SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG MORREY DISKRIT

SKRIPSI

OLEH
FERIRA FEBRI ARIANTI
NIM. 200601110079

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG MORREY DISKRIT

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Ferira Febri Arianti
NIM. 200601110079

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG MORREY DISKRIT

SKRIPSI

Oleh
Ferira Febri Arianti
NIM. 200601110079

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 19 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si.	Dr. Fachrur Rozi, M.Si.
NIP.19800429 200604 1 003	NIP.19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP.19741129 200012 2 005

SIFAT KELENGKAPAN PADA RUANG MORREY DISKRIT

SKRIPSI

Oleh
Ferira Febri Arianti
NIM. 200601110079

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 26 Juni 2024

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Dr. Fachrur Rozi, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan dibawah ini

Nama : Ferira Febri Arianti

NIM : 200601110079

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat Kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber referensi pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil tiruan, maka saya bersedia untuk menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 Juni 2024

METERAI TEMPEL

Ferira Febri Arianti

MOTTO

" Boleh jadi kamu tidak menyukai sesuatu, padahal disitu ada kebaikan untukmu"

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah atas segala puji syukur bagi Allah yang telah memberikan rahmat dan nikmat-Nya sehingga penulis masih diberi kesempatan untuk menyelesaikan skripsi ini, sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana. Walaupun masih jauh dari kata sempurna, penulis beryukur telah mencapai titik ini, yang pada akhirnya skripsi ini selesai juga. Skripsi ini penulis persembahkan kepada: Kedua orang tua penulis, Ayah Soffandi dan Bunda Yuli Santalia yang telah memberikan kasih sayang yang tulus dan dukungan kepada penulis sehingga sampai dititik ini. Terima kasih telah percaya dan meyakinkan penulis jika semua yang dialami penulis akan baik-baik saja. Terima kasih telah mengingatkan penulis untuk tidak berlebihan dan memaksakan diri dalam berjuang. Semoga ayah dan bunda sehat selalu dan menemani penulis hingga seterusnya. Kakak Hilda Fanny Puteri dan adik Rafli Fan Maulana yang telah menjadi penyemangat dalam mengerjakan skripsi ini. Terima kasih untuk diriku sendiri yang telah berjuang dan pantang menyerah dalam meyelesaikan semuanya dan meyakini bahwa semua rencana Allah itu pasti indah pada akhirnya, sehingga penulis diberi kesempatan untuk memperbaiki diri setiap harinya melalui proses menyelesaikan tugas akhir ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Penulis panjatkan puji syukur dan berterima kasih kepada Allah SWT atas rahmat dan bimbingan-Nya yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Sifat Kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit". Sholawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun ke jalan kebenaran yaitu agama Islam. Skripsi ini disusun sebagai syarat untuk melanjutkan pengerjaan skripsi pada program Strata-1 Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang membantu dan memberikan bimbingan arahan selama proses penyusunan skripsi. Ucapan terima kasih disampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus ketua penguji skripsi.
4. Dian Maharani, M.Si selaku penguji 1, yang telah membantu dan memberikan arahan dan motivasi kepada saya selama dalam pengerjaan skripsi.
5. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku dosen pembimbing I dan dosen wali yang telah sabar memberikan bimbingan, motivasi, nasihat, serta memberikan ilmu-ilmu baru selama menyusun skripsi.
6. Dr. Fachrur Rozi, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan motivasi, saran, dan pengetahuan selama menyusun skripsi.
7. Dewi Ismiarti, M.Si yang telah menginspirasi kehidupan saya dan banyak memberikan hal-hal baru yang sangat bermakna bagi saya, sehingga saya bisa sampai dititik sekarang.

8. Segenap dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Ayah, bunda, kakak dan adik tersayangku dan keluarga besar yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, dan motivasi .
10. Azka Khoirunnisa dan Rahma Riska Panida selaku sahabat penluis yang selalu mendukung saya dan mengapresiasi atas segala pencapaian yang telah saya dapat.
11. Kak Cahya dan Kak Nikmah yang selalu menguatkan, memberikan masukan dan saran selama saya selama pengerjaan skripsi.
12. Seluruh mahasiswa angkatan 2020 yang saling mendukung dan mendoakan antara satu dengan yang lainnya.
13. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan penulis satu persatu, yang ikut serta dalam membantu menyelesaikan penyusunan skripsi ini.

Malang, 26 Juni 2024

Peneliti

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

ℓ^p	: Ruang barisan ℓ^p
ℓ_q^p	: Ruang Morrey Diskrit
$\|\cdot\|$	: Norma
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan riil
$\mathbb{C}$	: Himpunan bilangan kompleks
$\mathbb{Z}$	: Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
p	: Konjugat eksponen
q	: Konjugat eksponen
$S_{m,N}$	: Himpunan barisan $\{m-N,\dots,m,\dots,m+N\}$
$\subseteq$	: Subset (inklusi)

ABSTRAK

Arianti, Ferira Febri. 2024. **Sifat Kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dr. Hairur Rahman., M.Si. (2) Dr. Fachrur Rozi., M.Si.

Kata kunci: Ruang Banach, Ruang barisan ℓ^p, Ruang Morrey, Ruang Morrey Diskrit.

Ruang Banach merupakan Ruang Bernorma yang lengkap. Salah satu contoh ruang Banach yaitu ruang barisan ℓ^p. Ruang Morrey Diskrit ℓ_q^p merupakan bentuk perumuman dari ruang barisan ℓ^p, sehingga akan dibuktikan sifat kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit. Kajian yang dilakukan dengan mengumpulkan teori-teori yang berhubungan seperti; ruang barisan ℓ^p, Ruang Bernorma, Barisan Cauchy, dan kekonvergenan. Sebagai hasil, penulis membuktikan bahwa Ruang Morrey Diskrit berlaku sifat kelengkapan.

ABSTRACT

Arianti, Ferira Febri. 2024. **Completeness Properties on Discrete Morrey Space**. Thesis. Matehmatics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisors: (1) Dr. Hairur Rahman., M.Si. (2) Dr. Fachrur Rozi., M.Si.

Keywords: Banach Space, ℓ^p sequence space, Morrey Space, Discrete Morrey Space.

Banach space is a complete normed space. An example of a Banach Space is ℓ^p sequence space. Discrete Morrey Space ℓ_q^p is a generalization of the ℓ^p sequence space, so that the completeness properties of Discrete Morrey Space will be proved. The research is based on collecting relevant theories like: ℓ^psequence space, normed space, Cauchy sequence, and convergence. As an result, the author proved that the Discrete Morrey Space has completeness properties.

مستخلص البحث

أريانتي، فيريرا فبري. 2024. **خصائص التركيبات في فضاء موري المنفصل**. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: د. خير الرحمن، الماجستير. المشرف الثاني: د. فخر الرازي، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: فضاء باناخ، فضاء صفوف ℓ^p، فضاء موري، فضاء موري المنفصل.

فضاء باناخ هو فضاء معياري كامل. أحد الأمثلة على فضاء باناخ هو فضاء صفوف ℓ^p. وفضاء موري المنفصل ℓ_q^p هو شكل من أشكال التعميم من فضاء صفوف ℓ^p، بحيث يتم إثبات تركيبات فضاء موري المنفصل. تم إجراء البحث من خلال جمع النظريات ذات الصلة، مثل؛ فضاء صفوف ℓ^p، فضاء معياري، متتالية كوشي، والتقارب. نتيجة لذلك، أثبتت الباحثة أن فضاء موري المنفصل تطبق خاصية التركيبات.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang Bernorma X, di mana X merupakan himpunan tak kosong merupakan Ruang Vektor yang memiliki fungsi $\|\cdot\|$ bernilai Riil atau Kompleks dengan $x \in X$ sehingga dapat dinotasikan dengan $\|x\|$, yang memenuhi sifat-sifat norma (Kreyzig, 1966). Untuk konsep norma sendiri pertama kali diperkenalkan pada tahun 1922 oleh S.Banach, H.Hahn dan N. Wiener. Kemudian, pada tahun 1932, teorinya dikembangkan lagi oleh S.Banach.

Pada Ruang Bernorma sendiri juga dipelajari tentang barisan konvergen dan Barisan Cauchy. Hal ini telah dijelaskan pada Kreyzig (1966) sebagai berikut, suatu barisan (x_n) di Ruang Bernorma X disebut konvergen ke $x \in X$ jika untuk setiap Bilangan Riil $\epsilon > 0$ terdapat $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_\epsilon$ berlaku $\|x_n - x\| < \epsilon$ atau bisa juga $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ yang apabila dituliskan $x_n \to x$. Suatu barisan (x_n) di Ruang Bernorma X disebut Barisan Cauchy jika untuk setiap Bilangan Riil $\epsilon > 0$ dan terdapat $\epsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq n_\epsilon$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \epsilon$. Ruang Bernorma dikatakan lengkap atau disebut sebagai Ruang Banach jika setiap Barisan Cauchy (x_k) konvergen di X juga. Pada Ruang Bernorma, terdapat beberapa contoh yang termasuk dalam Ruang Banach, salah satunya yaitu ruang barisan ℓ^p.

Ruang barisan ℓ^p dengan $p \in \mathbb{R}$ dan $1 \leq p < \infty$, dengan definisi setiap elemen pada ruang ℓ^p merupakan barisan $x = (x_j) = (x_1, x_2, \dots)$ pada bilangan sedemikian sehingga $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots$ konvergen sehingga $\sum_{i=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty$ dan metrik di definisikan dengan $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|x_j - y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ di mana $y = (y_j)$ dan $\sum\left|y_j\right|^p < \infty$. Ruang ℓ^p merupakan salah satu Ruang Banach dengan norma yaitu $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (Kreyzig, 1966).

Pada tahun 2018, Gunawan dkk. Telah mengembangkan ruang ℓ^p sehingga terbentuk ruang baru yaitu Ruang Morrey Diskrit ℓ_q^p. Misalkan m merupakan bilangan bulat dan N merupakan bilangan bulat positif. $S_{m,N}$ merupakan suatu barisan yang dapat ditulis $S_{m,N} = \{m-n, \dots, m, \dots, m+N\}$, dan $\mathbb{F}$ merupakan himpunan semua barisan x di Bilangan Riil atau Kompleks. Ruang Morrey Diskrit dapat didefinisikan sebagai berikut (Gunawan dkk., 2018).

$$\|x\|_{\ell_q^p} := \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\omega}\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

dengan $1 \le p \le q < \infty$, di mana p dan q merupakan Bilangan Riil positif, serta x_k merupakan suatu barisan pada x.

Salah satu sifat yang ingin dibuktikan dalam Ruang Morrey Diskrit adalah sifat kelengkapannya. Sebelumnya sudah ada penelitian yang membahas tentang sifat kelengkapan pada Ruang Morrey seperti Sawano dkk. (2005), Rafeiro dkk. (2013) dan Rukmana. (2019). Penelitian tentang Ruang Morrey Diskrit juga telah dibahas oleh Gunawan dkk. (2018) dan Rahman dkk. (2021) namun, masih belum dijelaskan secara detail. Oleh karena itu, penulis ingin melakukan penelitian tentang sifat kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit dengan cara menganalisis banyak referensi, agar penjelasan tersebut memudahkan dalam proses pemahaman tentang penelitian ini. Penelitian lainnya tentang Ruang Morrey juga pernah dilakukan oleh Maharani dkk. (2019) tentang keterbatasan operator Mikhlin, G. Gunawan dkk.

(2006) tentang keterbatasan operator Riesz, dan Salim dkk. (2022) tentang interpolasi kompleks dan lain-lainnya.

Dalam surat Al-An'am ayat 149 Al-Qur'an,(2018), Allah berfirman

Artinya: *"Allah mempunyai alasan yang jelas lagi kuat, maka jika Dia menghendaki pasti Dia memberi petunjuk kepada kalian semuanya".*

Berdasarkan tafsiran Ibnu Katsir, ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah mempunyai hikmah yang sempurna dan alasan yang jelas dan kuat dalam memberikan petunjuk kepada orang yang ditunjukin-Nya dan menyesatkan orang yang disesatkan-Nya (Ahmad, 2017).

Berdasarkan ayat tersebut, penulis termotivasi untuk meneliti lebih lanjut secara jelas, kuat dan detail. Dalam memaparkan sifat kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit, diperlukan penjelasan yang detail. Untuk bisa menjelaskan secara detail diperlukan banyak referensi dan alasan yang kuat.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pemaparan latar belakang di atas, maka rumusan penelitian ini yaitu apakah Ruang Morrey Diskrit ℓ_q^p berlaku sifat kelengkapan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan pemaparan latar belakang dan rumusan masalah, tujuan penelitian ini adalah mengetahui keberlakuan sifat kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit ℓ_q^p .

1.4 Manfaat Penelitian

Diharapkan penelitian ini dapat memberikan manfaat dalam bentuk kontribusi terhadap literatur dan pengetahuan baru yang dapat digunakan oleh penulis di masa depan dalam memahami sifat kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit ℓ_q^p.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah fokus pada sifat kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit ℓ_q^p, sehingga penelitian ini tidak akan membahas sifat kelengkapan di ruang-ruang lainnya.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada bab ini, akan dijelaskan tentang beberapa Definisi, Teorema, serta contoh untuk mempermudah pembahasan mengenai sifat kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit.

2.1.1 Ruang Barisan ℓ^p

Sebelum membahas tentang Ruang Morrey Diskrit, akan dibahas terlebih dahulu tentang ruang barisan ℓ^p, karena Ruang Morrey Diskrit merupakan bentuk perumuman dari ruang barisan ℓ^p.

Definisi 2.1. (Kreyzig, 1966)

Misalkan $1 \leq p < \infty$ dan $p \in \mathbb{R}$, dengan definisi setiap elemen pada ruang ℓ^p merupakan himpunan barisan $x = (x_j) = (x_1, x_2, \ldots)$ pada Bilangan Riil atau Kompleks sedemikian sehingga $|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots$ konvergen,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty,$$

Dan dilengkapi dengan metrik yang didefinisikan sebagai

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(x_j - y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

di mana $y = (y_j)$ dan $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p < \infty$

Selanjutnya, akan dijelaskan tentang ruang ℓ^p yang dilengkapi dengan norma.

Definisi 2.2. (Kreyzig, 1966)

Ruang barisan ℓ^p merupakan Ruang Banach yang dilengkapi dengan norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Norma ini dapat diinduksikan dari metrik yaitu

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Contoh:

Untuk kasus $p = 2$, ruang barisan ℓ^2 disebut sebagai ruang barisan Hilbert dengan metrik yang didefinisikan sebagai

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^2}.$$

2.1.2 Ketaksamaan

Sebelum membahas beberapa teorema yang berkaitan dengan Ruang Bernorma pada ruang ℓ^p, maka akan dibahas terlebih dahulu hal-hal yang diperlukan dalam pembuktian seperti ketaksamaan Holder dan ketaksamaan Minkowski.

Teorema 2.3. (Ketaksamaan Holder untuk deret).

Misalkan p dan q Bilangan Riil yang memenuhi $1 < p < \infty$ dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jika $(x_j) \in \ell^p$ dan $(y_j) \in \ell^q$, maka

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j y_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(Ekariani, 2017).

Bukti. Misalkan $p > 1$ dan q didefinisikan dengan

$$\frac{1}{\mathrm{p}}+\frac{1}{\mathrm{q}}=1, \tag{1}$$

p dan q, selanjutnya disebut sebagai konjugat eksponen.

Dari persamaan (1) diperoleh

$$1=\frac{p+q}{pq},$$

$$pq=p+q,$$

$$1=(p-1)(q-1). \tag{2}$$

Karena $\frac{1}{(p-1)}=q-1$, maka $u=t^{p-1}$ mengakibatkan $t=u^{q-1}$.

Misalkan α dan β adalah sebarang bilangan positif. Akan ditunjukkan bahwa $\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p+\frac{1}{q}\beta^q$ untuk setiap $\alpha, \beta \geq 0$ dengan $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Jika $\alpha=0$ atau $\beta=0$ maka ketaksamaan jelas berlaku.

Perhatikan bahwa

$$\alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} t^{p-1}\,dt+\int_0^{\beta} u^{q-1}du \leq \frac{1}{p}\alpha^p+\frac{1}{q}\beta^q. \tag{3}$$

Selanjutnya pilih $\tilde{x}_j \in \ell^p$ dan $\tilde{y}_j \in \ell^p$, misalkan $(\tilde{x}_j)$ dan $(\tilde{y}_j)$ yang memenuhi

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{x}_j|^p=1, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}|\tilde{y}_j|^p=1. \tag{4}$$

Selanjutnya, atur $\alpha=|\tilde{x}_j|$ dan $\beta=|\tilde{y}_j|$. Dari persamaan (3) diperoleh ketaksamaan

$$\left|\tilde{x}_j\tilde{y}_j\right| \leq \frac{1}{p}\left|\tilde{x}_j\right|^p + \frac{1}{q}\left|\tilde{y}_j\right|^q, \qquad \forall j = 1,2,3,\dots \tag{5}$$

Kemudian, dijumlahkan terhadap j dan menggunakan persamaan (1) dan (4), maka diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{x}_j\tilde{y}_j\right| &\leq \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{x}_j\right|^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\tilde{y}_j\right|^q . \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned} \tag{6}$$

Kemudian ambil sebarang taknol $x = (x_j) \in \ell^p$ dan $y = (y_j) \in \ell^p$ dan berurut

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \qquad \tilde{y}_j = \frac{y_j}{\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\eta_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}}. \tag{7}$$

Selanjutnya misalkan,

$$A = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad B = \left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sehingga diperoleh

$$\alpha = |\tilde{x}_j| = \frac{x_j}{A}, \qquad \beta = |\tilde{y}_j| = \frac{y_j}{B}, \tag{8}$$

yang memenuhi persamaan (4) kemudian substitusikan persamaan (8) ke (6)

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{x_j}{A}\frac{y_j}{B}\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|\tilde{x}_j\right|^p}{p} + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|y_j\right|^q}{q}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{AB}\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_jy_j\right| &\leq \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{x_j}{A}\right|^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{y_j}{B}\right|^q . \\ &\leq \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|x_j\right|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|y_j\right|^q}{B^q}. \\ &\leq \frac{1}{pA^p}\sum_{j=1}^{\infty}\left|x_j\right|^p + \frac{1}{qB^q}\sum_{j=1}^{\infty}\left|y_j\right|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.\end{aligned}$$

$$\leq AB.$$

Substitusikan AB yang sudah dimisalkan tadi, sehingga diperoleh

$$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j y_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dengan demikian Teorema 2.3. terbukti, selanjutnya akan dibahas tentang ketaksamaan Minkowski.

Teorema 2.4. (Ketaksamaan Minkowski untuk deret)

Misalkan p Bilangan Riil yang memenuhi $1 \leq p < \infty$. Jika $x = (x_j) \in \ell^p$ dan $y = (y_j) \in \ell^p$, maka

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j + y_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{m=1}^{\infty}|y_m|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Ekariani, 2017).

Bukti. Untuk $p = 1$, maka berdasarkan ketaksamaan segitiga itu benar. Misalkan $p > 1$ dan agar mempermudah penulisan misalkan, $x_j + y_j = z_j$. Dari ketaksamaan segitiga untuk Bilangan Riil diperoleh

$$|z_j|^p = |x_j + y_j||z_j|^{p-1} \leq (|x_j| + |y_j|)|z|^{p-1}$$

$$\leq \left(|x_j||z_j|^{p-1} + |x_j||z_j|^{p-1}\right),$$

dengan menjumlahkan j dari 1 sampai sebarang bilangan asli n yang tetap diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n}|z_j|^p \leq \sum_{j=1}^{n}|x_j||z_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n}|y_j||z_j|^{p-1}. \tag{9}$$

Untuk penjumlahan pertama di ruas kanan dijabarkan menggunakan Teorema 2.3. sehingga diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j||z_j|^{p-1} \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{m=1}^{n}|z_m|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{10}$$

Untuk penjumlahan kedua di ruas kanan dijabarkan menggunakan Teorema 2.3. diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n}|y_j||z_j|^{p-1} \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{m=1}^{n}|z_m|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{11}$$

Berdasarkan persamaan (2) diperoleh

$$pq = p + q.$$

$$pq - q = p.$$

$$q(p-1) = p.$$

Sehingga diperoleh $(p-1)q = p$, dan dapat ditulis

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j||z_j|^{p-1} \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{m=1}^{n}|z_m|^{p}\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{12}$$

dan

$$\sum_{j=1}^{n}|y_j||z_j|^{p-1} \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{m=1}^{n}|z_m|^{p}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{13}$$

Dengan mengsubstitusikan ketaksamaan (12) dan ketaksamaan (13) ke ketaksamaan (9) diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n}|z_j|^p \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{m=1}^{n}|z_m|^{p}\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{m=1}^{n}|z_m|^{p}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

$$\leq \left\{\left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\left[\sum_{m=1}^{n}|z_m|^{p}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Selanjutnya, dengan membagi kedua ruas dengan $(\sum_{m=1}^{n}|z_m|^p)^{\frac{1}{q}}$ diperoleh

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}|z_j|^p}{(\sum_{m=1}^{n}|z_m|^p)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\left\{[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p]^{\frac{1}{p}} + [\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p]^{\frac{1}{p}}\right\}[\sum_{m=1}^{n}|z_m|^p]^{\frac{1}{q}}}{(\sum_{m=1}^{n}|z_m|^p)^{\frac{1}{q}}}.$$

$$\left[\sum_{j=1}^{n}|z_j|^p\right]^{1-\frac{1}{q}} \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Berdasarkan persamaan (1) yaitu $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$. Sehingga ruas kiri diperoleh

$$\left[\sum_{j=1}^{n}|z_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Sebelumnya, diketahui $z_j = x_j + y_j$ dan $x_j, y_j \in \ell^p$. Misalkan $n \to \infty$, karena $x = (x_j)$ dan $y = (y_j) \in \ell^p$, maka ruas kanan ketaksamaan (14) konvergen. Sehingga ruas kiri juga konvergen dan berlaku $\left[\sum_{j=1}^{n}|x_j + y_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq [\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p]^{\frac{1}{p}} + [\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p]^{\frac{1}{p}}$.

Dengan demikian Teorema 2.4. terbukti.

2.1.3 Ruang Bernorma

Ruang Bernorma X merupakan Ruang Vektor yang memiliki fungsi $\|\cdot\|$ bernilai Riil atau Kompleks sehingga $x \in X$ dapat dinotasikan dengan $\|x\|$. Berikut adalah definisi norma dan sifat sifatnya.

Definisi 2.5. (Kreyzig, 1966)

Misalkan X merupakan suatu Ruang Vektor di himpunan Bilangan Riil.

Fungsi $\|\cdot\|$ dari X ke $\mathbb{R}$ disebut sebagai norma pada X jika untuk setiap $x, y \in X$ dan untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ sebagai skalar yang memenuhi beberapa sifat:

1. $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in X$,

2. $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$,

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, untuk setiap $x \in X$,

4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, untuk setiap $x, y, z \in X$, (ketaksamaan segitiga).

merupakan pasangan $(X, \|\cdot\|)$yang disebut sebagai Ruang Bernorma.

Contoh:

Untuk memudahkan pemahaman Definisi 2.5, akan diberikan salah satu contoh yang berkaitan dengan topik skripsi ini yaitu ruang barisan ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$.

Teorema 2.6. (Kreyzig, 1966)

Misalkan p Bilangan Riil yang memenuhi $1 \leq p < \infty$ dan $(x_k) \in \ell^p$ untuk $k \in \mathbb{N}$. Fungsi $\|\cdot\|_p$ yang didefinisikan pada ℓ^p sebagai berikut

$$\|x\|_p = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}},$$

untuk setiap $x \in \ell^p$ merupakan norma pada ℓ^p.

Bukti. Ambil sebarang $x, y \in \ell^p$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Akan dibuktikan bahwa $\|x\|_{\mathrm{p}} \geq 0$, untuk setiap $x \in \ell^p$.

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bentuk persamaan ruang ℓ^p berdasarkan definisi nilai mutlak maka

$$|x_k| \geq 0.$$

$$|x_k|^p \geq 0.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \geq 0.$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

$$\|x\|_p \geq 0.$$

2. Akan dibuktikan bahwa $\|x\|_{\mathrm{p}} = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

(⇒) Jika $\|x\|_{\mathrm{p}} = 0$ maka $x = 0$.

$$\|x\|_{\mathrm{p}} = 0.$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p = 0^p.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p = 0.$$

Karena $|x_k| \geq 0,$ agar hasil penjumlahan bernilai nol maka x_k haruslah bernilai nol.

$$|x_k|^p = 0$$

$$|x_k| = 0$$

$$x_k = 0$$

$$x = 0.$$

(⇐) Jika $x = 0$ maka $\|x\|_p = 0$.

Karena $x = 0$, maka semua barisan x_k adalah nol. Sehingga

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |0|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Karena semua suku-sukunya adalah nol, maka hasil penjumlahannya juga nol.

$$= (|0|^p + |0|^p + |0|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= (0)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= 0.$$

Sehingga $\|x\|_p = 0$.

3. Akan dibuktikan $\|\alpha x\|_{\mathrm{p}} = |\alpha|\|x\|_p$, untuk setiap $x \in \ell^p$.

   Diambil $\alpha \in \mathbb{R}$, sehingga diperoleh

$$\|\alpha x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^p |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \left(|\alpha|^p \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= |\alpha|\|x\|_p.$$

4. Diambil $x, y \in \ell^p$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$\|x + y\| = \left[\sum_{j=1}^{n} \left|\xi_j + \eta_j\right|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p \right]^{\frac{1}{p}},$$

atau bisa ditulis

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j+\eta_j\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Berdasarkan ketaksamaan Minkowski yang telah dijelaskan pada Teorema 2.4. maka diperoleh

$$\left[\sum_{j=1}^{n}\left|\xi_j+\eta_j\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n}|\eta_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

atau bisa ditulis

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Karena ruang ℓ^p memenuhi sifat-sifat Ruang Bernorma, maka terbukti bahwa ruang ℓ^p merupakan Ruang Bernorma. Sehingga Teorema 2.4. terbukti.

Pada subbab selanjutnya akan dibahas tentang Ruang Banach yang berkaitan dengan konvergen dan Barisan Cauchy pada norma, karena kedua konsep ini sangat penting untuk mendefinisikan sifat kelengkapan pada suatu barisan dalam norma.

2.1.4 Ruang Banach

Pada subbab selanjutnya akan dibahas tentang Ruang Banach yang berkaitan dengan konvergen dan Barisan Cauchy pada norma, karena kedua konsep ini sangat penting untuk mendefinisikan sifat kelengkapan pada suatu barisan dalam norma.

Definisi 2.7. (Kreyzig, 1966)

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah Ruang Bernorma. Barisan x_n di X dikatakan konvergen ke $x \in X$, jika untuk setiap Bilangan Riil $\epsilon > 0$ terdapat $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_\epsilon$ berlaku $\|x_n - x\| < \epsilon$. Barisan x_n di X dikatakan Barisan Cauchy jika untuk setiap Bilangan Riil $\epsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq n_\epsilon$ berlaku $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.

Definisi 2.8. (Kreyzig, 1966)

Suatu barisan (x_n) di Ruang Bernorma X adalah konvergen jika $x \in X$ sehingga

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Dalam hal ini biasanya dinotasikan dengan $x_n \to x$ dan x disebut limit pada (x_n).

Definisi 2.9. (Mutaqin, 2017)

Suatu barisan (x_n) di Ruang Bernorma X adalah Cauchy jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat n_ϵ sedemikian sehingga

$$\|x_m - x_n\| < \epsilon,$$

untuk setiap $m, n > n_\epsilon$.

Definisi 2.10. (Mutaqin, 2017)

Ruang $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang yang lengkap yaitu Ruang Banach jika setiap Barisan Cauchy itu konvergen di X.

Contoh:

Untuk memudahkan pemahaman Definisi 2.10, akan diberikan salah satu contoh yang berkaitan dengan topik skripsi ini yaitu ruang ℓ^p seperti yang dijelaskan pada Definisi 2.9. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ruang ℓ^p adalah ruang Banach.

Teorema 2.11. (Ekariani, 2017)

Ruang barisan ℓ^p yang dilengkapi dengan $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ merupakan Ruang Banach.

Untuk membuktikan ruang barisan ℓ^p merupakan Ruang Banach, maka akan dibuktikan bahwa Barisan Cauchy pada ℓ^p adalah konvergen di dalamnya.

Bukti. Misalkan (x_m) Barisan Cauchy di ℓ^p dengan $x = \left(x^{(m)}\right) = (x^1, x^2, \dots, x^N, \dots, x^n, x^m, \dots)$, di mana

$$x^1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots\right),$$

$$x^2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots\right),$$

$$x^3 = \left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \dots\right),$$

$$\vdots$$

$$x^{n_\epsilon} = \left(x_1^{(n_\epsilon)}, x_2^{(n_\epsilon)}, x_3^{(n_\epsilon)}, \dots\right),$$

$$\vdots$$

$$x^m = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, \dots\right),$$

$$x^n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots\right),$$

$$\vdots$$

Di mana $x_k^{(m)}$ merupakan sub barisan dengan m merupakan indeks sub barisan yang ada di ℓ^p.

Pertama, akan dibuktikan bahwa $x_k^{(m)}$ konvergen ke suatu x_k.

Berdasarkan Definisi 2.8 maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq n_\epsilon$ berlaku

$$\|x_m - x_n\|_p < \epsilon.$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p<\epsilon^p.$$

$$\left|x_1^{(m)}-x_1^{(n)}\right|^p+\left|x_2^{(m)}-x_2^{(n)}\right|^p+\left|x_3^{(m)}-x_3^{(n)}\right|^p+\cdots<\epsilon^p$$

$$\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p<\epsilon^p.$$

$$\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|<\epsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa barisan $\left(x_k^{(m)}\right)$ merupakan Barisan Cauchy.

Selanjutnya dari Definisi 2.1 maka $\left|x_1^{(m)}\right|+\left|x_2^{(m)}\right|+\left|x_3^{(m)}\right|+\cdots$ konvergen,

Sehingga berdasarkan Definisi 2.8 dapat ditulis

$$x_1^{(m)}\to x_1,\quad x_2^{(m)}\to x_2,\quad x_3^{(m)}\to x_3$$

atau

$$x_k^{(m)}\to x_k.$$

Dengan mendefinisikan $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ maka akan ditunjukkan $x\in\ell^p$ dan $x_m\to x$.

Kedua, akan dibuktikan bahwa $x_k\in\ell^p$.

Berdasarkan Definisi 2.9 maka untuk setiap $\epsilon>0$ terdapat $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m,n\geq N$ berlaku $\|x_m-x_n\|_p<\epsilon.$ Misalkan $K\in\mathbb{N}$ dan $1\leq p<\infty$ maka

$$\left(\sum_{k=1}^{K}\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon<\infty.$$

$$\left(\sum_{k=1}^{K}\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$

$$\sum_{k=1}^{K}\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p<\epsilon^p,\quad K=1,2,3,\ldots$$

Kemudian, misalkan $n\to\infty$. Sehingga untuk setiap $m>n_\epsilon$ dan $K\in\mathbb{N}$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{K}\left|x_k^{(m)}-x_k\right|^p<\epsilon^p.$$

Karena K merupakan sebarang bilangan asli, maka misalkan $K\to\infty$ maka untuk setiap $m>n_\epsilon$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}-x_k\right|^p<\epsilon^p.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $x_m-x=\left(x_k^{(m)}-x_k\right)\in\ell^p$.

Karena $x_m\in\ell^p$ maka diperoleh

$$x=x_m+(x_m-x)\in\ell^p.$$

Karena $x_k^{(m)}-x_k=(x_k-x)\in\ell^p$. Sebelumnya tadi diambil sebarang $x_k\in\ell^p$ maka $x=(x-x_k)+x_k$, sehingga $x\in\ell^p$.

Ketiga, akan dibuktikan bahwa $x_m\to x$.

Ambil sebarang $x=(x_1,x_2,x_3,\ldots)$

Berdasarkan Definisi 2.9 maka untuk setiap $\epsilon>0$ terdapat $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m,n\geq n_\epsilon$ berlaku $\|x_m-x_n\|_p<\epsilon$ dengan $1\leq p<\infty$.

Berdasarkan poin pertama, yaitu $x_k^{(m)}$ konvergen ke suatu $x_k\in\ell^p$

$$\|x_m-x_n\|_p=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$

Diberikan $n \to \infty$ diperoleh

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(m)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

$$\|x_m - x\|_p < \epsilon.$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\|x_m - x\|_p < \epsilon$ sehingga $x_m \to x$. Karena barisan (x_m) adalah Barisan Cauchy pada ℓ^p yang konvergen ke $x \in \ell^p$ maka ℓ^p lengkap jadi terbukti bahwa ℓ^p merupakan Ruang Banach. Dengan demikian Teorema 2.9. terbukti.

2.1.5 Ruang Morrey Diskrit

Sebelum membahas tentang Ruang Morrey Diskrit, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai Ruang Morrey.

1. **Ruang Morrey**

Definisi 2.12. (Rukmana, 2019)

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p(\mathbb{R}^d) = \mathcal{M}_q^p$ dengan norma yang didefinisikan sebagai

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a \in \mathbb{R}^d, r > 0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Dengan $B(a,r)$ menotasikan sebagai bola buka di $\mathbb{R}^d$ dan berpusat di $a \in \mathbb{R}^d$ dengan jari-jari $r > 0$, dan $|B(a,r)|$ merupakan ukuran Lebesgue dari bola buka B di $\mathbb{R}^d$ dan supremum diambil atas semua bola B di $\mathbb{R}^d$. Jika $p = q$, maka $\|f\|_{\mathcal{M}_p^p} = \|f\|_{L^p}$ sehingga $\mathcal{M}_p^p = L^p$. Dari sini Ruang Morrey dipandang sebagai bentuk perumuman dari Ruang Lebesgue.

Contoh:

Fungsi konstan tak nol $f(x) = c$ merupakan bukan anggota Ruang Morrey karena

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^p} = \sup_{a\in\mathbb{R}^d, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(a,r)} |c|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^d, r>0} |B(a,r)|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |c||B(a,r)|^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{a\in\mathbb{R}^d, r>0} |c||B(a,r)|^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \infty.$$

2. Ruang Morrey Diskrit

Definisi 2.13. (Gunawan dkk., 2018)

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$, Ruang Morrey Diskrit dapat dinotasikan dengan $\ell_q^p = \ell_q^p(\mathbb{Z})$ merupakan himpunan semua barisan $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. Dengan x merupakan bilangan yang termuat di $\mathbb{F}$ dan $\mathbb{F}$ merupakan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ sedemikian sehingga

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Misalkan $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega \coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\}$, dengan $S_{m,N}$ didefinisikan sebagai barisan yang memenuhi $\{m-N, \dots, m, \dots, m+N\}$ dan $\left|S_{m,N}\right|$ merupakan kardinalitas himpunan sehingga $\left|S_{m,N}\right| = 2N+1$. Supremum diambil atas semua himpunan barisan di $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$. Jika $p = q$, maka $\|x\|_{\ell_p^p} = \|x\|_{\ell^p}$ sehingga $\ell_p^p = \ell^p$. Dari sini Ruang Morrey Diskrit dipandang sebagai bentuk perumuman dari ruang ℓ^p.

2.2 Kajian Integrasi Topik Penelitian dengan Nilai-Nilai dalam Islam

Pada kajian integrasi ini, tujuan utamanya adalah mencari petunjuk dari Al-Qur'an dan Hadits yang berkaitan dengan topik yang dibahas yaitu kelengkapan atau kesempurnaan. Dalam surat Al-Maidah ayat 3 (Al-Qur'an, 2018) yang artinya:

"*Pada hari ini telah aku sempurnakan agamamu untukmu, dan telah Aku cukupkan nikmat-Ku bagimu, dan telah Aku ridhoi Islam sebagai agamamu*".

Ayat ini menunjukkan bahwa Allah telah menyempurnakan agama Islam dan memberikan kelengkapan dalam bentuk hukum dan ajaran-Nya. Ayat ini muncul kepada Rasulullah *shallallahu'alaihi wa sallam* ketika hari Jumat sore sebagai ayat terakhir yang diturunkan pada waktu ba'da ashar di Padang Arafah ketika Rasulullah melaksanakan haji wada'. Ketika ayat ini turun, umar menangis karena menyadari bahwa tugas Rasulullah telah selesai dan telah dekat masanya beliau dipanggil oleh Allah Subhanahu wa Ta'ala. Hal ini seperti Hadist yang diriwayatkan dari Umar bin Khatab rodhiyallahu'anhu yang diriwayatkan oleh Imam Bukhori dan Muslim melalui jalan Thoriq bin Syihab dalam kitab keduanya yaitu:

"*Seorang laki-laki dari kalangan yahudi datang kepada Umar. Kemudian, dia berkata,"Wahai Amirul Mu'minin, ada suatu ayat dalam kitab kalian dan kalian membacanya, sekiranya ayat ini turun kepada kami orang orang yahudi akan kami jadikan hari di manaayat itu turun sebagai hari ied* ".

Sehingga Surah Al-Maidah ayat 3 menjawab atas pertanyaan tersebut. Makna dari kalimat *"Telah aku sempurnakan agamamu untukmu"* yaitu menjelaskan bahwa ajaran Islam telah Allah sempurnakan sehingga Islam disebut sebagai agama yang paling sempurna dibandingkan agama yang lain. Dalam Islam, konsep kesempurnaan atau kelengkapan ajaran Islam adalah agama terakhir dan ajaran yang paling lengkap dari Allah. Namun, keyakinan ini tidak mengurangi hak kebebasan beragama pada setiap individu atau menghakimi umat-umat agama sebelumnya. Setiap individu memiliki kebebasan untuk memilih agamanya masing masing.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada subbab ini akan dijelaskan tentang apa saja yang ingin dibuktikan mengenai topik sifat kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit dengan menggunakan teori pendukung yang dijelaskan di subbab sebelumnya.

Definisi 2.3.1. (Gunawan dkk., 2018)

Ruang Morrey Diskrit merupakan Ruang Morrey dengan analog Diskrit pada fungsi Diskrit. Misalkan $m \in \mathbb{Z}, N \in \omega \coloneqq \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $S_{m,N} \coloneqq \{m - N, \ldots, m, \ldots, m + N\}$. Maka $\left|S_{m,N}\right| = 2N + 1$ merupakan kardinalitas dari $S_{m,N}$ dan misalkan $\mathbb{F}$ merupakan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Dengan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey Diskrit dapat dinotasikan dengan $\ell_q^p = \ell_q^p(\mathbb{Z})$ merupakan himpunan semua barisan $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ mengambil nilai di $\mathbb{F}$ sedemikian sehingga

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Proposisi, lemma, dan teorema yang akan dibuktikan sebagai berikut.

Proposisi 2.3.2. (Gunawan dkk., 2018)

Misalkan ℓ_q^p himpunan yang berisi barisan dan misalkan $x \in \ell_q^p$ dengan $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definisikan

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

untuk $1 \leq p \leq q < \infty$. $\left(\ell_q^p, \|\cdot\|_{\ell_q^p}\right)$ merupakan Ruang Banach.

Lemma 2.3.3. (Gunawan dkk., 2018)

Untuk setiap $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty, m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$. Diperoleh

$$\left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\frac{1}{|S_{m,N}|}\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

di mana $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ untuk setiap $k \in S_{m,N}$.

Proposisi 2.3.4. (Gunawan dkk., 2018)

Untuk setiap $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q < \infty$, terdapat $\ell_q^{p_2} \subseteq \ell_q^{p_1}$ dengan $\|x\|_{\ell_q^{p_1}} \leq \|x\|_{\ell_q^{p_2}}$ untuk setiap $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_q^{p_2}$.

Teorema 2.3.5. (Hao dkk., 2023)

Misalkan p dan q merupakan Bilangan Riil yang memenuhi $1 < p \leq q < \frac{1}{\varphi}$ dan $0 < \varphi < 1$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jika $(x_j) \in \ell_q^p$ dan $(y_j) \in \ell_q^p$ maka

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\sum_{j\in S_{m,N}}|x_jy_j| \leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{m\in S_{m,N}}|y_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dengan diberikan supremum atas $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$ maka

$$\|xy\|_{\ell_q^p} \leq \|x\|_{\ell_q^p}\|y\|_{\ell_q^p}.$$

Teorema 2.3.6. (Hao dkk., 2023)

Misalkan p dan q merupakan Bilangan Riil yang memenuhi $1 < p \leq q < \frac{1}{\varphi}$ dan $0 < \varphi < 1$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jika $x = (x_j) \in \ell_q^p$ dan $y = (y_j) \in \ell_q^p$,

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j\in S_{m,N}}\left|x_j+y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j\in S_{m,N}}\left|x_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j\in S_{m,N}}\left|y_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dengan diberikan supremum atas $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$ maka

$$\|x+y\|_{\ell_q^p} \leq \|x\|_{\ell_q^p}+\|y\|_{\ell_q^p}.$$

Proposisi 2.3.7. (Hao dkk., 2023)

Misalkan ℓ_q^p himpunan yang berisi barisan dan misalkan $x \in \ell_q^p$ dengan $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definisikan

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega}\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

untuk $1 \leq p \leq q < \frac{1}{\varphi}$ dan misalkan $0 < \varphi < 1$. $\left(\ell_q^p, \|\cdot\|_{\ell_q^p}\right)$ merupakan Ruang Banach.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif yang didasarkan pada studi pustaka. Pendekatan kualitatif ini berdasarkan pada analisis literatur. Dalam proses ini, akan dilakukan pengumpulan,pembacaan, analisis, dan pengelolaan data dari berbagai sumber pustaka. Objek penelitian ini adalah Ruang Morrey Diskrit yang digunakan untuk menguji sifat kelengkapannya.

3.2 Pra Penelitian

Penulis melakukan pra penelitian yang melibatkan pengumpulan beberapa rujukan atau penelitian terdahulu, yaitu yang berhubungan dengan penelitian yang akan digunakan. Penulis menggunakan rujukan utama dari jurnal Gunawan dkk. (2018) dan objek penelitiannya yaitu Ruang Morrey Diskrit.

3.3 Tahapan Penelitian

Ruang Morrey Diskrit merupakan Ruang Morrey dengan analog Diskrit pada fungsi Diskrit dan salah satu sifat penting dalam Ruang Morrey Diskrit adalah sifat kelengkapan. Maka dari itu, untuk membuktikan sifat kelengkapannya pada Ruang Morrey, penulis melakukan beberapa tahapan. Antara lain:

1. Mengidentifikasi Ruang Morrey Diskrit sebagai objek penelitian.
2. Mengumpulkan dan menganalisis teori pendukung yang berhubungan dengan penelitian tersebut.

3. Membuktikan Ruang Morrey Diskrit merupakan Ruang Bernorma.
4. Membuktikan Ruang Morrey Diskrit merupakan Ruang Bernorma yang memuat Barisan Cauchy dan setiap Barisan Cauchynya konvergen di dalamnya.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada Bab ini akan dijelaskan tentang Definisi, Proposisi, Lemma dan Teorema yang berkaitan dengan topik penelitian ini.

4.1 Ruang Morrey Diskrit.

Penjelasan tentang Ruang Morrey Diskrit berawal dengan Definisi sebagai berikut.

Definisi 4.1.

Misalkan $m \in \mathbb{Z}, N \in \omega := \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $S_{m,N} := \{m-N, \dots, m, \dots, m+N\}$. Maka $|S_{m,N}| = 2N+1$ merupakan kardinalitas dari $S_{m,N}$ dan misalkan $\mathbb{F}$ merupakan $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Dengan $1 \leq p \leq q < \infty$. Ruang Morrey Diskrit dapat dinotasikan dengan ℓ_q^p merupakan himpunan semua barisan $x = (x_k)$ di $\mathbb{F}$ sedemikian sehingga fungsi

$$\|x\|_{\ell_q^p} := \sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

(Gunawan dkk., 2018).

ℓ_q^p merupakan Ruang Vektor yang disebut sebagai Ruang Morrey Diskrit. Ketika $p = q$, diperoleh $\ell_p^p = \ell^p$. Secara umum $p < q$, ℓ_q^p merupakan ruang yang lebih luas dibandingkan ruang ℓ^p.

4.2 Sifat Kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit.

Proposisi 4.2. (Gunawan dkk., 2018)

Misalkan ℓ_q^p himpunan yang berisi barisan dan misalkan $x \in \ell_q^p$ dengan $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definisikan

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

untuk $1 \leq p \leq q < \infty$, $\left(\ell_q^p, \|\cdot\|_{\ell_q^p}\right)$ merupakan Ruang Banach.

Bukti. Akan ditunjukkan $\left(\ell_q^p, \|\cdot\|_{\ell_q^p}\right)$ merupakan Ruang Bernorma.

1. Akan dibuktikan bahwa $\|x\|_{\ell_q^p} \geq 0$, untuk setiap $x \in \ell_q^p$.

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak maka

$$|x_k| \geq 0.$$

$$|x_k|^p \geq 0.$$

$$\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \geq 0.$$

$$\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

Karena $|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ merupakan kardinalitas himpunan, yang artinya banyak anggota himpunannya itu tidak mungkin bernilai negatif maka

$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \geq 0$, akibatnya

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

Berdasarkan Definisi 4.1. maka

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega}\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

$$\|\mathrm{x}\|_{\ell_q^p} \geq 0.$$

2. Akan dibuktikan bahwa $\|\mathrm{x}\|_{\ell_q^p} = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

(⇒) Jika $\|x\|_{\mathrm{p}} = 0$ maka $x = 0$.

$$\|x\|_{\ell_{\mathrm{q}}^{\mathrm{p}}} = 0.$$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega}\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Karena $\left|S_{m,N}\right| = 2N + 1 > 0,$ maka $\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \neq 0,$ sehingga $\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ haruslah bernilai nol sehingga

$$\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

$$\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p = 0^p.$$

$$\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p = 0.$$

Karena $|x_k| \geq 0$ dan $\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p = 0$ maka x_k haruslah bernilai nol untuk setiap $k \in S_{m,N}$ sehingga

$$|x_k|^p = 0.$$

$$|x_k| = 0.$$

$$x_k = 0.$$

$$x = 0.$$

($\Leftarrow$) Jika $x = 0$ maka $\|x\|_{\ell_q^p} = 0$.

Karena $x = 0$, maka $x_k = 0$ untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$. Sehingga

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |0|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Karena semua suku-sukunya adalah nol, maka hasil penjumlahannya juga nol.

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} (|0|^p + |0|^p + |0|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} (0)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= 0.$$

Sehingga $\|x\|_{\ell_q^p} = 0$.

3. Akan dibuktikan $\|\alpha x\|_{\ell_q^p} = |\alpha| \|x\|_{\ell_q^p}$, untuk setiap $x \in \ell_q^p$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{F}$,

$$\|\alpha x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |\alpha x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |\alpha|^P |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|\alpha|^P \sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= |\alpha| \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= |\alpha| \|x\|_p.$$

4. Akan dibuktikan bahwa $\|x_k + y_k\|_{\ell_q^p} \leq \|x_k\|_{\ell_q^p} + \|y_k\|_{\ell_q^p}$.

   Misalkan $x, y \in \ell_q^p$ untuk setiap $m \in \mathbb{Z},\ N \in \omega$. Berdasarkan Teorema 2.5 yaitu dengan ketaksamaan Minkowski maka didapatkan

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{j\in S_{m,N}} \left|x_j + y_j\right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

   Berdasarkan Definisi 4.1 maka

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{j\in S_{m,N}} \left|x_j + y_j\right|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

   Maka didapatkan $\|x + y\|_{\ell_q^p} \leq \|x\|_{\ell_q^p} + \|y\|_{\ell_q^p}$.

Karena ruang ℓ_q^p memenuhi kondisi fungsi norma, maka terbukti bahwa ruang ℓ_q^p merupakan Ruang Bernorma. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ℓ_q^p adalah Ruang Banach. Untuk membuktikan ℓ_q^p merupakan Ruang Banach, maka akan dibuktikan bahwa Barisan Cauchy di ℓ_q^p adalah konvergen di dalamnya.

Misalkan $(x^{(i)})$ Barisan Cauchy di ℓ_q^p , artinya setiap suku $x^{(i)}$ untuk $i \in \mathbb{N}$ adalah anggota dari ℓ_q^p. Karena ℓ_q^p adalah ruang barisan maka $\left(x^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ adalah barisan atas lapangan $\mathbb{F}$. Misalkan

$x^{(i)} = \left(x_k^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\dots, x_{-1}^{(i)}, x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \dots, x_{n_\epsilon}^{(i)}, \dots, x_i^{(i)}, x_j^{(i)}, \dots\right)$ di mana

$$x^{(1)} = \left(\dots, x_{-2}^{(1)}, x_{-1}^{(1)}, x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)} \dots\right),$$

$$x^{(2)} = \left(\dots, x_{-2}^{(2)}, x_{-1}^{(2)}, x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \dots\right),$$

$$\vdots$$

$$x^{(n_\epsilon)} = \left(\dots, x_{-2}^{(n_\epsilon)}, x_{-1}^{(n_\epsilon)}, x_0^{(n_\epsilon)}, x_1^{(n_\epsilon)}, x_2^{(n_\epsilon)} \dots\right),$$

$$\vdots$$

$$x^{(i)} = \left(\dots, x_{-2}^{(i)}, x_{-1}^{(i)}, x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \dots\right),$$

$$x^{(j)} = \left(\dots, x_{-2}^{(j)}, x_{-1}^{(j)}, x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, x_2^{(j)} \dots\right),$$

$$\vdots$$

Pertama, akan dibuktikan bahwa $(x_k^{(i)})$ konvergen ke suatu x_k.

Berdasarkan Definisi 2.9 yaitu Definisi barisan Cauchy pada norma, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_\epsilon \in \omega$ sedemikian sehingga untuk setiap $i, j \geq n_\epsilon$ berlaku

$$\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_{\ell_q^p} < \epsilon.$$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega}\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$

Diberikan $M\subset\mathbb{R}$ dengan $M\neq\emptyset$. $s=\sup M$ jika untuk setiap $\epsilon>0$, terdapat $n_\epsilon\in M$ sehingga $s-\epsilon<n_\epsilon$. Akibatnya jika $i,j\geq n_\epsilon$ maka i dan j bukanlah batas atas terkecil sehingga

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$

Karena $N=\mathbb{N}$ memenuhi Definisi 2.9, yaitu Definisi barisan Cauchy pada norma. Maka selanjutnya akan ditunjukkan ketika kasus $N=0$, karena $N=0$ tidak ada di Definisi.

Pilih $N=0$ maka $\left|S_{m,N}\right|=2(0)+1=1$. Sehingga diperoleh

$$|1|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$

$$\left(\sum_{k\in S_{m,N}}\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\epsilon.$$

$$\sum_{k\in S_{m,N}}\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|^p<\epsilon^p.$$

$$\left(\ldots+\left|x_{-1}^{(i)}-x_{-1}^{(j)}\right|^p+\left|x_0^{(i)}-x_0^{(j)}\right|^p+\left|x_1^{(i)}-x_1^{(j)}\right|^p+\cdots\right)<\epsilon^p.$$

$$\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|^p<\epsilon^p.$$

$$\left|x_k^{(i)}-x_k^{(j)}\right|<\epsilon.$$

untuk setiap $i,j\geq n_\epsilon$ diperoleh

$$\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| < \epsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa barisan $\left(x_k^{(i)}\right)$ merupakan Barisan Cauchy.

Sehingga $(x_k^{(i)})$ terbukti merupakan Barisan Cauchy di ℓ_q^p , artinya setiap suku $x_k^{(i)}$ untuk $i \in \mathbb{N}$ adalah anggota dari ℓ_q^p. Karena ℓ_q^p adalah ruang barisan maka $\left(x_k^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ adalah barisan atas lapangan $\mathbb{F}$, karena $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ lengkap maka barisan tersebut konvergen.

Sehingga berdasarkan Definisi 2.9 dapat ditulis

$$x_1^{(i)} \to x_1, \quad x_2^{(i)} \to x_2, \quad x_3^{(i)} \to x_3$$

atau

$$x_k^{(i)} \to x_k.$$

Kedua, akan dibuktikan bahwa $x \in \ell_q^p$.

Sebelumnnya telah terbukti $x_k^{(i)}$ merupakan barisan Cauchy atas lapangan $\mathbb{F}$. Selanjutnya didefinisikan $x \coloneqq (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ di mana

$$x_k \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Berdasarkan Definisi 2.9 maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_\epsilon \in \omega$ sedemikian sehingga untuk setiap $i, j \geq n_\epsilon$ berlaku $\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_{\ell_q^p} < \epsilon$.

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}}^{\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Kemudian, misalkan $j \to \infty$ maka

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}}^{\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

untuk $i \geq n_\epsilon$. Karena $x^{(i)} \in \ell_q^p$ dan $\left(x^{(i)} - x\right) \in \ell_q^p$ sehingga $x = x^{(i)} - (x^{(i)} - x)$ di ℓ_q^p. Sehingga terbukti $x \in \ell_q^p$. Selanjutnya

Ketiga, akan dibuktikan bahwa $x^{(i)} \to x$.

Ambil sebarang $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$

Berdasarkan Definisi 2.9 maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_\epsilon \in \omega$ sedemikian sehingga untuk setiap $i, j \geq n_\epsilon$ berlaku $\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_{\ell_q^p} < \epsilon$.

$$\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Diberikan $j \to \infty$ diperoleh

$$\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

$$\left\|x^{(i)} - x\right\|_{\ell_q^p} < \epsilon.$$

Hal ini menunjukan bahwa $\left\|x^{(i)} - x\right\|_{\ell_q^p} < \epsilon$ sehingga $x^{(i)} \to x$. Karena barisan $x^{(i)}$ adalah Barisan Cauchy pada ℓ_q^p yang konvergen ke $x \in \ell_q^p$ maka ℓ_q^p lengkap jadi terbukti bahwa ℓ^p merupakan Ruang Banach. Dengan demikian Proposisi 4.2 terbukti.

Lemma 4.3. (Gunawan dkk., 2018)

Untuk setiap $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty, m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$. Diperoleh

$$\left(\frac{1}{\left|S_{m,N}\right|} \sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\frac{1}{\left|S_{m,N}\right|} \sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}},$$

di mana $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{F}$ untuk setiap $k \in S_{m,N}$.

Bukti. Misalkan $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty, m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$.

Ketika $p_1 = q$ maka $\ell_q^{p_1} = \ell_{p_1}^{p_1} = \ell^{p_1}$. Sehingga diperoleh

$$\|x\|_{\ell^{p_1}} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{0} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

$$= (1)\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

$$= \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

Jika $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^{p_2}$ maka dengan ketaksamaan Holder sehingga

$$\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1\frac{p_2}{p_1}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} 1\right)^{1-\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

$$= \left(\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} 1\right)^{1-\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

$$= \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_2}\right)^{\frac{p_1}{p_2}\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} 1\right)^{\left(1-\frac{p_1}{p_2}\right)\frac{1}{p_1}}.$$

$$= \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} 1 \right)^{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{p_1}{p_2} \frac{1}{p_1} \right)}$$

$$= \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} 1 \right)^{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)} .$$

$$= \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left| S_{m,N} \right|^{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)} .$$

$$= \left| S_{m,N} \right|^{\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \right)} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} . \tag{15}$$

$$= \left| S_{m,N} \right|^{\frac{1}{p_1}} \frac{1}{\left| S_{m,N} \right|^{\frac{1}{p_2}}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} .$$

Selanjutnya, hal ini berakibat

$$\left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left| S_{m,N} \right|^{\frac{1}{p_1}} \frac{1}{\left| S_{m,N} \right|^{\frac{1}{p_2}}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} .$$

$$\frac{1}{\left| S_{m,N} \right|^{\frac{1}{p_1}}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \frac{1}{\left| S_{m,N} \right|^{\frac{1}{p_2}}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} .$$

$$\left(\frac{1}{\left| S_{m,N} \right|} \sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \leq \left(\frac{1}{\left| S_{m,N} \right|} \sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} .$$

Dengan demikian lemma 4.3 terbukti.

Proposisi 4.4. (Gunawan dkk., 2018)

Untuk setiap $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q < \infty$, terdapat $\ell_q^{p_2} \subseteq \ell_q^{p_1}$ dengan $\|x\|_{\ell_q^{p_1}} \leq \|x\|_{\ell_q^{p_2}}$ untuk setiap $x = (x_k) \in \ell_q^{p_2}$.

Bukti. Jika $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell_q^{p_2}$ maka

$$\|x\|\ell_q^{p_1} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}. \tag{16}$$

Dengan menggunakan Lemma 4.4, apabila dijabarkan diperoleh

Selanjutnya, substitusikan persamaan (15) ke (16), sehingga diperoleh

$$\|x\|_{\ell_q^{p_1}} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\leq \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}} \left(|S_{m,N}|^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \right).$$

$$\leq \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

$$\leq \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_2}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} = \|x\|\ell_q^{p_2}.$$

Sehingga didapatkan $\|x\|_{\ell_q^{p_1}} \leq \|x\|_{\ell_q^{p_2}}$, dengan demikian proposisi 4.4 terbukti.

Teorema 4.5.

Misalkan p dan q merupakan Bilangan Riil yang memenuhi $1 < p \le q < \frac{1}{\varphi}$ dan $0 < \varphi < 1$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jika $(x_j) \in \ell_q^p$ dan $(y_j) \in \ell_q^p$ maka

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j \in S_{m,N}} |x_j y_j| \le |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{m \in S_{m,N}} |y_m|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dengan diberikan supremum atas $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$ maka

$$\|xy\|_{\ell_q^p} \le \|x\|_{\ell_q^p} \|y\|_{\ell_q^p}.$$

Bukti. Misalkan $p > 1$ dan definisikan q sebagai berikut

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{17}$$

p dan q selanjutnya disebut sebagai konjugat eksponen.

Dari persaman (17) diperoleh

$$1 = \frac{p+q}{pq}.$$

$$pq = p + q. \tag{18}$$

$$1 = (p-1)(q-1).$$

Sehingga $\frac{1}{(p-1)} = q - 1$, maka

$u = t^{p-1}$ mengakibatkan $t = u^{q-1}$.

Misalkan α dan β adalah sebarang bilangan positif.

Akan ditunjukan bahwa $\alpha\beta \le \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q$ untuk setiap $\alpha, \beta \ge 0$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Selanjutnya, Jika $\alpha = 0$ atau $\beta = 0$ maka ketaksamaan jelas berlaku.

Perhatikan bahwa

$$\alpha\beta \le \int_0^\alpha t^{p-1}\,dt + \int_0^\beta u^{q-1}du \le \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{q}\beta^q. \tag{19}$$

Misalkan $(\tilde{x}_j)$ dan $(\tilde{y}_j)$ yang memenuhi

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j\in S_{m,N}}|\tilde{x}_j|^p\right) = 1 \qquad \boldsymbol{|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{j\in S_{m,N}}|\tilde{y}_j|^p\right) = 1}. \tag{20}$$

Selanjutnya, misalkan $\alpha = |\tilde{x}_j|$ dan $\beta = |\tilde{y}_j|$. Dari ketaksamaan (19) diperoleh ketaksamaan

$$|\tilde{x}_j\tilde{y}_j| \le \frac{1}{p}|\tilde{x}_j|^p + \frac{1}{q}|\tilde{y}_j|^q. \tag{21}$$

Jika dijumlahkan terhadap j dan menggunakan persamaan (17) dan ketaksamaan (19), diperoleh

$$\sum_{j\in S_{m,N}}|\tilde{x}_j\tilde{y}_j| \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1 \tag{22}$$

kemudian ambil sebarang taknol $x = (x_j) \in \ell_q^p$ dan $y = (y_j) \in \ell_q^p$ dan berurut

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \qquad \tilde{y}_j = \frac{y_j}{|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{m\in S_{m,N}}|y_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}}. \tag{23}$$

Misalkan

$$A = |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad B = |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{m\in S_{m,N}}|y_m|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sehingga diperoleh

$$\alpha = \tilde{x}_j = \frac{x_j}{A}, \qquad\qquad \beta = \tilde{y}_j = \frac{y_j}{B}, \tag{24}$$

yang memenuhi persamaan (20), kemudian substitusikan persamaan (24) ke persamaan (22)

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} \left|\frac{x_j}{A}\frac{y_j}{B}\right| \leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} \frac{\left|\tilde{x}_j\right|^p}{p} + \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} \frac{\left|\tilde{y}_j\right|^q}{q}.$$

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{AB}\right) \sum_{j\in S_{m,N}} \left|x_j y_j\right|$$

$$\leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p}\right) \sum_{j\in S_{m,N}} \frac{\left|x_j\right|^p}{A^p} + \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{j\in S_{m,N}} \frac{\left|y_j\right|^q}{B^q}.$$

$$\leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{p}\right) \sum_{j\in S_{m,N}} \frac{\left|x_j\right|^p}{A^p} + \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{q}\right) \sum_{j\in S_{m,N}} \frac{\left|y_j\right|^q}{B^q}.$$

$$\leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{1}{pA^p} \sum_{j\in S_{m,N}} \left|x_j\right|^p + \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \frac{1}{qB^q} \sum_{j\in S_{m,N}} \left|y_j\right|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Selanjutnya, ketaksaman tersebut di sederhanakan sehingga di dapatkan:

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{AB}\right) \sum_{j\in S_{m,N}} \left|x_j y_j\right| \leq 1.$$

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} \left|x_j y_j\right| \leq AB.$$

Substitusikan AB yang sudah dimisalkan tadi, sehingga diperoleh

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} \left|x_j y_j\right| \leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dengan diberikan supremum atas $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$ maka

$$\|xy\|_{\ell_q^p} \leq \|x\|_{\ell_q^p} \|y\|_{\ell_q^p}.$$

Dengan demikian Teorema 4.5 terbukti.

Teorema 4.6.

Misalkan p dan q merupakan Bilangan Riil yang memenuhi $1 < p \leq q < \frac{1}{\varphi}$ dan $0 < \varphi < 1$ sehingga $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jika $x = (x_j) \in \ell_q^p$ dan $y = (y_j) \in \ell_q^p$,

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j \in S_{m,N}} |x_j + y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j \in S_{m,N}} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{j \in S_{m,N}} |y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dengan diberikan supremum atas $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$ maka

$$\|x + y\|_{\ell_q^p} \leq \|x\|_{\ell_q^p} + \|y\|_{\ell_q^p}.$$

Bukti. Misalkan $p > 1$ dan agar mempermudah penulisan misalkan $x_j + y_j = z_j$. Dari ketaksamaan segitiga untuk Bilangan Riil diperoleh

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |z_j|^p = |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |x_j + y_j| |z_j|^{p-1} \leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} (|x_j| + |y_j|) |z_j|^{p-1}$$

$$\leq \left(|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |x_j| |z_j|^{p-1} + |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} |y_j| |z_j|^{p-1} \right).$$

dengan menjumlahkan j dari 1 sampai supremum atas $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$ maka diperoleh

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j \in S_{m,N}} |z_j|^p \leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j \in S_{m,N}} |x_j| |z_j|^{p-1} + |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j \in S_{m,N}} |y_j| |z_j|^{p-1}. \tag{25}$$

Untuk penjumlahan pertama di ruas kanan dijabarkan menggunakan Teorema 4.5 sehingga diperoleh

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j \in S_{m,N}} |x_j| |z_j|^{p-1} \leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{m \in S_{m,N}} |z_m|^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}}. \tag{26}$$

Untuk penjumlahan kedua di ruas kanan dijabarkan menggunakan Teorema 4.5 diperoleh

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} |y_j||z_j|^{p-1} \leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (27)$$

Dari persamaan (18) diperoleh

$$pq = p + q.$$

$$pq - q = p.$$

$$q(p-1) = p.$$

Sehingga diperoleh $(p-1)q = p$, dan dapat ditulis

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} |x_j||z_j|^{p-1} \leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^{p}\right]^{\frac{1}{q}}, \qquad (28)$$

dan

$$|S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} |y_j||z_j|^{p-1} \leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^{p}\right]^{\frac{1}{q}}. \qquad (29)$$

Selanjutnya, substitusikan ketaksamaan (28) dan ketaksamaan (29) ke ketaksamaan (25)

$$\begin{aligned} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} |z_j|^p \\ &\leq |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^{p}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &+ |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^{p}\right]^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan sifat distributif diperoleh

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \sum_{j\in S_{m,N}} \left|z_j\right|^p$$

$$\leq \left\{\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}} \left|y_k\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Selanjutnya yaitu membagi kedua ruas dengan $\left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^p\right]^{\frac{1}{q}}$,

$$\frac{\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{j\in S_{m,N}} \left|z_j\right|^p\right]^1}{\left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^p\right]^{\frac{1}{q}}}$$

$$\leq \frac{\left\{\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^p\right]^{\frac{1}{q}}}{\left[\sum_{m\in S_{m,N}} |z_m|^p\right]^{\frac{1}{q}}}.$$

Sehingga apabila disederhanakan

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{j\in S_{m,N}} \left|z_j\right|^p\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

dari persamaan (17) diperoleh $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ sehingga bisa diubah pangkatnya menjadi

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{j\in S_{m,N}} \left|z_j\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{30}$$

Sebelumnya, diketahui $z_j = x_j + y_j$ dan $x_j, y_j \in \ell_q^p$. Misalkan $N \to \infty$, karena $x = (x_j), y = (y_j) \in \ell_q^p$, maka ruas kanan ketaksamaan (30) konvergen.

Sehingga ruas kiri juga konvergen dan berlaku

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{j\in S_{m,N}}\left|x_j+y_j\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left[\sum_{k\in S_{m,N}}|y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Dengan diberikan supremum atas $m \in \mathbb{Z}$ dan $N \in \omega$ maka

$$\|x+y\|_{\ell_q^p} \leq \|x\|_{\ell_q^p} + \|y\|_{\ell_q^p}.$$

Dengan demikian Teorema 4.6 terbukti.

Proposisi 4.7. (Hao dkk., 2023)

Misalkan ℓ_q^p himpunan yang berisi barisan dan misalkan $x \in \ell_q^p$ dengan

$x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ definisikan

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega}\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

untuk $1 \leq p \leq q < \frac{1}{\varphi}$ dan misalkan $0 < \varphi < 1$. $\left(\ell_q^p, \|\cdot\|_{\ell_q^p}\right)$ merupakan Ruang Banach.

Bukti. Akan ditunjukkan $\left(\ell_q^p, \|\cdot\|_{\ell_q^p}\right)$.

1. Akan dibuktikan bahwa $\|\mathrm{x}\|_{\ell_q^p} \geq 0$, untuk setiap $x \in \ell_q^p$.

$$\|\mathrm{x}\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega}\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Berdasarkan definisi nilai mutlak maka

$$|x_k| \geq 0.$$

$$|x_k|^p \geq 0.$$

$$\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \geq 0.$$

$$\left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

Karena $\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ merupakan kardinalitas himpunan, yang artinya banyak anggota himpunannya itu non negatif maka $\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \geq 0$, akibatnya

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

Berdasarkan Definisi 4.1 maka

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

$$\|\mathrm{x}\|_{\ell_q^p} \geq 0.$$

2. Akan dibuktikan bahwa $\|\mathrm{x}\|_{\ell_q^p} = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.

   ($\Rightarrow$) Jika $\|x\|_{\mathrm{p}} = 0$ maka $x = 0$.

$$\|x\|_{\ell_{\mathrm{q}}^{\mathrm{p}}} = 0.$$

$$\sup_{m \in \mathbb{Z}, N \in \omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

   Karena $\left|S_{m,N}\right| = 2N + 1 > 0$, maka $\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \neq 0$, maka $\left(\sum_{k \in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ haruslah bernilai nol sehingga

$$\left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

$$\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p = 0^p.$$

$$\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p = 0.$$

Karena $|x_k| \geq 0$ dan $\sum_{k\in S_{m,N}}|x_k|^p = 0$ maka x_k haruslah bernilai nol untuk setiap $k \in S_{m,N}$ sehingga

$$|x_k|^p = 0.$$

$$|x_k| = 0.$$

$$x_k = 0.$$

$$x = 0.$$

($\Leftarrow$) Jika $x = 0$ maka $\|x\|_p = 0$.

Karena $x = 0$, maka semua barisan x_k adalah nol. Sehingga

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |0|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Karena semua suku-sukunya adalah nol, maka hasil penjumlahannya nol.

$$\|x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} (|0|^p + |0|^p + |0|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} |S_{m,N}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} (0)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= 0.$$

Sehingga $\|x\|_{\ell_q^p} = 0$.

3. Akan dibuktikan $\|\alpha x\|_{\ell_q^p} = |\alpha|\|x\|_{\ell_q^p}$, untuk setiap $x \in \ell_{\mathrm{q}}^p$ diambil $\alpha \in \mathbb{F}$, sebagai skalar.

$$\|\alpha x\|_{\ell_q^p} = \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |\alpha x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |\alpha|^P |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(|\alpha|^P \sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= |\alpha| \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$= |\alpha|\|x\|_p.$$

4. Akan dibuktikan bahwa $\|x_k + y_k\|_{\ell_q^p} \leq \|x_k\|_{\ell_q^p} + \|y_k\|_{\ell_q^p}$.

Misalkan $x, y \in \ell_q^p$ untuk setiap $m \in \mathbb{Z},\ N \in \omega$. Berdasarkan Teorema 4.7 yaitu dengan ketaksamaan Minkowski maka didapatkan

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{j\in S_{m,N}} |x_j + y_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left[\sum_{k\in S_{m,N}} |y_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Maka didapatkan $\|x + y\|_{\ell_q^p} \leq \|x\|_{\ell_q^p} + \|y\|_{\ell_q^p}$.

Karena ruang ℓ_q^p memenuhi kondisi fungsi norma, maka terbukti bahwa ruang ℓ_q^p merupakan Ruang Bernorma. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ℓ_q^p adalah Ruang Banach. Untuk membuktikan ℓ_q^p merupakan Ruang Banach, maka akan dibuktikan bahwa Barisan Cauchy di ℓ_q^p adalah konvergen di dalamnya.

Misalkan $(x^{(i)})$ Barisan Cauchy di ℓ_q^p , artinya setiap suku $x^{(i)}$ untuk $i \in \mathbb{N}$ adalah anggota dari ℓ_q^p. Karena ℓ_q^p adalah ruang barisan maka $\left(x^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ adalah barisan atas lapangan $\mathbb{F}$. Misalkan

$$x^{(i)} = \left(x_k^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\dots, x_{-1}^{(i)}, x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \dots, x_{n_\epsilon}^{(i)}, \dots, x_i^{(i)}, x_i^{(i)}, \dots\right)$$

Pertama, akan dibuktikan bahwa $(x_k^{(i)})$ konvergen ke suatu x_k.

Berdasarkan Definisi 2.9 yaitu barisan Cauchy pada norma maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_\epsilon \in \omega$ sedemikian sehingga untuk setiap $i, j \geq n_\epsilon$ berlaku

$$\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_{\ell_q^p} < \epsilon.$$

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}, N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Untuk setiap $\epsilon > 0$, karena supremum maka terdapat $n_\epsilon \in M$ dengan M merupakan batas atas. Akibatnya jika $i, j \geq n_\epsilon$ maka i dan j bukanlah batas atas terkecil sehingga

$$\left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}} \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Karena $N = \mathbb{N}$ memenuhi Definisi 2.9, yaitu barisan Cauchy pada norma, maka selanjutnya akan ditunjukkan ketika kasus $N = 0$, karena $N = 0$ tidak ada di Definisi.

Pilih $N = 0$ maka $\left|S_{m,N}\right| = 2(0) + 1 = 1$. Sehingga diperoleh

$$|1|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\in S_{m,N}}\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

$$\left(\sum_{k\in S_{m,N}}\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

$$\sum_{k\in S_{m,N}}\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p < \epsilon^p.$$

$$\left(\dots + \left|x_{-1}^{(i)} - x_{-1}^{(j)}\right|^p + \left|x_0^{(i)} - x_0^{(j)}\right|^p + \left|x_1^{(i)} - x_1^{(j)}\right|^p + \cdots\right) < \epsilon.$$

$$\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p < \epsilon^p.$$

$$\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| < \epsilon.$$

untuk setiap $i, j \geq n_\epsilon$ diperoleh

$$\left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right| < \epsilon.$$

Ini menunjukkan bahwa barisan $\left(x_k^{(i)}\right)$ merupakan Barisan Cauchy.

$(x_k^{(i)})$ terbukti merupakan Barisan Cauchy di ℓ_q^p , artinya setiap suku $x_k^{(i)}$ untuk $i \in \mathbb{N}$ adalah anggota dari ℓ_q^p. Karena ℓ_q^p adalah ruang barisan maka $\left(x_k^{(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ adalah barisan atas lapangan $\mathbb{F}$, karena $\mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$ lengkap maka barisan tersebut konvergen. Sehingga berdasarkan Definisi 2.8 dapat ditulis

$$x_1^{(i)} \to x_1, \quad x_2^{(i)} \to x_2, \quad x_3^{(i)} \to x_3$$

atau

$$x_k^{(i)} \to x_k.$$

Kedua, akan dibuktikan bahwa $x \in \ell_q^p$.

Sebelumnnya telah terbukti $x_k^{(i)}$ merupakan barisan Cauchy atas lapangan $\mathbb{F}$. Selanjutnya didefinisikan $x \coloneqq (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ di mana

$$x_k \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Berdasarkan Definisi 2.9 maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $i, j \geq n_\epsilon$ berlaku $\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_{\ell_q^p} < \epsilon$.

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}}^{\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Kemudian, misalkan $j \to \infty$ maka

$$\sup_{m\in\mathbb{Z},N\in\omega} \left|S_{m,N}\right|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in S_{m,N}}^{\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

untuk $i \geq n_\epsilon$. Karena $x^{(i)} \in \ell_q^p$ dan $\left(x^{(i)} - x\right) \in \ell_q^p$ sehingga $x = x^{(i)} - (x^{(i)} - x)$ di ℓ_q^p. Sehingga terbukti $x \in \ell_q^p$. Selanjutnya

Ketiga, akan dibuktikan bahwa $x^{(i)} \to x$.

Ambil sebarang $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$

Berdasarkan Definisi 2.9 maka untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $n_\epsilon \in \omega$ sedemikian sehingga untuk setiap $i, j \geq n_\epsilon$ berlaku $\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_{\ell_q^p} < \epsilon$ dengan $1 \leq p < \infty$.

Berdasarkan poin pertama, yaitu $x_k^{(i)}$ konvergen ke suatu $x_k \in \ell^p$

$$\left\|x^{(i)} - x^{(j)}\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Diberikan $j \to \infty$ diperoleh

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(i)} - x_k \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

$$\left\| x^{(i)} - x \right\|_{\ell_q^p} < \epsilon.$$

Hal ini menunjukan bahwa $\left\| x^{(i)} - x \right\|_{\ell_q^p} < \epsilon$ sehingga $x^{(i)} \to x$. Karena barisan $x^{(i)}$ adalah Barisan Cauchy pada ℓ_q^p yang konvergen ke $x \in \ell_q^p$ maka ℓ_q^p lengkap jadi terbukti bahwa ℓ_q^p merupakan Ruang Banach. Dengan demikian Proposisi 4.7 terbukti.

4.3 Integrasi Sifat Kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit Berdasarkan Nilai-Nilai dalam Islam.

Agama Islam merupakan agama yang telah Allah sempurnakan sebagai penutup dari agama-agama sebelumnya. Sehingga pada subbab ini, akan dijelaskan tentang sifat kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit berdasarkan hikmah yang dipelajari dalam surah Al Maidah ayat tiga.

Hal ini sesuai dengan ayat yang dijelaskan di bab dua pada surah Al-Maidah ayat tiga yang artinya:

“Pada hari ini Aku telah sempurnakan bagi kalian agama kalian, dan Aku telah cukupkan nikmat-Ku atas kalian dan Aku pun telah ridha Islam menjadi agama bagi kalian”. (Al-Qur’an, 2018)

Dari ayat di atas beberapa pelajaran / hikmah yang dapat pelajari yaitu:

Pertama, ajaran Islam telah sempurna sehingga tidak butuh agama dan nabi setelah Rasulullah. Ibnu Katsir dalam tafsirnya berkata: pada hari ‘Arafah, Allah menurunkan firman-Nya: (*“Pada hari ini telah Kusempurnakan untuk kamu agamamu, dan telah Ku-cukupkan kepadamu nikmat-Ku dan telah Ku-ridhai Islam* *itu jadi agama bagimu"*) ini adalah nikmat Allah yang terbesar yang diberikan kepada umat ini yaitu dengan menyempurnakan agama mereka,sehingga mereka tidak memerlukan agama lain dan tidak pula Nabi lain selain Nabi Muhammad *shallahu`alaihi wa sallam*. Oleh karena itu Allah menjadikan Muhammad sebagai penutup para Nabi, maka tiada sesuatu yang halal kecuali apa yang dihalalkan olehnya, dan tidak pula sesuatu yang haram kecuali apa yang diharamkan olehnya sehingga tidak ada agama kecuali apa yang disyariatkannya. Semua yang dikabarkannya adalah hak, benar, dan tidak ada kebohongan, serta tidak ada pertentangan sama sekali (Abdurahman & Ishaq, 2005).

Dia menyempurnakan agama bagi mereka, maka lengkaplah nikmat itu bagi mereka (Ahmad, 2017). Begitu juga dengan Ruang Morrey Diskrit, apabila terbukti merupakan ruang Banach, maka lengkaplah Ruang Bernorma tersebut.

Kedua, dalam ibadah agama Islam tidak perlu ada penambahan dan pengurangan yang artinya, dilarang berbuat bid`ah yaitu melakukan amalan berupa ibadah yang tidak ada tuntunannya (menyimpang). Ibnu`Abbas *radhiyallahu`anhuma* berkata,

> *"Allah telah menyempurnakan Islam sehingga mereka (umat Islam) tidak perlu lagi menambahkan ajaran Rasul dan Allah telah membuat ajaran Islam itu sempurna sehingga jangan sampai dikurangi. Jika Allah telah ridha, maka janganlah ada yang murka dengan ajaran Islam."*(Ath-Thabari, 2007)

Ketika Imam Malik rahimahullah membicarakan hadits di atas, beliau juga menyinggung bahaya bid'ah. Beliau berkata,

> *"Barangsiapa yang berbuat bid'ah dalam Islam dan ia menganggap khasanah (baik), ia berarti telah mengklain bahwa Muhammad shallallahu`alaihi wa sallam telah mengkhianati risalah. Karena Allah telah berfirman (yang artinya). "Pada hari ini telah Kusempurnakan untuk kamu agamamu..." Jika disaat Rasul hidup, sesuatu bukanlah termasuk ajaran Islam, maka saat ini juga bukanlah ajaran Islam."*(Abu Ishaq Ibrahim, 2006).

Jika dalam agama Islam, bid'ah itu lebih menekankan tentang larangan penambahan amalan ibadah, maka di surah Al-Baqarah ayat 208 lebih ditekankan tentang tidak melakukan pengurangan dalam amalan ibadah. Yaitu dengan cara masuk agama Islam secara keseluruhan (kaffah) yang dijelaskan sebagai berikut:

"*Wahai orang-orang yang beriman! Masuklah ke dalam Islam secara keseluruhan (kaffah) dan janganlah kamu ikuti langkah-langkah setan. Sungguh, ia musuh yang nyata bagimu."* (Qs. Al-Baqarah ayat 208).

Ketika seseorang ingin menjadi manusia yang utuh lengkap yaitu menjadi manusia yang berislam, maka ikutilah panduan Al-Qur'an seutuhnya. Sehingga kerjakanlah apa yang diperintahkan dan tinggalkan apa yang dilarangnya secara keseluruhan (kaffah) sehingga tidak ada yang dikurangi dalam melaksanakan amalan ibadahnya dan tidak pula menambahkannya jika tidak ada tuntunannya (bid'ah). Kalau ada perintah yang tidak dilaksanakan atau larangan yang dijalankan maka manusia tersebut belum sempurna dalam keislamannya. Dari analogi surah Al-Baqarah ayat 208, dapat dipelajari terkait dengan kesempurnaan atau kelengkapan di dalam Ruang Morrey Diskrit. Pada penelitian ini telah membuktikan bahwa Ruang Morrey Diskrit yang memenuhi kondisi Ruang Bernorma dan setiap barisannya Cauchynya konvergen di dalamnya, maka Ruang Morrey Diskrit tersebut bisa dikatakan lengkap. Sebaliknya, jika ada salah satu saja kondisi yang tidak memenuhi maka tidak bisa dikatakan lengkap.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembuktian yang telah dibahas, maka Ruang Morrey Diskrit ℓ_q^p berlaku sifat kelengkapan. Hal ini telah dibuktikan bahwa Ruang Morrey Diskrit ℓ_q^p merupakan Ruang Banach.

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya, topik penelitian tentang Ruang Morrey Diskrit masih belum banyak yang bahas sehingga untuk kedepannya topik penelitian ini dapat dikembangkan lagi dengan sifat-sifatnya yang lain seperti sifat keterbatasan, sifat inklusi, syarat cukup ketaksamaan dan lain-lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurahman, B., & Ishaq, A. bin M. (2005). *Katsir I Jilid 31*. 2–9.

Abu Ishaq Ibrahim bin Musa bin Muhammad AI-Lakhmi AsySyathibi. (2006). *AL-I'tisham (Buku Induk Pembahasan Bid'ah dan Sunnah)*.

Ahmad, S. S. (2017). Tafsir Ibnu Katsir. In *Darussunnah*.

Al-Qur'an, T. P. T. (2018). *Al-Qur'an dan terjemahnya Kementerian Agama RI* (Jilid ke-1). Lajnah Pentashih Mushaf Al-Qur'an. https://pustakalajnah.kemenag.go.id/detail/135

Ath-Thabari, A. ja`far M. bin J. (2007). *Tafsir Ath-Thabari*. Pustaka Azzam.

Ekariani, S. (2017). *Teorema Titik Tetap Pada Lp Sebagai Ruang Norm-2* [Institut Teknologi Bandung]. https://digilib.itb.ac.id/gdl/view/17216/ruang-norm?rows=1646&per_page=4

Gunawan, G., & Gunawan, H. (2006). Keterbatasan Operator Riesz di Ruang Morrey. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, *3*(1), 27. https://doi.org/10.12962/j1829605X.v3i1.1394

Gunawan, H., Kikianty, E., & Schwanke, C. (2018). Discrete Morrey spaces and their inclusion properties. *Mathematische Nachrichten*, *291*(8–9), 1283–1296. https://doi.org/10.1002/mana.201700054

Hao, X., Yang, S., & Li, B. (2023). *Discrete Riesz Potentials on Discrete Weighted Morrey Spaces*. 1–20. http://arxiv.org/abs/2310.08458

Kreyzig, M. (1966). K. Yosida, Functional Analysis. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 123) XII + 458 S. Berlin/Heidelberg/New York 1965. Springer-Verlag. Preis geb. DM 66, —. In *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (Vol. 46, Issue 1). https://doi.org/10.1002/zamm.19660460126

Maharani, D., Widjaja, J., & Setya Budhi, M. W. (2019). Boundedness of Mikhlin Operator in Morrey Space. *Journal of Physics: Conference Series*, *1180*(1).

https://doi.org/10.1088/1742-6596/1180/1/012002

Mutaqin, A. (2017). *Ekuivalensi Norm-n di Ruang lp* [Institut Teknologi Bandung]. https://digilib.itb.ac.id/gdl/view/7254/ruang-banach?rows=1287&per_page=3

R. Al-Saphory, A. Al-Janabi, J. A.-D. (2007). *Quasi-Banach Space for the Sequence Space*. *3*.

Rafeiro, H., Samko, N., & Samko, S. (2013). *Morrey-Campanato Spaces : an Overview*. *228*, 293–323.

Rahman, H., & Gunawan, H. (2021). Some generalized geometric constants for discrete Morrey spaces. *ArXiv Preprint ArXiv:2104.*, *12983*, 1–4.

Rukmana, I. (2019). *Operator Pengali Pada Ruang Morrey dan Ruang Morrey Lemah* [InstitutTeknologi Bandung]. https://digilib.itb.ac.id/index.php/gdl/view/34817

Salim, D., Hakiki, M. T., & Hakim, D. I. (2022). INTERPOLASI KOMPLEKS RUANG MORREY-ADAMS DAN OPERATOR MAKSIMAL FRAKSIONAL. *Pattimura Proceeding: Conference of Science and Technology*, 83–90. https://doi.org/10.30598/PattimuraSci.2021.KNMXX.83-90

Sawano, Y., & Tanaka, H. (2005). Morrey spaces for non-doubling measures. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, *21*(6), 1535–1544. https://doi.org/10.1007/s10114-005-0660-z

RIWAYAT HIDUP

Ferira Febri Arianti, lebih dikenal dengan panggilan Febri. Lahir di Malang, 13 Februari 2001 sebagai anak kedua dari pasangan Soffandi dan Yuli Santalia. Selama di kampus, Febri mengikuti beberapa komunitas yang ada di kampus seperti Al Farazi dan SeMatA. Selain itu, Febri juga mengikuti UKM seperti Taekwondo pada saat semester 5. Adapun prestasi yang diraih dibangku perkuliahan yaitu: Riset Kompetitif Mahasiswa sebagai ketua tim di Seminar Greentech 2023; Penelitian miniriset di BRIN 2023; Gold medal Olimpiade Agama Sains dan Riset bidang matematika 2023; Silver medal Olimpade Sains Nasional kategori individu bidang matematika 2023; dan juara 2 Olimpiade Sains Nasional kategori tim bidang matematika 2023.

Adapun riwayat pendidikan Febri yaitu: SDN Sawojajar 5 Malang, SMPN 21 Malang, dan SMAN 10 Malang. Semasa SMP, Febri memperoleh juara 2 futsal kategori putri tingkat kota. Selanjutnya, semasa di SMA, Febri memperoleh Gold medal Taekwondo tingkat kota dan Gold medal Taekwondo tingkat provinsi.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ferira Febri Arianti.
NIM : 200601110079
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika.
Judul Skripsi : Sifat Kelengkapan pada Ruang Morrey Diskrit.
Pembimbing I : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Pembimbing II : Dr. Fachrur Rozi, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	13 September 2023	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	20 September 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	27 September 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	4 Oktober 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	4 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	11 Oktober 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	11 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	23 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	8.
9.	31 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	8 November 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	10.
11.	9 November 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	11.
12.	10 November 2023	ACC Bab I, II, dan III	12.
13.	10 November 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	13.
14.	13 November 2023	ACC Seminar Proposal	14.
15.	5 Februari 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	15.
16.	13 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	16.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

17.	22 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	17.
18.	22 Februari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	18.
19.	27 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	19.
20.	28 Februari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	20.
21.	28 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	21.
22.	14 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	22.
23.	15 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	23.
24.	19 Maret 2024	ACC Bab IV dan V	24.
25.	19 Maret 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	25.
26.	6 Mei 2024	ACC Seminar Hasil	26.
27.	20 Mei 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	27.
28.	22 Mei 2024	Konsultasi Revisi Penulisan Seminar Hasil	28.
29.	19 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	29.
30.	26 Juni 2024	ACC Keseluruhan	30.

Malang, 26 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005