SIFAT-SIFAT HIMPUNAN BUKA INFRA DAN INTERIOR INFRA PADA RUANG TOPOLOGI INFRA

SKRIPSI

OLEH
NURUS SHUBHIYYAH ISMAIL
NIM. 18610049

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2024

SIFAT-SIFAT HIMPUNAN BUKA INFRA DAN INTERIOR INFRA PADA RUANG TOPOLOGI INFRA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
NURUS SHUBHIYYAH ISMAIL
NIM. 18610049

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT-SIFAT HIMPUNAN BUKA INFRA DAN INTERIOR INFRA PADA RUANG TOPOLOGI INFRA

SKRIPSI

Oleh
NURUS SHUBHIYYAH ISMAIL
NIM. 18610049

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 24 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dian Maharani, S.Pd., M.Si.	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
NIP. 19940217 202012 2 001	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT-SIFAT HIMPUNAN BUKA INFRA DAN INTERIOR INFRA PADA RUANG TOPOLOGI INFRA

SKRIPSI

Oleh
NURUS SHUBHIYYAH ISMAIL
NIM. 18610049

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 26 Juni 2024

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 1	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	....
Anggota Penguji 2	: Dian Maharani, S.Pd., M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan di bawah ini

Nama	: Nurus Shubhiyyah Ismail
NIM	: 18610049
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Himpunan Buka Infra dan Interior Infra pada Ruang Topologi Infra

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 24 Juni 2024

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 METERAI TEMPEL BB2EDAKX854125260

Nurus Shubhiyyah Ismail

NIM. 18610049

HALAMAN MOTO

“잘 먹고, 잘 살아.”

“Makan dengan baik, Hidup dengan baik.”

- Lee Know

HALAMAN PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Seluruh keluarga penulis, terkhusus kepada kedua orang tua penulis, Ayahanda Moh. Ismail dan Ibunda Istibsyaroh yang selalu mendoakan, memberi semangat dan memberi dukungan material untuk kelancaran penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Serta kepada diri sendiri yang telah berjuang, bertarung dengan pikiran-pikiran negatif dalam diri dan memilih untuk menyertakan Allah pada setiap prosesnya, serta mempercayai segala ketentuan-Nya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur kehadirat Allah SWT, Dzat Maha Pengasih serta Maha Penyayang pemberi rahmat dan karunia berlimpah, sehingga tugas akhir ini dapat penulis selesaikan dengan baik. Skripsi dengan judul "Sifat-Sifat Himpunan Buka Infra dan Interior Infra pada Ruang Topologi Infra" merupakan salah satu tugas akhir dalam menyelesaikan program studi matematika. Shalawat serta salam kami haturkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah menjunjung penulis ke jalan yang lurus dan benar serta diridhoi Allah SWT.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini tidak akan terselesaikan dengan baik tanpa adanya bantuan, do'a, dan juga dukungan dari berbagai pihak. Maka dari itu, penulis mengucapkan terima kasih yang tulus kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Ibrahim.
4. Ibu Dian Maharani, S.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing I Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
5. Bapak Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Seluruh keluarga penulis yang selalu mendukung dan mendo'akan penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Seluruh mahasiswa Angkatan 2018 Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. *Stray Kids, BLACKPINK, LE SSERAFIM, WOODZ, NewJeans,* dan *BABYMONSTER* yang selalu menghibur, memotivasi dan menjadi sumber

semangat bagi kesehatan mental penulis melalui karya-karyanya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik.

10. Pihak-pihak lain, baik nyata maupun fiksi yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan balasan atas jasa yang diberikan terhadap penulis, dan penulis mengharapkan kritik serta saran agar dapat menyempurnakan tugas akhir ini. Penulis berharap semoga penelitian ini dapat bermanfaat bagi peneliti dan pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 26 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\emptyset$	: Himpunan kosong
X	: Suatu himpunan
$\subset$ / $\subseteq$	: Himpunan bagian
A^c	: Komplemen dari himpunan A
$\mathcal{T}$	: Topologi
$(X, \mathcal{T})$	: Ruang topologi
$\mathrm{int}(A)$	: Interior dari himpunan A
$\mathrm{cl}(A)$	: Tutupan dari himpunan A
τ_{iX}	: Topologi infra
$c\tau_{iX}$	: Himpunan tutup infra yang terkait dengan τ_{iX}
(X, τ_{iX})	: Ruang topologi infra
$ig\tau_{iX}$	: Himpunan *i-genuine* yang terkait dengan τ_{iX}
$cg\tau_{iX}$	: Himpunan *c-genuine* yang terkait dengan $c\tau_{iX}$
$p\tau_{iX}$	: Himpunan buka infra semu
$iInt(A)$	: Interior infra dari himpunan A
$iCl(A)$	: Tutupan infra dari himpunan A

ABSTRAK

Ismail, Nurus Shubhiyyah. 2024. **Sifat-Sifat Himpunan Buka Infra dan Interior Infra pada Ruang Topologi Infra.** Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dian Maharani, S.Pd., M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: Himpunan buka infra, himpunan *i-genuine*, interior infra, ruang topologi infra.

Penelitian ini membahas mengenai sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra. Topologi infra memiliki perbedaan dengan topologi biasa pada salah satu sifatnya, yaitu gabungan dari sebarang koleksi anggota $\mathcal{T}$ belum tentu topologi infra. Hal ini mengakibatkan adanya perbedaan sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra jika dibandingkan dengan himpunan buka dan interior pada ruang topologi biasa. Tujuan utama pada penelitian ini yaitu untuk membuktikan sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra. Selain itu, penelitian ini juga mencakup pembuktian sifat-sifat dasar dari konsep lain dalam topologi infra, seperti himpunan *i-genuine*. Hasil penelitian telah membuktikan bahwa interior infra dari $A \subseteq X$ disebut himpunan buka infra terbesar yang termuat di A pada ruang topologi infra (X, τ_{iX}) jika A adalah himpunan *i-genuine*. Kemudian membuktikan hubungan antara himpunan buka infra dengan himpunan *i-genuine* dan interior infra pada ruang topologi infra (X, τ_{iX}), di antaranya yaitu jika $A \in \tau_{iX}$, maka $iInt(A) \in \tau_{iX}$ dan $iInt(A) = A$, $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B)$, setiap singleton adalah himpunan *i-genuine*, dan jika $iInt(A) = A$, maka A bisa jadi himpunan buka infra atau tidak. Selain itu, penelitian ini juga telah membuktikan hubungan antara himpunan *i-genuine* dan *non-i-genuine* dalam ruang topologi infra mengenai gabungan dan irisannya. Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat dan menjadi referensi tambahan bagi peneliti selanjutnya yang berkaitan dengan himpunan buka infra dan interior infra.

ABSTRACT

Ismail, Nurus Shubhiyyah. 2024. **Properties of Infra Open Sets and Infra Interiors in Infra Topological Spaces.** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dian Maharani, S.Pd., M.Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: infra open set, i-genuine set, infra interior, infra topological spaces.

This research discusses the properties of infra open set and infra interior on infra topological space. Infra topology has a difference with ordinary topology in one of its properties, namely the combination of any collection of members $\mathcal{T}$ is not necessarily infra topology. This results in different properties of infra open set and infra interior on infra topological space when compared to open set and interior on ordinary topological space. The main objective of this research is to prove the properties of infra open set and infra interior on infra topological space. In addition, this research also includes proving the basic properties of other concepts in infra topology, such as the i-genuine set. The research has proved that the interior infra of $A \subseteq X$ is called the largest infra-open set contained in A on the infra topological space (X, τ_{iX}) if A is an i-genuine set. Then it proves the relationship between the infra-open set with the i-genuine set and the infra interior on the infra topological space (X, τ_{iX}), including that if $A \in \tau_{iX}$ then $iInt(A) \in \tau_{iX}$ and $iInt(A) = A$, $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B)$, every singleton is an i-genuine set, and if $iInt(A) = A$, then A can be an infra-open set or not. In addition, this research has also proven the relationship between i-genuine and non-i-genuine sets in the infra topological space regarding their union and intersection. This research is expected to be useful and become an additional reference for further researchers related to infra open set and infra interior.

مستخلص البحث

اسماعيل، نور الصبحية . ٢٠٢٤ . **خصائص مجموعة إنفرا المفتوحة وداخلية إنفرا على الفضاء الطوبولوجي إنفرا.** البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة الأولى: (١) ديان مهاراني، الماجستيرة. المشرف الثاني : (٢) محمد نافع جوهري، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: مجموعة إنفرا المفتوحة، مجموعة i–أصلية ، داخلية إنفرا ، فضاء الإنفرا الطوبولوجيا.

تناقش هذا البحث خصائص مجموعة الإنفرا المفتوحة و داخلية إنفرا في فضاء الطوبولوجي إنفرا. تختلف طوبولوجيا إنفرا عن الطوبولوجيا العادية في إحدى خصائصها، وهي أن مجموعة أي مجموعة من الأعضاء $\mathcal{T}$ ليست بالضرورة طوبولوجيا إنفرا. وينتج عن ذلك خصائص مختلفة للمجموعة المفتوحة إنفرا والداخلية إنفرا في الفضاءات الطوبولوجية إنفرا الحمراء عند مقارنتها بالمجموعة المفتوحة والداخلية في الفضاءات الطوبولوجية العادية. الهدف الرئيسي من هذا البحث هو إثبات خصائص المجموعة المفتوحة إنفرا والداخلية إنفرا في الفضاء الطوبولوجي إنفرا. بالإضافة إلى ذلك، يتضمن هذا البحث أيضًا إثبات الخصائص الأساسية للمفاهيم الأخرى في طوبولوجيا إنفرا، مثل المجموعة i–أصلية. وقد أثبتت النتائج أن إنفرا الداخلية لـ $A \in X$ تسمى أكبر مجموعة مفتوحة إنفرا متضمنة في A على الفضاء الطوبولوجي إنفرا $(X، \tau_{iX})$ إذا كانت A مجموعة i–أصلية. ثم اثبت العلاقة بين المجموعة المفتوحة إنفرا مع المجموعة i–أصلية والمجموعة الداخلية إنفرا على الفضاء الطوبولوجي إنفرا (X, τ_{iX})، بما في ذلك أنه إذا كانت $A \in \tau_{iX}$, فإن $iInt(A) \in \tau_{iX}$ و $iInt(A) = A$ ، $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B)$ ، فكل مجموعة أحادية هي مجموعة i–أصلية ، وإذا كانت $iInt(A) = A$، فإن A إما أن تكون مجموعة مفتوحة إنفرا أو لا. بالإضافة إلى ذلك، فقد أثبت هذا البحث أيضًا العلاقة بين المجموعتين i–أصلية و غير –i–الأصلية في الفضاء الطوبولوجي إنفرا فيما يتعلق باتحادهما وتقاطعهما. من المتوقع أن يكون هذا البحث مفيدًا وأن يصبح مرجعًا إضافيًا لمزيد من الباحثين فيما يتعلق بالمجموعة المفتوحة إنفرا و داخلية إنفرا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Topologi merupakan salah satu topik yang penting dalam matematika. Kata topologi secara harfiah berarti ilmu yang mempelajari tentang posisi atau lokasi (Adams & Franzosa, 2008). Adapun ruang topologi pertama kali didefinisikan oleh Felix Hausdorff pada tahun 1914 (Rodríguez, 2015). Suatu topologi pada himpunan tak kosong X adalah koleksi himpunan bagian dari X yang memenuhi beberapa kriteria, yaitu himpunan kosong $\emptyset$ dan seluruh himpunan X ada di $\mathcal{T}$, irisan dari dua anggota $\mathcal{T}$ adalah ada di $\mathcal{T}$, serta gabungan dari sebarang koleksi anggota $\mathcal{T}$ adalah ada di $\mathcal{T}$. Pasangan $(X, \mathcal{T})$ disebut ruang topologi (Singh, 2019).

Di dalam ruang topologi terdapat beberapa konsep. Beberapa di antaranya yaitu terdapat himpunan buka, himpunan tutup, interior dan tutupan *(closure)*. Definisi himpunan buka merupakan anggota-anggota dari topologi $\mathcal{T}$ pada ruang topologi $(X, \mathcal{T})$ (Singh, 2019). Selanjutnya, sebarang himpunan bagian S dari X dikatakan tertutup di $(X, \mathcal{T})$ jika komplemen S^c adalah himpunan buka di $(X, \mathcal{T})$ (Cohen, 2003). Kemudian, interior himpunan bagian A dari X didefinisikan sebagai gabungan dari semua himpunan buka yang termuat dalam himpunan A dan dinotasikan sebagai $Int(A)$ (Cohen, 2003). Dan definisi tutupan himpunan bagian A dari X adalah irisan dari semua himpunan tutup yang memuat himpunan A dan dinotasikan sebagai $Cl(A)$ (Cohen, 2003).

Penelitian tentang ruang topologi ini telah dilanjutkan oleh banyak peneliti dari seluruh dunia. Salah satunya yaitu pada 1983, Masshour dkk mendefinisikan tentang ruang topologi supra dan berbagai konsep seperti interior, tutupan, exterior, serta properti himpunan seperti himpunan buka, himpunan tutup, padat, tidak padat, dan lain sebagainya dapat didefinisikan dalam ruang topologi supra yang analogi dengan ruang topologi (Mashhour et al., 2014). Adapun ruang topologi infra diperkenalkan oleh (Al-Odhari, 2015) yang membahas mengenai himpunan buka infra, himpunan tutup infra, interior infra dan lain sebagainya. Kemudian, (Witczak, 2022) memperbaiki dan memperjelas definisi dan teorema asli Al-Odhari yang tampaknya memiliki ketidaktepatan tertentu.

Pada penelitian ini, peneliti fokus untuk membahas mengenai ruang topologi infra. Suatu topologi infra yang disimbolkan sebagai τ_{iX} pada himpunan tak kosong X adalah koleksi himpunan bagian dari X yang memenuhi beberapa kriteria, yaitu $\emptyset, X \in \tau_{iX}$ dan untuk sebarang $j, 1 \leq j \leq n, A_j \in \tau_{iX}$, maka $\bigcap A_j \in \tau_{iX}$. Pasangan (X, τ_{iX}) disebut dengan ruang topologi infra (Witczak, 2022). Pada ruang topologi infra ini terdapat beberapa konsep yang sudah dijelaskan oleh (Witczak, 2022) yaitu di antaranya terdapat himpunan buka infra, himpunan tutup infra, interior infra, dan tutupan infra *(infra closure)*. Himpunan buka infra merupakan anggota-anggota dari topologi infra τ_{iX} pada ruang topologi infra (X, τ_{iX}). Selanjutnya, suatu himpunan $C \subseteq X$ disebut himpunan tutup infra di X jika komplemen C^c adalah himpunan buka infra di (X, τ_{iX}). Kemudian, interior infra dari $A \subseteq X$ pada (X, τ_{iX}) didefinisikan sebagai $iInt(A) = \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\}$. Dan definisi tutupan infra dari $A \subseteq X$ pada (X, τ_{iX}) yaitu $iCl(A) = \bigcap\{C \subseteq X: C \in c\tau_{iX}, A \subseteq C\}$. Untuk masing-masing konsep tersebut, terdapat sifat-sifat tersendiri. Beberapa di antaranya belum dijelaskan secara mendetail. Oleh karena itu, penelitian ini akan mendetailkan sifat-sifat tersebut.

Dalam Al-Qur’an, Allah SWT telah menjelaskan tentang beragam tanaman. Ada beberapa yang serupa namun tidak sama. Berikut firman Allah SWT dalam Q.S Al-An’am ayat 141:

وَهُوَ ٱلَّذِىٓ أَنشَأَ جَنَّٰتٍ مَّعْرُوشَٰتٍ وَغَيْرَ مَعْرُوشَٰتٍ وَٱلنَّخْلَ وَٱلزَّرْعَ مُخْتَلِفًا أُكُلُهُۥ وَٱلزَّيْتُونَ وَٱلرُّمَّانَ
مُتَشَٰبِهًا وَغَيْرَ مُتَشَٰبِهٍ ۚ كُلُوا۟ مِن ثَمَرِهِۦٓ إِذَآ أَثْمَرَ وَءَاتُوا۟ حَقَّهُۥ يَوْمَ حَصَادِهِۦ ۖ وَلَا تُسْرِفُوٓا۟ ۚ إِنَّهُۥ لَا يُحِبُّ
ٱلْمُسْرِفِينَ ١٤١

Artinya : “*Dialah yang menumbuhkan tanaman-tanaman yang merambat dan yang tidak merambat, pohon kurma, tanaman yang beraneka ragam rasanya, serta zaitun dan delima yang serupa (bentuk dan warnanya) dan tidak serupa (rasanya). Makanlah buahnya apabila ia berbuah dan berikanlah haknya (zakatnya) pada waktu memetik hasilnya. Akan tetapi, janganlah berlebih-lebihan. Sesungguhnya Allah SWT tidak menyukai orang-orang yang berlebih-lebihan.”* (Q.S Al-An’am : 141).

Berdasarkan tafsir Al-Muyassar (Mashudi, 2020b), Allah SWT menciptakan tanaman yang berbagai macam. Di antaranya terdapat jenis tanaman yang menjulang ke atas, contohnya pohon zaitun, pohon delima dan pohon kurma. Ada juga yang tidak menjulang ke atas, contohnya yaitu pohon mentimun dan labu. Ada juga yang batang tanamannya tidak menyentuh tanah, salah satunya yaitu pohon anggur. Selain itu, terdapat tanaman yang serupa bentuknya, tapi berbeda rasa dan juga berbeda buahnya, seperti pohon zaitun dan pohon delima. Kemudian Allah SWT memerintahkan untuk memakan hasil buah dari tanaman yang ditanam saat berbuah, serta menyerahkan zakat pada saat hari panen bagi setiap orang yang wajib zakat, dan sedekah untuk memperbanyak berkah. Allah SWT juga melarang manusia untuk terlalu boros atau pelit dan melampaui batas keseimbangan saat mengeluarkan harta, memakan makanan, atau lain sebagainya. Karena Allah SWT tidak menyukai orang-orang yang melewati batas-batasNya yang tidak sesuai aturan saat menginfakan harta.

Berdasarkan penjabaran tafsir tersebut, Allah SWT telah menjelaskan bahwasannya sifat-sifat sesuatu itu berbeda dengan yang lainnya. Misalkan Allah SWT menciptakan zaitun dan delima itu serupa bentuknya, namun berbeda rasa dan buahnya. Jadi, perlu diidentifikasi mana yang termasuk sifat dari sesuatu itu, dan mana yang bukan, agar tidak tertukar dan salah. Hal tersebut telah menginspirasi penulis untuk mengidentifikasi sifat dari sesuatu. Sehingga, penulis akan melakukan penelitian mengenai sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas pada penelitian ini yaitu bagaimana sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra.

1.3 Tujuan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian yang akan dibahas yaitu untuk mengetahui sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini yaitu referensi tambahan bahan bagi peneliti selanjutnya yang berkaitan dengan sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra. Selain itu, penelitian ini juga diharapkan bisa menjadi referensi bagi peneliti lainnya untuk meneliti ruang topologi infra, misalkan untuk meneliti mengenai kepadatan atau kelengkapan pada ruang topologi infra.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini yaitu hanya akan menjelaskan sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra. Untuk lebih detailnya lagi, sifat-sifat yang akan dibuktikan di antaranya:

1. Himpunan buka infra terbesar.
2. Hubungan antara himpunan buka infra dengan himpunan *i-genuine* dan interior infra.
3. Hubungan antara himpunan *i-genuine* dan *non-i-genuine*.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada bab berikut berisi tentang dasar-dasar teori yang dapat dipelajari sebelum mengkaji sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra.

2.1.1 Ruang Topologi

Pengertian dari ruang topologi didefinisikan sebagai berikut beserta contohnya.

Definisi 2.1 (Singh, 2019) Suatu topologi pada himpunan tak kosong X adalah koleksi $\mathcal{T}$ dari himpunan bagian X sedemikian hingga

(i) Himpunan kosong $\emptyset$ dan seluruh himpunan X ada di $\mathcal{T}$;

(ii) Irisan dari dua anggota $\mathcal{T}$ adalah ada di $\mathcal{T}$;

(iii) Gabungan dari sebarang koleksi anggota $\mathcal{T}$ adalah ada di $\mathcal{T}$.

Himpunan X yang memiliki topologi $\mathcal{T}$ disebut ruang topologi dan dinotasikan sebagai $(X, \mathcal{T})$.

Contoh 2.1 Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

$X = \{p, q, r\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{p, q\}\}$.

Bukti :

(i) Sudah jelas bahwasannya $\emptyset \in \mathcal{T}$ dan $X \in \mathcal{T}$;

(ii) $\emptyset \cap X = \emptyset \in \mathcal{T}$;

$\emptyset \cap \{p\} = \emptyset \in \mathcal{T}$;

$\emptyset \cap \{p, q\} = \emptyset \in \mathcal{T}$;

$X \cap \{p\} = \{p\} \in \mathcal{T}$;

$X \cap \{p, q\} = \{p, q\} \in \mathcal{T}$;

$\{p\} \cap \{p, q\} = \{p\} \in \mathcal{T}$;

(iii) $\emptyset \cup X = X \in \mathcal{T}$;

$\emptyset \cup \{p\} = \{p\} \in \mathcal{T}$;

$\emptyset \cup \{p, q\} = \{p, q\} \in \mathcal{T}$;

$X \cup \{p\} = X \in \mathcal{T}$;

$X \cup \{p, q\} = X \in \mathcal{T}$;

$\{p\} \cup \{p, q\} = \{p, q\} \in \mathcal{T}$.

$\therefore$ karena kondisi i, ii dan iii terpenuhi, maka $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

Contoh 2.2 (Adams & Franzosa, 2008) Misalkan $(X, \mathcal{T})$ merupakan suatu ruang topologi. X merupakan himpunan tak kosong dan misalkan topologi $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Maka, $\mathcal{T}$ disebut sebagai topologi trivial pada X.

Contoh 2.3 (Adams & Franzosa, 2008) Misalkan Misalkan $(X, \mathcal{T})$ merupakan suatu ruang topologi. X merupakan himpunan tak kosong dan misalkan topologi $\mathcal{T}$ adalah koleksi semua himpunan bagian dari X. Maka, $\mathcal{T}$ disebut sebagai topologi diskrit pada X.

2.1.2 Himpunan Buka pada Ruang Topologi

Pada ruang topologi terdapat himpunan buka yang didefinisikan sebagai berikut beserta contohnya.

Definisi 2.2 (Singh, 2019) Misalkan $(X, \mathcal{T})$ merupakan ruang topologi. Anggota-anggota dari topologi $\mathcal{T}$ disebut himpunan buka pada ruang topologi $(X, \mathcal{T})$.

Contoh 2.4 Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

$X = \{p, q, r\},\ \mathcal{T} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\big\}.$

Himpunan buka dari ruang topologi di atas yaitu $\big\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\big\}$.

Definisi 2.3 (Adams & Franzosa, 2008) Misalkan X adalah himpunan. Suatu topologi $\mathcal{T}$ di X adalah koleksi himpunan bagian dari X, disebut himpunan buka, sedemikian hingga memenuhi:

(i) $\emptyset$ dan X adalah himpunan buka;

(ii) Irisan berhingga dari himpunan buka adalah himpunan buka;

(iii) Gabungan dari sebarang koleksi himpunan buka adalah himpunan buka.

2.1.3 Himpunan Tutup pada Ruang Topologi

Selain himpunan buka pada ruang topologi, terdapat pula himpunan tutup pada ruang topologi yang didefinisikan sebagai berikut beserta contohnya.

Definisi 2.4 (Cohen, 2003) Misalkan $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi pada X. Sebarang himpunan bagian S dari X disebut himpunan tutup di $(X, \mathcal{T})$ jika komplemen S^c $(X \backslash S)$ adalah himpunan buka di $(X, \mathcal{T})$.

Contoh 2.5 Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

$X = \{p, q, r\},\ \mathcal{T} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\big\}.$

Himpunan tutup dari ruang topologi di atas yaitu $\big\{X, \emptyset, \{q, r\}, \{p, r\}, \{r\}\big\}$.

Proposisi 2.1 (Singh, 2019) Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi. Maka,

(i) Gabungan dari dua himpunan tutup adalah himpunan tutup;

(ii) Irisan dari sebarang koleksi dari himpunan tutup adalah himpunan tutup;

(iii) Seluruh himpunan X dan himpunan kosong $\emptyset$ adalah himpunan tutup.

Contoh 2.6 (Singh, 2019) Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi diskrit. Setiap himpunan pada topologi $\mathcal{T}$ tersebut merupakan himpunan buka dan himpunan tutup. Misalkan $X = \{p, q, r\}$ dan $\mathcal{T} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}\big\}$. Himpunan buka pada topologi $\mathcal{T}$ yaitu $\big\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}, \{q, r\}\big\}$, dan himpunan tutupnya yaitu $\big\{X, \emptyset, \{q, r\}, \{p, r\}, \{p, q\}, \{r\}, \{q\}, \{p\}\big\}$.

2.1.4 Persekitaran (*Neighborhood*) pada Ruang Topologi

Berikut ini dijelaskan definisi dari persekitaran pada ruang topologi beserta contohnya.

Definisi 2.5 (Adams & Franzosa, 2008) Misalkan $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi dan $x \in X$. Suatu himpunan buka U yang mengandung x disebut persekitaran *(neighborhood)* dari x.

Contoh 2.7 Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi.

$X = \{p, q, r\},\ \mathcal{T} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\big\}$.

Persekitaran $n(p)$ yaitu

(i) Himpunan buka pada topologi $\mathcal{T}$ yang memuat h yaitu $\big\{\{p\}, \{p, q\}, X\big\}$

(ii) Himpunan bagian X yang memuat h yaitu $\big\{\{p\}, \{p, q\}, \{p, r\}, X\big\}$

(iii) Himpunan bagian X yang memuat h, i yaitu $\big\{\{p, q\}, X\big\}$

(iv) Himpunan bagian X yang memuat semua anggota X yaitu $\{X\}$

Jadi, persekitaran $n(p) = \big\{\{p\}, \{p, q\}, \{p, r\}, X\big\}$.

Teorema 2.1 (Adams & Franzosa, 2008) Misal $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi, dan $A \subseteq X$. Maka, A adalah himpunan buka di X jika dan hanya jika $\forall x \in A \exists$ persekitaran U dari $x \ni x \in U \subseteq A$.

Bukti

Asumsikan A terbuka di X dan $x \in A$. Jika kita misalkan $U = A$ maka U adalah persekitaran dari x dengan $x \in U \subset A$.

2.1.5 Interior pada Ruang Topologi

Titik interior pada ruang topologi didefinisikan sebagai berikut beserta contohnya.

Definisi 2.6 (Cohen, 2003) Misalkan X merupakan ruang topologi. Interior dari himpunan bagian A dari X adalah gabungan dari semua himpunan buka yang termuat dalam himpunan A. Dinotasikan sebagai $Int(A)$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$Int(A) = \bigcup \{G \subseteq X: G \in \mathcal{T}, G \subseteq A\}.$$

Contoh 2.8 Misalkan $(X, \mathcal{T})$ merupakan ruang topologi dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ dan $A = \{p, r\}$.

Interior dari ruang topologi di atas yaitu

(i) Himpunan bukanya adalah $\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$

(ii) Himpunan buka yang termuat dalam A adalah $G = \{\emptyset, \{p\}\}$

(iii) $Int(A) = \bigcup\{G\} = \emptyset \cup \{p\} = \{\emptyset, \{p\}\}$

Jadi, interior dari A yaitu $\{\emptyset, \{p\}\}$.

Proposisi 2.2 (Singh, 2019) Misalkan X adalah suatu ruang. Maka, untuk $A, B \subseteq X$, kita memiliki

(i) $Int\big(Int(A)\big) = Int(A)$,

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow Int(A) \subseteq Int(B)$,

(iii) $Int(A) \cap Int(B) = Int(A \cap B)$,

(iv) $Int(A) \cup Int(B) \subseteq Int(A \cup B)$.

Proposisi 2.3 (Adams & Franzosa, 2008) Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi dan $A, B \subseteq X$.

(i) Jika U adalah himpunan buka di $(X, \mathcal{T})$ dan $U \subset A$, maka $U \subset Int(A)$.

(ii) Jika $A \subset B$ maka $Int(A) \subset Int(B)$.

(iii) A adalah himpunan buka jika dan hanya jika $A = Int(A)$.

2.1.6 Tutupan pada Ruang Topologi (*Closure*)

Selain interior pada ruang topologi infra, terdapat juga tutupan pada ruang topologi infra yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.7 (Cohen, 2003) Misalkan X adalah ruang topologi. Tutupan dari himpunan bagian A dari X adalah irisan dari semua himpunan tutup yang memuat himpunan A. Dinotasikan sebagai $Cl(A)$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$Cl(A) = \bigcap \{F \subseteq X : F \in \mathcal{T}, A \subseteq F\}.$$

Contoh 2.9 Misalkan $(X, \mathcal{T})$ ruang topologi dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{p, q\}\}$ dan $A = \{p, r\}$.

Tutupan (*Closure*) dari ruang topologi di atas yaitu

(i) Himpunan tutupnya yaitu $\{X, \emptyset, \{q, r\}, \{p, r\}, \{r\}\}$

(ii) Himpunan tutup yang memuat A yaitu $F = \{X, \{p, r\}\}$

(iii) $Cl(A) = \bigcap F = X \cap \{p, r\} = \{p, r\}$

Jadi, tutupan dari A yaitu $\{p, r\}$.

Proposisi 2.4 (Singh, 2019) Misalkan X adalah suatu ruang dan $A, B \subseteq X$. Maka,

(i) $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$,

(ii) $A \subseteq B \Rightarrow Cl(A) \subseteq Cl(B)$,

(iii) $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$,

(iv) $Cl(A \cap B) \subseteq Cl(A) \cap Cl(B)$.

Proposisi 2.5 (Adams & Franzosa, 2008) Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi dan $A, B \subset X$.

(i) Jika C adalah himpunan tutup di $(X, \mathcal{T})$ dan $A \subset C$, maka $Cl(A) \subset C$.

(ii) Jika $A \subset B$ maka $Cl(A) \subset Cl(B)$.

(iii) A adalah himpunan tutup jika dan hanya jika $A = Cl(A)$.

2.1.7 Ruang Topologi Infra

Setelah membahas teori tentang ruang topologi, selanjutnya akan membahas tentang ruang topologi infra. Ruang topologi infra telah diperkenalkan terlebih dahulu oleh (Al-Odhari, 2015) pada jurnalnya lalu diteliti lebih lanjut oleh beberapa peneliti lain, salah satunya yaitu (Witczak, 2022). Berikut ini merupakan definisi dari ruang topologi infra beserta contohnya.

Definisi 2.8 (Witczak, 2022) Misalkan X adalah himpunan tak kosong. Suatu topologi infra pada X, disimbolkan sebagai τ_{iX} adalah koleksi himpunan bagian dari X sedemikian hingga:

(i) $\emptyset, X \in \tau_{iX}$,

(ii) Jika untuk sebarang $j, 1 \leq j \leq n, A_j \in \tau_{iX}$, maka $\bigcap A_j \in \tau_{iX}, \forall j$.

X yang dilengkapi dengan τ_{iX} disebut ruang topologi infra, disimbolkan dengan (X, τ_{iX}).

Contoh 2.10 Ruang-ruang berikut adalah topologi infra:

1. $X = \{p, q, r\}, \tau_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}\big\}$.

   Bukti :

   (a) $\emptyset$ dan X ada di τ_{iX}

   (b) $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\emptyset \cap \{p\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\emptyset \cap \{q\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$X \cap \{p\} = \{p\} \in \tau_{iX}$

$X \cap \{q\} = \{q\} \in \tau_{iX}$

$\{p\} \cap \{q\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\therefore$ Terpenuhi

2. $X = \{p, q, r, s\}, \tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}\}$.

Bukti

(a) $\emptyset$ dan X ada di τ_{iX}

(b) $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\emptyset \cap \{p\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\emptyset \cap \{r\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\emptyset \cap \{p, q\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\emptyset \cap \{p, r\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$X \cap \{p\} = \{p\} \in \tau_{iX}$

$X \cap \{r\} = \{r\} \in \tau_{iX}$

$X \cap \{p, q\} = \{p, q\} \in \tau_{iX}$

$X \cap \{p, r\} = \{p, r\} \in \tau_{iX}$

$\{p\} \cap \{r\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\{p\} \cap \{p, q\} = \{p\} \in \tau_{iX}$

$\{p\} \cap \{p, r\} = \{p\} \in \tau_{iX}$

$\{r\} \cap \{p, q\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\{r\} \cap \{p, r\} = \{r\} \in \tau_{iX}$

$\{p, q\} \cap \{p, r\} = \{p\} \in \tau_{iX}$

$\therefore$ Terpenuhi

Bukan Contoh 2.1 Misalkan $X = \{p, q, r\}$ dan $\tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{p, q\}, \{q, r\}\}$

Bukti

$\{p, q\} \cap \{q, r\} = \{q\} \notin \tau_{iX}$

$\therefore$ Tidak terpenuhi. Jadi, contoh di atas bukanlah ruang topologi infra.

Teorema 2.2 (Al-Odhari, 2016) Misalkan $(X,\mathcal{T})$ adalah ruang topologi, maka $(X,\mathcal{T})$ juga merupakan ruang topologi infra. Namun tidak berlaku sebaliknya.

Bukti

Misalkan $(X,\mathcal{T})$ adalah ruang topologi, maka berdasarkan kriteria-kriteria ruang topologi maka jelas bahwa $(X,\mathcal{T})$ juga merupakan ruang topologi infra. Namun, kebalikannya tidaklah benar. Tidak semua ruang topologi infra adalah ruang topologi. Jika $X=\{p,q,r,s\}$, dan $\tau_{iX}=\{\emptyset,X,\{q\},\{q,r\},\{q,s\}\}$, Maka (X,τ_{iX}) adalah ruang topologi infra, tapi bukanlah ruang topologi. Karena $\{q,r\}\cup\{q,s\}=\{q,r,s\}\notin\tau_{iX}$.

2.1.8 Himpunan Buka Infra pada Ruang Topologi Infra

Pada ruang topologi infra terdapat himpunan buka infra yang didefinisikan sebagai berikut beserta contohnya.

Definisi 2.9 (Al-Odhari, 2015) Misalkan (X,τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A\subseteq X$. Anggota-anggota dari topologi infra τ_{iX} disebut himpunan buka infra $(A\in\tau_{iX})$.

Contoh 2.11 Misalkan (X,τ_{iX}) ruang topologi infra.

$X=\{p,q,r\},\tau_{iX}=\{\emptyset,X,\{p\},\{q\}\}$.

Himpunan buka infranya yaitu $\{\emptyset,X,\{p\},\{q\}\}$.

Teorema 2.3 (Al-Odhari, 2015) Misalkan (X,τ_{iX}) adalah ruang topologi infra. Maka:

(i) $\emptyset$ dan X adalah himpunan buka infra.

(ii) Sebarang irisan dari himpunan buka infra merupakan himpunan buka infra.

(iii) Gabungan berhingga dari himpunan buka infra belum tentu himpunan buka infra.

Bukti

(i) Itu jelas bahwa $\emptyset$ dan X adalah himpunan buka infra berdasarkan kriteria (i) pada definisi 2.8.

(ii) Misalkan $C \in \tau_{iX}$, berdasarkan kriteria (ii) pada definisi 2.8, $\bigcap O_j \in \tau_{iX}$ merupakan himpunan buka infra.

(iii) Berdasarkan contoh 2.8, $\{h\}, \{i\} \in \tau_{iX}$ namun $\{h\} \cup \{i\} \notin \tau_{iX}$.

Catat bahwa terdapat sedikit perbedaan pada definisi himpunan buka pada ruang topologi biasa dengan himpunan buka infra pada ruang topologi infra selain berbeda pada ruangnya, yaitu pada ruang topologi, gabungan dari sebarang koleksi himpunan buka adalah himpunan buka. Sedangkan pada ruang topologi infra, gabungan berhingga dari himpunan buka infra belum tentu himpunan buka infra.

2.1.9 Interior Infra pada Ruang Topologi Infra

Selain himpunan buka pada ruang topologi infra, terdapat pula interior infra pada ruang topologi infra dan himpunan *i-genuine* yang didefinisikan sebagai berikut beserta contohnya.

Definisi 2.10 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. Interior infra dari A dinotasikan sebagai $iInt(A)$ dan didefinisikan sebagai:

$$iInt(A) = \bigcup \{O \subseteq X : O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\}.$$

Definisi 2.11 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. A adalah himpunan *i-genuine* jika dan hanya jika $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra. Himpunan dari semua himpunan *i-genuine* yang terkait dengan topologi infra tertentu τ_{iX} pada X dinotasikan sebagai $ig\tau_{iX}$.

Contoh 2.12 Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r, s\}, \tau_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}\big\}$ dan $A = \{p, q, s\}$.

Interior infra dari ruang topologi infra tersebut yaitu

(i) Himpunan buka infranya yaitu $\big\{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}\big\}$

(ii) Himpunan buka infra yang termuat dalam A, yaitu $O = \big\{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\big\}$

(iii) $iInt(A) = \bigcup O = \emptyset \cup \{p\} \cup \{p, q\} = \{p, q\} \in \tau_{iX}$

Karena $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra, maka, himpunan A merupakan himpunan *i-genuine*.

Jika suatu himpunan tidak memenuhi persyaratan himpunan *i-genuine*, maka himpunan tersebut bukan himpunan *i-genuine* atau bisa disebut dengan *non-i-genuine*. Berikut ini merupakan contoh dari suatu himpunan yang bukan himpunan *i-genuine* (*non-i-genuine*).

Contoh 2.13 Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r, s\}, \tau_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}\big\}$ dan $A = \{p, q, r\}$.

$$\begin{aligned} iInt(A) &= \bigcup\{O \subseteq X : O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \\ &= \emptyset \cup \{p\} \cup \{r\} \cup \{p, q\} \cup \{p, r\} \\ &= \{p, q, r\} \notin \tau_{iX} \end{aligned}$$

Karena $iInt(A) \notin \tau_{iX}$, maka A merupakan himpunan *non-i-genuine*.

2.1.10 Himpunan Tutup Infra pada Ruang Topologi Infra

Himpunan tutup infra pada ruang topologi infra didefinisikan sebagai berikut beserta contohnya.

Definisi 2.12 (Al-Odhari, 2015) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra. Suatu himpunan bagian $C \subseteq X$ disebut himpunan tutup infra (di X) jika $X - C = C^c \in \tau_{iX}$, yaitu C^c adalah himpunan buka infra. τ_{iX} yang memuat himpunan tutup infra dinotasikan sebagai $c\tau_{iX}$.

Contoh 2.14 Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra.

$X = \{p, q, r, s\}, \tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}\}$.

Himpunan tutup infranya yaitu $\{X, \emptyset, \{q, r, s\}, \{p, q, s\}, \{r, s\}, \{q, s\}\}$. Karena $\{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, s\}\}$ adalah himpunan buka infra.

Teorema 2.4 (Al-Odhari, 2015) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra. Maka:

(i) $\emptyset, X \in \tau_{iX}$ adalah himpunan tutup infra.

(ii) Sebarang irisan berhingga dari himpunan tutup infra adalah himpunan tutup infra.

Bukti

(i) Karena $X - \emptyset = X \in \tau_{iX}$ dan $X - X = \emptyset \in \tau_{iX}$ adalah himpunan tutup infra.

(ii) Misalkan $\{C_i : i \in I\}$ adalah sebarang koleksi dari himpunan tutup infra sedemikian hingga $C_i \in \tau_{iX}$ untuk semua $i \in I$. Sehingga, $X - C \in \tau_{iX}$ adalah himpunan buka infra untuk semua $i \in I$.

Tetapi $X - C = C^c \in \tau_{iX}$, maka $\cap\, C_i^c = \cap\,(X - C_i) = X - \cap\, C_i \in \tau_{iX}, \forall i \in I$. Oleh karena itu $\cap\, C_i \in \tau_{iX}, \forall i \in I$ adalah himpunan tutup infra.

Remark: Gabungan berhingga dari himpunan tutup infra tidak tentu himpunan tutup infra.

2.1.11 Tutupan Infra pada Ruang Topologi Infra (*Infra Closure*)

Berikut ini definisi dari tutupan infra pada ruang topologi infra dan himpunan *c-genuine* beserta contohnya.

Definisi 2.13 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. Tutupan infra dari A dinotasikan sebagai $iCl(A)$ dan didefinisikan sebagai:

$$iCl(A) = \bigcap \{C \subseteq X : C \in c\tau_{iX}, A \subseteq C\}.$$

Definisi 2.14 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. A adalah himpunan *c-genuine* jika dan hanya jika $iCl(A)$ adalah himpunan tutup infra. Himpunan semua himpunan *c-genuine* yang terkait dengan topologi infra tertentu τ_{iX} pada X dinotasikan sebagai $cg\tau_{iX}$.

Contoh 2.15 Misalkan $X = \{p, q, r, s\}, \tau_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}\big\}$ dan $A = \{h, i\}$. Tutupan infra dari ruang topologi infra tersebut yaitu

(i) Himpunan tutup infranya yaitu $\{X, \emptyset, \{q, r, s\}, \{p, q, s\}, \{r, s\}, \{q, s\}\}$

(ii) Himpunan tutup infra yang memuat A, yaitu $C = \big\{X, \{p, q, s\}\big\}$

(iii) $iCl(A) = \bigcap C = X \cap \{p, q, s\} = \{p, q, s\} \in c\tau_{iX}$

Karena $iCl(A)$ adalah himpunan tutup infra, maka, himpunan A merupakan himpunan *c-genuine*.

Jika suatu himpunan tidak memenuhi persyaratan himpunan *c-genuine*, maka himpunan tersebut bukan himpunan *c-genuine* atau bisa disebut dengan *non-c-genuine*. Berikut ini merupakan contoh dari suatu himpunan yang bukan himpunan *c-genuine* (*non-c-genuine*).

Contoh 2.16 Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r, s\}, \tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p,\}\}$ dan $A = \{q\}$.

Dari τ_{iX} tersebut, didapat $c\tau_{iX} = \{X, \emptyset, \{q, r, s\}, \{p, q, s\}, \{r, s\}, \{q, s\}\}$.

$$\begin{aligned} iCl(A) &= \bigcap\{C \subseteq X : C \in c\tau_{iX}, A \subseteq C\} \\ &= X \cap \{q, r, s\} \cap \{p, q, s\} \cap \{q, s\} \\ &= \{q\} \notin c\tau_{iX} \end{aligned}$$

Karena $iCl(A) \notin c\tau_{iX}$, maka A merupakan himpunan *non-c-genuine*.

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran

Dalam Al-Qur'an, Allah SWT berfirman dalam Q.S An-Nisa ayat 34 yang berbunyi:

ٱلرِّجَالُ قَوَّٰمُونَ عَلَى ٱلنِّسَآءِ بِمَا فَضَّلَ ٱللَّهُ بَعْضَهُمْ عَلَىٰ بَعْضٍ وَبِمَآ أَنفَقُوا۟ مِنْ أَمْوَٰلِهِمْ ۚ فَٱلصَّٰلِحَٰتُ قَٰنِتَٰتٌ
حَٰفِظَٰتٌ لِّلْغَيْبِ بِمَا حَفِظَ ٱللَّهُ ۚ وَٱلَّٰتِى تَخَافُونَ نُشُوزَهُنَّ فَعِظُوهُنَّ وَٱهْجُرُوهُنَّ فِى ٱلْمَضَاجِعِ وَٱضْرِبُوهُنَّ ۖ فَإِنْ
أَطَعْنَكُمْ فَلَا تَبْغُوا۟ عَلَيْهِنَّ سَبِيلًا ۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلِيًّا كَبِيرًا

Artinya: *"Kaum laki-laki itu adalah pemimpin bagi kaum wanita, oleh karena Allah SWT telah melebihkan sebahagian mereka (laki-laki) atas sebahagian yang lain (wanita), dan karena mereka (laki-laki) telah menafkahkan sebagian dari harta mereka. Sebab itu maka wanita yang shalihah, ialah yang taat kepada Allah SWT lagi memelihara diri ketika suaminya tidak ada, oleh karena Allah SWT telah memelihara (mereka). Wanita-wanita yang kamu khawatirkan nusyuznya, maka nasehatilah mereka dan pisahkanlah mereka di tempat tidur mereka, dan pukullah mereka. Kemudian jika mereka mentaatimu, maka janganlah kamu mencari-cari jalan untuk menyusahkannya. Sesungguhnya Allah SWT Maha Tinggi lagi Maha Besar."* (Q.S An-Nisa : 34).

Menurut tafsir Al-Madinah Al-Munawwarah (AL-Hafidz, 2017) menjelaskan bahwa tugas laki-laki ialah pemimpin bagi wanita dalam melaksanakan semua hukum Allah SWT, yaitu dengan menjaga kewajiban dan hukum Allah SWT dan sebagai pemimpin wanita dalam hal melindungi dan menjaga mereka, juga memberi nafkah, bekerja dan mencari rezeki untuk mereka. Ummu Salamah berkata: “Para lelaki dapat pergi berperang, sedangkan para wanita tidak dapat melakukannya, dan bagi kami hanya setengah bagian harta warisan jika dibandingkan dengan para lelaki.” Maka Allah SWT menurunkan ayat:

وَلَا تَتَمَنَّوْاْ مَا فَضَّلَ ٱللَّهُ بِهِۦ بَعْضَكُمْ عَلَىٰ بَعْضٍ

Artinya: *“Dan janganlah kamu iri hati terhadap karunia yang telah dilebihkan Allah SWT kepada sebagian kamu atas sebagian yang lain.”* (Q.S An-Nisa : 32).

Kemudian Allah SWT memberi penjelasan bahwasannya terdapat dua macam sifat-sifat wanita. Yang pertama ialah wanita yang shalihah yaitu wanita yang taat kepada suaminya dalam hal ketaatannya terhadap Allah SWT meskipun suaminya sedang tidak ada. Dan akan menjaga kehormatan diri serta harta suaminya. Hal tersebut merupakan berkat penjagaan dan taufik dari Allah SWT bagi dirinya. Yang kedua ialah wanita yang ditakutkan akan membangkang kepada suaminya atas perbuatan maupun perkataannya.

Dalam tafsir as-Sa’di (As-Sa’di & Al-Khattab, 2018), Allah SWT menjelaskan bahwasanya “kaum laki-laki itu adalah pemimpin bagi kaum wanita”, yaitu para lelaki bertanggung jawab atas wanita untuk memastikan bahwa mereka menunaikan hak Allah SWT dan melaksanakan kewajibannya dan melarang mereka berbuat maksiat. Dan laki-laki juga adalah pemimpin mereka yang bertanggung jawab atas pengeluaran mereka yaitu dengan memberi nafkah mereka, memberi pakaian dan menyediakan tempat tinggal bagi mereka. Kemudian Allah SWT menyatakan alasan mengenai para lelaki sebagai pemimpin para wanita yaitu karena laki-laki telah menafkahkan hartanya untuk wanita dan mereka lebih unggul dari wanita, seperti kenabian dan rasul yang diperuntukkan hanya untuk laki-laki. Alasan lainnya yaitu karena Allah SWT menganugerahkan kepada laki-laki berupa pemikiran yang matang, ketekunan dan kesabaran.

Sedangkan tugas wanita yaitu menaati Allah SWT dan suaminya. Oleh karena itu Allah SWT berfirman, “Sebab itu, maka wanita yang shalih, ialah yang taat” yaitu terhadap Allah SWT, “lagi memelihara diri ketika suaminya tidak ada,” yaitu, taat terhadap suaminya meskipun suami sedang tidak ada yaitu dengan menjaga dirinya untuk suaminya dan juga menjaga hartanya. Kemudian Allah SWT berfirman, “Wanita-wanita yang kamu khawatirkan nusyuznya” yaitu penolakan mereka untuk menaati suaminya, seperti kedurhakaan kepada suami, dalam perbuatan maupun perkataan, maka sang suami boleh menghukumnya dimulai dari Tindakan yang paling ringan.

Berdasarkan penjabaran tafsir-tafsir di atas menjelaskan bahwa laki-laki memiliki tanggung jawab sebagai pemimpin keluarga dan juga bertanggung jawab untuk menafkahi keluarganya. Tanggung jawab ini juga harus dilakukan dengan keadilan, kasih sayang dan dalam ketaatan kepada Allah SWT. Sedangkan wanita memiliki tanggung jawab menaati Allah SWT dan suaminya. Mereka diberi amanah oleh Allah SWT untuk mengurus rumah tangga dan membimbing anak-anak dengan baik, juga menjaga diri serta harta suaminya. Maka dari itu, laki-laki dan wanita jelas memiliki tugas yang berbeda. Sehingga wajib untuk mengetahui dan memilah mana yang harus dilakukan sebagai laki-laki maupun wanita agar tidak tertukar dan salah. Karena adanya perbedaan tersebut, maka penulis terinspirasi untuk meneliti sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra, agar dapat mengetahui perbedaan sifat-sifat tersebut dengan jelas.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada bab ini akan membahas tentang teori pendukung untuk membuktikan sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra.

2.3.1 Ruang Topologi Infra

Definisi 2.8 (Witczak, 2022) Misalkan X adalah himpunan tak kosong. Suatu topologi infra pada X, disimbolkan sebagai τ_{iX} adalah koleksi himpunan bagian dari X sedemikian hingga:

(i) $\emptyset, X \in \tau_{iX}$,

(ii) Jika untuk sebarang $j, 1 \leq j \leq n, A_j \in \tau_{iX}$, maka $\bigcap A_j \in \tau_{iX}, \forall j$.

X yang dilengkapi dengan τ_{iX} disebut ruang topologi infra, disimbolkan dengan (X, τ_{iX}).

Teorema 2.2 (Al-Odhari, 2016) Misalkan $(X, \mathcal{T})$ adalah ruang topologi, maka $(X, \mathcal{T})$ juga merupakan ruang topologi infra. Namun tidak berlaku sebaliknya.

2.3.2 Himpunan Buka Infra pada Ruang Topologi Infra

Definisi 2.9 (Al-Odhari, 2015) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. Anggota-anggota dari topologi infra τ_{iX} disebut himpunan buka infra $(A \in \tau_{iX})$.

Teorema 2.3 (Al-Odhari, 2015) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra. Maka:

(i) $\emptyset$ dan X adalah himpunan buka infra.

(ii) Sebarang irisan dari himpunan buka infra merupakan himpunan buka infra.

(iii) Gabungan berhingga dari himpunan buka infra belum tentu himpunan buka infra.

2.3.3 Interior Infra pada Ruang Topologi Infra

Definisi 2.10 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. Interior infra dari A dinotasikan sebagai $iInt(A)$ dan didefinisikan sebagai:

$$iInt(A) = \bigcup \{O \subseteq X : O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\}.$$

Definisi 2.11 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. A adalah himpunan *i-genuine* jika dan hanya jika $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra. Himpunan dari semua himpunan *i-genuine* yang terkait dengan topologi infra tertentu τ_{iX} pada X dinotasikan sebagai $ig\tau_{iX}$.

Jika suatu himpunan tidak memenuhi persyaratan himpunan *i-genuine*, maka himpunan tersebut bukan himpunan *i-genuine* atau bisa disebut dengan *non-i-genuine*.

Kemudian, berikut ini akan membahas mengenai sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra yang akan dibuktikan pada penelitian ini.

Lemma 2.1 Himpunan buka infra terbesar (Witczak, 2022)

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$ adalah himpunan *i-genuine*. Maka $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra terbesar yang termuat di A $(iInt(A) \subseteq A)$.

Lemma 2.2 Hubungan antara himpunan buka infra dengan himpunan *i-genuine* dan interior infra (Witczak, 2022)

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A, B \subseteq X$. Maka:

(1) Jika A adalah himpunan buka infra, maka A juga merupakan himpunan *i-genuine*, yaitu $\tau_{iX} \subseteq ig\tau_{iX}$.

(2) Jika A adalah himpunan buka infra, maka $iInt(A) = A$. Tidak berlaku sebaliknya.

(3) $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B)$.

(4) Setiap *singleton* adalah himpunan *i-genuine*.

(5) Jika $iInt(A) = A,$ maka A adalah himpunan buka atau jika tidak, maka A bukan himpunan *i-genuine*.

Lemma 2.3 Hubungan antara himpunan *i-genuine* dan *non-i-genuine* (Witczak, 2022)

Pada umumnya, sifat-sifat dari himpunan *i-genuine* dan *non-i-genuine* berikut berlaku:

(1) Ada gabungan dari dua himpunan *i-genuine* belum tentu himpunan *i-genuine*.

(2) Gabungan dari dua himpunan *non-i-genuine* kemungkinan bisa menjadi himpunan *i-genuine*.

(3) Irisan dari dua himpunan *i*-*genuine* adalah himpunan *i*-*genuine*.

(4) Ada dua himpunan *non*-*i*-*genuine* yang irisannya merupakan himpunan *i*-*genuine*.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian yang penulis gunakan pada penelitian ini adalah metode kualitatif. Yaitu dengan studi literatur, dimana merupakan suatu teknik pengumpulan data dengan cara membaca jurnal, karya ilmiah, atau buku, serta mencatat dan mengolah bahan penelitian yang berkaitan dengan topik penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Tahapan awal sebelum melakukan penelitian yaitu dengan cara mengumpulkan sumber-sumber yang berkaitan dengan topik penelitian. Peneliti terdahulu yang digunakan sebagai referensi peneliti untuk memahami topik mengenai topologi infra yaitu dari jurnal (Witczak, 2022).

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan yang perlu dilakukan untuk melakukan penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Mempelajari dan memahami jurnal peneliti sebelumnya mengenai topologi infra.
2. Mengkaji definisi ruang topologi, ruang topologi infra, himpunan buka infra dan interior infra.
3. Memaparkan integrasi ayat Al-Qur’an yang berkaitan dengan topik penelitian.
4. Mendefinisikan sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra.

5. Membuktikan sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Sifat-Sifat Himpunan Buka Infra dan Interior Infra pada Ruang Topologi Infra

Subbab ini akan membahas mengenai sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra beserta pembuktiannya. Pembuktian tersebut berdasarkan definisi pada jurnal (Witczak, 2022). Namun sebelum membahas teorema-teorema tersebut, terdapat beberapa definisi dan teorema yang akan digunakan kembali pada bab 4. Definisi-definisi tersebut adalah sebagai berikut:

Definisi 2.8 (Witczak, 2022) Misalkan X adalah himpunan tak kosong. Suatu topologi infra pada X, disimbolkan sebagai τ_{iX} adalah koleksi himpunan bagian dari X sedemikian hingga:

(i) $\emptyset, X \in \tau_{iX}$.

(ii) Jika untuk sebarang $j, 1 \leq j \leq n, A_j \in \tau_{iX},$ maka $\bigcap A_j \in \tau_{iX}, \forall j.$

X yang dilengkapi dengan τ_{iX} disebut ruang topologi infra, disimbolkan dengan (X, τ_{iX}).

Berdasarkan Teorema 2.2, semua ruang topologi sudah pasti merupakan ruang topologi infra juga. Namun, tidak semua topologi infra merupakan ruang topologi, karena gabungan dari anggota-anggota topologi infra belum tentu ada pada topologi infra tersebut. Sehingga tidak memenuhi salah satu syarat definisi dari ruang topologi.

Definisi 2.9 (Al-Odhari, 2015) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. Anggota-anggota dari topologi infra τ_{iX} disebut himpunan buka infra ($A \in \tau_{iX}$).

Catat bahwa terdapat sedikit perbedaan pada definisi himpunan buka pada ruang topologi biasa dengan himpunan buka infra pada ruang topologi infra selain berbeda pada ruangnya, yaitu pada ruang topologi, gabungan dari sebarang koleksi himpunan buka adalah himpunan buka. Sedangkan pada ruang topologi infra, gabungan berhingga dari himpunan buka infra belum tentu himpunan buka infra.

Contoh 4.1 (Witczak, 2022) Berikut merupakan contoh ruang topologi infra.

$X = \{p, q, r\}, \tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}\}$.

Bukti:

Diketahui X adalah himpunan tak kosong. Dalam contoh tersebut, benar bahwa τ_{iX} adalah topologi infra pada X karena τ_{iX} adalah koleksi himpunan bagian dari X, yaitu $\emptyset \subseteq X, X \subseteq X, \{p\} \subseteq X$, dan $\{q\} \subseteq X$. Kemudian, akan dibuktikan bahwa (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra.

(i) Jelas bahwa $\emptyset, X \in \tau_{iX}$.

(ii) $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\emptyset \cap \{p\} = \emptyset$

$\emptyset \cap \{q\} = \emptyset$

$X \cap \{p\} = \{p\} \in \tau_{iX}$

$X \cap \{q\} = \{q\} \in \tau_{iX}$

$\{p\} \cap \{q\} = \emptyset \in \tau_{iX}$

$\therefore (X, \tau_{iX})$ adalah ruang topologi infra.

Dalam hal ini, $\emptyset, X, \{p\}$, dan $\{q\}$ disebut himpunan buka infra.

Perhatikan bahwa, pada contoh 4.1 di atas, τ_{iX} merupakan topologi infra pada X, namun τ_{iX} bukanlah suatu topologi pada X, karena $\{p\} \cup \{q\} = \{p, q\} \notin \tau_{iX}$. Sesuai dengan Teorema 2.2 yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, dimana tidak semua ruang topologi infra adalah ruang topologi.

Selanjutnya akan dibuktikan teorema lain mengenai ruang topologi infra.

Teorema 4.1 (Witczak, 2022) Jika τ_{iX} dan μ_{iX} adalah dua topologi infra yang berbeda pada himpunan tak kosong X, maka:

(a) $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ adalah topologi infra pada X.

(b) $\tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ belum tentu topologi infra pada X.

Bukti

Diketahui bahwa τ_{iX} adalah topologi infra pada himpunan X yang berarti bahwa τ_{iX} adalah koleksi himpunan bagian dari X yang memenuhi:

(i) $\emptyset, X \in \tau_{iX}$.

(ii) $\forall j, 1 \leq j \leq n, A_j \in \tau_{iX}$, maka $\bigcap A_j \in \tau_{iX}, \forall j$.

Dan diketahui bahwa μ_{iX} adalah topologi infra pada himpunan X yang berarti bahwa μ_{iX} adalah koleksi himpunan bagian dari X yang memenuhi:

(i) $\emptyset, X \in \mu_{iX}$

(ii) $\forall k, 1 \leq k \leq m, B_k \in \mu_{iX}$, maka $\bigcap B_k \in \mu_{iX}, \forall k$.

Maka benar bahwa τ_{iX} dan μ_{iX} adalah topologi infra pada X.

Selanjutnya,

(a) Akan ditunjukkan bahwa $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ adalah topologi infra pada X.

Dari (i), diperoleh $\emptyset, X \in \tau_{iX}$ dan $\emptyset, X \in \mu_{iX}$, maka $\emptyset$ dan X disebut himpunan buka infra. Selanjutnya, berdasarkan definisi irisan dalam teori himpunan (Bartle & Sherbert, 1927), maka $\emptyset, X \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}$. Sehingga, $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ memenuhi kondisi (i) dalam definisi ruang topologi infra. Kemudian ambil sebarang $C_l \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}, 1 \leq l \leq o, \forall l$. Ini berarti bahwa $\forall l, C_l \in \tau_{iX}$ dan $\forall l, C_l \in \mu_{iX}$.

Selanjutnya, karena $C_l \in \tau_{iX}, \forall l$, berdasarkan sifat dari himpunan buka infra bahwa untuk sebarang irisan dari himpunan buka infra merupakan himpunan buka infra (Al-Odhari, 2015), maka $\bigcap C_l \in \tau_{iX}, \forall l$.

Berlaku juga pada $C_l \in \mu_{iX}, \forall l$ maka $\bigcap C_l \in \mu_{iX}, \forall l$.

Karena $\bigcap C_l \in \tau_{iX}$ dan $\bigcap C_l \in \mu_{iX}$, maka berdasarkan definisi irisan dalam teori himpunan, diperoleh $\bigcap C_l \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}$. Sehingga, $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ memenuhi kondisi (ii) dalam definisi ruang topologi infra.

Oleh karena itu, benar bahwa $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ adalah topologi infra pada X.

(b) Akan ditunjukkan bahwa $\tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ belum tentu topologi infra pada X.

Dari (i) diperoleh $\emptyset, X \in \tau_{iX}$ dan $\emptyset, X \in \mu_{iX}$, maka pasti $\emptyset \in \tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ karena setiap himpunan pasti terdapat himpunan kosong ($\emptyset$) di dalamnya. Kemudian, $X \in \tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ juga karena τ_{iX} dan μ_{iX} adalah koleksi himpunan bagian dari X, sehingga X pasti ada pada gabungannya juga. Maka diperoleh $\emptyset, X \in \tau_{iX} \cup \mu_{iX}$. Sehingga, $\tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ memenuhi kondisi (i) dalam definisi ruang topologi infra.

Kemudian, ambil sebarang $D_h \in \tau_{iX} \cup \mu_{iX}, 1 \leq h \leq p, \forall h$. Ini berarti bahwa $\forall h, D_h \in \tau_{iX}$ atau $\forall h, D_h \in \mu_{iX}$.

Selanjutnya, karena $D_h \in \tau_{iX}, \forall h$, berdasarkan sifat dari himpunan buka infra bahwa untuk sebarang irisan dari himpunan buka infra merupakan himpunan buka infra (Al-Odhari, 2015), maka $\bigcap D_h \in \tau_{iX}, \forall h$.

Berlaku juga pada $D_h \in \mu_{iX}, \forall h$ maka $\bigcap D_h \in \mu_{iX}, \forall h$.

Namun, meskipun $\bigcap D_h \in \tau_{iX}$ dan $\bigcap D_h \in \mu_{iX}$, berdasarkan definisi gabungan pada teori himpunan, $\bigcap D_h$ belum tentu ada pada $\tau_{iX} \cup \mu_{iX}$. Sehingga $\tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ tidak memenuhi kondisi (ii) dalam definisi ruang topologi infra.

Oleh karena itu, benar bahwa $\tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ belum tentu topologi infra pada X.

Contoh 4.2 Berikut ini merupakan contoh bahwa $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ adalah topologi infra pada X.

Misalkan (X, τ_{iX}) dan (X, μ_{iX}) adalah ruang topologi infra.

$X = \{p, q, r, s\}, \tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, r\}, \{q, r\}\},\ \mu_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{q\}, \{q, r\}, \{q, s\}\big\}$.

Diketahui bahwa τ_{iX} dan μ_{iX} adalah koleksi himpunan bagian dari X, karena $\emptyset \subseteq X, X \subseteq X, \{p\} \subseteq X, \{r\} \subseteq X, \{p, r\} \subseteq X$, dan $\{q, r\} \subseteq X$.

Dan diketahui μ_{iX} adalah koleksi himpunan bagian dari X, karena $\emptyset \subseteq X, X \subseteq X, \{q\} \subseteq X, \{q, r\} \subseteq X$, dan $\{q, s\} \subseteq X$.

Diketahui juga bahwa $\emptyset, X \in \tau_{iX}$ dan $\emptyset, X \in \mu_{iX}$.

Serta $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau_{iX}$, $\emptyset \cap \{q\} = \emptyset \in \tau_{iX}$, $\emptyset \cap \{r\} = \emptyset \in \tau_{iX}$, $\emptyset \cap \{p, r\} = \emptyset \in \tau_{iX}$, $\emptyset \cap \{q, r\} = \emptyset \in \tau_{iX}$, $X \cap \{q\} = \{q\} \in \tau_{iX}$, $X \cap \{r\} = \{r\} \in \tau_{iX}$, $X \cap \{p, r\} = \{p, r\} \in \tau_{iX}$, $X \cap \{q, r\} = \{q, r\} \in \tau_{iX}$, $\{q\} \cap \{r\} = \emptyset \in \tau_{iX}$, $\{q\} \cap \{p, r\} = \emptyset \in \tau_{iX}$, $\{q\} \cap \{q, r\} = \{q\} \in \tau_{iX}$, $\{r\} \cap \{p, r\} = \{r\} \in \tau_{iX}$, $\{r\} \cap \{q, r\} = \{r\} \in \tau_{iX}$, dan $\{p, r\} \cap \{q, r\} = \{r\} \in \tau_{iX}$.

Kemudian, $\emptyset \cap X = \emptyset \in \mu_{iX}$, $\emptyset \cap \{q\} = \emptyset \in \mu_{iX}$, $\emptyset \cap \{q, r\} = \emptyset \in \mu_{iX}$, $\emptyset \cap \{q, s\} = \emptyset \in \mu_{iX}$, $X \cap \{q\} = \{q\} \in \mu_{iX}$, $X \cap \{q, r\} = \{q, r\} \in \mu_{iX}$, $X \cap \{q, s\} =$

$\{q,s\} \in \mu_{iX}$, $\{q\} \cap \{q,r\} = \{q\} \in \mu_{iX}$, $\{q\} \cap \{q,s\} = \{q\} \in \mu_{iX}$, dan $\{q,r\} \cap \{q,s\} = \{q\} \in \mu_{iX}$.

Maka benar bahwa τ_{iX} dan μ_{iX} adalah topologi infra pada X.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ adalah topologi infra pada X.

Berdasarkan τ_{iX} dan μ_{iX} di atas, diperoleh $\tau_{iX} \cap \mu_{iX} = \{\emptyset, X, \{q\}, \{q,r\}\}$. Maka, benar bahwa $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ adalah himpunan bagian dari X karena $\emptyset \subseteq X, X \subseteq X, \{q\} \subseteq X$, dan $\{q,r\} \subseteq X$.

Untuk menunjukkan bahwa $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ adalah topologi infra pada X maka haruslah memenuhi kondisi (i) dan (ii) pada definisi ruang topologi.

(i) $\emptyset, X \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}$. Sehingga kondisi (i) terpenuhi.

(ii) Selanjutnya, $\emptyset \cap X = \emptyset \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}$

$\emptyset \cap \{q\} = \emptyset \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}$,

$\emptyset \cap \{q,r\} = \emptyset \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}$,

$X \cap \{q\} = \{q\} \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}$,

$X \cap \{q,r\} = \{q,r\} \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}$,

$\{q\} \cap \{q,r\} = \{q\} \in \tau_{iX} \cap \mu_{iX}$.

Sehingga kondisi (ii) terpenuhi juga.

Maka benar bahwa $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ merupakan topologi infra pada X.

Contoh 4.3 (Witczak, 2022) Berikut ini contoh bahwa $\tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ bukan merupakan ruang topologi infra.

Misalkan $X = \{p,q,r,s\}$, $\tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p,q\}, \{p,r\}\}$ dan $\mu_{iX} = \{\emptyset, X, \{r\}, \{s\}, \{q,r\}, \{r,s\}\}$.

Perhatikan bahwa τ_{iX} dan μ_{iX} adalah topologi infra pada X karena memenuhi kondisi (i) dan (ii) dalam definisi ruang topologi.

Lalu, diperoleh $\tau_{iX} \cup \mu_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{s\}, \{p,q\}, \{p,r\}, \{q,r\}, \{r,s\}\}$. Dapat dilihat bahwa $\{p,q\} \cap \{q,r\} = \{q\} \notin \tau_{iX} \cup \mu_{iX}$. Dengan demikian, $\tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ bukan topologi infra pada X.

Jadi, Teorema 4.1 terbukti bahwa $\tau_{iX} \cap \mu_{iX}$ adalah topologi infra pada X, sedangkan $\tau_{iX} \cup \mu_{iX}$ belum tentu topologi infra pada X.

Selanjutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra.

4.1.1 Himpunan Buka Infra Terbesar

Pada (Al-Odhari, 2015) mendefinisikan interior infra dari $A \subseteq X$ secara umum yaitu sebagai gabungan dari semua himpunan buka infra yang termuat di A. Dan menyatakan bahwa interior infra adalah himpunan buka infra terbesar yang termuat di A. Namun, hal tersebut tidaklah tepat karena gabungan himpunan buka infra belum tentu himpunan buka infra juga, seperti pada contoh berikut:

Contoh 4.4 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra. $X = \{p,q,r,s\}$, $\tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p,q\}, \{p,r\}\}$. Benar bahwa τ_{iX} adalah himpunan bagian dari X karena $\emptyset \subseteq X, X \subseteq X, \{p\} \subseteq X, \{r\} \subseteq X, \{p,q\} \subseteq X$, dan $\{p,r\} \subseteq X$. Dan perhatikan bahwa τ_{iX} memenuhi kondisi (i) dan (ii) dalam definisi ruang topologi. Kemudian, ambil $A = \{p,q,r\}$. Maka interior infra dari A yaitu gabungan dari semua himpunan buka infra yang termuat di A, yaitu $\{p\} \cup \{r\} \cup \{p,q\} \cup \{p,r\} = \{p,q,r\} = A$. Namun, A bukanlah himpunan buka infra terbesar yang termuat di A karena $A \notin \tau_{iX}$.

Karena alasan di atas, berlaku definisi berikut:

Definisi 2.10 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. Interior infra dari A dinotasikan sebagai $iInt(A)$ dan didefinisikan sebagai:

$$iInt(A) = \bigcup \{O \subseteq X : O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\}.$$

Definisi 2.11 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. Dikatakan bahwa A adalah himpunan *i-genuine* jika dan hanya jika $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra. Himpunan dari semua himpunan *i-genuine* yang terkait dengan topologi infra tertentu τ_{iX} pada X dinotasikan sebagai $ig\tau_{iX}$.

Jika suatu himpunan tidak memenuhi persyaratan himpunan *i-genuine*, maka himpunan tersebut bukan himpunan *i-genuine* atau bisa disebut dengan *non-i-genuine*.

Kemudian, kembali pada Contoh 4.4. Pada kasus ini, A bukanlah himpunan *i-genuine*. Selanjutnya, $\{p, q, s\}$ adalah himpunan *i-genuine* karena $iInt(\{p, q, s\}) = \{p\} \cup \{p, q\} = \{p, q\} \in \tau_{iX}$. Namun, $\{p, q, s\}$ sendiri bukanlah himpunan buka infra.

Sehingga berlaku Lemma berikut:

Lemma 4.1 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$ adalah himpunan *i-genuine*. $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra terbesar yang termuat di A $(iInt(A) \subseteq A)$.

Bukti

Diketahui τ_{iX} adalah topologi infra pada X. Artinya $\emptyset, X \in \tau_{iX}$ dan untuk sebarang $A_j \in \tau_{iX}$, $1 \leq j \leq n$ berlaku $\bigcap A_j \in \tau_{iX}, \forall j$.

Selain itu, diketahui $A \subseteq X$ adalah himpunan *i-genuine*. Artinya $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra. Dengan kata lain,

$$iInt(A) = \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \in \tau_{iX}.$$

Andaikan $M \subseteq X$, $M \subseteq A$ adalah himpunan buka infra yang lebih besar daripada $iInt(A)$, artinya $iInt(A) \subseteq M \subseteq A$,

$$iInt(A) = \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \subseteq M \subseteq A \in \tau_{iX}.$$

Karena M himpunan buka infra, artinya $M \in \tau_{iX}$.

Sedangkan jika berdasarkan definisi interior infra $(iInt)$, haruslah $M \subseteq iInt(A)$.

Jadi, $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra terbesar yang termuat dalam A $(iInt(A) \subseteq A)$.

Contoh 4.5

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra, dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r, s\}$ dan $\tau_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, q, r\}\big\}$.

$A = \{p, q, r\} \in \tau_{iX}$, sehingga

$$\begin{aligned} iInt(A) &= \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \\ &= \emptyset \cup \{p\} \cup \{r\} \cup \{p, q\} \cup \{p, q, r\} \\ &= \{p, q, r\} \in \tau_{iX}. \end{aligned}$$

Diperoleh $iInt(A) \subseteq A$ karena $\{p, q, r\} \subseteq \{p, q, r\}$.

Sehingga benar bahwa $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra terbesar yang termuat pada A, dalam artian $iInt(A) \subseteq A$.

4.1.2 Hubungan antara Himpunan Buka Infra dengan Himpunan *I-genuine* dan Interior Infra

Selain himpunan buka infra terbesar, sifat selanjutnya yaitu hubungan antara himpunan buka infra dengan himpunan *i-genuine* dan interior infra. Definisi dari himpunan buka infra, *i-genuine* dan interior infra telah dijelaskan pada Bab 2, dapat dilihat pada definisi 2.9, 2.10 dan 2.11.

Catat bahwa terdapat sedikit perbedaan pada definisi interior pada ruang topologi biasa dengan interior infra pada ruang topologi infra selain berbeda pada ruangnya, salah satu perbedaannya yaitu pada ruang topologi, jika $Int(A) = A$ maka A pasti himpunan buka. Sedangkan pada ruang topologi infra, jika $iInt(A) = A$ maka A bisa jadi himpunan buka infra atau bukan, seperti yang akan dibuktikan pada lemma 4.2(5) berikut.

Lemma 4.2 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A, B \subseteq X$. Maka:

(1) Jika A adalah himpunan buka infra, maka A juga merupakan himpunan *i-genuine*, yaitu $\tau_{iX} \subseteq ig\tau_{iX}$.

(2) Jika A adalah himpunan buka infra, maka $iInt(A) = A$. Tidak berlaku sebaliknya.

(3) $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B)$.

(4) Setiap *singleton* adalah himpunan *i-genuine*.

(5) Jika $iInt(A) = A$, maka A adalah himpunan buka infra atau jika tidak, maka A bukan himpunan *i-genuine*.

Bukti

Diketahui τ_{iX} adalah topologi infra di X dan $A, B \subseteq X$. Artinya $\emptyset, X \in \tau_{iX}$, dan untuk sebarang $1 \leq j \leq n, A_j \in \tau_{iX}$ maka $\bigcap A_j \in \tau_{iX}, \forall j$.

(1) Asumsikan A adalah himpunan buka infra, artinya $A \in \tau_{iX}$.

Akan ditunjukkan bahwa A adalah himpunan *i-genuine*. Dengan kata lain, $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra.

Lalu, A dikatakan himpunan *i-genuine*, jika dan hanya jika $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra.

$$iInt(A) = \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \in \tau_{iX}.$$

Karena diketahui $A \in \tau_{iX}$, maka O yang memenuhi persyaratan $\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\}$, haruslah merupakan himpunan buka infra yang juga merupakan himpunan bagian dari A.

Itu artinya $iInt(A) = \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \in \tau_{iX}$ juga.

Karena $iInt(A) \in \tau_{iX}$, maka A disebut himpunan *i-genuine*. Karena $\forall A \in \tau_{iX}, A$ juga himpunan *i-genuine*, maka berlaku $\tau_{iX} \subseteq ig\tau_{iX}$.

Contoh 4.6

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra, dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r, s\}$ dan $\tau_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, q, r\}\big\}$.

Diketahui A adalah himpunan buka infra, artinya $A \in \tau_{iX}$.

Misalkan $A = \{p, q, r\} \in \tau_{iX}$, sehingga

$$\begin{aligned} iInt(A) &= \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \\ &= \emptyset \cup \{p\} \cup \{r\} \cup \{p, q\} \cup \{p, q, r\} \\ &= \{p, q, r\} \in \tau_{iX}. \end{aligned}$$

Karena $iInt(A) \in \tau_{iX}$, maka himpunan A adalah *i-genuine*.

(2) Asumsikan A adalah himpunan buka infra, artinya $A \in \tau_{iX}$.

Maka terdapat $O \subseteq A$ dengan $O \subseteq X$ dan $O \in \tau_{iX}$.

$iInt(A) = \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\}$, karena diketahui $A \in \tau_{iX}$, maka berdasarkan Lemma 4.2(1), $iInt(A) \in \tau_{iX}$.

Oleh karena itu, dengan O yang memenuhi persyaratan $\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\}$, maka $O \subseteq iInt(A)$.

Lalu, berdasarkan Lemma 4.1, jika $iInt(A) \in \tau_{iX}$, maka $iInt(A) \subseteq A$, sehingga $O \subseteq iInt(A) \subseteq A$.

Karena $O \subseteq iInt(A) \subseteq A$, maka $iInt(A)$ adalah himpunan buka infra terbesar yang termuat di A. Oleh karena itu, $iInt(A) = A$.

Untuk memperjelas pembuktian di atas, berikut contohnya.

Contoh 4.7

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r, s\}$ dan $\tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{r, s\}\}$.

Diketahui $A \in \tau_{iX}$, misal $A = \{r, s\} \in \tau_{iX}$. Maka,

$$
\begin{aligned}
iInt(A) &= \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \\
&= \{r, s\} \\
&= A.
\end{aligned}
$$

Sehingga, jika A buka infra, maka $iInt(A) = A$.

Untuk sebaliknya, tidaklah benar, jika $iInt(A) = A$, maka A belum tentu himpunan buka infra, karena gabungan himpunan buka infra belum tentu ada di topologi infra τ_{iX} tersebut seperti yang telah dijelaskan pada Teorema 2.3(iii).

Untuk memperjelas, berikut contohnya.

Contoh 4.8

Diketahui $iInt(A) = A$ pada ruang topologi infra (X, τ_{iX}). Dengan $X = \{p, q, r, s\}$ dan $\tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{r, s\}\}$. Ambil $A = \{p, q\}$. Artinya $iInt(A) = A = \{p, q\} \notin \tau_{iX}$. Sehingga, A belum tentu himpunan buka infra.

(3) Akan ditunjukkan bahwa $iInt(A \cap B) \subseteq iInt(A) \cap iInt(B)$.

Misalkan $x \in iInt(A \cap B)$. Berdasarkan definisi interior infra, maka terdapat himpunan buka infra $O \subseteq X, O \in \tau_{iX}, O \subseteq (A \cap B)$, sedemikian hingga $x \in O \subseteq (A \cap B)$.

Karena $O \subseteq (A \cap B)$, maka $O \subseteq A$ dan $O \subseteq B$.

Dan karena $O \subseteq A, O \in \tau_{iX}$, berdasarkan definisi interior infra, maka $O \subseteq iInt(A)$.

Demikian juga karena $O \subseteq B, O \in \tau_{iX}$, maka $O \subseteq iInt(B)$.

Maka, $O \subseteq iInt(A) \cap iInt(B)$, sehingga, $x \in iInt(A) \cap iInt(B)$.

Dengan demikian, $iInt(A \cap B) \subseteq iInt(A) \cap iInt(B)$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $iInt(A) \cap iInt(B) \subseteq iInt(A \cap B)$.

Misalkan $y \in iInt(A) \cap iInt(B)$, maka $y \in iInt(A)$ dan $y \in iInt(B)$.

Berdasarkan definisi interior infra, terdapat himpunan buka infra $O_A \subseteq X$ dan $O_B \subseteq X$, sedemikian hingga: $y \in O_A \subseteq A$ dan $y \in O_B \subseteq B$.

Karena $y \in O_A$ dan $y \in O_B$, maka $y \in O_A \cap O_B$.

$O_A, O_B \in \tau_{iX}$, maka $O_A \cap O_B \in \tau_{iX}$ juga, karena irisan dari himpunan buka infra adalah himpunan buka infra berdasarkan Teorema 2.3.

Karena $O_A \cap O_B \in \tau_{iX}$, dan $y \in O_A \cap O_B$, serta $O_A \cap O_B \subseteq A \cap B$, maka $y \in O_A \cap O_B \subseteq A \cap B$ dan $y \in iInt(A \cap B)$.

Dengan demikian, $iInt(A) \cap iInt(B) \subseteq iInt(A \cap B)$.

Berdasarkan kedua pembuktian di atas, diperoleh

$iInt(A \cap B) \subseteq iInt(A) \cap iInt(B)$ dan $iInt(A) \cap iInt(B) \subseteq iInt(A \cap B)$.

Maka benar bahwa $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B)$.

Contoh 4.9

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi, $X = \{a, b, c, d\}$, $\tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{s\}, \{p, q\}, \{p, q, r\}\}$ dan $A, B \subseteq X$.

Misalkan $A = \{p, q, r\}$ dan $B = \{p, q, s\}$.

$A \cap B = \{p, q, r\} \cap \{p, q, s\} = \{p, q\}$.

Maka,

$$\begin{aligned} iInt(A \cap B) &= \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq (A \cap B)\} \\ &= \{p\} \cup \{p, q\} \\ &= \{p, q\}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, mencari $iInt(A) \cap iInt(B)$.

$$\begin{aligned} iInt(A) &= \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \\ &= \{p\} \cup \{r\} \cup \{p, q\} \cup \{p, q, r\} \\ &= \{p, q, r\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iInt(B) &= \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq B\} \\ &= \{p\} \cup \{s\} \cup \{p, q\} \\ &= \{p, q, s\}. \end{aligned}$$

Sehingga, $iInt(A) \cap iInt(B) = \{p, q, r\} \cap \{p, q, s\} = \{p, q\}$.

Oleh karena itu, benar bahwa $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B)$.

(4) Singleton artinya himpunan yang hanya memiliki 1 anggota, yaitu dirinya sendiri.

Jika $\{a\}$ adalah anggota τ_{iX}, maka berdasarkan Lemma 4.2(1), jelas bahwa $\{a\}$ adalah himpunan *i-genuine*.

Jika $\{a\}$ bukan anggota τ_{iX}, Maka interior infra dari $\{a\}$ adalah $\emptyset$. Dan $\emptyset$ adalah anggota τ_{iX}. Akibatnya, $\{a\}$ tersebut adalah himpunan *i-genuine*. Dan $\emptyset$ adalah satu-satunya himpunan buka infra yang terdapat pada singleton $\{a\}$.

Contoh 4.10

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra. $X = \{p, q, r, s\}$ dan $\tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{r, s\}\}$.

Suatu singleton $\{p\} \in \tau_{iX}$, interior infra dari singleton tersebut yaitu

$$iInt(\{p\}) = \bigcup\{O \subseteq X : O \in \tau_{iX}, O \subseteq \{p\}\}$$
$$= \emptyset \cup \{p\}$$
$$= \{p\} \in \tau_{iX}.$$

Karena $iInt(\{p\}) \in \tau_{iX}$, maka singleton $\{p\} \in \tau_{iX}$ adalah himpunan *i-genuine*.

Atau contoh lain misalkan singleton $\{r\} \notin \tau_{iX}$, interior infra dari singleton $\{r\}$ yaitu

$$iInt(\{r\}) = \bigcup\{O \subseteq X : O \in \tau_{iX}, O \subseteq \{r\}\}$$
$$= \emptyset \in \tau_{iX}.$$

Karena $iInt(\{r\}) \in \tau_{iX}$ juga, maka singleton $\{r\} \notin \tau_{iX}$ adalah himpunan *i-genuine* juga.

Sehingga, benar bahwa setiap singleton adalah himpunan *i-genuine*.

(5) Diketahui (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$.

Diketahui $iInt(A) = A$, artinya gabungan semua himpunan bagian dari A yang merupakan himpunan buka infra adalah himpunan A itu sendiri.

Kemudian, akan dibuktikan bahwa A adalah himpunan buka infra, atau jika A bukan himpunan buka infra, maka A bukan himpunan *i-genuine*.

Jika $iInt(A) \in \tau_{iX}$, maka jelas bahwa A adalah himpunan buka infra.

Namun berdasarkan Teorema 2.3(iii), dijelaskan bahwa A belum tentu himpunan buka infra, karena gabungan himpunan buka infra belum tentu merupakan himpunan buka infra juga.

Oleh karena itu, jika $iInt(A) \notin \tau_{iX}$, maka A bukan himpunan buka infra, sehingga A bukanlah himpunan *i-genuine*.

Jadi, benar bahwa jika $iInt(A) = A$, maka A adalah himpunan buka infra atau jika tidak, maka A bukan himpunan *i-genuine*.

Contoh 4.11

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r, s\}$ dan $\tau_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{p, q\}, \{p, r\}\big\}$.

Misalkan $A = \{p, r\}$ maka

$$\begin{aligned} iInt(A) &= \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \\ &= \emptyset \cup \{p\} \cup \{r\} \cup \{p, r\} \\ &= \{p, r\} \\ &= A \in \tau_{iX}. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa $iInt(A) = A$. Dalam hal ini, $A \in \tau_{iX}$.

Sehingga jika $iInt(A) = A$, maka A adalah himpunan buka infra.

Namun, jika mengambil A yang berbeda dengan sebelumnya, misalkan $A = \{p, q, r\}$, maka

$$\begin{aligned} iInt(A) &= \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\} \\ &= \emptyset \cup \{p\} \cup \{r\} \cup \{p, q\} \cup \{p, r\} \end{aligned}$$

$= \{p, q, r\}$

$= A \notin \tau_{iX}.$

Dapat dilihat bahwa $iInt(A) = A$. Dalam hal ini, $A \notin \tau_{iX}$.

Karena A bukanlah himpunan buka infra, sehingga A bukan himpunan *i-genuine*.

Jadi, terbukti bahwa jika $iInt(A) = A$, maka A adalah himpunan buka infra atau jika tidak, maka A bukan himpunan *i-genuine*.

Berdasarkan Lemma 4.2(5), berlaku definisi berikut.

Definisi 4.1 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$. Himpunan A dikatakan himpunan buka infra semu *(pseudo-infra-open)* jika dan hanya jika $iInt(A) = A$. Himpunan dari semua himpunan buka infra semu yang terkait dengan topologi infra τ_{iX} dinotasikan sebagai $p\tau_{iX}$.

Contoh 4.12

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A \subseteq X$.

$X = \{p, q, r, s\}, \tau_{iX} = \{\emptyset, X, \{r\}, \{s\}, \{q, r\}, \{r, s\}\}$, ambil $A = \{r, s\}$, maka

$iInt(A) = \bigcup\{O \subseteq X: O \in \tau_{iX}, O \subseteq A\}$

$= \emptyset \cup \{r\} \cup \{s\} \cup \{r, s\}$

$= \{r, s\} = A$

Dalam hal ini, $iInt(A) = A \in \tau_{iX}$.

Jadi, himpunan A disebut dengan himpunan buka infra semu.

Berdasarkan definisi himpunan buka infra semu, dapat disimpulkan bahwa untuk setiap himpunan buka infra juga merupakan himpunan buka infra semu. Pada faktanya, definisi tersebut adalah versi topologi infra dari gagasan yang telah dijelaskan oleh Chakrabarti dan Dasgupta dalam konteks struktur minimal. Tentu saja, untuk sebarang $A \subseteq X$, $iInt(A) \in p\tau_{iX}$.

Jika $A, B \in p\tau_{iX}$, maka $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B) = A \cap B$. Selain itu, kita dapat membuktikan bahwa $iInt(\cup\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$, jika $\mathcal{A}$ adalah keluarga dari himpunan buka infra semu.

4.1.3 Hubungan antara Himpunan *I-genuine* dan *Non-i-genuine*

Sifat selanjutnya, yaitu hubungan antara himpunan *i-genuine* dan *non-i-genuine*. Definisi dari himpunan *i-genuine* dan *non-i-genuine* telah dijelaskan pada Bab 2, pada definisi 2.11. Lemma berikut ini membahas mengenai gabungan dan irisan dari himpunan *i-genuine* dan *non-i-genuine*.

Lemma 4.3 (Witczak, 2022) Pada umumnya, sifat-sifat dari himpunan *i-genuine* dan *non-i-genuine* berikut berlaku:

(1) Ada dua himpunan *i-genuine* yang gabungannya bukan himpunan *i-genuine*.

(2) Ada dua himpunan *non-i-genuine* yang gabungannya merupakan himpunan *i-genuine*.

(3) Irisan dari dua himpunan *i-genuine* adalah himpunan *i-genuine*.

(4) Ada dua himpunan *non-i-genuine* yang irisannya merupakan himpunan *i-genuine*.

Bukti

(1) Ambil $X = \{p, q, r, s, t\}$ dan $\tau_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{p, q\}\big\}$. Misalkan $A = \{p, q\}$ dan $B = \{r\}$. Keduanya adalah anggota τ_{iX}, yang berarti juga anggota $ig\tau_{iX}$. Sedangkan $iInt(A \cup B) = \{p, q\} \cup \{r\} = \{p, q, r\} \notin \tau_{iX}$. Dengan demikian, M bukanlah himpunan *i-genuine*.

(2) Misalkan dengan (X, τ_{iX}) yang sama seperti di atas, ambil $A = \{q, r, s\}$ dan $B = \{p, r, s, t\}$. Jelas $iInt(A) = \{q, r\} \notin \tau_{iX}$ dan $iInt(B) = \{p, r\} \notin \tau_{iX}$. Namun, $A \cup B = X$ dan X adalah himpunan *i-genuine*.

(3) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra dan $A, B \in ig\tau_{iX}$. Maka $iInt(A) \in \tau_{iX}$ dan $iInt(B) \in \tau_{iX}$. Maka jelas bahwa $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B) \in \tau_{iX}$. Maka, $A \cap B$ adalah himpunan *i-genuine*.

(4) Ambil $X = \{p, q, r, s\}$ dan $\tau_{iX} = \big\{\emptyset, X, \{p\}, \{q\}, \{p, r\}\big\}$. Ambil $A = \{p, q, r\}$ dan $B = \{p, q, s\}$. Maka, $iInt(A) = \{p, q, r\} \notin \tau_{iX}$, sehingga $A \notin ig\tau_{iX}$. Dan juga $iInt(B) = \{p, q\} \notin \tau_{iX}$. Maka, $A \cap B = \{p, q\} \in \tau_{iX} \subseteq ig\tau_{iX}$.

Selain himpunan buka infra semu, berikut membahas mengenai definisi dari himpunan buka infra minimal.

Definisi 4.2 (Witczak, 2022) Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra. Himpunan $A \in \tau_{iX}$ dikatakan himpunan buka infra minimal jika dan hanya jika untuk sebarang $B \in \tau_{iX}$, $A \cap B = \emptyset$ atau $A \subseteq B$.

Contoh 4.13

Misalkan (X, τ_{iX}) adalah ruang topologi infra.

$X = \mathbb{Z}$ dan $\tau_{iX} = \{\emptyset, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}^+\}$.

Asumsikan bahwa $\{0\}$ adalah himpunan buka infra.

Dalam hal ini, $\{0\} \in \mathbb{Z}$. Dan $\{0\}$ dikatakan himpunan buka infra minimal, karena $\{0\} \cap \emptyset = \emptyset$, $\{0\} \cap \mathbb{Z}^- = \emptyset$, $\{0\} \cap \mathbb{Z}^+ = \emptyset$, atau $\{0\} \subseteq \mathbb{Z}$.

4.2 Integrasi

Dalam Al-Qur’an telah dijelaskan tanda-tanda keagungan Allah SWT bagi orang yang berakal, yakni terdapat dalam Surat Ali Imron ayat 190-191, yang berbunyi :

اِنَّ فِيْ خَلْقِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَاخْتِلَافِ الَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَاٰيٰتٍ لِّاُولِى الْاَلْبَابِۙ ﴿١٩٠﴾

Artinya : *“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi serta pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang yang berakal,”* (Q.S Ali Imron : 190).

Berdasarkan tafsir Al-Muyassar (Mashudi, 2020a), menjelaskan sesungguhnya penciptaan langit yang begitu tinggi tanpa adanya tiang yang menopang merupakan salah satu tanda kekuasaan Allah yang amat jelas. Begitu juga dengan segala sesuatu di angkasa seperti bulan, bintang, matahari, dan benda angkasa lainnya. Bumi yang merupakan tempat tinggal makhluk hidup, gunung-gunung yang memiliki tanah yang tinggi, lautan yang sangat luas, samudra yang amat dalam, dan lain sebagainya. Pada saat malam, semua keindahan alam seperti tertutup oleh keadaan yang gelap gulita, dan sebaliknya pada saat siang, semua terlihat jelas karena adanya matahari yang membuat alam terang benderang. Semua hal tersebut adalah sebagian bukti adanya Dzat Pencipta bagi mereka yang mau berfikir hingga dapat menumbuhkan keimanan pada hatinya. Sedangkan bagi orang-orang yang buta mata hatinya, mereka hanya akan merasa takjub saat melihat keindahan tanda-tanda kebesaran Allah SWT, dan tidak mampu membawa hatinya menuju keimanan.

Berdasarkan tafsir ayat di atas menjelaskan tentang tanda-tanda kekuasaan Allah SWT akan ciptaan-Nya. Dan pada ayat selanjutnya, disebutkan tanda-tanda kekuasaan Allah SWT tersebut bagi orang yang berakal, yakni :

الَّذِيْنَ يَذْكُرُوْنَ اللّٰهَ قِيَامًا وَّقُعُوْدًا وَّعَلٰى جُنُوْبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُوْنَ فِيْ خَلْقِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِۚ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هٰذَا
بَاطِلًاۚ سُبْحٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ١٩١

Artinya : *"(yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), "Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia. Mahasuci Engkau. Lindungilah kami dari azab neraka."* (Q.S Ali Imron : 191).

Menurut tafsir Al-Muyassar (Mashudi, 2020a), menjelaskan bahwasannya orang-orang yang berfikir mengenai segala ciptaan Allah SWT hingga mampu memperkuat keimanannya akan selalu menyempatkan diri berdzikir kepada Allah SWT, baik dengan hatinya maupun lisannya pada saat berdiri, duduk, berbaring atau dalam keadaan apapun. Maksudnya dalam setiap situasi akan selalu mengingat Allah SWT baik saat berjalan, bekerja di pasar atau di kantor, menghadiri majelis ilmu, di tempat tertentu atau di tempat umum. Mereka juga mengingat Allah SWT saat beristirahat dan tidur setelah lelah bekerja. Dan selalu memikirkan tanda-tanda kekuasaan dan kebesaran Allah SWT dari segala ciptaan-Nya di langit maupun di bumi. Setiap memandang ciptaan Allah SWT, mereka menjadikannya sebagai bukti nyata kekuasaan dan keagungan Allah SWT, dimana terdapat ayat kauniyah yaitu tanda-tanda keindahan ciptaan Allah SWT Yang Maha Kuasa, Maha Bijaksana dan Maha Pencipta. Ketika melihat ayat-ayat tersebut hati mereka bergetar dan takut seraya mengucapkan : "Ya Tuhan, kami bersaksi bahwa sesungguhnya Engkau tidak menciptakan ini semua dengan sia-sia, akan tetapi Engkau menciptakan ini semua ada hikmah yang luar biasa. Engkau ciptakan dengan kekuasaan-Mu, Engkau ukir semua sesuai kehendak-Mu, Maha Suci Engkau dari para sekutu, dan Maha Suci Engkau dari lawan-lawan-Mu. Maha Berkah Engkau Ya Tuhan kami. Kami mohon Engkau memberi pertolongan kepada kami agar kami dapat beramal saleh yang kami kerjakan sesuai dengan apa yang Engkau perintahkan, dan kami dapat menjauhi perbuatan yang Engkau larang itu, sehingga kami dapat dijauhkan dari siksa neraka, dan kami mohon kepada-Mu agar menjauhkan kami dari siksa api neraka, dan dari murka-Mu yang sangat menakutkan".

Berdasarkan tafsir ayat di atas, dijelaskan bahwasannya terdapat banyak tanda-tanda yang membuktikan kekuasaan Allah SWT akan ciptaan-Nya. Dan hanya orang-orang yang berakal yang mampu berfikir mengenai keagungan Allah SWT tersebut sehingga dapat memperkuat keimanannya terhadap Allah SWT. Orang-orang tersebut akan selalu mengingat Allah SWT dengan berdzikir dimanapun dan kapanpun mereka berada dalam situasi apapun. Oleh karena itu, seperti hal nya membuktikan tanda-tanda Allah SWT itu penting, maka penting juga untuk membuktikan sifat-sifat dari himpunan buka infra dan interior infra pada ruang topologi infra, agar dapat memperkuat dan memperjelas pemahaman mengenai hal tersebut dan dapat dimanfaatkan sebagai referensi tambahan pada penelitian selanjutnya mengenai himpunan buka infra dan interior infra.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab 4, dapat disimpulkan bahwa topologi infra adalah koleksi himpunan bagian dari X yang memenuhi dua persyaratan, yaitu himpunan kosong dan X ada di topologi infra τ_{iX}, dan untuk sebarang $j, 1 \leq j \leq n, A_j \in \tau_{iX}$, maka $\cap A_j \in \tau_{iX}, \forall j$. Di dalam ruang topologi infra terdapat himpunan buka infra, interior infra dan himpunan *i-genuine* maupun himpunan *non-i-genuine* yang memiliki beberapa sifat. Pada penelitian ini, penulis telah membuktikan sifat-sifat tersebut, di antaranya yaitu:

(1) Himpunan buka infra terbesar yang termuat di A pada ruang topologi infra (X, τ_{iX}) yaitu interior infra dari A jika $A \subseteq X$ adalah himpunan *i-genuine*.

(2) Hubungan antara himpunan buka infra dengan himpunan *i-genuine* dan interior infra pada ruang topologi infra (X, τ_{iX}), di antaranya yaitu jika $A \in \tau_{iX}$, maka $iInt(A) \in \tau_{iX}$ dan $iInt(A) = A$, $iInt(A \cap B) = iInt(A) \cap iInt(B)$, setiap singleton adalah himpunan *i-genuine*, dan jika $iInt(A) = A$, maka A bisa jadi himpunan buka infra atau tidak.

(3) Hubungan antara himpunan *i-genuine* dan *non-i-genuine*, dimana membahas mengenai gabungan dan irisan dari kedua himpunan tersebut.

Sifat-sifat di atas, telah dibuktikan oleh penulis pada Bab 4. Dan semua sifat tersebut telah terbukti dengan benar.

5.2 Saran

Topik penelitian mengenai sifat-sifat pada ruang topologi infra masih banyak yang belum diteliti dan dibuktikan. Penulis menyarankan kepada peneliti selanjutnya untuk meneliti tentang sifat-sifat lain pada ruang topologi infra, seperti sifat-sifat himpunan tutup infra dan tutupan infra pada ruang topologi infra, atau meneliti mengenai kepadatan dan kelengkapan pada ruang topologi infra.

DAFTAR PUSTAKA

Adams, C., & Franzosa, R. (2008). *Introduction to Topolgy: Pure and Applied*. Pearson Prentice Hall.

AL-Hafidz, I. Z. (2017). *Tafsir Al-Madinah Al-Munawwarah*. Insan Kamil.

Al-Odhari, A. M. (2015). On Infra Topological Spaces. *International Journal of Mathematical Archive EISSN 2229-5046*, *6*(11), 179–184. http://www.ijma.info/index.php/ijma/article/view/3949

Al-Odhari, A. M. (2016). I-Continuous Functions and I*-Continuous Functions on Infra Topological Spaces. *International Journal of Mathematical Archive EISSN 2229-5046*, *7*(3), 18–22.

As-Sa'di, A.-R. N., & Al-Khattab, N. (2018). *Tafseer as-Sa'di* (English Ed). International Islamic Publishing House.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (1927). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.).

Cohen, G. L. (2003). A Course in Modern Analysis and its Applications. In *Cambridge University Press*. https://doi.org/10.1017/cbo9780511755125

Mashhour, S. A., Allam, A. A., Mahmoud, F. S., & Khedr, F. H. (2014). on Supra Topological Spaces. *Indian J. Pure Apple. Math.*, *14*(January 1983), 502–510. https://www.researchgate.net/publication/269262112_on_supra_topological_spaces

Mashudi, H. K. (2020a). *Telaah Tafsir Al-Muyassar Jilid I*. Inteligensia Media. http://repo.uinsatu.ac.id/15052/1/Telaah Tafsir Jilid 1 Full.pdf

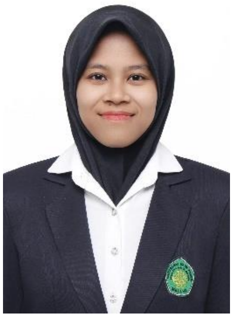
Mashudi, H. K. (2020b). *Telaah Tafsir Al-Muyassar Jilid VI*. Inteligensia Media. http://repo.iain-tulungagung.ac.id/15060/1/Telaah Tafsir Jilid 6 Full.pdf

Rodríguez, L. (2015). Frigyes Riesz and the emergence of general topology. The roots of "topological space" in geometry. *Arch. Hist. Exact Sci*, *69*, 55–102. https://doi.org/10.1007/s00407-014-0144-6

Singh, T. B. (2019). Introduction to Topology. In *Springer Nature Singapure*. https://doi.org/10.1007/978-981-13-6954-4

Witczak, T. (2022). Infra-Topologies Revisited: Logic and Clarification of Basic Notions. *Communications of the Korean Mathematical Society*, *37*(1), 279–292. https://doi.org/10.4134/CKMS.c200455

RIWAYAT HIDUP



Nurus Shubhiyyah Ismail, atau lebih dikenal sebagai Nurus, Cunus dan Kiki. Dilahirkan di Pasuruan, 26 Agustus 1999 sebagai anak kedua dari pasangan Bapak Moh. Ismail dan Ibu Istibsyaroh. Rekam jejak pendidikan penullis dari pendidikan dasar hingga sekolah menengah akhir di kampung halaman penulis. Pendidikan dasar penulis ditempuh di MIN Mandaranrejo Kota Pasuruan dan lulus pada tahun 2012. Kemudian, pada tahun 2012 penulis menimba ilmu di Pondok Pesantren Bayt Al-Hikmah Kota Pasuruan, dan menempuh pendidikan jenjang sekolah menengah pertama di SMP Bayt Al-Hikmah Kota Pasuruan, lulus pada tahun 2015. Setelah itu, untuk jenjang sekolah menengah atas, penulis melanjutkan pendidikan di MAN Kota Pasuruan dan lulus pada tahun 2018. Setelah dinyatakan lulus dari SMA, pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan di bangku perkuliahan setelah diterima sebagai mahasiswa di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang melalui jalur SBMPTN.

Selama perkuliahan, penulis cukup aktif dalam mengikuti kegiatan-kegiatan dalam komunitas sebagai anggota kepanitiaan di lingkungan kampus. Salah satunya sebagai panitia dalam kegiatan Studi Integratif Mahasiswa Matematika (SIGMA) pada tahun 2019. Selain itu, untuk mengisi waktu luang dan mencari pengalaman di luar perkuliahan, penulis menjadi part time sebagai guru mengaji di TPQ Al-Azhar dan TPQ Raudhatul Jannah. Apabila terdapat pertanyaan, saran, ataupun kritik dari penelitian ini, penulis dapat dihubungi melalui email (csnurus@gmail.com) atau sosial media instagram (https://instagram.com/csnurus).

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Nurus Shubhiyyah Ismail
NIM	: 18610049
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi	: Sifat-Sifat Himpunan Buka Infra dan Interior Infra pada Ruang Topologi Infra
Pembimbing I	: Dian Maharani, S.Pd., M.Si.
Pembimbing II	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	25 Oktober 2023	Konsultasi Topik Skripsi	1.
2.	1 Desember 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	21 Februari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	23 Februari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	27 Februari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	4 Maret 2024	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	21 Februari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	27 Februari 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	4 Maret 2024	ACC Seminar Proposal	9.
10.	17 Mei 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	10.
11.	29 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	4 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	10 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	12 Juni 2024	ACC Bab IV dan V	14.
15.	7 Juni 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	15.

16.	11 Juni 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	16.
17.	12 Juni 2024	ACC Seminar Hasil	17.
18.	16 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	18.
19.	24 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	19.
20.	26 Juni 2024	ACC Keseluruhan	20.

Malang, 26 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005