dengan x dengan $x \neq 1$ dan $x \neq 2$ untuk n ganjil salah.

Andaikan barisan (x_n) konvergen ke x dengan $x \neq 1$ dan $x \neq 2$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Pilih $\varepsilon = \min\{|1 - x|, |2 - x|\}$, ketika $(x_n) = 2$ untuk n genap maka

$d(x_n, x) = |2 - x|$

Karena di mana $\varepsilon = \min\{|1 - x|, |2 - x|\}$ adalah nilai minimum dari $|1 - x|$ dan $|2 - x|$ artinya $|2 - x| \geq \min\{|1 - x|, |2 - x|\}$ yang artinya pernyataan $d(x_n, x) < \min\{|1 - x|, |2 - x|\}$ salah. Akibatnya pengandaian bahwa barisan (x_n) konvergen ke x dengan x dengan $x \neq 1$ dan $x \neq 2$ untuk n ganjil salah.

Jadi, terbukti bahwa barisan (x_n) tidak konvergen ke x dengan $x \neq 1$ dan $x \neq 2$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa barisan (x_n) r-konvergen ke 1 dan 2 untuk $r = 1$.

Pertama akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) r-konvergen ke 1 dengan $r = 1$

1. Ketika $(x_n) = 1$ untuk n ganjil.

   Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $k = 1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku

   $d(x_n, x) = |1 - 1| = 0 < 1 + \varepsilon$

2. Ketika $(x_n) = 2$ untuk n genap.

   Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $k = 1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku

   $d(x_n, x) = |2 - 1| = 1 < 1 + \varepsilon$

Dengan begitu, barisan (x_n) konvergen ke 1 denngan $r = 1$.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) juga r-konvergen ke 2 dengan $r = 1$

1. Ketika $(x_n) = 1$ untuk n ganjil.

   Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $k = 1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku

   $d(x_n, x) = |1 - 2| = |-1| = 1 < 1 + \varepsilon$

2. Ketika $(x_n) = 2$ untuk n genap.

   Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $k = 1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku

   $d(x_n, x) = |2 - 2| = 0 < 1 + \varepsilon$

Maka, terbukti bahwa barisan (x_n) r-konvergen ke 2 dengan $r = 1$.

Dari Contoh 2.5 dapat diperoleh bahwa titik r-limit menjadi tidak tentu barisan (x_n) memiliki titik r-limit yang tidak tunggal tergantung dengan nilai r (derajat kekasannya).

2.1.4 Kekonvergenan di Ruang Bernorma

Konsep kekonvergenan di ruang metrik dapat dipindahkan ke ruang bernorma. Dengan begitu, definisi kekonvergenan barisan di ruang bernorma dijelaskan sebagai berikut.

Definisi 2.6 (Wolfgang, 2014) Misalkan (x_n) suatu barisan pada ruang bernorma X. Barisan (x_n) dikatakan **konvergen** ke $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku

$$\|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Teorema 2.7 (Sifat Archimedes) (Bartle & Sherbert, 2010) Jika $x \in \mathbb{R}$, maka terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $x \leq k$.

Contoh 2.6 Diberikan ruang bernorma $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ dengan $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. Maka barisan (x_n) di $\mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ konvergen ke $(0,0)$ di $\mathbb{R}^2$.

Bukti:

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, menurut Sifat Archimedes terdapat $k \in \mathbb{N}$ di mana $k > \frac{1}{\varepsilon}$. Maka untuk setiap $n \geq k$ berlaku:

$$\|x_n - (0,0)\| = \|x_n\|$$

$$= \left\|\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\| = \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$$

Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku $\|x_n - (0,0)\| < \varepsilon$. Maka barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ konvergen ke $(0,0)$ di $\mathbb{R}^2$.

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai barisan Cauchy di ruang bernorma sebagai berikut.

Definisi 2.8 (Rahmat dkk, 2021) Suatu barisan (x_n) di ruang bernorma X disebut barisan **Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$ dengan,$n, m \geq k$ berlaku $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$**.**

Contoh 2.8 Diberikan ruang bernorma $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$ dengan $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. Barisan (x_n) di $\mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ adalah barisan *Cauchy* di $\mathbb{R}^2$.

Bukti:

Ambil sembarang $\varepsilon > 0$, menurut Sifat Archimedes terdapat $k \in \mathbb{N}$ di mana $k > \frac{2}{\varepsilon}$ untuk setiap $n, m \geq k$ berlaku $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ sehingga

$$\|x_n - x_m\| = \left\|\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m},\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\right\|$$

$$= \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| < \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|$$

$$\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| = \left|\frac{1}{n}+\left(-\frac{1}{m}\right)\right| \le \left|\frac{1}{n}\right| + \left|-\frac{1}{m}\right| = \frac{1}{n}+\frac{1}{m} \le \frac{1}{k}+\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga unntuk setiap $n, m \ge k$ berlaku $\|x_n - x_m\| \le \varepsilon$. Maka barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ di $\mathbb{R}^2$ merupakan barisan *Cauchy*.

2.1.5 Ruang Banach

Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai definisi dari Ruang Banach.

Definisi 2.9 (Rahmat dkk, 2021) Suatu ruang bernorma X dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy pada ruang bernorma tersebut konvergen pada X. Ruang bernorma yang **lengkap** disebut sebagai ruang Banach**.**

Contoh 2.10 Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ merupakan suatu ruang vektor, didefinisikan suatu norm $\|x\| = |x_1| + |x_2|$. Ruang bernorma tersebut adalah lengkap dan merupakan ruang Banach.

Bukti:

Misalkan $S_n = (x_n, y_n)$ sembarang barisan Cauchy pada ruang bernorma $(\mathbb{R}^2, \|.\|)$. Akan dibuktikan bahwa S_n konvergen di $\mathbb{R}^2$. Karena S_n adalah barisan Cauchy, untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$ dimana $m, n > k$ berlaku :

$$\|S_n - S_m\| = \|(x_n, y_n) - (x_m, y_m)\|$$

$$= \|(x_n - x_m, y_n - y_m)\|$$

$$= |x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon$$

Karena $|x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \varepsilon$ denngan $|x_n - x_m| \geq 0$ dan $|y_n - y_m| \geq 0$ maka $|x_n - x_m| < \varepsilon$ dan $|y_n - y_m| < \varepsilon$.

Dengan begitu (x_n) adalah barisan *Cauchy* di $\mathbb{R}$ dan (y_n) adalah barisan *Cauchy* di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ adalah ruang bernorma yang lengkap dengan norm $\|.\| = |x|$. Maka, berdasarkan kriteria kekonvergenan Cauchy menyatakan bahwa barisan (x_n) dan (y_n) merupakan barisan konvergen.

Misalkan (x_n) konvergen ke x maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k_1$ berlaku

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

Berikutnya, misalkan (y_n) konvergen ke y maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k_2$ berlaku

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Kemudian dipilih $k = \max\{k_1, k_2\}$, maka (1) dan (2) akan berlaku untuk k. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $S_n = (x_n, y_n)$ konvergen ke $x = (x, y)$ di $\mathbb{R}^2$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $n \geq k$ berlaku

$$\begin{aligned} \|S_n - x\| &= \|(x_n, y_n) - (x, y)\| \\ &= \|(x_n - x), (y_n - y)\| \\ &= |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq k$ berlaku $\|S_n - x\| < \varepsilon$, maka barisan S_n konvergen ke $x = (x, y)$ di $\mathbb{R}^2$.

2.1.6 *Cone*

Pada subbab ini akan didefinisikan mengenai himpunan tertutup, himpunan terbuka, persekitaran di ruang bernorma, dan *cone*.

Definisi 2.11 (Kreyszig, 1978) Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang bernorma, $P \subset X$ dan $p \in P$. Titik p merupakan titik interior di P jika terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $V_\varepsilon(p) \subset P$. Himpunan titik interior P dinotasikan sebagai $int\ P$.

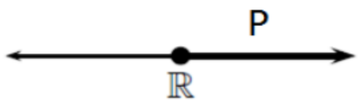
Definisi 2.12 (Sumanang, 2010) Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang bernorma, $P \subset X$. Himpunan P dikatakan terbuka jika untuk setiap $p \in P$ berlaku $p \in int\ P$.

Definisi 2.13 (Sumanang, 2010) Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang bernorma, $P \subset X$. Himpunan P dikatakan tertutup jika himpunan komplemen P^cterbuka.

Definisi 2.14 (Huang & Zhang, 2007) Diberikan ruang Banach riil E dan $P \subset E$. P dikatakan *cone* jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut:

1. Himpunan P bukan himpunan kosong, dan $P \neq \{0\}$
2. Himpunan P merupakan himpunan tertutup.
3. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b \geq 0$, jika $x, y \in P$ maka $ax + by \in P$.
4. $x \in P$ dan $-x \in P$ maka $x = 0$

Contoh 2.14 Berikut contoh terkait dengan *cone* Di $\mathbb{R}$, himpunan bilangan tak negatif membentuk *cone*.



Gambar 2.2 Contoh *Cone* Di $\mathbb{R}$ Dengan $P = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Diberikan ruang Banach $E = \mathbb{R}$ dengan norm $\|x\| = |x|$ dan

$P = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$. Himpunan P merupakan *cone* (Bahtiar dkk, 2014).

Bukti:

Diberikan $\mathbb{R}$ dengan $\|x\| = |x|$ adalah ruang Banach. Selanjutnya, ambil sembarang $x \in \mathbb{R}$ di mana $x \geq 0$.

1. Karena $x \geq 0$ jelas bahwa $x \in P$ yang artinya $P \neq \emptyset$. Selain itu, himpunan P tidak hanya beranggotakan nol saja. Himpunan P mencakup semua anggota di $\mathbb{R}$ yang lebih besar sama dengan nol yaitu $x \geq 0$.
2. Akan ditunjukkan $P^c = \mathbb{R} - P$ merupakan himpunan terbuka. Diketahui $P^c = \{x : x < 0\}$. Ambil sembarang $p \in P^c$ akan ditunjukkan bahwa $p \in int\ P^c$.

   Dalam ruang bernorma, persekitaran-ε dari p didefinisikan oleh

   $V_\varepsilon(p) = \{x \in X : \|x - p\| < \varepsilon\}$

   $V_\varepsilon(p) = \{x \in X : |x - p| < \varepsilon\}$

   Perlu diketahui bahwa $|x - p| < \varepsilon$ ekuivalen dengan

   $-\varepsilon < x - p < \varepsilon \Leftrightarrow p - \varepsilon < x < p + \varepsilon$

   Untuk $p < 0$, dipilih $\varepsilon = |p|$

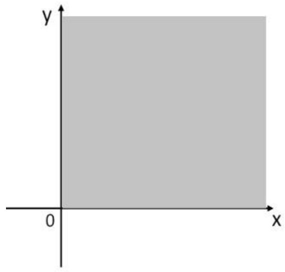
   Sehingga $V_{|p|}(p) = (p - |p|, p + |p|)$, karena $p < 0$ maka diperoleh $V_{|p|}(p) = \left(p - (-p), p + (-p)\right) = (2p, 0)$ di mana $p < 0$. Hal ini berarti $V_\varepsilon(p) \subset P^c$ akibatnya $p \in int\ P^c$

   Karena P^c adalah himpunan terbuka, maka P merupakan himpunan tertutup.
3. Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a, b \geq 0$ dan $x, y \in P$ sehingga $x, y \geq 0$ jelas bahwa $ax + by \geq 0$. Jadi, dapat disimpulkan bahwa $ax + by \in P$.

4. Ambil sembarang $x \in P$ dan $-x \in P$. Karena $P = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ sehingga hanya $0 \in P$ yang memenuhi $-x \in P$. Oleh karena itu, $-x = 0$ sama artinya dengan $x = 0$.

Maka terbukti bahwa himpunan P adalah *cone*.

Contoh 2.15 Diberikan $\boldsymbol{E} = \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$. Himpunan $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x, y \geq 0\} \subset E$ adalah *cone*.



Gambar 2.3 Contoh *Cone* Di $\mathbb{R}^2$ Dengan $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x, y \geq 0\}$

Berdasarkan Contoh 2.7, $\mathbb{R}^2$ dengan norm $\|x\| = |x_1| + |y_1|$ adalah ruang Banach dan himpunan $P = \{(x_1, y_1) \in E: x_1, y_1 \geq 0\}$. Himpunan P merupakan *cone* (Rahmat dkk, 2021).

Bukti:

Pertama, telah terbukti bahwa $\mathbb{R}^2$ dengan $\|x\| = |x_1| + |y_1|$ merupakan ruang Banach pada Contoh 2.7. Selanjutnya, ambil sembarang $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Misal $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ di mana $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$.

1. Karena $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$ dan $x = (x_1, y_1)$ dan $y = (x_2, y_2)$ maka $x, y \in P$ berakibat $P \neq \emptyset$. Selain itu, P tidak hanya berisi vektor nol, himpunan P mencakup semua vektor di $\mathbb{R}^2$ yang komponennya lebih besar sama dengan nol yaitu $x_1, x_2, y_1, y_2 \geq 0$.

2. Akan ditunjukkan $P^c = R^2 - P$ merupakan himpunan terbuka. Diketahui $P^c = \{(x_1, y_1): x_1 < 0 \; dan \; y_1 < 0\}$. Ambil sembarang $p = (p_1, p_2) \in P^c$ akan ditunjukkan bahwa $p \in int \; P^c$.

   Dalam ruang bernorma, persekitaran-ε dari p didefinisikan oleh

   $V_\varepsilon(p) = \{x \in X: \|x - p\| < \varepsilon\}$

   $V_\varepsilon(p) = \{x \in X: \|(x_1, y_1) - (p_1, p_2)\| < \varepsilon\}$

   $V_\varepsilon(p) = \{x \in X: \|(x_1 - p_1), (y_1 - p_2)\| < \varepsilon\}$

   $V_\varepsilon(p) = \{x \in X: |x_1 - p_1| + |y_1 - p_2| < \varepsilon\}$

   $V_\varepsilon(p) = \{(x_1, y_1) \in X: |x_1 - p_1| < \varepsilon \; dan \; |y_1 - p_2| < \varepsilon\}$

   Perlu diketahui bahwa $|x_1 - p_1| < \varepsilon$ dan $|y_1 - p_2| < \varepsilon$ ekuivalen dengan

   $-\varepsilon < x_1 - p_1 < \varepsilon \Leftrightarrow p_1 - \varepsilon < x_1 < p_1 + \varepsilon$ dan

   $-\varepsilon < y_1 - p_2 < \varepsilon \Leftrightarrow p_2 - \varepsilon < y_1 < p_2 + \varepsilon$

   Kasus 1

   Untuk $p_1 < 0$, dipilih $\varepsilon = |p_1|$

   Sehingga $V_{|p_1|}(p_1) = (p_1 - |p_1|, p_1 + |p_1|)$, karena $p_1 < 0$ maka diperoleh $V_{|p_1|}(p_1) = (p_1 - (-p_1), p_1 + (-p_1)) = (2p_1, 0)$ di mana $p_1 < 0$.

   Kasus 2

   Untuk $p_2 < 0$, dipilih $\varepsilon = |p_2|$

   Sehingga $V_{|p_2|}(p_2) = (p_2 - |p_2|, p_2 + |p_2|)$, karena $p_2 < 0$ maka diperoleh $V_{|p_2|}(p_2) = \big(p_2 - (-p_2), p_2 + (-p_2)\big) = (2p_2, 0)$ di mana $p_2 < 0$.

   Karena $V_{|p_1|}(p_1) = (2p_1, 0)$ di mana $p_1 < 0$ dan $V_{|p_2|}(p_2) = (2p_2, 0)$ di mana $p_2 < 0$ didapatkan bahwa

$V_\varepsilon(p) = \{(x_1, y_1) \in X: |x_1 - p_1| < \varepsilon \; dan \; |y_1 - p_2| < \varepsilon\} \subset P^c$

yang artinya $p = (p_1, p_2) \in int \; P^c$.

Karena P^c adalah himpunan terbuka, maka P merupakan himpunan tertutup.

3. Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a, b \geq 0$ dan $x, y \in P$ dengan $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ sehingga berlaku

$$\begin{aligned} ax + by &= a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) \\ &= (ax_1, ay_1) + (bx_2, by_2) \\ &= (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2) \end{aligned}$$

Karena $ax_1 + bx_1 \geq 0$ dan $ay_1 + by_2 \geq 0$. Maka $ax + by \in P$.

4. Misalkan $x \in P$ dan $x \neq 0$. Maka $x_1 > 0$ atau $x_2 > 0$. Berakibat $-x_1 < 0$ atau $-y_1 < 0$. Perlu dikeathui bahwa $-x = -1(x, y) = (-x_1, -y_1)$. Karena $-x_1 < 0$ atau $-y_1 < 0$, maka $-x \notin P$. Dengan begitu, agar $x \in P$ dan $-x \in P$ haruslah $x = 0$.

Terbukti P merupakan *cone*.

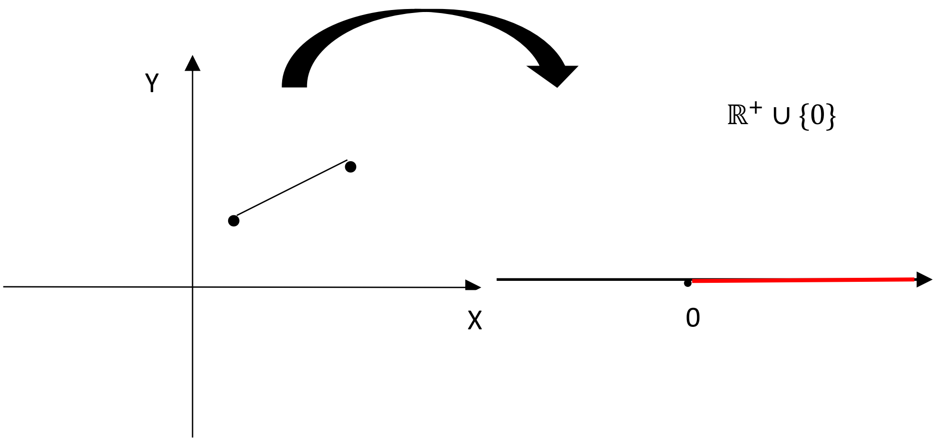
2.1.7 Hubungan *Cone* dengan Metrik *Cone*

Pada *cone* P didefinisikan urutan parsial sebagai berikut:

Definisi 2.16 (Urutan Parsial) (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan E ruang Banach, $P \subseteq E$, dan P suatu *cone* berlaku urutan parsial sebagai berikut :

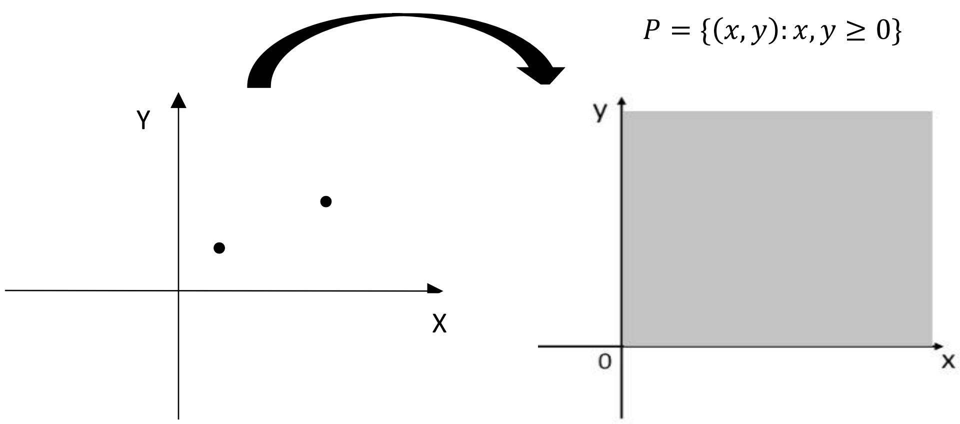
1. $x \preccurlyeq y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$, untuk setiap $x, y \in E$
2. $x \prec y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$, tetapi $y \neq x$
3. $x \ll y$ jika dan hanya jika $y - x \in int \; P$

Notasi tersebut merupakan notasi urutan parsial pada E. Notasi tersebut menjadi dasar pengertian pada notasi yang terdapat di dalam definisi metrik *cone*. Selanjutnya akan diilustrasikan kontruksi dari metrik dan metrik *cone*. Berikut ilustrasi metrik $d: X \times X \to \mathbb{R}$. Misalkan $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.



Gambar 2.4 Ilustrasi Metrik $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Ilustrasi metrik *cone* $d_p: X \times X \to E$. Misalkan $X = \mathbb{R}^2$ dan $E = \mathbb{R}^2$ maka $d_p: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.



Gambar 2.5 Ilustrasi Metrik *Cone* $d_p: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

2.2 Kajian Integrasi Topik Dengan Konsep Ikhtiar

Ikhtiar berasal dari bahasa arab yang artinya memilih. Sedangkan secara istilah, ikhtiar berarti berusaha dengan sungguh-sungguh untuk mendapatkan apa yang dikehendakinya. Hal ini berarti seseorang memilih suatu tujuan atau pekerjaan kemudian dikerjakannya dengan sungguh-sunguh agar dapat berhasil. Seeorang yang berikhtiar tidak akan berdiam diri ataupun lari dari kenyataan.

Sebagaimana firman Allah SWT dalam Q.S Ar-Ra'd ayat 13

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنفُسِهِمْ (الأية...)

Artinya: *"Sesungguhnya Allah SWT tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri."*(Q.S Ar-Ra'd: 13) (Kemenag RI, 2019).

Dalam konteks berikhtiar yaitu berusaha dengan sungguh-sungguh, dibutuhkan khauf dan roja' yang seimbang sehingga didapatkan hasil ikhtiar yang optimal. *Khauf* berasal dari bahasa arab خَافَ–يَخَافُ–خَوْفًا yang berarti ketakutan atau kekhawatiran. Khawatir memiliki makna gelisah atau cemas terhadap suatu hal yang belum pasti. Sedangkan takut berarti merasa gentar terhadap sesuatu yang dianggap mendatangkan bencana. Jadi, *khauf* berarti merasa gelisah dan cemas dengan suatu hal yang belum pasti. *Khauf* dalam berikhtiar dapat menjadi dorongan yang kuat untuk mempertimbangkan potensi risiko atau hambatan yang mungkin dihadapi selama proses mencapai tujuan. Ketakutan bisa menjadi motivasi untuk merencanakan dengan lebih baik, mengantisipasi potensi masalah, dan mengambil langkah-langkah pencegahan yang diperlukan. Namun, *khauf* yang berlebihan juga bisa menghambat kemajuan karena bisa membuat seseorang menjadi terlalu hati-hati atau takut mengambil risiko.

Sebagaimana firman Allah SWT dalam Q.S Al- Mulk ayat 2

ٱلَّذِي خَلَقَ ٱلۡمَوۡتَ وَٱلۡحَيَوٰةَ لِيَبۡلُوَكُمۡ أَيُّكُمۡ أَحۡسَنُ عَمَلاًۚ وَهُوَ ٱلۡعَزِيزُ ٱلۡغَفُورُ ﴿٢﴾

Artinya: *"Allah-lah yang menciptakan kematian dan kehidupan untuk menguji kamu, siapa di antara kamu yang terbaik amalnya. Dan Dia Maha Perkasa lagi Maha Pengampun."*(Kemenag RI, 2019).

Ayat ini mengingatkan manusia tentang kehidupan dan kematian sebagai bagian dari ujian dari Allah SWT. Pemahaman akan kematian dan akhirat dapat menciptakan khauf yang sehat dalam diri seseorang, mendorongnya untuk bertindak secara bermakna, melakukan kebaikan, dan menjauhi perbuatan yang buruk.

Berikut merupakan Hadits Riwayat Ahamad dan Tirmidzi menganai konsep *khauf.*

عَنْ أَبِي ذَرٍّ، قَالَ قَالَ لِي رَسُولُ اللَّهِ صلى الله عليه وسلم" اتَّقِ اللَّهَ حَيْثُمَا كُنْتَ وَأَتْبِعِ السَّيِّئَةَ الْحَسَنَةَ تَمْحُهَا وَخَالِقِ النَّاسَ بِخُلُقٍ حَسَنٍ " (رواه احمد والترمذي)

Artinya: *"Dari Abu Dzar, Bertaqwalah kepada Allah SWT dimanapun kamu berada, ikutilah perbuatan buruk dengan kebaikan yang dapat menghapusnya, dan perlakukanlah orang dengan akhlak yang baik."* (HR. Ahmad 21354,Tirmidzi 1987).

Hadits ini menekankan pentingnya takwa kepada Allah SWT dalam kehidupan sehari-hari. Ketakutan kepada Allah adalah kesadaran akan keberadaan-Nya yang membimbing individu untuk bertindak sesuai dengan petunjuk-Nya, menjauhi dosa, dan melakukan kebaikan.

Pesan utama dari hadits tersebut adalah bahwa khauf atau takwa kepada Allah adalah landasan penting dalam menjalani kehidupan yang taat, bertanggung jawab, dan penuh dengan kebaikan. Khauf yang sehat mendorong seseorang untuk bertindak sesuai dengan ajaran agama dan menghindari perbuatan yang buruk.

Sedangkan *roja'* berasal dari bahasa arab yang berarti mengharap dan pengharapan. *Roja'* berarti keinginan yang positif akan sesuatu yang diharapkan untuk terjadi di masa depan. *Roja'* dalam berikhtiar adalah dorongan positif yang mendorong seseorang untuk terus berusaha mencapai tujuan. Harapan bisa menjadi sumber energi yang kuat, memberikan motivasi, dan meningkatkan semangat untuk mengatasi tantangan. *Roja'* membantu seseorang untuk tetap fokus pada tujuan akhir dan tidak menyerah saat menghadapi rintangan atau kegagalan.

Al-Qur'an juga menekankan pentingnya *roja'* dalam kehidupan. Sebagai contoh, dalam Surah Yusuf (12:87), Nabi Ya'qub berbicara tentang kehilangan putranya, Nabi Yusuf, namun tidak kehilangan harapan kepada Allah:

يَٰبَنِيَّ ٱذۡهَبُواْ فَتَحَسَّسُواْ مِن يُوسُفَ وَأَخِيهِ وَلَا تَاْيۡـَٔسُوْا مِن رَّوۡحِ اللهِۖ إِنَّهُۥ لَا يَاْيۡـَٔسُ مِن رَّوۡحِ ٱللهِ إِلَّا ٱلۡقَوۡمُ ٱلۡكَٰفِرُونَ﴿٨٧﴾

Artinya: *Ya anakku, janganlah engkau menceritakan mimpimu itu kepada saudara-saudaramu, maka mereka akan membuat tipu daya terhadapmu. Sesungguhnya syaitan itu adalah musuh yang nyata bagi manusia."*(Kemenag RI, 2019).

Dalam ayat tersebut ayah dari Nabi Yusuf AS menasihati putranya agar tidak menceritakan mimpinya kepada saudara-saudaranya karena takut mereka akan membuat tipu daya terhadapnya. Ini adalah bagian dari nasihat dan kebijaksanaan ayah kepada anaknya, memberikan nasihat untuk menjaga rahasia dan menghindari konflik yang tidak perlu. Meskipun dihadapkan pada kesedihan dan penderitaan, Nabi Ya'qub menunjukkan keberanian dan tetap memelihara *roja'* kepada Allah SWT dalam situasi yang sulit.

Dalam Hadits Riwayat Al- Bukhari dan Muslim juga menyinggung konsep *roja'* kepada Allah sebagaimana dalil berikut.

عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ ـ رضى الله عنه ـ قَالَ قَالَ النَّبِيُّ صلى الله عليه وسلم يَقُولُ اللَّهُ تَعَالَى أَنَا عِنْدَ ظَنِّ عَبْدِي بِي، وَأَنَا مَعَهُ إِذَا ذَكَرَنِي، فَإِنْ ذَكَرَنِي فِي نَفْسِهِ ذَكَرْتُهُ فِي نَفْسِي، وَإِنْ ذَكَرَنِي فِي مَلأٍ ذَكَرْتُهُ فِي مَلأٍ خَيْرٍ مِنْهُمْ، وَإِنْ تَقَرَّبَ إِلَيَّ بِشِبْرٍ تَقَرَّبْتُ إِلَيْهِ ذِرَاعًا، وَإِنْ تَقَرَّبَ إِلَيَّ ذِرَاعًا تَقَرَّبْتُ إِلَيْهِ بَاعًا، وَإِنْ أَتَانِي يَمْشِي أَتَيْتُهُ هَرْوَلَةً (رواه البخاري).

Artinya: *Dari Abu Hurairah, Rasulullah bersabda, "Allah berfirman, 'Aku sesuai dengan praksan hamba-Ku terhadap-Ku, dan Aku bersamanya ketika dia mengingat-Ku. Jika dia mengingat-Ku dalam dirinya, maka Aku akan mengingatnya dalam diri-Ku; jika dia mengingat-Ku di tempat yang lebih baik dari itu, yaitu di tengah-tengah umum, maka Aku akan mengingatnya di tengah-tengah umum yang lebih baik dari itu. Jika dia mendekat kepada-Ku sejengkal, maka Aku akan mendekatinya sehasta, jika dia mendekat kepada-Ku sehasta, maka Aku akan mendekatinya sedepa, jika dia datang kepada-Ku dengan berjalan, maka Aku akan mendatanginya dengan berlari'. "* (HR. Al-Bukhari 7405, Muslim 2675).

Hadits ini menunjukkan bahwa Allah SWT bersedia mendekati hamba-Nya yang berusaha mendekat kepada-Nya. Hal ini menunjukkan bahwa ketika seseorang berharap kepada Allah SWT, memperdalam hubungannya dengan-Nya, dan melakukan amal kebaikan, Allah SWT akan mendekat kepada mereka dengan lebih besar lagi.

Pesan hadits ini menekankan pentingnya berharap kepada Allah SWT, memperkuat hubungan spiritual, dan berusaha untuk melakukan amal baik, karena Allah akan merespons dengan kebaikan-Nya. Meskipun kata "harapan" mungkin tidak secara langsung disebutkan, konsep ini tersirat dalam banyak ajaran dan pesan Rasulullah .

Namun tidak cukup hanya dengan berharap, harapan harus disertai dengan ikhtiar atau usaha yang sungguh-sungguh. Tujuan tidak akan pernah tercapai dengan bermalas-malasan. Dalam konteks berikhtiar atau berusaha, keseimbangan antara khauf dan *roja'* sangat penting. Khauf dapat membantu untuk merencanakan dan mempertimbangkan risiko, sedangkan roja' membantu untuk tetap optimis dan terus berusaha meskipun dihadapkan pada kesulitan. Seorang yang berikhtiar dengan bijaksana memahami bahwa khauf bisa menjadi alat untuk merencanakan dengan lebih baik tanpa terjebak dalam kecemasan berlebihan, sementara *roja'* digunakan sebagai motivasi untuk tetap melangkah maju dan tidak menyerah meskipun menghadapi kesulitan. Keseimbangan antara khauf dan roja' membantu seseorang untuk tetap waspada terhadap risiko, tetapi juga mempertahankan semangat dan keyakinan untuk mencapai tujuan.

Ketika *khauf* (ketakutan) dan *roja'* (harapan) tidak seimbang dalam diri seseorang, itu dapat memberikan dampak yang signifikan pada kehidupan dan kesejahteraan mental. *Khauf* yang berlebihan bisa membuat seseorang merasa cemas dan takut secara berlebihan terhadap sesuatu, bahkan pada situasi yang sebenarnya tidak perlu dikhawatirkan secara berlebihan, menghambat seseorang untuk mengambil risiko yang sehat atau menghadapi tantangan yang sebenarnya bisa diatasi dengan kemampuan yang dimiliki, serta stres yang berkepanjangan dan kecemasan yang mengganggu, mengganggu kualitas hidup sehari-hari.

Sedangkan *roja'* yang berlebihan menyebabkan harapan yang tidak realistis bisa mengarah pada kekecewaan yang mendalam ketika harapan tersebut tidak terpenuhi. Hal ini dapat memicu perasaan frustrasi, kekecewaan, dan merasa terpuruk. Terlalu banyak berharap tanpa tindakan nyata bisa membuat seseorang merasa puas dengan harapannya saja tanpa berusaha mencapainya, karena percaya semata pada keajaiban. Maka, menjaga keseimbangan antara *khauf* dan *roja'* sangat diperlukan dalam meraih keberhasilan.

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Topik yang akan digunakan dalam pembahasan nantinya yaitu barisan di ruang metrik termasuk barisan konvergen, barisan Cauchy beserta sifat yang menyertainya. Selanjutnya akan dibahas juga mengenai ruang metrik *cone*, dan akan diperkenalkan definisi secara songkat mengenaik kekonvergenan kasar di ruang bernorma.

2.3.1 Ruang Metrik *Cone*

Menurut penjelasan sebelumnya, E adalah ruang Banach atas himpunan bilangan riil dengan P adalah *cone* di E dan didefinisikan urutan parsial terhadap P. Selanjutnya, didefinisikan ruang metrik *cone* sebagai berikut.

Definisi 2.17 (Huang & Zhang, 2007) Misalkan X himpunan tak kosong dan E ruang Banach atas lapangan riil yang dilengkapi dengan urutan parsial $\preccurlyeq$ terhadap *cone* $P \subseteq E$. Didefinisikan pemetaan $d_p: X \times X \rightarrow E$ di mana $d_p(x, y)$ sebagai vektor di *cone* P sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

1. $0 \preccurlyeq d_p(x, y)$ dan $d_p(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$
2. $d_p(x, y) = d_p(y, x)$
3. $d_p(x, y) \preccurlyeq d_p(x, z) + d(z, y)$

Maka d_p dikatakan metrik *cone* pada X, dan (X, d_p) dikatakan ruang metrik *cone*.

Contoh 2.17 Diberikan $E = \mathbb{R}^2$ dengan $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x, y \geq 0\}$. Didefinisikan $d_p: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan $d_p(x, y) = (\|x - y\|, \|x - y\|)$ di mana $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ dengan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$.

(X, d_p) adalah ruang metrik *cone* dengan *cone* P.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ di mana $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$,

dan $z = (z_1, z_2)$.

1. $d_p(x, y) = (\|x - y\|, \|x - y\|)$, karena

   $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \geq 0$, maka $d_p(x, y) - 0 = (\|x - y\|, \|x - y\|) - 0 \in P$ yang artinya $0 \preccurlyeq d_p(x, y)$.

   Selanjutnya, akan ditunjukkan $d_p(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

   $\Rightarrow$ Diketahui $d_p(x, y) = 0$, akan ditunjukkan bahwa $x = y$

   $d_p(x, y) = (\|x - y\|, \|x - y\|) = 0$

   $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0$

   $(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$

   $(x_1 - y_1)^2 = -(x_2 - y_2)^2$

   $(x_1 - y_1) = -(x_2 - y_2)$

   $(x_1 - y_1) = -x_2 + y_2$

   $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$

   Dengan begitu $x_1 = y_1$ dan $x_2 = y_2$ yang artinya $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ dan terbukti $x = y$.

   $\Leftarrow$ Diketahui $x = y$ aartinya $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

   Karena $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

   Maka

   $$\begin{aligned} d_p(x, y) &= (\|x - y\|, \|x - y\|) \\ &= \left(\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\right) \\ &= \left(\sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2}, \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (x_2 - x_2)^2}\right) \end{aligned}$$

$= (0,0)$

Dengan begitu terbukti bahwa $d_p(x,y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

2. Akan ditunjukkan bahwa $d_p(x,y) = d_p(y,x)$

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) + (x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2)}$$

$$= \sqrt{(y_1^2 - 2x_1y_1 + x_1^2) + (y_2^2 - 2x_2y_2 + x_2^2)}$$

$$= \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2} = \|y-x\|$$

Karena $\|x-y\| = \|y-x\|$

Maka $d_p(x,y) = (\|x-y\|, \|x-y\|) = (\|y-x\|, \|y-x\|) = d_p(y,x)$

Jadi terbukti bahwa $d(x,y) = d(y,x)$.

3. Akan dibuktikan $d_p(x,y) \preccurlyeq d_p(x,z) + d_p(z,y)$

$$d_p(x,z) + d_p(z,y) = (\|x-z\|, \|x-z\|) + (\|z-y\|, \|z-y\|)$$

$$= \left(\sqrt{(x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2}, \sqrt{(x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2}\right)$$

$$+ (\sqrt{(z_1-y_1)^2 + (z_2-y_2)^2}, \sqrt{(z_1-y_1)^2 + (z_2-y_2)^2})$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{(x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2} + \sqrt{(z_1-y_1)^2 + (z_2-y_2)^2}, \\ \sqrt{(x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2} + \sqrt{(z_1-y_1)^2 + (z_2-y_2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\geq \begin{pmatrix} \sqrt{(x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2 + (z_1-y_1)^2 + (z_2-y_2)^2}, \\ \sqrt{(x_1-z_1)^2 + (x_2-z_2)^2 + (z_1-y_1)^2 + (z_2-y_2)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{(x_1^2 - 2x_1z_1 + z_1^2) + (x_2^2 - 2x_2z_2 + z_2^2) + (z_1^2 - 2z_1y_1 + y_1^2) + (z_2^2 - 2z_2y_2 + z_2^2)}, \\ \sqrt{(x_1^2 - 2x_1z_1 + z_1^2) + (x_2^2 - 2x_2z_2 + z_2^2) + (z_1^2 - 2z_1y_1 + y_1^2) + (z_2^2 - 2z_2y_2 + z_2^2)} \end{pmatrix}$$

$$\geq \left(\sqrt{(x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) + (x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2)}, \sqrt{(x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2) + (x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2)}\right)$$

$$= \left(\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}, \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}\right)$$

$$= (\|x-y\|, \|x-y\|).$$

Sehingga

$(\|x-z\|,\|x-z\|)+(\|z-y\|,\|z-y\|) \geq (\|x-y\|,\|x-y\|)$ dan

$(\|x-z\|,\|x-z\|)+(\|z-y\|,\|z-y\|)-(\|x-y\|,\|x-y\|) \geq 0$

Dengan begitu

$(\|x-z\|,\|x-z\|)+(\|z-y\|,\|z-y\|)-(\|x-y\|,\|x-y\|) \in P$.

Jadi terbukti bahwa

$d_p(x,z)+d_p(z,y)-d_p(x,y) \in P$

Maka $d_p(x,y) \preccurlyeq d_p(x,z)+d(z,y)$.

Dengan begitu, (X,d_p) adalah ruang metrik *cone*.

2.3.2 Kekonvergenan di Ruang Metrik *Cone*

1. Barisan Konvergen di Ruang Metrik *Cone*

   Pada subbab ini akan dijelaskan mengenai barisan konvergen y di ruang metrik *cone*.

   Definisi 2.18 (Huang & Zhang, 2007) Misalkan (X,d_p) adalah ruang metrik *cone* dan (x_n) barisan pada (X,d). Barisan (x_n) konvergen ke suatu $x \in X$ apabila untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku

   $$d_p(x_n,x) \ll c$$

2. Barisan *R*-Konvergen di Ruang Metrik *Cone*

   Banerjee & Mondal meneliti tentang r-konvergen dengan memperkenalkan r-konvergen di ruang metrik *cone*. Sebelum membahas lebih lanjut tentang sifat-sifat r-konvergen di ruang metrik *cone*, pada subbab ini didefinisikan barisan *r*-konvergen di ruang metrik *cone*.

Definisi 2.19 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (X, d_p) adalah ruang metrik *cone*. Barisan (x_n) di X dikatakan r-konvergen ke x untuk suatu $r \in E$ dengan $0 \ll r$ atau $r = 0$ jika untuk setiap ε dengan $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku

$$d_p(x_n, x) \ll r + c$$

Himpunan dari seluruh titik r-limit dari barisan (x_n) dinotasikan dengan $LIM^r x_n$.

Teorema 2.20 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan barisan (x_n) r_1-konvergen ke x di (X, d_p). Maka (x_n) juga r_2-konvergen ke x di (X, d_p) untuk $r_1 < r_2$ (Banerjee & Mondal, 2019).

Akibat 2.21 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (x_n) r_1-konvergen ke x di (X, d_p) dan $r_1 < r_2$ untuk suatu $0 \ll r_2$. Maka $LIM^{r_1} x_n \subset LIM^{r_2} x_n$.

Teorema 2.22 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah dua barisan di ruang metrik *cone* (X, d_p) dan misalkan (y_n) konvergen ke $y \in X$. Jika terdapat $0 \ll r$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \leq r$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Maka (x_n) r-konvergen ke y.

Teorema 2.23 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (x_n) adalah barisan di (X, d_p) dan (y_n) barisan konvergen di $LIM^r x_n$ yang konvergen ke y_0. Maka y_0 harus ada di $LIM^r x_n$.

Teorema 2.24 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah dua barisan di (X, d_p). Jika untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \leq c$ untuk setiap $n \geq k$. Maka (x_n) r-konvergen ke x jika dan hanya jika (y_n) r-konvergen ke x.

Definisi 2.25 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (X, d) adalah ruang metrik *cone* dan (x_n) barisan pada (X, d). Barisan (x_n) dikatakan barisan *Cauchy* apabila untuk setiap $\varepsilon \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m > k$ berlaku $d(x_n, x_m) \ll c$.

Definisi 2.26 (Banerjee & Mondal, 2019) Barisan (x_n) di ruang metrik *cone* (X, d) dikatakan barisan *r-Cauchy* untuk suatu $0 \ll r$ atau $r = 0$ jika untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m > k$ berlaku $d(x_n, x_m) \ll r + c$.

Teorema 2.27 (Banerjee & Mondal, 2019) Setiap barisan $\frac{r}{2}$-konvergen adalah barisan r-*Cauchy* di ruang metrik *cone* (X, d).

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode kualitatif. Penelitian kualitatif ialah penelitian dengan menggunakan metode studi pustaka yang dilakukan dengan mengumpulkan informasi yang berkaitan dengan topik penelitian. Hal tersebut dilakukan diantaranya dengan mengumpulkan buku, jurnal serta artikel agar informasi yang diperoleh semakin lengkap.

3.2 Pra Penelitian

Tahapan pertama yang perlu dilakukan sebelum melakukan penelitian yakni dengan mengumpulkan sumber-sumber yang relevan dengan topik. Berikut penelitian terdahulu yang dipergunakan pada penelitian ini di antaranya, Rahmat, dkk (2021) serta Bahtiar, dkk (2014). Kedua penelitian tersebut dijadikan acuan oleh peneliti untuk memahami konsep dasar ruang metrik *cone*, serta terdapat penelitian lain, salah satunya yakni Banerjee & Mondal (2019) yang akan digunakan oleh peneliti sebagai pedoman dalam tata cara membuktikan.

3.3 Tahapan Penelitian

Berikut tahapan pada penelitian ini:

1. Mempelajari penelitian sebelumnya maupun penelitian yang terkait mengenai ruang metrik *cone*.

2. Memaparkan definisi terkait ruang metrik, ruang bernorma, ruang Banach, *cone*, urutan parsial, ruang metrik *cone*, dan kekonvergenan di ruang metrik *cone*.
3. Menentukan serta mengkaji ayat Al-Qur'an yang berkaitan dengan topik penenlitian.
4. Memahami definisi barisan konvergen di ruang metrik *cone*.
5. Memahami definisi barisan r- konvergen dan sifat-sifatnya di ruang metrik *cone*

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Barisan *r*-Konvergen di Ruang Metrik *Cone*

Sebelum membahas menegnai barisan *r*-konvergen di ruang metrik *cone*, akan dibahas kembali mengenai definisi *cone*, urutan parsial, dan ruang metrik *cone*.

Definisi 2.14 (Huang & Zhang, 2007) Diberikan ruang Banach atas lapangan riil E dan $P \subset E$. P dikatakan *cone* jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut:

1. Himpunan P bukan himpunan kosong, dan $P \neq \{0\}$
2. Himpunan P merupakan himpunan tertutup.
3. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a, b \geq 0$, jika $x, y \in P$ maka $ax + by \in P$.
4. $x \in P$ dan $-x \in P$ maka $x = 0$.

Definisi 2.16 (Urutan Parsial) (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan E ruang Banach, $P \subseteq E$, dan P suatu *cone* berlaku urutan parsial sebagai berikut :

1. $x \preccurlyeq y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$, untuk setiap $x, y \in E$
2. $x \prec y$ jika dan hanya jika $y - x \in P$, tetapi $y \neq x$
3. $x \ll y$ jika dan hanya jika $y - x \in int\ P$, di mana $int\ P$ menotasikan interior dari P.

Definisi 2.17 (Huang & Zhang, 2007) Misalkan X himpunan tak kosong dan E ruang Banach atas lapangan riil yang dilengkapi dengan urutan parsial $\preccurlyeq$ terhadap *cone* $P \subseteq E$. Didefinisikan pemetaan $d_p: X \times X \to E$ di mana $d_p(x, y)$ sebagai vektor di *cone* P sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ berlaku:

1. $0 \preccurlyeq d_p(x, y)$ dan $d_p(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

2. $d_p(x,y) = d_p(y,x)$

3. $d_p(x,y) \preccurlyeq d_p(x,z) + d(z,y)$

Maka d_p dikatakan metrik *cone* pada X, dan (X, d_p) dikatakan ruang metrik *cone*.

Definisi 4.1 (Huang & Zhang, 2007) Misalkan (X, d_p) adalah ruang metrik *cone* dan (x_n) barisan pada (X, d_p). Barisan (x_n) konvergen ke suatu $x \in X$ apabila untuk setiap $0 \ll c$ atau $c \in int\ P$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku

$$d_p(x_n, x) \ll c$$

Menurut definisi urutan parsial di mana $0 \ll c$ artinya $c - 0 = c \in int\ P$. Begitu pula dengan $d_p(x_n, x) \ll c$ artinya $c - d_p(x_n, x) \in int\ P$. Dalam hal ini, interior P bukanlah himpunan kosong. Contohnya seperti di $\mathbb{R}$, untuk *cone* $P = \{x : x \geq 0\}$ maka $int\ P = \{x : x > 0\}$. Sedangkan di $\mathbb{R}^2$, untuk *cone* $P = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ maka $int\ P = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$.

Contoh 4.1 Diberikan ruang metrik *cone* $(\mathbb{R}^2, d_p)$ dengan $d_p(x,y) = (\|x-y\|, \|x-y\|)$ di mana $\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ dengan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ dengan *cone* $P = \{(x,y) : x, y \geq 0\}$. Maka barisan (x_n) di $\mathbb{R}^2$ didefinisikan dengan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, barisan (x_n) konvergen ke $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Bukti :

Pada Contoh 2.17 telah mencakup pembuktian bahwa $(\mathbb{R}^2, d_p)$ merupakan ruang metrik *cone*. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa barisan (x_n) konvergen ke $(0,0)$. Ambil sebarang $c \in int\ P$. Misalkan $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, pilih $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $k > \max\left(\frac{\sqrt{2}}{c_1}, \frac{\sqrt{2}}{c_2}\right)$. Maka untuk setiap $n > k$ berlaku

$$d_p(x_n,(0,0)) = d_p\left(\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right),(0,0)\right)$$

$$= \left(\left\|\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)-(0,0)\right\|,\left\|\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)-(0,0)\right\|\right)$$

$$= \left(\sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2+\left(\frac{1}{n}-0\right)^2},\sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2+\left(\frac{1}{n}-0\right)^2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}},\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{2}{n^2}},\sqrt{\frac{2}{n^2}}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{n},\frac{\sqrt{2}}{n}\right) \prec \left(\frac{\sqrt{2}}{k},\frac{\sqrt{2}}{k}\right)$$

Karena $k > \max\left(\frac{\sqrt{2}}{c_1},\frac{\sqrt{2}}{c_2}\right)$ maka $c_1 - \frac{\sqrt{2}}{k} > 0$ dan $c_2 - \frac{\sqrt{2}}{k} > 0$ sehingga

$(c_1,c_2) - \left(\frac{\sqrt{2}}{k},\frac{\sqrt{2}}{k}\right) = \left(c_1 - \frac{\sqrt{2}}{k}, c_2 - \frac{\sqrt{2}}{k}\right) \in int\ P$

Dengan begitu, terbukti bahwa $d_p(x_n,(0,0)) \ll c$.

Jadi, barisan (x_n) konvergen ke $(0,0)$. ■

Definisi 4.2 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (X,d_p) adalah ruang metrik *cone*. Barisan (x_n) di X dikatakan r-konvergen ke x untuk suatu $r \in int\ P$ atau $r = 0$ jika untuk setiap c dengan $c \in int\ P$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku

$$d_p(x_n,x) \ll r + c.$$

Barisan (x_n) r-konvergen ke x dapat dinotasikan dengan $x_n \overset{r}{\rightarrow} x$, r merupakan derajat kekasaran (*roughness degree*) dari barisan r-konvergen. Perlu diketahui bahwa ketika $r = 0$, barisan r-konvergen menjadi barisan konvergen di ruang metrik *cone*. Seperti Contoh 4.1 di mana barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ yang merupakan barisan konvergen juga merupakan barisan r-konvergen di ruang metrik *cone* dengan $r = (0,0)$. Jika (x_n) merupakan barisan r-konvergen ke x, maka x adalah titik r-limit dari (x_n). Selain Contoh 4.1, akan diberikan contoh barisan yang tidak konvergen namun merupakan barisan r-konvergen dengan $(0,0) \ll r$ di ruang metrik *cone*.

Contoh 4.2 Diberikan ruang metrik *cone* $(\mathbb{R}^2, d_p)$ dengan

$d_p(x, y) = (\|x - y\|, \|x - y\|)$ di mana $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ dengan $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ dengan

cone $P = \{(x, y) \in E: x, y \geq 0\}$. Selanjutnya, diberikan barisan (x_n) di $\mathbb{R}^2$ di mana $(x_n) = (1,1)$ jika n ganjil dan $x_n = (2,2)$ jika n genap. Akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) tidak konvergen (divergen) namun r-konvergen di ruang metrik *cone*.

Bukti:

Pada Contoh 2.17 telah mencakup pembuktian bahwa $(\mathbb{R}^2, d_p)$ merupakan ruang metrik *cone*. Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa barisan (x_n) tidak konvergen.

1. Akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) tidak konvergen ke $(1,1)$.

   Andaikan barisan (x_n) konvergen ke $(1,1)$, maka untuk setiap $c \in int\ P$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku

   $d_p(x_n, (1,1)) \ll c.$

   Pilih $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in int\ P,$

   ketika $(x_n) = (2,2)$ untuk n genap maka

   $d_p(x_n, x) = d_p\big((2,2), (1,1)\big)$

   $d_p\big((2,2), (1,1)\big) = (\|(2,2) - (1,1)\|, \|(2,2) - (1,1)\|)$

$$= \left(\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}, \sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

Karena $c - d_p(x_n, x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)$ dan $\frac{1}{2} - \sqrt{2} < 0$ dengan begitu $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) \notin int\ P$. Artinya penyataan $d_p(x_n, x) \ll c$ salah. Akibatnya, pengandaian bahwa barisan (x_n) konvergen ke $(1,1)$ tidak benar dan terbukti bahwa (x_n) tidak konvergen ke $(1,1)$.

2. Akan ditunjukkan barisan (x_n) tidak konvergen ke $(2,2)$

   Andaikan barisan (x_n) konvergen ke $(2,2)$, maka untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku $d_p(x_n, (2,2)) \ll c$.

   Pilih $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in int\ P$, ketika $(x_n) = (1,1)$ untuk n ganjil maka

   $d_p(x_n, x) = d_p((1,1), (2,2))$

   $$d_p\big((1,1), (2,2)\big) = (\|(1,1) - (2,2)\|, \|(1,1) - (2,2)\|)$$

   $$= \left(\sqrt{(1-2)^2+(1-2)^2}, \sqrt{(1-2)^2+(1-2)^2}\right)$$

   $$= \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

   Karena $c - d_p(x_n, x) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)$ dan $\frac{1}{2} - \sqrt{2} < 0$ dengan begitu $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) \notin int\ P$. Artinya penyataan $d_p(x_n, x) \ll c$ salah. Akibatnya, pengandaian bahwa barisan (x_n) konvergen ke $(2,2)$ tidak benar dan terbukti bahwa (x_n) tidak konvergen ke $(2,2)$.

3. Akan ditunjukkan bahwa (x_n) tidak konvergen ke $p = (p_1, p_2)$ di mana $(p_1, p_2) \neq (1,1)$ dan $(p_1, p_2) \neq (2,2)$

Andaikan barisan (x_n) konvergen ke (p_1, p_2) , maka untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku $d_p(x_n, p) \ll c$.

Misalkan $c_1 = \sqrt{(1-p_1)^2 + (1-p_2)^2}$ dan $c_2 = \sqrt{(2-p_1)^2 + (2-p_2)^2}$ dan $c = \min(c_1, c_2)$. Jika dipilih $c = (c, c)$, maka

Ketika $(x_n) = (1,1)$ untuk n ganjil

$d_p(x_n, p) = d_p\big((1,1), (p_1, p_2)\big)$

$$
\begin{aligned}
d_p\big((1,1), (p_1, p_2)\big) &= (\|(1,1) - (p_1, p_2)\|, \|(1,1) - (p_1, p_2)\|) \\
&= \left(\sqrt{(1-p_1)^2 + (1-p_2)^2}, \sqrt{(1-p_1)^2 + (1-p_2)^2}\right) \\
&= (c_1, c_1)
\end{aligned}
$$

Karena $c = \min(c_1, c_2)$ di mana c adalah nilai minimum dari c_1 dan c_2 artinya $c \leq c_1$ maka $(c, c) - (c_1, c_1) = (c - c_1, c - c_1)$. Karena $d_p(x_n, p) = (c_1, c_1)$ berakibat $c - d_p(x_n, p) \notin int\ P$ yang artinya pernyataan $d_p(x_n, p) \ll c$ salah. Akibatnya, pengandaian bahwa barisan (x_n) ketika n ganjil konvergen ke (p_1, p_2) tidak benar dan terbukti bahwa barisan (x_n) tidak konvergen ke (p_1, p_2) ketika n ganjil.

Sedangkan ketika $(x_n) = (2,2)$ untuk n genap, maka

$d_p(x_n, p) = d_p((2,2), (p_1, p_2))$

$$
\begin{aligned}
d_p\big((2,2), (p_1, p_2)\big) &= (\|(2,2) - (p_1, p_2)\|, \|(2,2) - (p_1, p_2)\|) \\
&= \left(\sqrt{(2-p_1)^2 + (2-p_2)^2}, \sqrt{(2-p_1)^2 + (2-p_2)^2}\right) \\
&= (c_2, c_2)
\end{aligned}
$$

Karena $c = \min(c_1, c_2)$ di mana c adalah nilai minimum dari c_1 dan c_2 artinya $c \leq c_2$ maka $(c, c) - (c_2, c_2) = (c - c_2, c - c_2)$. Karena $d_p(x_n, p) = (c_2, c_2)$ berakibat $c - d_p(x_n, p) \notin int\ P$ yang artinya pernyataan $d_p(x_n, p) \ll c$ salah. Akibatnya, pengandaian bahwa barisan (x_n) ketika n genap konvergen ke (p_1, p_2) tidak benar dan terbukti bahwa barisan (x_n) tidak konvergen ke (p_1, p_2) ketika n genap.

Karena (x_n) tidak konvergen ke (p_1, p_2) ketika n gajil maupun ketika n genap, maka pernyataan barisan (x_n) konvergen ke (p_1, p_2) salah dan terbukti bahwa barisan (x_n) tidak konvergen ke (p_1, p_2).

Jadi, jika diambil $c = (c, c)$ memang benar bahwa $c \in int\ P$, namun terdapat tak hingga elemen di barisan yang tidak memenuhi $d_p(x_n, p) \ll c$.

Jadi, barisan (x_n) terbukti tidak konvergen (divergen). ■

Selanjutnya, jika dipertimbangkan $r \in E$ dengan $0 \ll r$ yaitu $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ maka (x_n) r-konvergen ke $x = (1,1)$.

Bukti:

1. Ketika $(x_n) = (1,1)$ untuk n ganjil

   Ambil sembarang $c \in E$ dengan $(0,0) \ll c$, misalkan $c = (c_1, c_2)$ pilih $k = 1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ untuk n ganjil berlaku

   $d_p(x_n, x) = d_p\big((1,1), (1,1)\big)$

   $$d_p\big((1,1), (1,1)\big) = (\|(1,1) - (1,1)\|, \|(1,1) - (1,1)\|)$$
   $$= \left(\sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2}, \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2}\right)$$
   $$= (0,0)$$

Karena $0 \ll c$ yang artinya $c \in int\ P$ dan $r = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \gg 0$ yang artinya $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \in int\ P$, maka $c + r = (c_1, c_2) + \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = (c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}) \in int\ P$. Dengan begitu terpenuhi bahwa untuk setiap $n > k$ berlaku

$\left(c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}\right) - (0,0) = \left(c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}\right) \in int\ P$

$c + r - d_p(x_n, x) \in int\ P$

$d_p(x_n, x) \ll c + r$

Maka, barisan $(x_n) = (1,1)$ untuk n ganjil r-konvergen ke $x = (1,1)$ dengan $r = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

2. Ketika $(x_n) = (2,2)$ untuk n genap

Ambil sembarang $c \in E$ dengan $(0,0) \ll c$, misalkan $c = (c_1, c_2)$ pilih $k = 1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ untuk n genap berlaku

$d_p(x_n, x) = d_p((2,2), (1,1))$

$$
\begin{aligned}
d_p\left((2,2), (1,1)\right) &= (\|(2,2) - (1,1)\|, \|(2,2) - (1,1)\|) \\
&= \left(\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}, \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}\right) \\
&= \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)
\end{aligned}
$$

Karena $0 \ll c$ yang artinya $c \in int\ P$ dan $r = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \gg 0$ yang artinya $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \in int\ P$, maka $c + r = (c_1, c_2) + \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = (c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}) \in int\ P$. Dengan begitu terpenuhi bahwa untuk setiap $n > k$ berlaku

$\left(c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = (c_1, c_2) \in int\ P$

$c + r - d_p(x_n, x) \in int\ P$

$d_p(x_n, x) \ll c + r$

Maka, barisan $(x_n) = (2,2)$ untuk n genap r-konvergen ke $x = (1,1)$ dengan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Jadi, barisan (x_n) tidak konvergen (divergen) namun barisan (x_n) merupakan barisan r-konvergen ke $x = (1,1)$ dengan $r = (0,0)$ dan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. ■

Titik r-limit dari barisan (x_n) bisa jadi tidak tunggal. Contoh dari barisan (x_n) yang memiliki titik r-limit > 1 adalah sebagai berikut.

Contoh 4.3 Titik r-limit dari barisan (x_n) pada Contoh 4.2 tidak tunggal.

Telah diketahui bahwa barisan (x_n) r-konvergen ke $x = (1,1)$ dengan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ pada Contoh 4.2. Akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) juga r-konvergen ke $y = (2,2)$ dengan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

1. Ketika $(x_n) = (1,1)$ untuk n ganjil

   Ambil sembarang $c \in E$ dengan $(0,0) \ll c$, misalkan $c = (c_1, c_2)$ pilih $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ untuk n ganjil berlaku

   $$\begin{aligned} d_p\big((1,1) - (2,2)\big) &= (\|(1,1) - (2,2)\|, \|(1,1) - (2,2)\|) \\ &= \left(\sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2}, \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2}\right) \\ &= (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

   Karena $0 \ll c$ yang artinya $c \in int\ P$ dan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ yang artinya $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in int\ P$, maka $c + r = (c_1, c_2) + (\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}) \in int\ P$. Dengan begitu terpenuhi bahwa untuk setiap $n > k$ berlaku

   $(c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}) - (\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (c_1, c_2) \in int\ P$

   $c + r - d_p(x_n, y) \in int\ P$

   $d_p(x_n, y) \ll c + r$

Maka, barisan $(x_n) = (1,1)$ untuk n ganjil r-konvergen ke $y = (2,2)$ dengan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

2. Ketika $(x_n) = (2,2)$ untuk n genap

Ambil sembarang $c \in E$ dengan $(0,0) \ll c$, misalkan $c = (c_1, c_2)$ pilih $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ untuk n genap berlaku

$d_p(x_n, y) = d_p\big((2,2) - (2,2)\big)$

$$d_p\big((2,2) - (2,2)\big) = (\|(2,2) - (2,2)\|, \|(2,2) - (2,2)\|)$$
$$= \left(\sqrt{(2-2)^2 + (2-2)^2}, \sqrt{(2-2)^2 + (2-2)^2}\right)$$
$$= (0,0)$$

Karena $0 \ll c$ yang artinya $c \in int\ P$ dan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ yang artinya $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \in int\ P$, maka $c + r = (c_1, c_2) + (\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}) \in int\ P$. Dengan begitu terpenuhi bahwa untuk setiap $n \geq k$ berlaku

$(c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}) - (0,0) = (c_1 + \sqrt{2}, c_2 + \sqrt{2}) \in int\ P$

$c + r - d(x_n, y) \in int\ P$

$d_p(x_n, y) \ll r + c$

Maka, barisan $(x_n) = (2,2)$ ketika n genap r-konvergen ke $y = (2,2)$ dengan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Jadi, selain barisan (x_n) r-konvergen ke $x = (1,1)$ barisan (x_n) juga r-konvergen ke $y = (2,2)$ dengan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Karena $(1,1) \neq (2,2)$ yang berarti $x \neq y$, maka terbukti bahwa titik r-limit barisan (x_n) tidak tunggal. ■

Definisi 4.4 (Banerjee & Mondal, 2019) Himpunan dari seluruh titik-titik r-limit dari barisan (x_n) dikatakan sebagai himpunan r-limit dari barisan (x_n) dan dinotasikan dengan $LIM^r x_n$ di mana $LIM^r x_n = \{x \in X : x_n \xrightarrow{r} x\}$.

Teorema 4.5 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan barisan (x_n) r_1-konvergen ke x di (X, d_p). Maka (x_n) juga r_2-konvergen ke x di (X, d_p) untuk $r_1 < r_2$.

Bukti:

Diberikan (x_n) r_1-konvergen ke x di $\left(X, d_p\right)$ dan $r_1 \prec r_2$. Akan dibuktikan bahwa (x_n) juga r_2-konvergen ke x di (X, d_p). Karena barisan (x_n) r_1-konvergen ke x untuk suatu $r_1 \in E$ dengan $0 \ll r_1$ atau $r_1 = 0$, menurut Definisi 4.3 untuk setiap c dengan $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku

$$d_p(x_n, x) \ll r_1 + c$$

Diperoleh $(r_1 + c) - d_p(x_n, x) \in int\ P$. Perlu diperhatikan bahwa $r_1 \prec r_2$ untuk suatu $0 \ll r_2$ kemudian ambil sebarang c dengan $0 \ll c$ diperoleh $(r_1 + c) \prec (r_2 + c)$ artinya $(r_2 + c) - (r_1 + c) \in P$. Karena $(r_1 + c) - d_p(x_n, x) \in int\ P$ dan $(r_2 + c) - (r_1 + c) \in P$, maka $(r_2 + c) - d_p(x_n, x) \in int\ P$.

$d_p(x_n, x) \ll (r_1 + c) \prec (r_2 + c)$

$d_p(x_n, x) \ll (r_2 + c)$ atau $(r_2 + c) - d_p(x_n, x) \in int\ P$.

Hal ini menunjukkan bahwa barisan (x_n) juga r_2-konvergen ke x. Dengan begitu, terbukti bahwa (x_n) r_2-konvergen ke x untuk $r_1 \prec r_2$.■

Akibat 4.6 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (x_n) r_1-konvergen ke x di (X, d_p) dan $r_1 \prec r_2$ untuk suatu $0 \ll r_2$. Maka $LIM^{r_1} x_n \subset LIM^{r_2} x_n$.

Bukti:

Diberikan (x_n) r_1-konvergen ke x di $\left(X, d_p\right)$ dan $r_1 \prec r_2$ untuk suatu $0 \ll r_2$. Akan dibuktikan bahwa $LIM^{r_1} x_n \subset LIM^{r_2} x_n$.

Berdasarkan Teorema 4.5 telah terbukti bahwa jika (x_n) r_1-konvergen ke x di (X, d_p), maka (x_n) juga r_2-konvergen ke x di (X, d_p) utnuk $r_1 < r_2$ yang bisa dinotasikan dengan $x_n \xrightarrow{r_1} x$ dan $x_n \xrightarrow{r_2} x$. Selanjutnya, akan ditunjuukan bahwa $LIM^{r_1}x_n \subset LIM^{r_2}x_n$ yang artinya jika $x \in LIM^{r_1}x_n$, maka $x \in LIM^{r_2}x_n$. Perlu diketahui bahwa $LIM^{r_1}x_n = \{x \in X | x_n \xrightarrow{r_1} x\}$ dan $LIM^{r_2}x_n = \{x \in X | \; x_n \xrightarrow{r_2} x\}$. Karena (x_n) juga r_2-konvergen ke x menurut Teorema 4.5, dengan begitu titik r-limit $x \in LIM^{r_1}x_n$ jelas bahwa titik r-limit $x \in LIM^{r_2}x_n$ pula. Jadi, terbukti bahwa $LIM^{r_1}x_n \subset LIM^{r_2}x_n$.■

Teorema 4.7 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah dua barisan di ruang metrik *cone* (X, d_p) dan misalkan (y_n) konvergen ke $y \in X$. Jika terdapat $0 \ll r$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \preccurlyeq r$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka (x_n) r-konvergen ke y.

Bukti:

Diberikan (x_n) dan (y_n) dua barisan di (X, d_p) dan barisan (y_n) konvergen $y \in X$. Terdapat $0 \ll r$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \preccurlyeq r$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan barisan (x_n) r-konvergen ke y.

Karena (y_n) konvergen y, berdasarkan definisi untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(y_n, y) \ll c$ untuk setiap $n > k$ yang artinya $c - d_p(y_n, y) \in int\ P$ untuk setiap $n > k$.

Dan untuk setiap $n > k$ diketahui $d_p(x_n, y_n) \preccurlyeq r$ yang artinya $r - d_p(x_n, y_n) \in P$ untuk setiap $n > k$.

Karena $c - d_p(x_n, y_n) \in int\ P$ dan $r - d_p(x_n, y_n) \in P$, maka $(r + c) - \left(d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, y)\right) \in int\ P$.

karena $d_p(x_n, y) \preccurlyeq d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, y)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

yang artinya $\left(d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, y)\right) - d_p(x_n, y) \in P$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

Karena $(r+c)-\left(d_p(x_n,y_n)+d_p(y_n,y)\right)\in int\ P$

Maka penjulahan keduanya juga ada di interior P yaitu

$(r+c)-\left(d_p(x_n,y_n)+d_p(y_n,y)\right)+\left(d_p(x_n,y_n)+d_p(y_n,y)\right)-d_p(x_n,y)$

$=r+c-d_p(x_n,y)\in int\ P$

Denga begitu

$d_p(x_n,y)\ll r+c$ untuk setiap $n>k$

Maka terbukti (x_n) r-konvergen ke y. ■

Teorema 4.8 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (x_n) adalah barisan di (X,d_p) dan (y_n) barisan konvergen di $LIM^r x_n$ yang konvergen ke y_0. Maka y_0 harus ada di $LIM^r x_n$.

Bukti:

Diberikan (x_n) barisan di (X,d_p) dan (y_n) barisan konvergen di $LIM^r x_n$ yang konvergen ke y_0. Akan dibuktikan bahwa $y_0\in LIM^r x_n$.

Karena (y_n) konvergen ke y_0, untuk $0\ll c$ terdapat $k_1\in\mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(y_n,y_0)\ll\frac{c}{2}$ untuk setiap $n>k_1$. Karena $y_n\in LIM^r x_n$, maka terdapat $k_2\in\mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n,y_n)\ll r+\frac{c}{2}$ berarti $\left(r+\frac{c}{2}\right)-d_p(x_n,y_n)\in int\ P$ untuk setiap $n>k_2$. Maka untuk setiap $n\in\mathbb{N}$ berlaku

$d_p(x_n,y_0)\preccurlyeq d_p(x_n,y_n)+d_p(y_n,y_0)$ yang artinya $\left(d_p(x_n,y_n)+d_p(y_n,y_0)\right)-d_p(x_n,y_0)\in P$. Karena $\left(r+\frac{c}{2}\right)-d_p(x_n,y_n)\in int\ P$ dan $\frac{c}{2}-d_p(y_n,y_0)\in int\ P$, maka $(r+c)-\left(d_p(x_n,y_n)+d_p(y_n,y_0)\right)\in int\ P$.

Karena $\left(d_p(x_n,y_n)+d_p(y_n,y_0)\right)-d_p(x_n,y_0)\in P$, diperoleh

$$(r+c) - \left(d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, y_0)\right) + \left(d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, y_0)\right) - d_p(x_n, y_0)$$

$= (r+c) - d_p(x_n, y_0) \in int\ P$

$d_p(x_n, y_0) \ll r + c$ atau

$d_p(x_n, y_0) \preccurlyeq d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, y_0)$

$$\ll \left(r + \frac{c}{2}\right) + \frac{c}{2} \quad \ll r + c$$

Dengan begitu $d_p(x_n, y_0) \ll r + c$ utnuk setiap $n >$ max (k_1, k_2) dan terbukti bahwa $y_0 \in LIM^r x_n$.■

Teorema 4.9 (Banerjee & Mondal, 2019) Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah dua barisan di (X, d_p). Misalkan setiap $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \preccurlyeq c$ untuk setiap $n > k$.Barisan (x_n) *r*-konvergen ke x jika dan hanya jika (y_n) *r*-konvergen ke x.

Bukti:

Diberikan (x_n) dan (y_n) dua barisan di (X, d_p) dan untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \preccurlyeq c$ untuk setiap $n > k$. Akan dibuktikan (x_n) *r*-konvergen ke x jika dan hanya jika (y_n) *r*-konvergen ke x.

⇒ Jika (x_n) *r*-konvergen ke x, maka (y_n) *r*-konvergen ke x.

Misalkan (x_n) *r*-konvergen ke x , maka untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, x) \ll r + \frac{c}{2}$ berarti $\left(r + \frac{c}{2}\right) - d_p(x_n, x) \in int\ P$ untuk setiap $n > k_1$. Diketahi pula untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \preccurlyeq \frac{c}{2}$ berarti $\frac{c}{2} - d_p(x_n, y_n) \in P$ untuk setiap $n > k_2$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku bahwa $d_p(y_n, x) \preccurlyeq d_p(y_n, x_n) + d_p(x_n, x)$ yang artinya

$\left(d_p(y_n, x_n) + d_p(x_n, x)\right) - d_p(y_n, x) \in P$. Karena $\left(r + \frac{c}{2}\right) - d_p(x_n, x) \in int\ P$ dan $\frac{c}{2} - d_p(y_n, x_n) \in P$, maka $(r + c) - \left(d_p(y_n, x_n) + d_p(x_n, x))\right) \in int\ P$.

$(r + c) - \left(d_p(y_n, x_n) + d_p(x_n, x)\right) + \left(d_p(y_n, x_n) + d_p(x_n, x)\right) - d_p(y_n, x)$

$= (r + c) - d_p(y_n, x) \in int\ P$

$d_p(y_n, x) \ll r + c$ atau

$d_p(y_n, x) \preccurlyeq d_p(y_n, x_n) + d_p(x_n, x) \ll r + \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = r + c$

Dengan begitu $d_p(y_n, x) \ll r + c$ utnuk setiap $n \geq \max{(k_1, k_2)}$ dan terbukti y_n r-konvergen ke x.

$\Leftarrow$ Jika (y_n) r-konvergen ke x, maka (x_n) r-konvergen ke x.

Misalkan (y_n) r-konvergen ke x , maka untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(y_n, x) \ll r + \frac{c}{2}$ berarti $\left(r + \frac{c}{2}\right) - d_p(y_n, x) \in int\ P$ untuk setiap $n > k_1$ Diketahi pula untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \preccurlyeq \frac{c}{2}$ berarti $\frac{c}{2} - d_p(x_n, y_n) \in P$ untuk setiap $n > k_2$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku bahwa $d_p(x_n, x) \preccurlyeq d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, x)$ yang artinya $\left(d_p(x_n y_n) + d_p(y_n, x)\right) - d_p(x_n, x) \in P$. Karena $\left(r + \frac{c}{2}\right) - d_p(y_n, x) \in int\ P$ dan $\frac{c}{2} - d_p(x_n, y_n) \in P$, maka $(r + c) - \left(d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, x)\right) \in int\ P$.

$(r + c) - \left(d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, x)\right) + \left(d_p(x_n y_n) + d_p(y_n, x)\right) - d_p(x_n, x)$

$= (r + c) - d_p(x_n, x) \in int\ P$

$d_p(x_n, x) \ll r + c$ atau

$d_p(x_n, x) \preccurlyeq d_p(x_n, y_n) + d_p(y_n, x) \ll r + \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = r + c$

Dengan begitu $d_p(y_n, x) \ll r + \varepsilon$ utnuk setiap $n > \max(k_1, k_2)$ dan terbukti (x_n) r-konvergen ke x.■

Definisi 4.10 (Huang & Zhang, 2007) Misalkan (X, d_p) adalah ruang metrik *cone* dan (x_n) barisan pada (X, d_p). Barisan (x_n) dikatakan barisan *Cauchy* apabila untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq k$ berlaku

$$d_p(x_n, x_m) \ll c.$$

Contoh 4.10 Diberikan Ruang Metrik *Cone* $(\mathbb{R}^2, d_p)$ dengan

$d_p(x, y) = (\|x - y\|, \|x - y\|)$ di mana $\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

dengan *cone* $P = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ dan barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}^2$, barisan (x_n) adalah barisan *Cauchy* di $(\mathbb{R}^2, d_p)$.

Bukti:

Pada Contoh 2.17 telah mencakup pembuktian bahwa $(\mathbb{R}^2, d_p)$ merupakan ruang metrik *cone*. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa barisan (x_n) adalah barisan *Cauchy*.

Ambil sembarang $c \in E$ dengan $(0,0) \ll c$. Misalkan $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, dipilih $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $k > \max\left(\frac{2\sqrt{2}}{c_1}, \frac{2\sqrt{2}}{c_2}\right)$. Maka untuk setiap $n, m > k$ berlaku

$$d_p(x_n, x_m) \preccurlyeq d_p\big(x_n, (0,0)\big) + d_p((0,0), x_m)$$

$$d_p(x_n, x_m) \preccurlyeq d_p\big(x_n, (0,0)\big) + d_p\big(x_m, (0,0)\big)$$

$$d_p\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right) \preccurlyeq d_p\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), (0,0)\right) + d_p\left(\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right), (0,0)\right)$$

$$= \left(\left\|\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - (0,0)\right\|, \left\|\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) - (0,0)\right\|\right)$$

$$+\left(\left\|\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)-(0{,}0)\right\|,\left\|\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)-(0{,}0)\right\|\right)$$

$$=\left(\sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2+\left(\frac{1}{n}-0\right)^2},\sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2+\left(\frac{1}{n}-0\right)^2}\right)$$

$$+\left(\sqrt{\left(\frac{1}{m}-0\right)^2+\left(\frac{1}{m}-0\right)^2},\sqrt{\left(\frac{1}{m}-0\right)^2+\left(\frac{1}{m}-0\right)^2}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}},\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}},\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2}}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\frac{2}{n^2}},\sqrt{\frac{2}{n^2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{2}{m^2}},\sqrt{\frac{2}{m^2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{\sqrt{2}}{m},\frac{\sqrt{2}}{n}+\frac{\sqrt{2}}{m}\right)$$

$$\preccurlyeq\left(\frac{\sqrt{2}}{k}+\frac{\sqrt{2}}{k},\frac{\sqrt{2}}{k}+\frac{\sqrt{2}}{k}\right)=\left(\frac{2\sqrt{2}}{k},\frac{2\sqrt{2}}{k}\right)$$

Karena $c_1-\frac{2\sqrt{2}}{k}>0$ dan $c_2-\frac{2\sqrt{2}}{k}>0$

sehingga $(c_1,c_2)-\left(\frac{2\sqrt{2}}{k},\frac{2\sqrt{2}}{k}\right)=\left(c_1-\frac{2\sqrt{2}}{k},c_2-\frac{2\sqrt{2}}{k}\right)\in int\ P.$

Dengan begitu, terbukti bahwa $d_p(x_n,x_m)\ll c.$

Jadi, barisan (x_n) adalah barisan *Cauchy* di $(\mathbb{R}^2,d_p)$.■

Definisi 4.11 (Banerjee & Mondal, 2022) Barisan (x_n) di ruang metrik *cone* (X,d_p) dikatakan barisan *r-Cauchy* untuk suatu $0\ll r$ atau $r=0$ jika untuk setiap $0\ll c$ terdapat $k\in\mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n,m>k$ berlaku

$$d_p(x_n,x_m)\ll r+c$$

Contoh 4.11 Diberikan ruang metrik *cone* $(\mathbb{R}^2,d_p)$ dengan $d_p(x,y)=(\|x-y\|,\|x-y\|)$ di mana $\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$ $\forall x,y\in\mathbb{R}^2$ dengan $x=(x_1,x_2)$ dan $y=(y_1,y_2)$ dengan *cone* $P=\{(x,y):x,y\geq 0\}$. Selanjutnya, diberikan barisan (x_n) di $\mathbb{R}^2$ di mana $(x_n)=(1{,}1)$ jika n ganjil dan $x_n=(2{,}2)$ jika n genap. Akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) bukanlah barisan *Cauchy* namun *r-Cauchy* di $(\mathbb{R}^2,d_p)$.

Bukti:

Pada Contoh 2.17 telah mencakup pembuktian bahwa $(\mathbb{R}^2, d_p)$ merupakan ruang metrik *cone*. Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa barisan (x_n) bukanlah barisan *Cauchy* di $(\mathbb{R}^2, d_p)$.

Andaikan (x_n) adalah barisan *Cauchy* , maka untuk setiap $c \in E$ dengan $(0,0) \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk $n, m \geq k$ berlaku

$$d_p(x_n, x_m) \ll c.$$

Terdapat 4 kasus yang mungkin terjadi untuk $d(x_n, x_m)$, yaitu:

1. Ketika $(x_n) = (1,1)$ dan $(x_m) = (1,1)$ untuk n, m ganjil

   $d_p(x_n, x_m) = d((1,1), (1,1))$

   $d_p\big((1,1), (1,1)\big) = (\|(1,1) - (1,1)\|, \|(1,1) - (1,1)\|$

   $= \left(\sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2}, \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2}\right)$

   $= (0,0)$

2. Ketika $(x_n) = (2,2)$ dan $(x_m) = (2,2)$ untuk n, m genap

   $d_p(x_n, x_m) = d((2,2), (2,2))$

   $d_p\big((2,2) - (2,2)\big) = (\|(2,2) - (2,2)\|, \|(2,2) - (2,2)\|)$

   $= \left(\sqrt{(2-2)^2 + (2-2)^2}, \sqrt{(2-2)^2 + (2-2)^2}\right)$

   $= (0,0)$

Untuk 2 kasus di atas, karena $0 \ll c$ yang artinya $c \in int\ P$ maka $(c_1, c_2) \in int\ P$. Dengan begitu terpenuhi bahwa untuk setiap c dengan $0 \ll c$ terdapat $k = 1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n > 1$ berlaku $d_p(x_n, x_m) \ll c$. Namun, hal ini tidak berlaku untuk kasus 3 dan 4 seperti penjelasan berikut:

Jika dipilih $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in int\ P$, maka

3. Ketika $(x_n) = (1,1)$ untuk n ganjil dan $(x_m) = (2,2)$ untuk m genap

$d_p(x_n, x_m) = d_p((1,1), (2,2))$

$$d_p\big((1,1), (2,2)\big) = (\|(1,1) - (2,2)\|, \|(1,1) - (2,2)\|$$

$$= \left(\sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2}, \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

4. Ketika $(x_n) = (2,2)$ untuk n genap dan $(x_m) = (1,1)$ untuk m ganjil

$d_p(x_n, x_m) = d((2,2), (1,1))$

$$d_p\big((2,2), (1,1)\big) = (\|(2,2) - (1,1)\|, \|(2,2) - (1,1)\|$$

$$= \left(\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}, \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}\right)$$

$$= \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$$

Karena $c - d(x_n, x_m) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)$, dan $\frac{1}{2} - \sqrt{2} < 0$ dengan begitu $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}, \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) \notin int\ P$. Artinya penyataan $(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \ll c$ salah. Akibatnya, terbukti bahwa (x_n) bukanlah barisan *Cauchy* di $(\mathbb{R}^2, d_p)$.

Selanjutnya, jika dipertimbangkan $r \in E$ dengan $0 \ll r$ yaitu $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ maka (x_n) adalah barisan *r-Cauchy* di $(\mathbb{R}^2, d_p)$. Dari kasus 1 sampai 4, untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k = 1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m > 1$ berlaku

$d_p(x_n, x_m) \ll r + c.$

$d_p(x_n, x_m) = (0,0) \ll \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) + c$ untuk n, m ganjil

$d_p(x_n, x_m) = (0,0) \ll \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) + c$ untuk n, m genap

$d_p(x_n, x_m) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \ll \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) + c$ untuk n ganjil dan m genap

$d_p(x_n, x_m) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) \ll \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) + c$ untuk n genap dan m ganjil

Sehingga barisan (x_n) bukanlah barisan *Cauchy di* $(\mathbb{R}^2, d_p)$ tetapi barisan (x_n) merupakan barisan r-*Cauchy* di $(\mathbb{R}^2, d_p)$ dengan $r = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.■

Teorema 4.12 (Banerjee & Mondal, 2022) Setiap barisan $\frac{r}{2}$-konvergen adalah barisan r-*Cauchy* di ruang metrik *cone* (X, d_p).

Bukti:

Diberikan barisan (x_n) $\frac{r}{2}$-konvergen ke $x \in X$ di ruang metrik *cone* (X, d_p). Maka untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$, terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m > k$ berlaku

$d_p(x_n, x) \ll \frac{r}{2} + \frac{c}{2}$ yang artinya $\left(\frac{r}{2} + \frac{c}{2}\right) - d_p(x_n, x) \in int\ P$

dan $d_p(x_m, x) \ll \frac{r}{2} + \frac{c}{2}$ yang artinya $\left(\frac{r}{2} + \frac{c}{2}\right) - d_p(x_m, x) \in int\ P$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, untuk $n, m \geq k$ berlaku

$d_p(x_n, x_m) \preccurlyeq d_p(x_n, x) + d_p(x, x_m)$

$d_p(x_n, x_m) \preccurlyeq d_p(x_n, x) + d_p(x_m, x)$ yang berarti

$\left(d_p(x_n, x) + d_p(x_m, x)\right) - d_p(x_n, x_m) \in P$

Karena $\left(\frac{r}{2} + \frac{c}{2}\right) - d_p(x_n, x) \in int\ P$ dan $\left(\frac{r}{2} + \frac{c}{2}\right) - d_p(x_m, x) \in int\ P$,

Maka

$\left(\frac{r}{2} + \frac{c}{2}\right) - d_p(x_n, x) + \left(\frac{r}{2} + \frac{c}{2}\right) - d_p(x_m, x) + \left(d_p(x_n, x) + d_p(x_m, x)\right) -$

$d_p(x_n, x_m) = r + c - d_p(x_n, x_m) \in int\ P$

Dengan begitu , untuk setiap $n, m > k$ berlaku $d_p(x_n, x_m) \ll r + c$

$$
\begin{aligned}
d_p(x_n, x_m) &\preccurlyeq d_p(x_n, x) + d_p(x_m, x) \\
&\ll \left(\frac{r}{2} + \frac{c}{2}\right) + \left(\frac{r}{2} + \frac{c}{2}\right) = r + c
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa setiap barisan $\frac{r}{2}$-konvergen adalah barisan r-*Cauchy* di ruang metrik *cone* (X, d_p). ■

4.2 Integrasi Barisan *R*-Konvergen dan Berdo'a di Waktu Mustajab

Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas mengenai persamaan dan perbedaan barisan konvergen dan *r*-konvergen di ruang metrik *cone*. Diketahui bahwa barisan konvergen dan *r*-konvergen merupakan barisan yang sama-sama konvergen. Namun, dalam beberapa aspek barisan konvergen dan *r*-konvergen memiliki perbedaan besar dengan barisan konvergen di ruang metrik *cone*. Begitu pula keterkaitan antara berdo'a dengan berdo'a di waktu mustajab. Sebagaimana firman Allah dalam Q.S. Al-Baqarah ayat 186 tentang jaminan Allah dalam mengabulkan do'a hamba-Nya.

وَإِذَا سَأَلَكَ عِبَادِي عَنِّي فَإِنِّي قَرِيبٌۖ أُجِيبُ دَعْوَةَ الدَّاعِ إِذَا دَعَانِۖ فَلْيَسْتَجِيبُوا لِي وَلْيُؤْمِنُوا بِي لَعَلَّهُمْ يَرْشُدُونَ﴿١٨٦﴾

Artinya: *"Dan apabila hamba-hamba-Ku bertanya kepadamu tentang Aku, maka (jawablah), bahwasanya Aku adalah dekat. Aku mengabulkan permohonan orang yang berdoa apabila dia berdoa kepada-Ku, maka hendaklah mereka itu memenuhi (segala perintah)-Ku dan hendaklah mereka beriman kepada-Ku, agar mereka selalu berada dalam kebenaran."* (Q.S. Al-Baqarah:186) (Kemenag RI, 2019).

Ayat ini menyampaikan kepada manusia bahwa Allah SWT dekat dengan kita. Ketika hamba-hamba-Nya berpaling kepada-Nya dengan doa, Allah dengan rahmat-Nya yang tak terbatas mengabulkan doa-doa kita. Hal ini menegaskan bahwa doa adalah sebuah saluran komunikasi langsung antara manusia dan Sang Pencipta. Namun demikian, pengabulan doa tidaklah tanpa syarat. Ayat ini menekankan bahwa hamba-hamba-Nya diharapkan untuk memenuhi perintah-perintah-Nya dan menjaga keimanan yang teguh kepada-Nya. Ketaatan dan keimanan yang kuat merupakan prasyarat untuk doa yang dikabulkan. Allah tidak hanya ingin mendengar doa hamba-Nya, tetapi juga mengharapkan tindakan dan kepatuhan mereka terhadap-Nya. Dengan mematuhi perintah-Nya dan memperkuat iman kepada-Nya, hamba-hamba-Nya dijanjikan petunjuk dan bimbingan dari Allah. Oleh karena itu, ayat ini mengajarkan kepada manusia pentingnya menjaga hubungan spiritual dengan Allah melalui doa, ketaatan, dan keimanan yang teguh untuk mencapai petunjuk dan rahmat-Nya.

Pada barisan konvergen, terdapat beberapa syarat yang harus dipenuhi yaitu untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku $d_p(x_n, x) \ll c$ agar barisan (x_n) menuju ke x. Sama halnya dengan konsep berdo'a yang dijelaskan sebeumnya tentang syarat dalam pengabulan do'a yaitu ketulusan dan keikhalasan hati, ketekunan dan konsistensi, kepatuhan terhadap perintah Allah, dan keteguhan iman.

Sedangkan barisan *r*-konvergen memiliki syarat yang hampir sama namun berbeda dari barisan konvergen di ruang metrik *cone*. Barisan (x_n) di x dikatakan *r*-konveren ke x untuk suatu $r \in E$ dengan $0 \ll r$ atau $r = 0$ jika untuk setiap $c \in E$ dengan $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n > k$ berlaku $d_p(x_n, x) \ll r + c$. Terdapat penambahan unsur r sehingga barisan tersebut dikatakan r-konvergen. Dalam konsep berdo'a, unsur ini adalah waktu-waktu mustajab yang dianjurkan dan memiliki potensi besar untuk dikabulkan oleh Allah SWT.

Berdoa dapat dilakukan dalam kondisi apapun, baik saat senang ataupun saat tertimpa musibah. Pada dasarnya berdoa tidak mengenal waktu dan tempat. Kapan pun dan dimana pun kita bisa berdoa kepada Allah. Namun terlepas dari itu, terdapat waktu-waktu yang mustajab dengan harapan doa kita akan terkabul. Berikut yang termasuk waktu-waktu mustajab dalam berdo'a.

1. Sepertiga malam yang terakhir

   Malam terakhir sebelum waktu shubuh adalah waktu yang sangat dianjurkan untuk bangun dan berdoa.. Waktu ini merupakan waktu dibukanva pintu rahmat dan dikabulkannya doa, kepada siapa saja yang terbangun dan beribadah kepda Allah SWT.

   عَنْ جَابِرٍ، قَالَ سَمِعْتُ النَّبِيَّ صلى الله عليه وسلم يَقُولُ " إِنَّ فِي اللَّيْلِ لَسَاعَةً لاَ يُوَافِقُهَا رَجُلٌ مُسْلِمٌ يَسْأَلُ اللَّهَ خَيْرًا مِنْ أَمْرِ الدُّنْيَا وَالآخِرَةِ إِلاَّ أَعْطَاهُ إِيَّاهُ وَذَلِكَ كُلَّ لَيْلَةٍ " (رواه مسلم).

   Artinya: *Dari Jabir, Rasulullah bersabda "Sesungguhnya pada malam hari itu ada suatu waktu yang jika kebetulan seorang muslim berdoa meminta kebaikan dunia dan akhirat ketika itu, maka Allah akan mengabulkan doanya. Dan waktu yang mustajab itu ada terus setiap malam."* (HR Muslim No. 757).

2. Setelah shalat fardhu

   Waktu setelah menunaikan shalat fardhu adalah waktu yang baik untuk berdoa. Rasulullah SAW menyebutnya sebagai waktu di mana doa-doa diterima.

   فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلٰوةَ فَاذْكُرُوا اللّٰهَ قِيَامًا وَّقُعُوْدًا وَّعَلٰى جُنُوْبِكُمْۚ فَإِذَا اطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيْمُوا الصَّلٰوةَۚ إِنَّ الصَّلٰوةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِيْنَ كِتٰبًا مَّوْقُوْتًا ﴿١٠٣﴾

   Artinya: *"Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman."* (QS An-Nisa: 103) (Kemenag RI, 2019).

3. Waktu antara adzan dan iqomah

Pada waktu ini pintu-pintu langit dibukakan dan doa pun akan dikabulkan. Waktu yang singkat ini memberikan pelajaran kepada kita agar melaksanakan sholat di awal waktu untuk sholat berjamaah di masjid. Karena hanya orang yang tepat waktu saja yang dapat berdoa di waktu ini.

عَنْ أَنَسِ بْنِ مَالِكٍ، قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صلى الله عليه وسلم " الدُّعَاءُ لاَ يُرَدُّ بَيْنَ الأَذَانِ وَالإِقَامَةِ " (رواه الترمذي).

Artinya: *Dari Anas bin Malik, Rasulullah bersabda "Doa itu tidak tertolak (jika dipanjatkan di antara) adzan dan iqamah"* (HR At-Tirmidzi No. 212).

4. Ketika lapang atau merasa cukup

Sudah menjadi kebiasaan bahwa kebanyakan manusia akan mendekatkan diri kepada Allah saat ditimpa musibah. Namun saat musibah itu berlalu, berganti dengan kebahagiaan dan kenikmatan, ia kembali lalai dan menjauh dari Allah. Padahal dalam keadaan lapanglah Allah akan mengabulkan doa seorang hamba. Artinya, berdoa baiknya dilakukan ketika merasa lapang maupun sedang ditimpa kesulitan.

عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ، رضى الله عنه قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صلى الله عليه وسلم " مَنْ سَرَّهُ أَنْ يَسْتَجِيبَ اللَّهُ لَهُ عِنْدَ الشَّدَائِدِ وَالْكُرَبِ فَلْيُكْثِرِ الدُّعَاءَ فِي الرَّخَاءِ " (رواه الترمذي).

Artinya: *Dari Abu Hurairah, Rasulullah bersada, "Barangsiapa yang menginginkan doanya dipenuhi allah ketika ia dalam kesulitan, maka hendaklah ia memperbanyak doa di waktu lapang"* (HR At-Tirmmidzi No. 3382).

5. Waktu hujan

Saat hujan turun juga dianggap sebagai waktu mustajab untuk berdoa. Dikatakan bahwa hujan adalah tanda rahmat Allah dan doa-doa di saat itu seringkali diterima.

عَنْ سَهْلِ بْنِ سَعْدٍ، قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ صلى الله عليه وسلم : " ثِنْتَانِ لاَ تُرَدَّانِ، أَوْ قَلَّمَا تُرَدَّانِ : الدُّعَاءُ عِنْدَ النِّدَاءِ، وَعِنْدَ الْبَأْسِ حِينَ يُلْحِمُ بَعْضُهُمْ بَعْضًا " . قَالَ مُوسَى : وَحَدَّثَنِي رِزْقُ بْنُ سَعِيدِ بْنِ عَبْدِ الرَّحْمَنِ عَنْ أَبِي حَازِمٍ عَنْ سَهْلِ بْنِ سَعْدٍ عَنِ النَّبِيِّ صلى الله عليه وسلم قَالَ : وَوَقْتَ الْمَطَرِ (رواه ابي داود).

Artinya: *Dari Sahl bin Sa'ad, Rasulullah bersada, "Dua waktu yang doa ketika itu tidak tertolak, atau sangat sedikit sekali tertolaknya, yaitu: ketika adzan dan ketika perang saat kedua pasukan bertemu. Musa (bin Ya'qub Az Zam'i) mengatakan: Rizq bin Sa'id bin Abdirrahman menuturkan kepadaku, dari Abu Hazim, dari Sahl bin Sa'd, dari Nabi Shallallahu'alaihi Wasallam, beliau bersabda: "dan ketika turun hujan"* (HR Abu Dawud 2540).

6. Pada malam Lailatul Qadar

Malam lailatul qadar adalah malam yang lebih mulia dari 1.000 bulan. Amal kebaikan yang dilakukan pada malam itu, nilainya setara dengan ibadah selama1.000 bulan atau 83 tahun. Karena kemuliaannya itu, maka malam lailatul qadar merupakan waktu yang mustajab untuk berdoa.

عَنْ عَائِشَةَ، قَالَتْ قُلْتُ يَا رَسُولَ اللَّهِ أَرَأَيْتَ إِنْ عَلِمْتُ أَىُّ لَيْلَةٍ لَيْلَةُ الْقَدْرِ مَا أَقُولُ فِيهَا قَالَ " قُولِي اللَّهُمَّ إِنَّكَ عَفُوٌّ كَرِيمٌ تُحِبُّ الْعَفْوَ فَاعْفُ عَنِّي " (رواه الترمذي).

Artinya: *Dari Aisyah ra., ia berkata : Saya bertanya : "Wahai Rasulullah, bagaimana pendapatmu seandainya saya mengetahui malam itu adalah malam Qadar, apakah yang harus saya baca pada malam tersebut ?" Beliau bersabda :"Bacalah Allahumma Innaka 'Afuwwun Kariim Tuhibbul 'Afwa Fa'fu'anni (Ya Allah, sesungguhnya Engkau adalah Dzat yang Maha Pengampun, maka ampunilah saya)"* (HR At-.Tirmidzi No. 3513).

7. Pada hari jum'at

Menurut Ibnu Qayyim Al-Jauziyah, hari Jumat adalah harinya ibadah. Jika dibandingkan dengan hari-hari lainnya dalam sepekan, hari Jumat laksana bulan Ramadhan dengan bulan-bulan lainnya. Begitu mustajabnya, hari Jumat juga sama seperti malam Lailatul Qadar di bulan Ramadhan.

عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ، أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ صلى الله عليه وسلم ذَكَرَ يَوْمَ الْجُمُعَةِ فَقَالَ " فِيهِ سَاعَةٌ لاَ يُوَافِقُهَا عَبْدٌ مُسْلِمٌ، وَهْوَ قَائِمٌ يُصَلِّي، يَسْأَلُ اللَّهَ تَعَالَى شَيْئًا إِلاَّ أَعْطَاهُ إِيَّاهُ " (رواه البخاري).

Artinya: Dari Abu Hurairah, Rasulullah Shallallahu'alaihi Wasallam menyebutkan tentang hari Jumat kemudian beliau bersabda: "Di dalamnya terdapat waktu. Jika seorang muslim berdoa ketika itu, pasti diberikan apa yang ia minta. Lalu beliau mengisyaratkan dengan tangannya tentang sebentarnya waktu tersebut" (HR Bukhari No. 935).

8. Pada hari Arafah

Pada hari Arafah, Allah memberikan kemuliaan kepada hamba-Nya yang sedang berkumpul di Arafah di hadapan para malaikat-Nya. Oleh karena itu, hari Arafah dianggap sebagai waktu yang sangat mustajab untuk berdoa.

عَنْ عَمْرِو بْنِ شُعَيْبٍ، عَنْ أَبِيهِ، عَنْ جَدِّهِ، أَنَّ النَّبِيَّ صلى الله عليه وسلم قَالَ " خَيْرُ الدُّعَاءِ دُعَاءُ يَوْمِ عَرَفَةَ " (رواه الترمذي).

Artinya: *Dari Amr bin Su'aib, Rasulullah bersabda, "Sebaik-baik doa adalah doa pada hari Arafah*" (HR At- Tirmidzi No. 3583).

9. Saat sujud dalam shalat

Saat sujud dalam shalat adalah waktu yang sangat mustajab untuk berdoa. Dalam posisi sujud, seseorang dianggap berada pada posisi yang paling dekat dengan Allah SWT.

عَنْ مُعَاذِ بْنِ جَبَلٍ، قَالَ قَالَ رَسُولُ اللَّهِ . صلى الله عليه وسلم . " مَا مِنْ عَبْدٍ بَاتَ عَلَى طُهُورٍ ثُمَّ تَعَارَّ مِنَ اللَّيْلِ فَسَأَلَ اللَّهَ شَيْئًا مِنْ أَمْرِ الدُّنْيَا أَوْ مِنْ أَمْرِ الآخِرَةِ إِلاَّ أَعْطَاهُ " (رواهابن ماجة).

Artinya: *"Dari Mu'ad bin Jabal , Rasulullah bersabda, "Tidaklah seseorang hamba tidur dalam keadaan suci lalu terbangun pada malam hari kemudian memohon sesuatu tentang urusan dunia atau akhirat, melainkan Allah akan mengabulkannya"* (HR Ibnu Majah No. 3881).

10. Saat sujud dalam shalat

Rasulullah Shallallahu'alaihi Wasallam bersabda:

عَنْ أَبِي هُرَيْرَةَ، أَنَّ رَسُولَ اللَّهِ صلى الله عليه وسلم قَالَ " أَقْرَبُ مَا يَكُونُ الْعَبْدُ مِنْ رَبِّهِ وَهُوَ سَاجِدٌ فَأَكْثِرُوا الدُّعَاءَ " (رواه مسلم).

Artinya: *Dari Abu Hurairah, Rasulullah bersabda , "Seorang hamba berada paling dekat dengan Rabb-nya ialah ketika ia sedang bersujud. Maka perbanyaklah berdoa ketika itu"* (HR Muslim No. 482).

Barisan konvergen memiliki definisi umum yang telah dijelaskan pada buku-buku analisis terkait kekonvergenan dan tidak ada penambahan unsur tertentu. Namun, pada barisan *r*-konvergen terdapat r yang merupakan derajat kekasaran dengan syarat tertentu sehingga disebut *r*-konvergen. Hal ini sejalan dengan konsep berdo'a pada waktu biasa engan berdo'a di waktu-waktu mustajab. Waktu. Berdo'a dapat dilakukan kapan pun dan di mana pun, namun terdapat waktu-waktu yang dianggap mustajab dalam berdo'a. Berdoa pada waktu-waktu yang mustajab cenderung lebih fokus dan lebih tekun dengan keinginan kuat yang lebih mendalam daripada berdo'a di waktu biasa.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai barsian *r*-konvergen di ruang metrik *cone*, didapatkan pemahaman bahwa ketika $r = 0$, barisan *r*-konvergen menjadi barisan konvergen di ruang metrik *cone* . Pada barisan *r*-konvergen di ruang metrik *cone* terdapat barisan yang memiliki *r*-limit lebih dari satu. Selain itu, telah dibuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan barisan *r*-konvergen di ruang metrik *cone*.

Sifat-sifat barisan *r*-konvergen di ruang metrik *cone* di antaranya yaitu:

1. Misalkan barisan (x_n) r_1-konvergen ke x di (X, d_p). Maka (x_n) juga r_2-konvergen ke x di (X, d_p) untuk $r_1 < r_2$.
2. Misalkan (x_n) r_1-konvergen ke x di (X, d_p) dan $r_1 < r_2$ untuk suatu $0 \ll r_2$. Maka $LIM^{r_1} x_n \subset LIM^{r_2} x_n$.
3. Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah dua barisan di ruang metrik *cone* $\left(X, d_p\right)$ dan misalkan (y_n) konvergen ke $y \in X$. Jika terdapat $0 \ll r$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \leq r$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Maka (x_n) *r*-konvergen ke y.
4. Misalkan (x_n) adalah barisan di (X, d_p) dan (y_n) barisan konvergen di $LIM^r x_n$ yang konvergen ke y_0. Maka y_0 harus ada di $LIM^r x_n$.
5. Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah dua barisan di (X, d_p). Jika untuk setiap $0 \ll c$ terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $d_p(x_n, y_n) \leq c$ untuk setiap $n \geq k$. Maka (x_n) r-konvergen ke x jika dan hanya jika (y_n) r-konvergen ke x.

6. Setiap barisan $\frac{r}{2}$-konvergen adalah barisan r-*Cauchy* di ruang metrik *cone* (X, d_p).

5.2 Saran

Topik penelitian mengenai barisan r-konvergen di ruang metrik *cone* belum banyak diteliti dan dibuktikan. Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya dapat meneliti tentang sifat kelengkapan di ruang metrik *cone* menggunakan barisan r-konvergen di ruang metrik *cone*.

DAFTAR PUSTAKA

Ahsar K, M., & Yulida, Y. (2009). Pemetaan Linier Kontinu Pada Ruang Bernorma Kabur. *Paper Knowledge . Toward a Media History of Documents*, *3*(2), 39–50.

Bahtiar, R., Abrori, M., & Malahayati. (2014). *Konsep Dasar Ruang Metrik Cone*. *3*(1), 185–194.

Banerjee, A. K., & Mondal, R. (2019). Rough convergence of sequences in a cone metric space. *Journal of Analysis*, *27*(4), 1179–1188. https://doi.org/10.1007/s41478-019-00168-2

Banerjee, A. K., & Mondal, R. (2022). Rough Cauchy Sequences in A Cone Metric Space. *Journal of Mathematical and Computational Science*, 1–7. https://doi.org/10.28919/jmcs/6823

Bartle, & Sherbert. (2010). *Introduction to Real Analysis* (Edisi ke-4). John Wiley & Sons, Inc.

Hadits riwayat Abu Dawud no. 2540 dari Sahl in Sa'ad

Hadits riwayat Ahmad no. 21354 dan Tirmidzi no. 1987 dari Abu Dzar Al Ghifari

Hadits riwayat At-Tirmidzi no. 212 dari Anas bin Malik

Hadits riwayat At-Tirmidzi no. 3382 dari Abu Hurairah

Hadits riwayat At-Tirmidzi no. 3513 dari Aisyah ra

Hadits riwayat At-Tirmidzi no. 3583 dari Amr bin Su'aib

Hadits riwayat Bukhari no. 7405 dan Muslim no. 2675 dari Abu Hurairah

Hadits riwayat Bukhari no. 935 dari Abu Hurairah

Hadits riwayat Ibnu Majah no. 3881 dari Mu'ad bin Jabal

Hadits riwayat Muslim no. 482 dari Abu Hurairah

Hadits riwayat no. 757 dari Jabir

Huang, L. G., & Zhang, X. (2007). Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *332*(2), 1468–1476. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.03.087

Kemenag RI. (2019). *Al-Qur'an dan Terjemahannya* (Edisi Peny).

Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, Inc.

Loin, A. L., Dethan, N. K. F., & Mada, G. S. (2023). *Kajian Teorema Bolzano-Weierstrass untuk Mengkonstruksi Barisan yang Konvergen di* ℝ *^n dan Aplikasinya dalam Pembuktian Teorema Eksistensi Max-Min*. *2*(1), 36–45.

Phu, H. X. (2001). *ROUGH CONVERGENCE IN NORMED LINEAR SPACES*. *July*, 1–22.

Rahmat, Z., Haripamyu, & Ekariani, S. (2021). Teorema Titik Tetap Pada Ruang Metrik Cone. *Jurnal Matematika UNAND*, *10*(3), 268. https://doi.org/10.25077/jmu.10.3.268-279.2021

Sumanang, M. G. (2010). *Pengantar Analisis Fungsional*. Universitas Pendidikan Indonesia.

Wolfgang, J. (2014). *Normed Space* (pp. 23–50).

RIWAYAT HIDUP

Pingka Ari Safitra Wiratno, lebih dikenal dengan panggilan Pingka atau Wira. Lahir di Bojonegoro, 04 Desember 2002 sebagai anak tunggal dari pasangan Suratno dan Dwi Ernawati. Selama di kampus, Pingka mengikuti komunitas yang ada di kampus seperti *Mathematic English Club* (MEC). Selain itu, Pingka juga pernah mengikuti beberapa kepanitiaan yang diadakan oleh HMJ Integral Matematika. Contohnya termasuk panitia Kompetisi Matematika (KOMET) tahun 2020 dan panitia Webinar Kewirausahaan tahun 2020.

Adapun Riwayat Pendidikan Pingka yaitu: SDN Jamberejo 1, SMPN 1 Kedungadem, dan MAN 1 Bojonegoro. Ketika duduk di bangku SMP, Pingka aktif berorganisasi dengan menjadi skretaris OSIS, Dewan Penggalang, dan Senior Madya. Sedangkan di bangku MA, Pingka juga kembali menjadi Sekretaris OSIS dan mengikuti olimpiade matematika.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Pingka Ari Safitra Wiratno
NIM	: 200601110078
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Barisan *R*-Konvergen di Ruang Metrik *Cone*
Pembimbing I	: Dian Maharani, M.Si.
Pembimbing II	: Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	15 September 2023	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	24 Sepetember 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	10 Oktober 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	14 November 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	8 Desember 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	12 Desember 2023	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	1 Januari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	2 Januari 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	8 Januari 2024	ACC Seminar Proposal	9.
10.	19 Februari 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	27 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	1 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	12.
13.	6 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	13 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	14.
15.	18 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	15.
16.	19 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	16.

14.	30 April 2024	Konsultasi Bab IV dan V	17.
15.	15 Mei 2024	ACC Bab IV dan V	18.
16.	29 Mei 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	19.
17.	6 Juni 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	20.
18.	10 Juni 2024	ACC Seminar Hasil	21.
19.	20 Juni 2024	ACC Seminar Hasil lanjutan	22.
20.	20 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	23.
21.	26 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	24.
22.	28 Juni 2024	ACC Keseluruhan	25.

Malang, 28 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005