PEMBENTUKAN REPRESENTASI ADJOIN PADA ALJABAR LIE

SKRIPSI

OLEH
BAIQ AFIFAH ZAHRA HIMMAWAN
NIM. 200601110019

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

PEMBENTUKAN REPRESENTASI ADJOIN
PADA ALJABAR LIE

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Baiq Afifah Zahra Himmawan
NIM. 200601110019

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

PEMBENTUKAN REPRESENTASI ADJOIN
PADA ALJABAR LIE

SKRIPSI

Oleh:
Baiq Afifah Zahra Himmawan
NIM. 200601110019

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 19 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Intan Nisfulaila, M.Si.	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
NIP. 19900215 201903 2 015	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG JURUSAN MATEMATIKA

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PEMBENTUKAN REPRESENTASI ADJOIN PADA ALJABAR LIE

SKRIPSI

Oleh:
Baiq Afifah Zahra Himmawan
NIM. 200601110019

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal 26 Juni 2024

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M. Si., Ph. D.	....
Anggota Penguji I	: Muhammad Khudzaifah, M. Si.	....
Anggota Penguji II	: Intan Nisfulaila, M. Si.	....
Anggota Penguji III	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Baiq Afifah Zahra Himmawan
Nim	: 200601110019
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Penelitian	: Pembentukan Representasi Adjoin pada Aljabar Lie

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila di kemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakanatau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Juni 2024

Yang membuat pernyataan,

Baiq Afifah Zahra Himmawan

NIM. 200601110019

MOTO

“Dan aku menyerahkan urusanku kepada Allah”
-Q.S. Al-Mu’min Ayat 44.

PERSEMBAHAN

Matematika UIN Malang merupakan pilihan pertama SNMPTN yang tidak pernah terfikirkan jika saya akan diterima. Alhamdulillah seiring berjalannya waktu, banyak hal-hal indah yang telah saya rasakan ketika menjadi mahasiswi UIN Malang ini. Banyak pelajaran, pengalaman baru yang saya rasakan dan banyaknya orang baru dengan sudut pandang berbeda yang pernah saya temui.

-Baiq Afifah Zahra Himmawan

Alhamdulillahi Robbil'alamin, puji syukur kepada Allah SWT.

Skripsi ini saya persembahkan untuk ibunda tersayang, Yeni Susilowati dan Ayah tercinta, Lalu Zinny Himmawan yang telah mendukung saya untuk menempuh jenjang pendidikan di perguruan tinggi dan doa yang tiada henti untuk saya. Semoga karena kebaikannya menjadikan mereka orang tua yang selalu dirindukan surga. Aamiin.

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum warahmatullahi wabarakatuh.

Segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi sekaligus penulisan skripsi dengan judul “Pembentukan Representasi Adjoin pada Aljabar Lie” sebagai syarat memperoleh gelar sarjana di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Sholawat serta salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad SAW, berkat syafaat dan perjuangan-Nya yang menjadikan motivasi bagi penulis untuk belajar dan berbenah untuk menjadi manusia yang lebih baik.

Dalam penyelesaian skripsi ini, penulis mendapat banyak partisipasi dan bimbingan dari berbagai pihak. Karena itu, dengan kerendahan hati penulis memberikan iringan do’a serta ucapan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Intan Nisfulaila, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing, memberikan arahan serta kesabaran dalam membagikan ilmunya kepada penulis.
5. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing dan memberikan arahan selama skripsi ini.
6. Prof. Dr. H. Turmudi, M. Si, Ph. D, selaku ketua penguji dalam ujian skripsi yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
7. Muhammad Khudzaifah, M. Si, selaku anggota penguji I dalam ujian skripsi yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
8. Segenap sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

terutama seluruh dosen matematika yang telah memberikan ilmu, motivasi serta bimbingan kepada penulis.

9. Orang tua saya, ibu Yeni Susilowati dan ayah Lalu Zinny Himmawan serta keluarga penulis yang selalu memberikan dukungan penuh, kasih sayang dan doa dalam setiap perjalanan penulis.
10. Orang terdekat penulis, Muhammad Aziz Abdillah yang selalu menemani, mendukung dan membantu memotivasi penulis selama perjuangan penulis dalam penyusunan skripsi ini.
11. Sahabat-sahabat penulis, Nisa, Thesa, Rifda, Maria, dan lainnya yang sellu memberikan dukungan berupa energi positif dan motivasi, serta menjadi tempat berkeluh kesah bagi penulis.
12. Kakak tingkat dan teman teman seperjuangan penulis, Ira, Nanda, Lili Aldina, Aini, yang selalu membantu mengarahkan, memberikan semangat untuk sama-sama berjuang untuk menyelesaikan kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
13. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu-persatu atas keikhlasan bantuan moral, material dan spiritual kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna, namun dengan ikhlas, penulis mempersembahkan sebagai bentuk apresiasi dan penghormatan kepada semua pihak yang telah memberikan kontribusi, dukungan, dan inspirasi kepada penulis. Semoga skripsi ini dapat menjadi aset kepustakaan baru yang bermanfaat kepada para pembaca dan generasi selanjutnya. *Aamiin Ya Rabbal 'Alaamiin.*

Wassalamu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh

Malang, 23 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$gl(V)$	:	Himpunan operator linear (general linear) dari ruang vektor V
$gl(\mathfrak{g})$	:	Himpunan operator linear (general linear) dari aljabar Lie $\mathfrak{g}$
$Der(V)$	:	Himpunan semua derivasi dari V
$[-,-]$	:	Operasi *bracket* komutator (operasi *bracket Lie*)
$\langle -,- \rangle$	:	*Inner Product* (produk dalam)
$\rightarrow$	:	Menunjukkan pemetaan dari satu himpunan ke himpunan lainnya
$\mathbb{Z}$	:	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{R}$	:	Himpunan bilangan real
$M_{(2\times 2)}(\mathbb{R})$	:	Perkalian dua matriks 2×2 dengan entri bilangan real
$\mathfrak{g}$	:	Himpunan aljabar Lie $\mathfrak{g}$
$\mathfrak{h}$	:	Himpunan aljabar Lie $\mathfrak{h}$
$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$	:	Pemetaan pada aljabar Lie
ad	:	Pemetaan adjoin
$\in$	:	Elemen (anggota)
$\notin$	:	Bukan elemen (anggota)
$\neq$	:	Tidak sama dengan
$\forall$	:	Untuk setiap

ABSTRAK

Afifah Zahra, Baiq. 2024. **Pembentukan Representasi Adjoin pada Aljabar Lie.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Intan Nisfulaila, M. Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: Aljabar Lie, Representasi, Representasi Adjoin.

Aljabar merupakan cabang ilmu matematika yang dapat memberikan pemahaman dalam menyelesaikan masalah. Penelitian ini membahas salah satu bentuk aljabar yaitu aljabar Lie. Dimana aljabar Lie $\mathfrak{g}$ merupakan suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ yang dilengkapi dengan pemetaan bilinear yang dilengkapi oleh operasi komutator yang biasa disebut dengan operasi *bracket Lie* bernotasikan $[-,-]$ dari $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ ke $\mathfrak{g}$ jika memenuhi aksioma anti-simetri dan memenuhi Identitas Jacobi. Salah satu model dari aljabar Lie adalah himpunan semua operator linear dari ruang vektor V yang dinotasikan dengan $gl(V)$. Selain itu, salah satu yang dibahas terkait aljabar Lie pada penelitian ini adalah teori representasi. Aljabar Lie menggunakan teori representasi dengan tujuan untuk menyederhanakan permasalahan aljabar abstrak ke dalam aljabar linear dengan cara mempresentasikan setiap anggotanya ke dalam bentuk pemetaan linear pada ruang vektor. Terdapat berbagai bentuk dari teori representasi pada aljabar Lie salah satunya ialah representasi adjoin. Dan representasi adjoin ini terbentuk dari adanya sebuah derivasi dan homomorfisma Lie. Adapun tujuan dari adanya penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie. Penelitian ini menggunakan metode kualitatif, Dimana metode tersebut menerapkan sebuah cara untuk mengumpulkan data-data atau bahan pustaka sebagai acuan berupa artikel, jurnal, bahkan buku-buku yang berkaitan dengan penelitian ini.

ABSTRACT

Afifah Zahra, Baiq. 2024. **Formation of Adjoin Representation on Lie Algebra**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Intan Nisfulaila, M. Si. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Lie algebra, Representation, Adjoin Representation.

Algebra is a branch of mathematics that can provide understanding in solving problems. This research discusses one form of algebra, namely Lie algebra. Where Lie algebra $\mathfrak{g}$ is a vector space over the field $\mathbb{F}$ equipped with a bilinear mapping equipped by a commutator operation commonly called the Lie bracket operation denoted $[-,-]$ from $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ to $\mathfrak{g}$ if it satisfies the anti-symmetry axiom and satisfies Jacobi Identity. One model of Lie algebra is the set of all linear operators of a vector space V denoted by $gl(V)$. In addition, one of the discussions related to Lie algebra in this research is representation theory. Lie algebra uses representation theory with the aim of simplifying abstract algebraic problems into linear algebra by presenting each of its members in the form of linear mappings on vector spaces. There are various forms of representation theory in Lie algebra, one of which is adjoin representation. And this adjoin representation is formed from a derivation and Lie homomorphism. The purpose of this research is to find out how the formation of adjoin representation on Lie algebra. This research uses a qualitative method, where the method applies a way to collect data or library materials as a reference in the form of articles, and books related to Lie algebra.

مستخلص البحث

هرة، بائق عفيفة. ٢٠٢٤. تشكيل التمثيل المرافق على جبر لي. البحث الجامعي، قسم الرياضيات، كلية العلوم ،والتكنولوجيا بجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: إنتان نصف ليلة ..الماجستيرة. المشرف الثاني: محمد نافع جوهري، الماجستير

الكلمات الرئيسية : جبر لي، تمثيل، تمثيل مرافق

الجبر هو فرع من الرياضيات يمكنه توفير الفهم في حل المشكلات. يناقش هذا البحث أحد أشكال الجبر وهو جبر لي. حيث يكون جبر لي $\mathfrak{g}$ عبارة عن مساحة متجهة فوق الحقل $\mathbb{F}$ وهي مجهزة بتعيين ثنائي الخط المجهز بعملية $[-,-]$ من $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ إلى $\mathfrak{g}$ إذا كانت تلبي البديهية المضادة عاكس والتي تسمى عادةً عملية قوسية لي مع الترميز للتناظر وترضي هوية جاكوبي. أحد نماذج جبر لي هو مجموعة جميع العوامل الخطية من الفضاء المتجه V والذي يُشار إليه بـ $gl(V)$. وبصرف النظر عن ذلك، هناك شيء واحد تمت مناقشته بخصوص جبر لي في هذا البحث وهو نظرية التمثيل. يستخدم جبر لي نظرية التمثيل بهدف تبسيط مشاكل الجبر التجريدي إلى جبر خطي من خلال تقديم كل عضو في شكل خريطة خطية في الفضاء المتجه. هناك أشكال مختلفة من نظرية التمثيل في جبر لي، أحدها هو التمثيل المرافق. وهذا التمثيل يتكون من اشتقاق وتماثل لي. الهدف من هذا البحث هو معرفة كيفية تشكيل التمثيل المرافق في جبر لي. استخدم هذا البحث منهجا نوعيا، حيث يطبق هذا المنهج طريقة جمع البيانات .أو المواد المكتبية كمراجع في شكل مقالات ومجلات وحتى الكتب المتعلقة بهذا البحث

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar adalah salah satu bagian dari ilmu matematika yang banyak dikembangkan dan di dalamnya mencakup bilangan, kuantitas, relasi, dan fungsi (Watson, 2007). Banyak ilmu yang dipelajari dalam bidang aljabar dan aljabar abstrak merupakan salah satu ilmu yang dipelajari dalam bidang aljabar tersebut. Materi aljabar abstrak digunakan untuk mempelajari struktur-struktur aljabar yang lebih kompleks seperti grup, ring, lapangan, bahkan ruang vektor. Di dalam itu, struktur aljabar telah menekankan pada konsep-konsep matematika yang ada, dengan tujuan menemukan pola umum, hubungan, serta sifat-sifat yang berlaku dari berbagai struktur matematika (Dummit & M.Foote, 2004).

Aljabar Lie merupakan salah satu cabang ilmu aljabar yang menggunakan struktur aljabar dengan operasi komutator yang khusus sehingga terdapat perbedaan antara aljabar Lie dengan aljabar lainnya. Pada tahun 1930-an, nama aljabar Lie ini telah diberikan oleh Hermann Weyl. Shopus Lie yang merupakan matematikawan yang berasal dari Norwegia mulai memperkenalkan aljabar Lie ini pada akhir abad ke-19. Pada awalnya aljabar Lie ini diperkenalkan dengan tujuan mengkaji konsep grup transformasi kontinu yang dapat disebut grup Lie sehingga akhirnya dikembangkan menjadi aljabar Lie, dimana aljabar Lie merupakan salah satu materi yang berperan penting pada ilmu matematika (Fuchs, Kisil & Onishchik, 1994). Merujuk ke dalam aljabar Lie, penulisan simbol dengan arti tertentu biasanya digunakan huruf kecil dengan tema font *Gothic (Fraktur)* seperti $\mathfrak{g}$ dan $\mathfrak{h}$. Aljabar

Lie yang real maupun kompleks berdimensi hingga pada ruang vektor $\mathfrak{g}$ atas lapangan $\mathbb{F}$ dilengkapi menggunakan pemetaan bilinear yang dilengkapi oleh operasi komutator dan biasa disebut dengan operasi *bracket Lie* bernotasikan $[-,-]$ dari $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ ke $\mathfrak{g}$. Operasi *bracket Lie* ini harus memenuhi aksioma anti-simetri dan memenuhi Identitas Jacobi.

Representasi adalah salah satu cabang matematika yang mempelajari bagaimana cara elemen-elemen suatu struktur aljabar direpresentasikan melalui objek-objek matematika lainnya, sehingga struktur aljabar melalui objek-objek matematika tersebut dapat lebih mudah dipahami. Dalam ilmu aljabar, representasi sangat berkaitan dengan pemetaan bahkan homomorfisma antara struktur aljabar. Misalnya dalam representasi grup terdapat cara bagaimana grup tersebut direpresentasikan melalui matriks, transformasi linear, atau objek-objek aljabar lainnya (James & Liebeck, 2001). Selain itu representasi dapat diterapkan dalam berbagai cabang matematika seperti ring, modul dan aljabar lainnya.

Representasi pada aljabar Lie adalah suatu ilmu yang dipelajari untuk menyederhanakan permasalahan aljabar abstrak ke dalam aljabar linear. Istilah representasi aljabar Lie didapatkan dari homomorfisma Lie yang memetakan sebarang aljabar Lie $\mathfrak{g}$ ke $gl(V)$. Dan representasi aljabar Lie ini menjelaskan bahwa setiap elemen dari sebarang aljabar Lie akan dibentuk ke dalam pemetaan linear pada ruang vektor (Assal, 2014).

Representasi yang dimiliki oleh aljabar Lie salah satunya adalah representasi adjoin. Representasi adjoin ini dibentuk oleh homomorfisma Lie yang biasa didefinisikan dengan $ad(\mathfrak{g}) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Konsep pengkajian dalam penelitian ini sebenarnya didapatkan berdasarkan penelitian yang sudah ada sebelumnya. Namun terdapat perbedaan alur dalam membentuk representasi adjoin pada aljabar Lie dengan penelitian sebelumnya. Penelitian ini menggunakan ruang vektor sebagai konsep dalam membentuk representasi adjoin pada aljabar Lie, sedangkan penelitian sebelumnya menggunakan konsep grup seperti homomorfisma grup, Lie grup dalam pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie. Disamping itu, penelitian ini akan menjabarkan konsep-konsep yang belum diberikan pada penelitian sebelumnya seperti pembuktian teorema, dan lain sebagainya.

Alasan dari pentingnya pengkajian penelitian mengenai teori representasi ini adalah berdasar pernyataan dalam karya dari Karin Erdmann, yang merupakan seorang Matematikawan Oxford spresialis bidang aljabar yaitu teori representasi. Berikut adalah pernyataannya, "Secara kasar, teori representasi menyelidiki bagaimana sistem aljabar dapat bertindak pada ruang vektor. Ketika ruang vektor berdimensi-hingga, ini memungkinkan seseorang untuk secara eksplisit mengekspresikan elemen sistem aljabar dengan matriks, maka seseorang dapat memanfaatkan aljabar linear untuk mempelajari 'abstrak' sistem aljabar. dengan cara ini seseorang dapat mempelajari simetri, melalui aksi grup. Seseorang juga dapat mempelajari proses yang tidak dapat diubah. Aljabar dan representasinya memberikan kerangka alami untuk ini." (Erdmann & Holm, 2018)

Terdapat integrasi antara ilmu matematika dengan keberadaan Al-Qur'an, mukjizat terbesar dari Allah yang diwahyukan melalui Rasulullah SWT. Al-Qur'an yang merupakan sumber petunjuk hidup umat islam, telah menganjurkan umatnya untuk memikirkan dan memahami penciptaan alam semesta (Abdussakir, 2009). Allah telah berfirman mengenai hal tersebut pada Q.S. Ali 'Imran: 191 adalah sebagai berikut.

Artinya: *"(Yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri, duduk, atau dalam keadaan berbaring, dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata), Ya Tuhan kami, tidaklah Engkau menciptakan semua ini sia-sia, Maha Suci Engkau, lindungilah kami dari azab neraka."*

Allah SWT memberikan manusia kesempurnaan berupa akal. Dan ayat tersebut mengarahkan bahwa umat islam perlu untuk berfikir, melakukan studi bahkan penelitian. Maka dari itu umat islam memiliki kewajiban untuk mempelajari bahkan mengamalkan ilmu. Salah satu ilmu yang perlu dipelajari dalam kehidupan manusia adalah ilmu matematika.

Matematika merupakan suatu bagian dari hasil pemikiran manusia. Sejak zaman dimulainya peradaban manusia, ilmu matematika mulai berkembang. Di samping itu, sejarah mencatat bahwa masyarakat telah banyak menggunakan matematika sejak zaman dahulu. Karena itu matematika dapat dijadikan solusi dari permasalahan kehidupan sosial masyarakat (Arrifada, Rofiqoh & Kusaeri, 2016). Sama halnya pada ilmu aljabar Lie pada penelitian ini yang merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Aljabar Lie merupakan ilmu matematika yang sudah ada atau sudah lama ditemukan. Karena itu kita perlu untuk mempelajari dan juga menerapkan ilmunya dalam menyelesaikan sebuah masalah.

Al-Qur'an telah menganjurkan umat islam untuk mempelajari ilmu atau struktur-struktur keilmuan yang sudah ada. Pemahaman dan penerapan terhadap ilmu tersebut dapat membantu umat islam dalam menjalankan tugas-tugas bahkan menyelesaikan permasalahan kehidupan di bumi ini.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan sajian singkat pada latar belakang, penelitian ini akan membahas uraian tentang representasi adjoin pada aljabar Lie. Maka dari itu, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie?

1.3 Tujuan Penelitian

Terkait latar belakang dan rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi peneliti, peneliti dapat memperluas pengetahuan baru tentang aljabar Lie, teori representasi, representasi adjoin pada aljabar Lie.
2. Bagi peninjau matematika, dapat menambah pengetahuan dalam bidang matematika khususnya pada teori representasi adjoin pada aljabar Lie.
3. Bagi lembaga, dapat digunakan sebagai bahan kepustakaan baru yang dapat dijadikan sarana pengembangan keilmuan khususnya di Program Studi Matematika mengenai teori representasi.

1.5 Batasan Masalah

Sebelum membatasi pembahasan rumusan masalah ini, representasi yang dimaksudkan dalam penelitian ini adalah representasi adjoin, dimana representasi adjoin merupakan salah satu representasi dari aljabar Lie yang terbentuk dari derivasi $\mathfrak{g}$ dan homomorfisma Lie $\mathfrak{g}$. Pada pembahasan rumusan masalah hanya difokuskan pada pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie dari kumpulan teorema, lemma, proposisi beserta pembuktiannya saja.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar pembaca mudah dalam memahami penelitian ini, maka diberikan sistematika penulisan yang terbagi menjadi lima bab adalah sebagai berikut.

BAB I Pendahuluan

Pada bab pendahuluan disajikan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian serta sistematika penelitian.

BAB II Kajian Teori

Pada bagian ini terdiri atas berbagai materi pendukung yang akan digunakan pada pembahasan penelitian ini. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas materi operasi biner, ruang vektor, pemetaan linear, pemetaan bilinear, derivasi, aljabar, aljabar Lie, homomorfisma Lie, representasi aljabar Lie, representasi adjoin, kajian keislaman dan kajian topik dengan teori pendukung.

BAB III Metodologi Penelitian

Pada bab ini diberikan gambaran mengenai jenis penelitian yang digunakan, pra penelitian hingga tahapan penelitian yang digunakan untuk menyelesaikan pembahasan masalah dalam penelitian ini.

BAB IV Pembahasan

Pada bab pembahasan diberikan pengkajian mengenai pembahasan yang berisi pembuktian dari berbagai teorema, lemma bahkan proposisi dengan pembuktiannya untuk menyelesaikan masalah penelitian ini yaitu membentuk representasi adjoin pada aljabar Lie.

BAB V Penutup

Pada bab penutup diberikan kesimpulan dari hasil penelitian dan pemberian saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN TEORI

Sebelum melangkah ke dalam pembahasan, pada bab ini akan disajikan beberapa materi yang terdapat definisi serta sifat-sifat pendukung yang berkaitan dengan pokok pembahasan pada bab selanjutnya. Beberapa materi tersebut akan dibahas terkait definisi dan contohnya.

2.1 Operasi Biner

Dimisalkan S merupakan suatu himpunan takkosong, maka operasi biner dalam himpunan S yang dilambangkan dengan $*$ merupakan hasil pemetaan dari $S \times S$ ke S. Jika $(a, b) \in S \times S$ maka $(a * b) \in S$. Sehingga operasi $*$ dapat dikatakan bersifat tertutup (Sukirman, 2005).

Contoh

Dimisalkan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan semua bilangan bulat. Operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $(+)$ pada $\mathbb{Z}$ termasuk operasi biner yang tertutup. Hal ini dikarenakan operasi penjumlahan ini tergolong dalam suatu pemetaan dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$ untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Sedangkan operasi pembagian yang dinotasikan dengan $(:)$ pada $\mathbb{Z}$ bukan merupakan operasi biner yang tertutup karena $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ namun $(a: b) \notin \mathbb{Z}$. Misalnya $(3,4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ namun $(3: 4) \notin \mathbb{Z}$ (Sukirman, 2005).

Sifat Operasi Biner

Misalkan $*$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$ yang disimbolkan dengan $(\mathbb{Z},*)$. Berikut beberapa sifat operasi biner.

1. Apabila $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a * b = b * a$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat komutatif.
2. Apabila $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$, maka dikatakan bahwa operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif.
3. Jika $\exists e \in \mathbb{Z}$ dan $\forall a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a * e = e * a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap operasi $*$.
4. Jika $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a * b = b * a = e$, dimana e merupakan elemen identitas dari operasi $*$. Dan b disebut sebagai invers yang bersifat tunggal dari a terhadap operasi $*$ (Mas'Oed, 2013).

2.2 Ruang Vektor

Secara geometri, vektor merupakan sebuah garis yang memiliki arah. Di samping itu, ditegaskan bahwa vektor bukan merupakan sebuah bilangan. Agar tidak tertukar dengan besaran skalar, vektor ini memiliki notasi khusus dalam penulisannya dengan penggunaan huruf yang bercetak tebal seperti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$ maupun penggunaan tanda panah di atas huruf sehingga menunjukkan bahwa ruas garis tersebut memiliki arah (Hadley, 1992).

Misalkan $\mathbb{R}$ merupakan himpunan bilangan real, serta unsur-unsurnya disebut skalar dan V merupakan suatu himpunan takkosong yang dilengkapi dua aturan sebagai berikut (Larson, 2013).

1. Penjumlahan di V

   Aturan ini mengaitkan sepasang unsur $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ke tepat satu unsur yang dapat dilambangkan dengan $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.

2. Perkalian dengan skalar

   Merupakan sebuah aturan yang mengaitkan dengan skalar $k \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{u} \in V$ ke tepat satu unsur yang dapat dilambangkan dengan $k\mathbf{u} \in V$.

Untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ dan skalar $k, m \in \mathbb{R}$, himpunan V yang dilengkapi oleh operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar dapat disebut dengan ruang vektor jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$. Jadi himpunan V bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.
2. Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$. Jadi operasi penjumlahan di V bersifat komutatif (pertukaran).
3. Jika $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, maka $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$. Jadi operasi penjumlahan di V bersifat asosiatif.
4. Terdapat vektor nol di V yang dilambangkan dengan $\mathbf{0}$ disebut sebagai identitas penjumlahan, sehingga memenuhi

   $$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

   untuk semua $\mathbf{u} \in V$.
5. Untuk setiap unsur $\mathbf{u} \in V$ terdapat invers jumlah $\mathbf{u}$ yang dilambangkan dengan $-\mathbf{u}$ sehingga memenuhi

   $$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$$
6. Jika $k \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{u} \in V$, maka $k\mathbf{u} \in V$. Jadi himpunan V bersifat tertutup terhadap operasi perkalian dengan skalar.

7. Berlaku $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ yang merupakan sifat distibutif.
8. Berlaku $(k + m)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + m\mathbf{u}$ yang merupakan sifat distibutif.
9. Berlaku $(km)\mathbf{u} = k(m\mathbf{u})$.
10. Jika terdapat 1 yang disebut sebagai identitas perkalian dengan skalar, maka berlaku

$$1\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

(Andari, 2017).

Contoh

Diberikan suatu himpunan bilangan real

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

Tunjukkan bahwa himpunan $M_2(\mathbb{R})$ yang dilengkapi operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar adalah ruang vektor!

Penyelesaian:

Ambil sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}.$$

1. Akan ditunjukkan bahwa himpunan $M_2(\mathbb{R})$ bersifat tertutup pada operasi penjumlahan. Jika $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ maka $A + B \in M_2(\mathbb{R})$. Perhatikan bahwa

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Jadi himpunan $M_2(\mathbb{R})$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan pada himpunan $M_2(\mathbb{R})$ bersifat komutatif. Perhatikan bahwa

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= B + A.$$

Jadi operasi penjumlahan pada himpunan $M_2(\mathbb{R})$ bersifat komutatif.

3. Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan pada himpunan $M_2(\mathbb{R})$ bersifat asosiatif. Perhatikan bahwa

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+e)+p & (b+f)+q \\ (c+g)+r & (d+h)+s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+(e+p) & b+(f+q) \\ c+(g+r) & d+(h+s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e+p & f+q \\ g+r & h+s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right)$$

$$= A + (B + C).$$

Jadi operasi penjumlahan pada himpunan $M_2(\mathbb{R})$ bersifat asosiatif.

4. Himpunan $M_2(\mathbb{R})$ memiliki elemen netral yaitu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, karena

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

5. Setiap elemen A memiliki invers $-A$. Jika

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ dan } -A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix},$$

maka

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$(-A) + A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ambil sebarang skalar $k, h \in \mathbb{R}$, maka

6. berlaku

$$\begin{aligned} kA &= k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

7. berlaku

$$\begin{aligned} k(A+B) &= k\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \\ &= k\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} k(a+e) & k(b+f) \\ k(c+g) & k(d+h) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ka+ke & kb+kf \\ kc+kg & kd+kh \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ke & kf \\ kg & kh \end{bmatrix} \\ &= k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= kA + kB. \end{aligned}$$

8. berlaku

$$(k+h)A = (k+h)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (k+h)a & (k+h)b \\ (k+h)c & (k+h)d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka+ha & kb+hb \\ kc+hc & kd+hd \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ha & hb \\ hc & hd \end{bmatrix}$$

$$= k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + h\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= kA + hA.$$

9. berlaku

$$k(hA) = k\left(h\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= k\left(\begin{bmatrix} ha & hb \\ hc & hd \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} k(ha) & k(hb) \\ k(hc) & k(hd) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (kh)a & (kh)b \\ (kh)c & (kh)d \end{bmatrix}$$

$$= kh\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= (kh)A.$$

10. berlaku

$$1A = 1\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A.$$

Jadi $M_2(\mathbb{R})$ merupakan ruang vektor (Andari, 2017).

Teorema Ruang Vektor

Misalkan $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ merupakan vektor dalam ruang vektor V, hingga berlaku,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

(Anton & Rorres, 2013).

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$, untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$. sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle \quad &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \quad \text{(Berlaku sifat distributif)} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$.

2.3 Pemetaan Linear

Diberikan bahwa V dan W yang merupakan ruang vektor, dan pemetaan F memetakan V ke W yang dituliskan $F: V \to W$. Maka dari itu F dapat dikatakan pemetaan linear jika memenuhi,

1. Pemetaan F bersifat *Additivity* (pemetaan linear mempertahankan operasi). $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$ untuk semua $\mathbf{u} \in V$.
2. Pemetaan F bersifat *Homogenity* (bebas untuk memetakan dengan mengalikan vektor atau skalar terlebih dahulu). $F(k\mathbf{u}) = kF(\mathbf{u})$ untuk semua $\mathbf{u} \in V$ dan skalar k.

Jika $T: V \to V$, maka T dapat disebut dengan operator linear pada V. Sedangkan untuk himpunan semua operator linear pada V dapat dinotasikan dengan $gl(V)$

sehingga $gl(V) = \{ T: V \to V \mid T \text{ merupakan operator linear}\}$ (Kusumawati, 2014).

Contoh Operator Linear

Misalkan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan suatu ruang vektor. Didefinisikan

$$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u} \to T\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Tunjukkan bahwa T merupakan operator linear!

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}$, dan skalar $k \in \mathbb{R}$. Diberikan $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ dan $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Karena $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}$, maka $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}$, sehingga $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Karena $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ dan $k \in \mathbb{R}$, maka $k\mathbf{u} \in \mathbb{R}$, sehingga $T(k\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Perhatikan bahwa,

$$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

dan

$$T(k\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

$$kT(\mathbf{u}) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

sehingga diperoleh $T(k\mathbf{u}) = kT\mathbf{u}$.

Maka dari itu T merupakan operator linear (Andari, 2017).

Contoh Pemetaan Linear

Misalkan himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan suatu ruang vektor. Diberikan pemetaan $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ yang didefinisikan dengan

$$T(x, y) = (x, x + 3y, x - 2y).$$

Tunjukkan bahwa T merupakan pemetaan linear!

Penyelesaian:

Misalkan $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ dan $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$, untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ diperoleh,

$$T(\mathbf{u}) = (x_1, x_1 + 3y_1, x_1 - 2y_1)$$

dan

$$T(\mathbf{v}) = (x_2, x_2 + 3y_2, x_2 - 2y_2).$$

Kemudian akan dibuktikan bahwa T merupakan pemetaan linear jika memenuhi definisi.

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, untuk semua $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (x_1 + x_2, (x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + x_2, x_1 + x_2 + 3y_1 + 3y_2, x_1 + x_2 - 2y_1 - 2y_2) \\ &= (x_1 + x_2, x_1 + 3y_1 + x_2 + 3y_2, x_1 - 2y_1 + x_2 - 2y_2) \\ &= (x_1, x_1 + 3y_1, x_1 - 2y_1) + (x_2, x_2 + 3y_2, x_2 - 2y_2) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

   Oleh karena itu terbukti bahwa $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

2. $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$, untuk setiap vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$dan semua skalar k. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} T(k\mathbf{u}) &= (kx_1, kx_1 + k3y_1, kx_1 - k2y_1) \\ &= [k(x_1), k(x_1 + 3y_1), k(x_1 - 2y_1)] \\ &= k(x_1, x_1 + 3y_1, x_1 - 2y_1) \\ &= kT(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

   Oleh karena itu terbukti $T(k\mathbf{u}) = kT(\mathbf{u})$.

Karena kedua aksioma telah terpenuhi, maka $T(x, y) = (x, x + 3y, x - 2y)$ merupakan pemetaan linear (Setya, 1995).

2.3.1 Sifat-Sifat Pemetaan Linear

Misalkan V dan W merupakan ruang vektor. Jika $T: V \rightarrow W$ adalah pemetaan linear, maka untuk vektor $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}. \mathbf{v_3}, \dots, \mathbf{v_n} \in V$ dan skalar $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ maka berlaku:

$$T(k_1\mathbf{v_1} + k_2\mathbf{v_2} + \cdots + k_n\mathbf{v_n}) = k_1T(\mathbf{v_1}) + k_2T(\mathbf{v_2}) + \cdots + k_nT(\mathbf{v_n})$$

(Andari, 2017).

2.3.2 Sifat Linear Kanan dan Kiri

Diberikan perbedaan dari sifat linear kanan dan sifat linear kiri adalah sebagai berikut:

1. Sifat Linear Kanan

   Misalkan untuk setiap vektor $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ dalam ruang vektor V dan skalar c, d berlaku,

   Sifat distributif terhadap penjumlahan vektor:

   $$(\mathbf{v} + \mathbf{w})c = \mathbf{v}c + \mathbf{w}c.$$

   Sifat distributif terhadap penjumlahan dengan skalar:

   $$\mathbf{v}(c + d) = \mathbf{v}c + \mathbf{v}d.$$

   Konsisten terhadap perkalian dengan skalar:

   $$\mathbf{v}(cd) = (\mathbf{v}c)d.$$

2. Sifat Linear Kiri

   Misalkan untuk setiap vektor $\mathbf{v}$ dan $\mathbf{w}$ dalam ruang vektor V dan skalar c, d berlaku,

   Sifat distributif terhadap penjumlahan vektor:

   $$c(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = c\mathbf{v} + c\mathbf{w}.$$

Sifat distributif terhadap penjumlahan skalar:

$$(c+d)\mathbf{v} = c\mathbf{v} + d\mathbf{v}.$$

Konsisten terhadap perkalian dengan skalar:

$$(cd)\mathbf{v} = c(d\mathbf{v}).$$

(Anton & Rorres, 2013).

2.4 Pemetaan Bilinear

Diberikan V merupakan ruang vektor. Pemetaan $\pi: V \times V \to V$ dapat dikatakan bilinear jika memenuhi sifat linear kanan dan sifat linear kiri berikut.

1. Untuk sifat linear kanan berlaku $\pi\langle \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v}\rangle = \pi\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{v}\rangle + \pi\langle \mathbf{u_2}, \mathbf{v}\rangle$, untuk setiap $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{v} \in V$.
2. Untuk sifat linear kiri berlaku $\pi\langle \mathbf{u}, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}\rangle = \pi\langle \mathbf{u}, \mathbf{v_1}\rangle + \pi\langle \mathbf{u}, \mathbf{v_2}\rangle$ untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \in V$.

Terdapat catatan bahwa notasi $\langle -, - \rangle$ disini dapat disebut dengan inner product yang biasa digunakan dalam penyelesaian penjumlahan antar vektor produk dalam seperti $\langle \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}, \mathbf{v}\rangle$ sehingga berbeda dengan penggunaan $(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2})\mathbf{v}$ (Ruhama, 2012).

Contoh

Diberikan suatu ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{F}$. Didefinisikan pemetaan $\pi: V \times V \to V$ dengan rumus $\pi\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 2\mathbf{xy}$. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan π merupakan pemetaan bilinear.

Penyelesaian:

1. Untuk setiap $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{y} \in V$ berlaku

$$\pi\langle \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y}\rangle = 2\langle \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}\rangle\mathbf{y}$$

$$= 2\mathbf{x_1}\mathbf{y} + 2\mathbf{x_2}\mathbf{y}$$

$$= \pi\langle \mathbf{x_1}, \mathbf{y}\rangle + \pi\langle \mathbf{x_2}, \mathbf{y}\rangle.$$

Karena itu pemetaan π memenuhi sifat linear kanan

2. Untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in V$ berlaku

$$\pi\langle \mathbf{x}, \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}\rangle = 2\mathbf{x}\langle \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}\rangle$$

$$= 2\mathbf{x}\mathbf{y_1} + 2\mathbf{x}\mathbf{y_2}$$

$$= \pi\langle \mathbf{x}, \mathbf{y_1}\rangle + \pi\langle \mathbf{x}, \mathbf{y_2}\rangle.$$

Karena itu pemetaan π memenuhi sifat linear kiri.

Jadi pemetaan tersebut merupakan pemetaan bilinear yang memenuhi sifat linear kanan dan kiri (Ruhama, 2012).

2.5 Derivasi

Diberikan V ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Suatu operator linear $\delta: V \to V$ yang memenuhi

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$$

untuk setiap $a, b \in V$ disebut sebagai derivasi dari V. Himpunan semua operator linear yang merupakan derivasi dari V dinotasikan dengan $Der(V)$. Jadi derivasi merupakan sebuah pemetaan yang memenuhi sifat $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$ (Stewart, 2015).

Contoh

Misalkan V merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Pemetaan $T: V \to V$ sedemikian rupa sehingga $T(\mathbf{v}) = 0$ untuk setiap $\mathbf{v} \in V$ merupakan derivasi dari V. Buktinya sebagai berikut.

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, maka

$$\begin{aligned} T(\mathbf{vw}) &= 0 \\ &= \mathbf{v}0 + 0\mathbf{w} \\ &= \mathbf{v}T(\mathbf{w}) + T(\mathbf{v})\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Jadi T merupakan derivasi dari V (Stewart, 2015).

Dengan adanya contoh ini dapat diketahui bahwa $Der(V)$ mengandung pemetaan nol. Selain itu, himpunan ini terhadap operasi penjumlahan dan perkalian.

Sebelum memasuki pembahasan mengenai aljabar Lie, akan dijelaskan secara singkat mengenai aljabar beserta apa saja yang dibahas di dalamnya sehingga dapat diketahui perbedaan apa yang dibahas dari aljabar dan aljabar Lie.

2.6 Aljabar

Diberikan A ruang vektor atas lapangan K yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Maka A adalah aljabar atas K jika sifat-sifat berikut berlaku.

1. Distributif kanan: $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$
2. Distributif kiri: $\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}$
3. Kompatibilitas dengan skalar: $(a\mathbf{x})(b\mathbf{y}) = (ab)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$

untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A$ dan skalar a dan b di K (Michiel, 2004).

Contoh

Misalkan $K = \mathbb{R}$, dan A merupakan himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real. Kemudian tunjukkan bahwa himpunan A dari matriks 2×2 memenuhi ketiga identitas aljabar sehingga A merupakan aljabar atas K!

Penyelesaian:

1. Misalkan $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dan $Z = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ merupakan matriks-matriks di A. Akan ditunjukkan bahwa $(X + Y)Z = XZ + YZ$.

   Perhatikan bahwa,

$$(X+Y)Z = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+e)i + (b+f)k & (a+e)j + (b+f)l \\ (c+g)i + (d+h)k & (c+g)j + (d+h)l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ai+bk) + (ei+fk) & (aj+bl) + (ej+fl) \\ (ci+dk) + (gi+hk) & (cj+dl) + (gj+hl) \end{bmatrix}.$$

   Sedangkan,

$$XZ + YZ = \begin{bmatrix} ai+bk & aj+bl \\ ci+dk & cj+dl \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ai+bk) + (ei+fk) & (aj+bl) + ej + fl \\ (ci+dk) + (gi+hk) & (cj+dl) + (gj+hl) \end{bmatrix}.$$

   Karena $(X + Y)Z = XZ + YZ$, jadi sifat distributif kanan terpenuhi.

2. Misalkan $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dan $Z = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ merupakan matriks-matriks di A. Akan ditunjukkan bahwa $Z(X + Y) = ZX + ZY$. Perhatikan bahwa,

$$Z(X+Y) = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ia+jc) & (ib+jd) \\ (ka+lc) & (kb+ld) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (ie+jg) & (if+jh) \\ (ke+lg) & (kf+lh) \end{bmatrix}.$$

Sedangkan,

$$ZX + ZY = \begin{bmatrix} (ia + jc) & (ib + jd) \\ (ka + lc) & (kb + ld) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (ie + jg) & (if + jh) \\ (ke + \mathrm{lg}) & (kf + lh) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ia + jc + ie + jg) & (ib + jd + if + jh) \\ (ka + lc + ke + lg) & (kb + ld + kf + lh) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ia + jc) & (ib + jd) \\ (ka + lc) & (kb + ld) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (ie + jg) & (if + jh) \\ (ke + lg) & (kf + lh) \end{bmatrix}.$$

Karena $Z(X + Y) = ZX + ZY$, jadi sifat distributif kiri terpenuhi.

3. Misalkan $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dan $a, b \in \mathbb{R}$. Maka akan ditunjukkan bahwa sifat kompatibilitas dengan skalar terpenuhi.

   Perhatikan bahwa,

$$(aX)(bY) = [aX \quad bY]$$

$$= [a(aX) \quad b(bY)]$$

$$= (ab)(XY).$$

Jadi himpunan matriks 2×2 dengan entri bilangan real memenuhi ketiga sifat aljabar atas lapangan. Karena itu A merupakan aljabar atas K (Michiel, 2004).

2.7 Aljabar Lie

Aljabar Lie merupakan salah satu bidang aljabar yang menggunakan operasi komutator di dalamnya. Maka dari itu akan dijelaskan mengenai konsep komutator terlebih dahulu yang berperan dalam pembentukan aljabar Lie.

2.7.1 Komutator

Diberikan ruang vektor V dengan $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ dan didefinisikan

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Operasi komutator ini digunakan untuk mengetahui seberapa ketidakkomutatifan atau seberapa jauh elemen-elemen tersebut dari sifat komutatif dalam artian $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ (Mahmud, Persulessy, & W, 2013).

Terdapat catatan bahwa perkalian antar vektor dapat disebut dengan perkalian skalar dan biasa dioperasikan dengan menggunakan $(\cdot)$ *dot product*.

Contoh

Misalkan X dan Y merupakan dua matriks $M_{(2\times 2)}(\mathbb{R})$. Perhatikan bahwa,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan ditentukan komutator dari kedua matriks X dan Y. Sehingga diperoleh,

$$XY = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$YX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi komutator dari matriks X dan Y adalah

$$[X, Y] = XY - YX = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi didapatkan bahwa $XY \neq YX$ dikarenakan hasil dari komutator $[X, Y]$ adalah $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ yang menunjukkan ketidakkomutatifan operasi antara matriks X dan Y (Mahmud, Persulessy, & W, 2013).

2.7.2 Definisi Aljabar Lie

Misalkan K merupakan suatu lapangan dan $\mathfrak{g}$ ruang vektor atas K. Pemetaan yang dilengkapi operasi *bracket* komutator yang didefinisikan oleh $[-,-]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, dengan $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ disebut dengan operasi *bracket Lie* $\mathfrak{g}$ jika aksioma-aksioma berikut terpenuhi.

(L1) $[-,-]$ merupakan pemetaan bilinear.

(L2) $[\mathbf{x},\mathbf{x}] = 0$, untuk semua $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$.

(L3) $[\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] = [[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}] + [\mathbf{y},[\mathbf{x},\mathbf{z}]]$, untuk semua $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathfrak{g}$.

Sehingga memenuhi Identitas Jacobi

(Hall, 2015).

Terdapat catatan bahwa aksioma **(L2)** memiliki implikasi yaitu anti-simetri **(L2')**. Hal ini didapatkan karena terdapat operasi *bracket Lie* dan memenuhi aksioma **(L2)**, maka

$$
\begin{aligned}
0 &= [\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}] \\
&= [\mathbf{x},\mathbf{x}] + [\mathbf{x},\mathbf{y}] + [\mathbf{y}+\mathbf{x}] + [\mathbf{y},\mathbf{y}] \\
&= 0 + [\mathbf{x},\mathbf{y}] + [\mathbf{y},\mathbf{x}] + 0 \\
&= [\mathbf{x},\mathbf{y}] + [\mathbf{y},\mathbf{x}].
\end{aligned}
$$

Oleh karena itu didapatkan **(L2')** yaitu $[\mathbf{x},\mathbf{y}] = -[\mathbf{y},\mathbf{x}]$, untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathfrak{g}$ sehingga pemetaan $[-,-]$ dapat dikatakan anti-simetri. *Bracket Lie* $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$ yang juga sering disebut sebagai *bracket* komutator dari $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$. Suatu ruang vektor yang melengkapi ketentuan *bracket Lie* dapat disebut dengan aljabar Lie $\mathfrak{g}$ (Erdmann & Wildon, 2006).

Contoh

Misalkan terdapat suatu ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{F}$ dan himpunan semua operator linear dari V dinotasikan dengan $gl(V)$. Himpunan $gl(V)$ dilengkapi operasi *bracket Lie* $[-,-]$ dengan menggunakan definisi komutator merupakan suatu aljabar Lie.

Penyelesaian

1. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $[-,-]$ yang menggunakan definisi komutator merupakan pemetaan bilinear untuk sebarang $\mathbf{x},\mathbf{y} \in gl(V)$ sehingga $[\mathbf{x},\mathbf{y}] \in gl(V)$.

   Akan ditunjukkan pemetaan $[-,-]$ memenuhi sifat linear kanan dan kiri. Ambil sebarang $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$ dan $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in gl(V)$ maka,

   $$[\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},\mathbf{z}] = (\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})\mathbf{z} - \mathbf{z}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})$$

   $$= (\alpha\mathbf{x})\mathbf{z} + (\beta\mathbf{y})\mathbf{z} - \mathbf{z}(\alpha\mathbf{x}) - \mathbf{z}(\beta\mathbf{y})$$

   (Tidak menggunakan $(\cdot)$ karena terdapat perkalian dengan skalar)

   $$= \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}\cdot\mathbf{x}) - \boldsymbol{\beta}(\mathbf{z}\cdot\mathbf{y})$$

   (Menggunakan operasi $(\cdot)$ karena terdapat perkalian antar vektor)

   $$= \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) - \alpha(\mathbf{z}\cdot\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}) - \beta(\mathbf{z}\cdot\mathbf{y})$$

   $$= \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z} - \mathbf{z}\cdot\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z} - \mathbf{z}\cdot\mathbf{y})$$

   $$= \alpha[\mathbf{x},\mathbf{z}] + \beta[\mathbf{y},\mathbf{z}].$$

   dan

   $$\begin{aligned}[\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z}] &= \mathbf{x}(\alpha\mathbf{y}+\beta\mathbf{z}) - (\alpha\mathbf{y}-\beta\mathbf{z})\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}(\alpha\mathbf{y}) + \mathbf{x}(\beta\mathbf{z}) - (\alpha\mathbf{y})\mathbf{x} - (\beta\mathbf{z})\mathbf{x} \\ &= \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) - \alpha(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}) - \beta(\mathbf{z}\cdot\mathbf{x}) \\ &= \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) - \alpha(\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) - \beta(\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})\end{aligned}$$

$$= \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{x})$$

$$= \alpha[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \beta[\mathbf{x}, \mathbf{z}].$$

Karena sifat linear kanan dan kiri terlah terpenuhi, maka pemetaan $[-,-]$ merupakan pemetaan bilinear.

2. Akan ditunjukkan bahwa $gl(V)$ merupakan aljabar Lie yang memenuhi aksioma **(L2')** dengan menggunakan definisi komutator.

   Ambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in gl(V)$, maka

   $$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = -(\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}],$$

   sehingga aksioma **(L2')** yaitu anti-simetri terpenuhi.

3. Akan ditunjukkan aksioma **(L3)** terpenuhi.

   Perhatikan bahwa,

   $$\big[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]\big] + \big[\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]\big] + \big[\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]\big]$$

   $$= [\mathbf{x}, \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}] + [\mathbf{y}, \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}] + [\mathbf{z}, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}]$$

   $$= \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z})$$

   $$- (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{z}$$

   $$= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{y}) - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$$

   $$+ (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{y})$$

   $$+ (\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{z})$$

   $$= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$$

   $$\cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{z}$$

   $$\cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

   untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in gl(V)$. Jadi aksioma **(L3)** yaitu Identitas Jacobi terpenuhi.

Dengan demikian benar bahwa $gl(V)$ merupakan suatu aljabar Lie terhadap pemetaan $[-,-]$ (Hall, 2015).

2.8 Homomorfisma Lie

Seperti apa yang telah dijelaskan di atas bahwa homomorfisma Lie merupakan pemetaan dua himpunan aljabar Lie yang mempertahankan operasi komutatornya. Suatu pemetaan linear $f: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ antara dua himpunan aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dan $\mathfrak{h}$ merupakan homomorfisma aljabar Lie jika $f([X,Y]) = [f(X), f(Y)]$ (Stewart, 2015).

Contoh

Misalkan diberikan definisi dari pemetaan π dari $\mathfrak{g}$ ke $gl(V)$ adalah sebagai berikut

$$\pi: \mathfrak{g} \to gl(V)$$
$$\mathbf{x} \mapsto \pi_{([\mathbf{x},\mathbf{y}])}(\mathbf{v}) = ([\mathbf{x},\mathbf{y}])\mathbf{v}$$

untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$ dan $\mathbf{v} \in V$. Terdapat catatan bahwa $\pi_{([\mathbf{x},\mathbf{y}])}(\mathbf{v})$ dapat disebut dengan operator adjugasi. Tunjukkan bahwa pemetaan π merupakan homomorfisma Lie telah memenuhi $\pi([\mathbf{x},\mathbf{y}]) = [\pi(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{y})]$!

Penyelesaian:

Ambil sebarang $\mathbf{v} \in V$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\pi([\mathbf{x},\mathbf{y}])(\mathbf{v}) &= \pi_{([\mathbf{x},\mathbf{y}])}(\mathbf{v}) && \text{(Operator adjugasi)} \\
&= ([\mathbf{x},\mathbf{y}])\mathbf{v} && \text{(Definisi } \pi_{([\mathbf{x},\mathbf{y}])}(\mathbf{v}) = ([\mathbf{x},\mathbf{y}])\mathbf{v}) \\
&= (\mathbf{xy} - \mathbf{yx})\mathbf{v} && \text{(Definisi komutator)} \\
&= (\mathbf{xy})\mathbf{v} - (\mathbf{yx})\mathbf{v} \\
&= \pi_{(\mathbf{xy})}(\mathbf{v}) - \pi_{(\mathbf{yx})}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

$$= (\pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{y}})(\mathbf{v}) - (\pi_{\mathbf{y}}\pi_{\mathbf{x}})(\mathbf{v})$$

$$= (\pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{y}} - \pi_{\mathbf{y}}\pi_{\mathbf{x}})(\mathbf{v})$$

$$= ([\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}])(\mathbf{v})$$

$$= ([\pi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{y})])(\mathbf{v}).$$

Karena $\pi([\mathbf{x}, \mathbf{y}])(\mathbf{v}) = ([\pi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{y})])(\mathbf{v})$ telah memenuhi definisi homomorfisma Lie, maka pemetaan π merupakan homomorfisma Lie (Stewart, 2015).

2.9 Representasi Aljabar Lie $\mathfrak{g}$

Misalkan $\mathfrak{g}$ merupakan himpunan aljabar Lie. Pemetaan π dapat disebut dengan representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ atas V jika π merupakan suatu homomorfisma Lie. Dan $\pi(\mathbf{x})$ untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$ merupakan pemetaan linear pada V (Fulton & Haris, 2004).

Contoh

Misalkan $\mathfrak{g}$ merupakan himpunan aljabar Lie $\mathfrak{g}$ terhadap operasi *bracket Lie* $[-,-]$ berdasarkan definisi komutator. Kemudian akan ditunjukkan bahwa suatu pemetaan π dari $\mathfrak{g}$ ke $gl(V)$ yang didefinisikan dengan

$$\pi: \mathfrak{g} \to gl(V)$$

$$\mathbf{x} \mapsto \pi_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) = \mathbf{xv}$$

untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$ dan $\mathbf{v} \in V$ merupakan representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ atas V.

Penyelesaian:

1. Akan ditunjukkan bahwa π merupakan pemetaan linear. Ambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$ dan α, β merupakan skalar. Untuk sebarang $\mathbf{v} \in V$, diperoleh

   $$\pi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(\mathbf{v}) = \pi_{(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})}(\mathbf{v})$$

$$= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})\mathbf{v} \qquad \text{(Sifat } \textit{additivity}\text{)}$$

$$= (\alpha\mathbf{x})\mathbf{v} + (\beta\mathbf{y})\mathbf{v}$$

$$= \alpha(\mathbf{xv}) + \beta(\mathbf{yv})$$

$$= \alpha\pi_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) + \beta\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{v})$$

$$= \left(\alpha\pi_{\mathbf{x}} + \beta\pi_{\mathbf{y}}\right)(\mathbf{v})$$

$$= \left(\alpha\pi(\mathbf{x}) + \beta\pi(\mathbf{y})\right)(\mathbf{v}). \qquad \text{(Sifat } \textit{homogenity}\text{)}$$

Jadi π merupakan pemetaan linear.

2. Akan dibuktikan bahwa π merupakan suatu homomorfisma Lie. Ambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$, dan untuk sebarang $\mathbf{v} \in V$, diperoleh

$$\begin{aligned}
\pi([\mathbf{x}, \mathbf{y}])(\mathbf{v}) &= \pi_{([\mathbf{x},\mathbf{y}])}(\mathbf{v}) \\
&= ([\mathbf{x}, \mathbf{y}])\mathbf{v} \\
&= (\mathbf{xy} - \mathbf{yx})\mathbf{v} \\
&= (\mathbf{xy})\mathbf{v} - (\mathbf{yx})\mathbf{v} \\
&= \pi_{(\mathbf{xy})}(\mathbf{v}) - \pi_{(\mathbf{yx})}(\mathbf{v}) \\
&= \left(\pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{y}}\right)(\mathbf{v}) - \left(\pi_{\mathbf{y}}\pi_{\mathbf{x}}\right)(\mathbf{v}) \\
&= \left(\pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{y}} - \pi_{\mathbf{y}}\pi_{\mathbf{x}}\right)(\mathbf{v}) \\
&= \left(\left[\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}\right]\right)(\mathbf{v}) \\
&= ([\pi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{y})])(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Jadi π adalah homomorfisma Lie yang dilengkapi pemetaan linear, sehingga π merupakan representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ atas V.

Representasi adjoin merupakan representasi dari aljabar Lie yang memetakan setiap elemen dalam aljabar Lie ke aljabar Lie itu sendiri. Karena penelitian ini membahas bagaimana pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie, maka akan disajikan penjelasan mengenai representasi adjoin pada aljabar Lie.

2.10 Representasi Adjoin

Misalkan $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie atas ruang vektor V. Suatu pemetaan linear $ad: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dengan penggunaan definisi komutator di dalamnya merupakan sebuah pemetaan yang disebut dengan pemetaan adjoin atau representasi adjoin.

Di samping itu pemetaan ad merupakan pemetaan yang terbentuk dari derivasi terhadap operasi *bracket Lie*. Misalkan ad merupakan pemetaan adjoin yang didefinisikan sebagai berikut

$$ad: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

$$\mathbf{x} \mapsto ad_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}, \mathbf{z}] = \big[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]\big]$$

untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$. Dengan menerapkan definisi derivasi, maka berlaku

$$ad_{\mathbf{x}}([\mathbf{y}, \mathbf{z}]) = [ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \mathbf{z}] + [\mathbf{y}, ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})].$$

Jadi pemetaan adjoin ad memiliki sifat yang setara dengan aksioma **(L3)** aljabar Lie yaitu Identitas Jacobi (Hall, 2015).

Contoh

Misalkan pemetaan $ad: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ yang didefinisikan oleh $ad_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}, \mathbf{z}] = \big[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]\big]$ untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$ telah memenuhi aksioma aljabar Lie. Tunjukkan bahwa pemetaan ad merupakan representasi adjoin yang memenuhi Identitas Jacobi!

Penyelesaian:

Misalkan ad merupakan pemetaan adjoin yang didefinisikan sebagai berikut

$$ad: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

$$\mathbf{x} \mapsto ad_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}, \mathbf{z}] = \big[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]\big]$$

untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$. Perhatikan bahwa Identitas Jacobi dalam aljabar Lie pada penerapan pemetaan ad pada setiap elemen dalam Identitas Jacobi adalah sebagai berikut,

$$ad_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}, \mathbf{z}] + ad_{\mathbf{y}}[\mathbf{z}, \mathbf{x}] + ad_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0$$

untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$, dan $[-,-]$ adalah operasi komutator dalam aljabar Lie dengan memperhatikan definisi $ad_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}, \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]]$.

Akan diperiksa kembali menggunakan term-term dari penggunaan definisi pemetaan ad ke dalam Identitas Jacobi di atas,

1. $ad_{\mathbf{x}}[\mathbf{y}, \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]]$
2. $ad_{\mathbf{y}}[\mathbf{z}, \mathbf{x}] = [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]]$
3. $ad_{\mathbf{z}}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]]$.

Setelah ditambahkan ketiga term diperoleh sebagai berikut

$$[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0.$$

Dengan demikian pemetaan ad merupakan representasi adjoin yang memenuhi Identitas Jacobi (Hall, 2015).

2.11 Kajian Keislaman

Al-Qur’an merupakan kitab suci umat islam yang digunakan untuk penentu arah kehidupan manusia bahkan dapat dijadikan sebagai sumber pengetahuan oleh manusia. Banyak fakta mengenai ilmu pengetahuan dalam ayat-ayat Al-Qur’an. Al-Qur’an tidak hanya menjelaskan tentang ilmu agama saja, disisi lain terdapat 800 ayat kauniyah yang menjelaskan mengenai alam semesta dari ilmu fisika, niologi, matematika bahkan lain sebagainya (Purwanto, 2012).

Dari berbagai ilmu yang dijelaskan dalam Al-Qur'an salah satunya adalah ilmu matematika. Alam semesta pada dasarnya memuat berbagai bentuk dan konsep matematika sehingga kita sebagai manusia diwajibkan untuk berfikir dan memahami kebesaran Tuhan. Untuk mengetahui kebesaran Tuhan, dapat dilihat bahwa alam semesta memuat berbagai bentuk matematika. Allah menciptakan alam semesta beserta isinya dengan ukuran-ukuran secara teliti dan tepat menggunakan rumus-rumus persamaan dan perhitungan-perhitungan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2009). Telah dijelaskan pada firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Furqan ayat 2 adalah sebagai berikut.

Artinya: *"Yang memiliki kerajaan langit dan bumi, tidak mempunyai anak, tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan-Nya, dan Dia menciptakan segala sesuatu, lalu menetapkan ukuran-ukurannya dengan tepat."*

Ibnu Katsir menafsirkan ayat tersebut bahwa *"Telah menciptakan segala sesuatu dan menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."* sehingga Allah menciptakan segala sesuatu termasuk makhluk yang berada dibawah kekuasaan-Nya bukan berdasar nafsu, melainkan berjalan sesuai dengan ketentuan-Nya hingga hari kiamat dan setelah kiamat. Salah satu contoh bahwa Allah menciptakan sesuatu dengan tepat dan ukuran serapi-rapinya dapat dilihat dari terciptanya manusia yang memiliki logika dan kerangka berfikir. Cara berfikir manusia salah satunya dapat diterapkan pada berlogika dalam matematika. Matematika yang dibangun dari berbagai aksioma, definisi yang nantinya dapat melahirkan teorema dan lain sebagainya. Karena itu logika dalam matematika dilahirkan dari adanya kerangka berfikir karena ketepatan ukuran ciptaan Allah.

Terdapat firman Allah pada surat Al-Qamar ayat 49 yang menyatakan bahwa segala sesuatu telah diciptakan secara matematis. Firman Allah dalam surat Al-Qamar ayat 49 tersebut adalah sebagai berikut.

Artinya: *“Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.”*

Oleh karena itu segala sesuatu yang telah diciptakan memiliki ukuran, hitungan, rumus, bahkan formulanya secara matematis sehingga kita diperlukan untuk mempelajari matematika (Abdussakir, 2009). Kata ukuran yang dimaksud dalam surat Al-Qamar ayat 49 tersebut dapat diibaratkan dengan logika pada manusia. Di samping itu terdapat suatu ilmu matematika yang didalamnya memiliki berbagai definisi yang disepakati dan disetujui oleh semua orang. Karena ukuran logika pada manusia itulah yang membuat berbagai definisi tersebut dipercaya benar oleh semua orang.

Matematika merupakan sebuah ilmu yang diperlukan untuk dipelajari agar manusia dapat tertuntun dalam berfikir dan dapat memahami kebesaran-Nya. Salah satu cabang dari ilmu matematika adalah aljabar dan salah satu ilmu yang dipelajari dalam bidang aljabar adalah aljabar abstrak. Ilmu aljabar abstrak memiliki banyak manfaat, dengan banyaknya teori-teori yang diterapkan maka dapat berguna untuk membantu manusia dalam mengasah pola pikir sehingga manusia dapat memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Teori-teori dalam aljabar abstrak ini memiliki banyak komponen di dalamnya seperti representasi adjoin pada aljabar Lie yang akan diteliti pada penelitian ini.

2.12 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie dalam penelitian ini adalah membentuk sebuah representasi adjoin pada aljabar Lie dengan menggunakan konsep-konsep struktur aljabar linear maupun struktur aljabar abstrak. Seperti halnya dalam artikel yang berjudul *“Adjoin Representations of Lie Algebras”* yang dipublikasikan tahun 2021, ditunjukkan pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie dengan menggunakan konsep dasar grup. Hanya saja pada penelitian tersebut masih belum detail dalam menjelaskan bagaimana pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie tersebut. Kemudian penelitian ini membahas pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie dengan konsep dasar ruang vektor dengan melengkapi pembuktian dari teorema, lemma, proposisi dalam membentuk representasi adjoin pada aljabar Lie.

1. Membuktikan lemma bahkan teorema yang berhubungan dengan definisi pada aljabar Lie.
2. Membuktikan proposisi, teorema mengenai keterkaitan antara suatu homomorfisma Lie dengan representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$.
3. Membuktikan lemma mengenai derivasi yang bersifat tertutup terhadap operasi *bracket Lie*.
4. Membuktikan teorema dan proposisi yang menyatakan bahwa representasi adjoin pada aljabar Lie terbentuk dari representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang memetakan $\mathfrak{g}$ ke derivasi $\mathfrak{g}$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kualitatif dengan cara studi literatur. Maksud dari studi literatur ini adalah sebuah cara untuk mengumpulkan data-data atau bahan pustaka sebagai acuan penelitian berupa artikel, jurnal, *lecture note*, bahkan buku-buku yang berkaitan pada penelitian ini. Sedangkan deskriptif kualitatif merupakan sebuah rancangan kegiatan dengan tujuan memperoleh data yang hasilnya bersifat naratif. Pada penelitian ini, peneliti membahas dari hal-hal yang *general* menuju ke khusus. Acuan dalam penelitian ini adalah pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie.

3.2 Pra Penelitian

Langkah-langkah dalam pra penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Mempelajari dan memahami mengenai konsep materi aljabar Lie.
2. Mempelajari dan memahami konsep materi mengenai homomorfisma Lie dan representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$.
3. Mempelajari mengenai materi derivasi $\mathfrak{g}$.
4. Mempelajari dan memahami sebuah representasi adjoin pada aljabar Lie $\mathfrak{g}$.

3.3 Tahapan Penelitian

Pada subbab ini akan diberikan metode atau langkah-langkah dalam menyelesaikan masalah pada penelitian ini. Untuk memperoleh kajian mengenai bagaimana pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie, diperlukan langkah-langkah untuk membentuk representasi adjoin itu sendiri. Maka dari itu akan dikaji dengan adanya pembuktian-pembuktian dari berbagai lemma, teorema hingga proposisi yang telah dikumpulkan sehingga didapatkan langkah-langkah berikut:

1. Membuktikan lemma yang membahas tentang pembentukan sifat aljabar Lie dan teorema mengenai sifat-sifat yang dimiliki oleh aljabar Lie.
2. Membuktikan proposisi yang menyatakan bahwa homomorfisma Lie telah memenuhi aksioma aljabar Lie, dan pembuktian teorema yang menyatakan bahwa representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ merupakan homomorfisma Lie yang menggunakan pemetaan linear.
3. Membuktikan lemma yang menunjukkan bahwa derivasi V bersifat tertutup terhadap operasi *bracket Lie*.
4. Membuktikan teorema yang menyatakan bahwa pemetaan adjoin merupakan derivasi dari aljabar Lie. Selain itu juga ditunjukkan pembuktian teorema yang menyatakan bahwa pemetaan adjoin juga merupakan sebuah homomorfisma Lie yang menggunakan pemetaan linear atau diistilahkan dengan representasi aljabar Lie. Dan diberikan hasil akhir berupa pembuktian proposisi yang menyatakan bahwa representasi adjoin pada aljabar Lie terbentuk dari representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang memetakan $\mathfrak{g}$ ke derivasi $\mathfrak{g}$.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab pembahasan ini diberikan jawaban atas rumusan masalah mengenai pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie dari berbagai pembuktian teorema, lemma bahkan proposisi.

4.1 Aljabar Lie $\mathfrak{g}$

Terdapat sajian satu mengenai aljabar Lie beserta satu teorema mengenai sifat-sifat aljabar Lie $\mathfrak{g}$.

Lemma 4.1.1 ini diberikan karena berkaitan dengan teorema selanjutnya sehingga dapat mempermudah penyelesaian pembuktian pada Teorema 4.1.2.

Lemma 4.1.1

Misalkan $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie dan diperoleh $[\mathbf{v}, \mathbf{0}] = \mathbf{0} = [\mathbf{0}, \mathbf{v}]$, untuk semua $\mathbf{v} \in \mathfrak{g}$ (Erdmann & Wildon, 2006).

Bukti:

Penyelesaian pembuktian dari lemma ini dapat disesuaikan dengan pembuktian dari teorema ruang vektor pada kajian teori. Disamping itu berdasarkan aksioma **(L2)** dari definisi aljabar Lie, diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= [\mathbf{v}, \mathbf{v}] && \text{(Aksioma } \mathbf{(L2)} \text{ pada aljabar Lie)} \\ &= [\mathbf{v}, \mathbf{v} + \mathbf{0}] && \text{(Distributif)} \\ &= [\mathbf{v}, \mathbf{v}] + [\mathbf{v}, \mathbf{0}] \end{aligned}$$

$$= \mathbf{0} + [\mathbf{v}, \mathbf{0}]$$

$$= [\mathbf{v}, \mathbf{0}]$$

dan juga diperoleh

$$\mathbf{0} = [\mathbf{v}, \mathbf{v}]$$

$$= [\mathbf{v} + \mathbf{0}, \mathbf{v}]$$

$$= [\mathbf{v}, \mathbf{v}] + [\mathbf{0}, \mathbf{v}]$$

$$= \mathbf{0} + [\mathbf{0}, \mathbf{v}]$$

$$= [\mathbf{0}, \mathbf{v}].$$

Jadi terbukti bahwa $[\mathbf{v}, \mathbf{0}] = \mathbf{0} = [\mathbf{0}, \mathbf{v}]$.

Selanjutnya diberikan teorema yang memberikan sifat-sifat aljabar Lie yaitu Teorema 4.1.2 di bawah ini.

Teorema 4.1.2

Diberikan suatu aljabar Lie yang berlaku,

1. $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = \mathbf{0}$, untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$
2. $[\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] + [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = \mathbf{0}$, untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$
3. $[\mathbf{x}, \mathbf{0}] = \mathbf{0} = [\mathbf{0}, \mathbf{x}]$ untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$ (Hall, 2005).

Bukti:

1. Berdasarkan aksioma **(L2')** pada definisi aljabar Lie, maka untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$ diperoleh $[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = -[\mathbf{x}, \mathbf{x}]$. Perhatikan bahwa,

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x}] = -[\mathbf{x}, \mathbf{x}]$$

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x}] + [\mathbf{x}, \mathbf{x}] = -[\mathbf{x}, \mathbf{x}] + [\mathbf{x}, \mathbf{x}]$$

$$[\mathbf{x},\mathbf{x}] + [\mathbf{x},\mathbf{x}] = \mathbf{0}$$

$$2[\mathbf{x},\mathbf{x}] = \mathbf{0}$$ (Membagi kedua sisi persamaan dengan 2)

$$[\mathbf{x},\mathbf{x}] = \mathbf{0}.$$

Sehingga untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$, berlaku $[\mathbf{x},\mathbf{x}] = \mathbf{0}$.

2. Dari aksioma **(L2')** dan **(L3)** pada definisi aljabar Lie, diperoleh

   $[\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] = [[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}] + [\mathbf{y},[\mathbf{x},\mathbf{z}]]$ (Aksioma **(L3)** pada aljabat Lie)

   $\Leftrightarrow [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] = -[\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}]] - [\mathbf{y},[\mathbf{z},\mathbf{x}]]$ (Memenuhi sifat anti-simetri)

   $\Leftrightarrow [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] + [\mathbf{y},[\mathbf{z},\mathbf{x}]] + [\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}]] = \mathbf{0}.$

3. Untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathfrak{g}$, diperoleh

   $$[\mathbf{x},\mathbf{0}] = \mathbf{0} = [\mathbf{0},\mathbf{x}].$$

   Hal ini dikarenakan

   $$\begin{aligned}\mathbf{0} &= [\mathbf{x},\mathbf{x}]\\ &= [\mathbf{x}+\mathbf{0},\mathbf{x}]\\ &= [\mathbf{x},\mathbf{x}] + [\mathbf{0},\mathbf{x}]\\ &= \mathbf{0} + [\mathbf{0},\mathbf{x}]\end{aligned}$$

   dan

   $$\begin{aligned}\mathbf{0} &= [\mathbf{x},\mathbf{x}]\\ &= [\mathbf{x},\mathbf{x}+\mathbf{0}]\\ &= [\mathbf{x},\mathbf{x}] + [\mathbf{x},\mathbf{0}]\\ &= \mathbf{0} + [\mathbf{x},\mathbf{0}].\end{aligned}$$

   Jadi $[\mathbf{x},\mathbf{0}] = \mathbf{0} = [\mathbf{0},\mathbf{x}]$.

4.2 Representasi Aljabar Lie $\mathfrak{g}$ dari Homomorfisma Lie $\mathfrak{g}$

Setelah disajikan mengenai teorema, lemma dari aljabar Lie, maka pada bagian ini akan disajikan pembuktian proposisi dan teorema mengenai representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang berkaitan dengan homomorfisma Lie.

Proposisi 4.2.1

Jika $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie dan ditunjukkan bahwa

$$\pi: \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$$

$$\mathbf{x} \mapsto \pi_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}(\mathbf{z}) = [[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}]$$

kemudian $\pi_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]} = \pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{y}} - \pi_{\mathbf{y}}\pi_{\mathbf{x}} = [\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}]$, maka $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ merupakan homomorfisma Lie yang memenuhi Identitas Jacobi dengan menggunakan definisi komutator (Hall, 2015).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $\pi: \mathfrak{g} \rightarrow gl(\mathfrak{g})$ memenuhi aksioma Identitas Jacobi. Perhatikan bahwa

$$\pi_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}(\mathbf{z}) = [[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}]$$

Sedangkan $[\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}](\mathbf{z}) = [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] - [\mathbf{y},[\mathbf{x},\mathbf{z}]]$ sehingga diperoleh

$$[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}] = [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] - [\mathbf{y},[\mathbf{x},\mathbf{z}]].$$

Karena $[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}] = [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] - [\mathbf{y},[\mathbf{x},\mathbf{z}]]$, maka pemetaan tersebut telah terbukti memenuhi aksioma Identitas Jacobi.

Setelah ditunjukkan bahwa homomorfisma telah memenuhi aksioma aljabar Lie yaitu Identitas Jacobi pada Proposisi 4.2.1, kemudian akan ditunjukkan bahwa representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ merupakan homomorfisma Lie dengan menggunakan pemetaan linear pada Teorema 4.2.2 berikut.

Teorema 4.2.2

Jika homomorfisma Lie didefinisikan dengan $\pi: \mathfrak{g} \to gl(V)$, maka dapat disebut dengan representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ atas V (Hall, 2015).

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa pemetaan π merupakan suatu homomorfisma Lie.

1. Sebelumnya dikarenakan representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ menggunakan pemetaan linear, maka akan dibuktikan bahwa π merupakan pemetaan linear sesuai sifat *homogenity* pada definisi pemetaan linear. Sehingga $\pi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\pi(\mathbf{x}) + \beta\pi(\mathbf{y})$ untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$ dan α, β merupakan skalar. Ambil sebarang $\mathbf{v} \in V$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(\mathbf{v}) &= \pi_{(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})}(\mathbf{v}) \\
&= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})\mathbf{v} \\
&= (\alpha\mathbf{x})\mathbf{v} + (\beta\mathbf{y})\mathbf{v} \\
&= \alpha(\mathbf{x}\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{y}\mathbf{v}) \\
&= \alpha\pi_{\mathbf{x}}(\mathbf{v}) + \beta\pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{v}) \\
&= \left(\alpha\pi_{\mathbf{x}} + \beta\pi_{\mathbf{y}}\right)(\mathbf{v}) \\
&= \left(\alpha\pi(\mathbf{x}) + \beta\pi(\mathbf{y})\right)(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Jadi π terbukti merupakan pemetaan linear.

2. Akan dibuktikan bahwa π merupakan suatu homomorfisma Lie sesuai definisi homomorfisma Lie. Ambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$ dan untuk setiap $\mathbf{v} \in V$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\pi([\mathbf{x},\mathbf{y}])(\mathbf{v}) &= \pi_{([\mathrm{x},\mathrm{y}])}(\mathbf{v}) \\
&= ([\mathbf{x},\mathbf{y}])\mathbf{v} \\
&= (\boldsymbol{xy} - \boldsymbol{yx})\boldsymbol{v} && \text{(Definisi Komutator)} \\
&= (\mathbf{xy})\mathbf{v} - (\mathbf{yx})\mathbf{v} && \text{(Sifat Distributif)} \\
&= \pi_{(xy)}(\boldsymbol{v}) - \pi_{(yx)}(\boldsymbol{v}) \\
&= (\pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{y}})(\mathbf{v}) - (\pi_{\mathbf{y}}\pi_{\mathbf{x}})(\mathbf{v}) \\
&= (\pi_{\mathbf{x}}\pi_{\mathbf{y}} - \pi_{\mathbf{y}}\pi_{\mathbf{x}})(\mathbf{v}) \\
&= ([\pi_{\mathbf{x}}, \pi_{\mathbf{y}}])(\mathbf{v}) \\
&= ([\pi(\mathbf{x})\pi(\mathbf{y})])(\mathbf{v}).
\end{aligned}
$$

Jadi π terbukti merupakan homomorfisma Lie.

Karena pemetaan $\pi: \mathfrak{g} \to gl(V)$ telah memenuhi syarat definisi representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ adalah sebuah homomorfisma Lie dan pemetaan tersebut menggunakan pemetaan linear, maka dapat dikatakan bahwa π adalah representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ atas V.

4.3 Derivasi $\mathfrak{g}$

Sebelum membahas representasi adjoin akan diberikan lemma dari teori yang melatarbelakangi pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie yaitu derivasi $\mathfrak{g}$. Pada Lemma 4.3.1 berikut, ditunjukkan bahwa derivasi V bersifat tertutup terhadap operasi *bracket Lie* (operasi komutator aljabar Lie).

Lemma 4.3.1

Jika D dan E merupakan derivasi dari V atas lapangan $\mathbb{F}$, maka operasi *bracket Lie* yang dinotasikan dengan $[D, E]$ yang menggunakan definisi komutator, didefinisikan dengan $[D, E] = DE - ED$ juga merupakan derivasi dari V (Erdmann & Wildon, 2006).

Bukti:

Sebelumnya akan dibuktikan bahwa $[D, E] = DE - ED$ merupakan operator linear dari V ke V. Ambil sebarang $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$. Maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
[D, E](\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) &= (DE - ED)(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) \\
&= (DE)(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) - (ED)(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2}) \\
&= D\big(E(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2})\big) - E\big(D(\alpha\mathbf{x_1} + \beta\mathbf{x_2})\big) \\
&= D\big(E(\alpha\mathbf{x_1}) + E(\beta\mathbf{x_2})\big) - E\big(D(\alpha\mathbf{x_1}) + D(\beta\mathbf{x_2})\big) \\
&= D\big(E(\alpha\mathbf{x_1})\big) + D\big(E(\beta\mathbf{x_2})\big) - E\big(D(\alpha\mathbf{x_1})\big) - E\big(D(\beta\mathbf{x_2})\big) \\
&= D\big(\alpha E(\mathbf{x_1})\big) + D\big(\beta E(\mathbf{x_2})\big) - E\big(\alpha D(\mathbf{x_1})\big) - E\big(\beta D(\mathbf{x_2})\big) \\
&= \alpha D\big(E(\mathbf{x_1})\big) + \beta D\big(E(\mathbf{x_2})\big) - \alpha E\big(D(\mathbf{x_1})\big) - \beta E\big(D(\mathbf{x_2})\big) \\
&= \alpha(DE)(\mathbf{x_1}) + \beta(DE)(\mathbf{x_2}) - \alpha(ED)(\mathbf{x_1}) - \beta(ED)(\mathbf{x_2}) \\
&= \alpha(DE)(\mathbf{x_1}) - \alpha(ED)(\mathbf{x_1}) + \beta(DE)(\mathbf{x_2}) - \beta(ED)(\mathbf{x_2}) \\
&= \alpha((DE)(\mathbf{x_1}) - (ED)(\mathbf{x_1})) + \beta(DE)(\mathbf{x_2}) - (ED)(\mathbf{x_2})) \\
&= \alpha(DE - ED)(\mathbf{x_1}) + \beta(DE - ED)(\mathbf{x_2}) \\
&= \alpha[D, E](\mathbf{x_1}) + \beta[D, E](\mathbf{x_2}).
\end{aligned}$$

Setelah ditunjukkan bahwa $[D, E]$ merupakan operator linear, kemudian akan dibuktikan $[D, E]$ merupakan sebuah derivasi V berdasarkan definisi derivasi untuk setiap $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$.

$$
\begin{aligned}
[D,E](\mathbf{ab}) &= (DE)(\mathbf{ab}) - (ED)(\mathbf{ab}) \\
&= D(\mathbf{a}E(\mathbf{b}) + E(\mathbf{a})\mathbf{b}) - E(\mathbf{a}D(\mathbf{b}) + D(\mathbf{a})\mathbf{b}) \\
&= D\big(\mathbf{a}E(\mathbf{b})\big) + D(E(\mathbf{a})\mathbf{b}) - E\big(\mathbf{a}D(\mathbf{b})\big) - E(D(\mathbf{a})\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}D\big(E(\mathbf{b})\big) + D(\mathbf{a})E(\mathbf{b}) + E(\mathbf{a})D(\mathbf{b}) + D\big(E(\mathbf{a})\big)\mathbf{b} \\
&\quad - \mathbf{a}E\big(D(\mathbf{b})\big) - E(\mathbf{a})D(\mathbf{b}) - D(\mathbf{a})E(\mathbf{b}) - E\big(D(\mathbf{a})\big)\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}D\big(E(\mathbf{b})\big) + D\big(E(\mathbf{a})\big)\mathbf{b} - \mathbf{a}E\big(D(\mathbf{b})\big) - E\big(D(\mathbf{a})\big)\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}[D,E](\mathbf{b}) + [D,E](\mathbf{a})\mathbf{b}.
\end{aligned}
$$

Jadi $[D,E](\mathbf{ab}) = \mathbf{a}[D,E](\mathbf{b}) + [D,E](\mathbf{a})\mathbf{b} \in Der(V)$ sehingga terbukti bahwa $[D,E]$ merupakan derivasi V.

Dapat dilihat pada Lemma 4.3.1 ini bahwa untuk setiap $D,E \in Der(V)$ berlaku $[D,E] \in Der(V)$ sehingga dapat dikatakan bahwa $Der(V)$ bersifat tertutup terhadap operasi *bracket Lie* (operasi komutator aljabar Lie).

4.4 Representasi Adjoin pada Aljabar Lie

Setelah membahas derivasi, selanjutnya diberikan pembahasan dari inti dari penelitian ini yaitu terbentuknya representasi adjoin. Terdapat sebuah teorema yang mengatakan bahwa pemetaan adjoin adalah derivasi dari aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang dinyatakan pada Teorema 4.4.1 berikut.

Teorema 4.4.1

Pemetaan adjoin merupakan derivasi dari $\mathfrak{g}$ yang dapat disebut dengan *inner derivation* (Hall, 2015).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa sebuah pemetaan adjoin ad yang didefinisikan

$$ad\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

$$\mathbf{x} \mapsto ad_{\mathbf{x}}[\mathbf{y},\mathbf{z}] = [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]]$$

merupakan derivasi dari $\mathfrak{g}$. Untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathfrak{g}$, maka berlaku

$$\begin{aligned}
ad_{\mathbf{x}}([\mathbf{y},\mathbf{z}]) &= [\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]] \\
&= [[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}] + [\mathbf{y},[\mathbf{x},\mathbf{z}]] && \text{(Identitas Jacobi)} \\
&= -[\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}]] - [\mathbf{y},[\mathbf{z},\mathbf{x}]] && \text{(Anti-simetri)} \\
&= [[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}] + [\mathbf{y},[\mathbf{x},\mathbf{z}]] \\
&= [ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}),\mathbf{z}] + [\mathbf{y},ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] && \text{(Operator Adjugasi)} \\
&= [\mathbf{y},ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] + [ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]. && \text{(Derivasi)}
\end{aligned}$$

Karena $ad_{\mathbf{x}}([\mathbf{y},\mathbf{z}]) = [\mathbf{y},ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{z})] + [ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}),\mathbf{z}]$ telah memenuhi definisi derivasi, jadi terbukti bahwa pemetaan adjoin $ad_{\mathbf{x}}$ merupakan derivasi dari $\mathfrak{g}$. Dapat juga dikatakan bahwa $ad_{\mathbf{x}}$ merupakan elemen dari $Der(\mathfrak{g})$ yang merupakan himpunan semua derivasi dari $\mathfrak{g}$.

Pada Teorema 4.4.2 ini, terdapat pembahasan bahwa representasi adjoin tidak hanya merupakan derivasi, melainkan juga merupakan sebuah homomorfisma Lie yang menggunakan pemetaan linear.

Teorema 4.4.2

Pemetaan adjoin ad merupakan sebuah homomorfisma Lie (Erdmann & Wildon, 2006).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa pemetaan adjoin merupakan sebuah homomorfisma Lie. Misalkan $\mathfrak{g}$ merupakan aljabar Lie, didefinisikan pemetaan

$$ad: \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$$

dengan $ad_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}(\mathbf{z}) = \big[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}\big]$ untuk setiap $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathfrak{g}$. Untuk menunjukkan ad merupakan homomorfisma Lie, maka perlu ditunjukkan

$$ad([\mathbf{x},\mathbf{y}]) = ad_{\mathbf{x}}ad_{\mathbf{y}} - ad_{\mathbf{y}}ad_{\mathbf{x}}$$

Ambil sebarang $\mathbf{z} \in \mathfrak{g}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} ad_{[\mathbf{x},\mathbf{y}]}(\mathbf{z}) &= \big[[\mathbf{x},\mathbf{y}],\mathbf{z}\big] \\ &= \big[\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]\big] + \big[\mathbf{y},[\mathbf{z},\mathbf{x}]\big] && \text{(Identitas Jacobi)} \\ &= (ad\mathbf{x})([\mathbf{y},\mathbf{z}]) + (ad\mathbf{y})([\mathbf{z},\mathbf{x}]) && \text{(Operator Adjugasi)} \\ &= (ad\mathbf{x})(ad\mathbf{y})(\mathbf{z}) - (ad\ \mathbf{y})([\mathbf{x},\mathbf{z}]) && \text{(Antri-Simetri)} \\ &= (ad\mathbf{x})(ad\mathbf{y})(\mathbf{z}) - (ad\mathbf{y})(ad\mathbf{x})(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

Karena $(ad[\mathbf{x},\mathbf{y}]) = (ad\mathbf{x})(ad\mathbf{y})(\mathbf{z}) - (ad\mathbf{y})(ad\mathbf{x})(\mathbf{z})$, maka dari itu terbukti bahwa pemetaan adjoin merupakan sebuah homomorfisma Lie.

Setelah diberikan pembahasan pada Teorema 4.4.1 dan Teorema 4.4.2, kemudian didapatkan sebuah proposisi representasi adjoin pada aljabar Lie yang menggunakan konsep derivasi dengan mengambil pemetaan adjoin sebagai anggota dari $Der(\mathfrak{g})$ dan pemetaan adjoin merupakan sebuah homomorfisma Lie.

Proposisi 4.4.3

Diberikan aljabar Lie $\mathfrak{g}$ atas ruang vektor V berdimensi hingga. Pemetaan ad dari $\mathfrak{g}$ ke $Der(\mathfrak{g})$ yang didefinisikan oleh

$$ad: \mathfrak{g} \to Der(\mathfrak{g})$$
$$\mathbf{x} \mapsto ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{g}$ merupakan representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang disebut dengan representasi adjoin pada aljabar Lie (Hall, 2015).

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan ad merupakan pemetaan linear $ad(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha ad(\mathbf{x}) + \beta ad(\mathbf{y})$. Ambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$, diperoleh

$$\begin{aligned} ad(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(\mathbf{z}) &= ad_{(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})}(\mathbf{z}) \\ &= [\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, \mathbf{z}] \\ &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})(\mathbf{z}) - (\mathbf{z})(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \\ &= \alpha\mathbf{x}(\mathbf{z}) + \beta\mathbf{y}(\mathbf{z}) - (\mathbf{z})\alpha\mathbf{x} - (\mathbf{z})\beta\mathbf{y} \\ &= (\alpha\mathbf{x}(\mathbf{z}) - (\mathbf{z})\alpha\mathbf{x}) + (\beta\mathbf{y}(\mathbf{z}) - (\mathbf{z})\beta\mathbf{y}) \\ &= [\alpha\mathbf{x}, \mathbf{z}] + [\beta\mathbf{y}, \mathbf{z}] \\ &= \alpha[\mathbf{x}, \mathbf{z}] + \beta[\mathbf{y}, \mathbf{z}] \\ &= \alpha ad_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) + \beta ad_{\mathbf{y}}(\mathbf{z}) \\ &= \left(\alpha ad_{\mathbf{x}} + \beta ad_{\mathbf{y}}\right)(\mathbf{z}) \\ &= \big(\alpha ad(\mathbf{x}) + \beta ad(\mathbf{y})\big)(\mathbf{z}). \end{aligned}$$

   Sehingga terbukti bahwa pemetaan ad merupakan pemetaan linear

2. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan ad merupakan homomorfisma Lie. Ambil sebarang $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathfrak{g}$, sehingga diperoleh

$$ad([\mathbf{x}, \mathbf{y}])(\mathbf{z}) = ad_{([\mathbf{x},\mathbf{y}])}(\mathbf{z})$$

$$= [[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}]$$

$$= -[\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}]]$$

$$= -[\mathbf{z}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}] - [\mathbf{x}, [\mathbf{z}, \mathbf{y}]]$$

$$= [\mathbf{y}, [\mathbf{z}, \mathbf{x}]] + [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]]$$

$$= [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] - [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]]$$

$$= ad_{\mathrm{x}}\left(ad_{\mathrm{y}}(\mathbf{z})\right) - ad_{\mathrm{y}}\left(ad_{\mathrm{x}}(\mathbf{z})\right)$$

$$= \left(ad_{\mathrm{x}}ad_{\mathrm{y}}\right)(\mathbf{z}) - \left(ad_{\mathrm{y}}ad_{\mathrm{x}}\right)(\mathbf{z})$$

$$= \left(ad_{\mathrm{x}}ad_{\mathrm{y}} - ad_{\mathrm{y}}ad_{\mathrm{x}}\right)(\mathbf{z})$$

$$= \left(\left[ad_{\mathrm{x}}, ad_{\mathrm{y}}\right]\right)(\mathbf{z})$$

$$= ([ad(\mathbf{x}), ad(\mathbf{y})])(\mathbf{z}).$$

Jadi pemetaan ad terbukti merupakan homomorfisma Lie. Selain itu dapat dikatakan bahwa pemetaan ad merupakan representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ atas $\mathfrak{g}$ yang dapat disebut dengan representasi adjoin pada aljabar Lie.

4.5 Kajian Keislaman dengan Hasil Penelitian

Al-Qur'an merupakan kitab suci yang memuat berbagai ilmu di dalamnya. Maka dari itu umat islam perlu untuk berfikir serta memahami Al-Qur'an. Untuk memahami ilmu-ilmu dalam Al-Qur'an perlu dilakukan pengkajian secara mendalam. Berbagai ilmu dalam Al-Qur'an, salah satunya telah dijelaskan tentang pembentukan manusia.

Manusia merupakan makhluk yang paling mulia di antara ciptaan Allah SWT. Proses terciptanya manusia salah satunya sesuai pada kandungan surat Al-Mu'minun ayat 12-14 adalah sebagai berikut.

Artinya: *"Sungguh, Kami telah menciptakan manusia dari sari pati (yang berasal) dari tanah. Kemudian, Kami menjadikannya air mani di dalam tempat yang kukuh (rahim). Kemudian, air mani itu kami jadikan sesuatu yang mengandung (darah). Lalu, sesuatu yang menggantung itu Kami jadikan segumpal daging. Lalu, segumpal daging itu Kami jadikan tulang belulang. Lalu, tulang belulang itu Kami bungkus dengan daging. Kemudian, Kami menjadikannya makhluk yang (berbentuk) lain. Maha Suci Allah sebaik-baik pencipta."* (Q.S. Al-Mu'minun ayat 12-14).

Quraish Shihab menafsirkan surat Al-Mu'minun ayat 12-14 bahwa hendaknya manusia mengamati asal kejadiannya. Sebab, penciptaan manusia merupakan salah satu bukti kekuasaan Allah. Manusia diciptakan oleh Allah dari saripati tanah. Kemudian Allah menciptakan keturunannya dengan menciptakan sperma yang mengandung segala unsur kehidupan yang bertempat pada Rahim, sebuah tempat yang kokoh dan dapat melindungi. Setelah membuahi ovum, sperma itu dijadikan darah hingga darah dijadikan sepotong daging yang kemudian dibentuk menjadi tulang. Tulang tersebut dibalut dengan daging. Setelah itu Allah sempurnakan ciptaan-Nya sehingga ia menjadi makhluk lain. Maha tinggi Allah dalam ke-Maha agungan dan ke-Maha kuasaan-Nya (Muttaqin, 2018).

Pembentukan manusia yang Allah ciptakan merupakan suatu pelajaran yang wajib untuk manusia pelajari. Disamping pembentukan manusia, berbagai ilmu juga mengajarkan mengenai pembentukan suatu benda salah satunya adalah pada ilmu matematika. Penelitian ini dilakukan dengan tujuan membentuk suatu ilmu lain yaitu representasi adjoin pada aljabar Lie, yang digunakan untuk membantu memberikan pembelajaran baru bagi pembaca, sama halnya dengan pembelajaran terbentuknya manusia dalam Al-Qur'an.

Representasi adjoin pada aljabar Lie dapat terbentuk dari berbagai materi yang melatarbelakangi terbentuknya representasi tersebut. Materi-materi tersebut adalah materi aljabar Lie $\mathfrak{g}$ yang berkaitan dengan homomorfisma Lie atau representasi aljabar Lie $\mathfrak{g}$. Setelah diberikan mengenai kedua materi tersebut, kemudian diberikan materi mengenai derivasi $\mathfrak{g}$. Sehingga didapatkan sebuah representasi adjoin pada aljabar Lie yang merupakan sebuah homomorfisma Lie yang berkaitan dengan sebuah derivasi $\mathfrak{g}$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab IV, maka dapat disimpulkan bahwa representasi adjoin pada aljabar Lie dapat dibentuk dari sebuah homomorfisma Lie yang merupakan sebuah pemetaan yang memenuhi aksioma aljabar Lie. Homomorfisma Lie itu dapat disebut dengan representasi aljabar Lie. Selain itu, representasi adjoin ini juga dapat dibentuk dari sebuah derivasi $\mathfrak{g}$. Sehingga representasi adjoin pada aljabar Lie ini merupakan sebuah gabungan dari suatu homomorfisma Lie dan derivasi $\mathfrak{g}$. Dan diketahui bahwa representasi adjoin ini merupakan salah satu representasi yang dimiliki oleh aljabar Lie sehingga dapat disebut dengan representasi adjoin pada aljabar Lie.

5.2 Saran

Pada skripsi ini, peneliti melakukan penelitian terhadap pembentukan representasi adjoin pada aljabar Lie dengan meneliti antara keterkaitan materi-materi yang melatarbelakanginya. Kemudian peneliti menyarankan untuk peneliti selanjutnya untuk melakukan penelitian mengenai pembentukan representasi aljabar Lie yang lain seperti pembentukan representasi trivial pada aljabar Lie maupun pembentukan representasi standar pada aljabar Lie.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, M. (2009). *Umat Islam Perlu Menguasai Matematika*. Malang: Maliki Press, 1-4.

Andari, A. (2017). *Aljabar Linear Elementer.* Malang: Brawijaya Press, 81-194.

Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary Linear Algebra.* Amerika Serikat: John Wiley & Sons, 352.

Arrifada, Y., Rofiqoh, D., & Kusaeri. (2016). *Dinamika Perkembangan Matematika Abad Pertengahan*. Surabaya: Jurnal Fourier,2.

Assal, F. A. (2014). *Invitation to Lie Algebras and Representations*. https://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/AlAssal.pdf, diakses pada 25 Januari 2024.

Dummit, D. S., & M.Foote, R. (2004). *Abstract Algebra.* Burlington: John Wiley $ Sond, Inc, 1-17.

Erdmann, K., & Holm, T. (2018). *Algebras and Representation Theory.* USA: Springer, 1-2.

Erdmann, K., & Wildon, M. J. (2006). *Introduction to Lie Algebras.* USA: Springer,2-6.

Etingof, P., Golberg, O., Hensel, S., Liu, T., Alex, Dmitry, & Elena. (2011). *Introduction to Representation Theory.* America: AMS, 9-10.

Fuchs, J., Kisil, V. V., & Onishchik, A. L. (1994). *The Shopus Lie Memorial Collection.* Inggris: Aschehoug AS, 3-4.

Fulton, W., & Haris, J. (2004). *Representation Theory.* USA: Springer, 109-110.

Hadley, G. (1992). *Edisi Revisi Aljabar Linear.* Jakarta: Penerbit Erlangga, 14-15.

Hall, B. (2015). *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations.* USA: Springer, 49-52.

Hasibuan, N. (2015). *Pemetaan Struktur Aljabar*. Medan: I-Smart Matematika, 1.

James, G., & Liebeck, M. (2001). *Representations and Characters of Group.* USA: Cambridge University Press,vii.

Kemenag RI. (2024). *Quran Kemenag.* Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Quran. https://quran.kemenag.co.id.

Kusumawati, R. (2014). *Aljabar Linear & Matriks.* Malang: Maliki Press, 200-201.

Larson, R. (2013). *Elementary Linear Algebra.* USA: Richard Stratton, 155-156.

Mahmud, A. H., Persulessy, E. R., & W, H. (2013). *Komutator dan Identitas Komutator*. Bandung: Barekeng, 29-30.

Mas'Oed, F. (2013). *Struktur Aljabar.* Jakarta: Akademia Permata, 14-15.

Michiel, H. (2004). *Algebras, Rings and Modules.* USA: Springer, 3-5.

Muttaqin Id. (2018). *Tafsir Qu'an*. https://www.muttaqin.id/2018/08/tafsir-surat-al-muminun-ayat-12-14-artinya.html, diakses pada 10 Mei 2024.

Purwanto, A. (2012). *Nalar Ayat-Ayat Semesta.* Bandung: Mizan, 5.

Ruhama, M. A. (2012). *Sifat-Sifat Pemetaan Bilinear*. Ternate: Universitas Khairun Press, 4-6.

Setya, W. (1995). *Aljabar Linear.* Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama, 345-346.

Stewart, D. (2015). *Lie Algebras and their Representation.* London: Cambridge University, 3-7.

Sukirman. (2005). *Pengantar Aljabar Abstrak.* Malang: Universitas Negeri Malang, 35-36.

Trisna, U., Susanti, W., Raharjo, D., Tri, S., & Kasim, J. (2020). *Komposisi Fungsi dan Inves Fungsi.* Jakarta: Madrasah Reform, 16-17.

Watson, A. (2007). *Key Understanding in Mathematics Learning.* Inggris: University of Oxfort, 3-5.

RIWAYAT HIDUP

Baiq Afifah Zahra Himmawan, lebih dikenal dengan Afi. Dilahirkan di Malang, 5 Februari 2002 sebagai anak pertama dari pasangan Lalu Zinny Himmawan dan Yeni Susilowati. Pendidikan dasar diperoleh melalui TK Ar-Ridlo dan dilanjutkan di SD Kartika IV-6 yang lulus di tahun 2014. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan di SMPN 24 Malang hingga tahun 2017. Selanjutnya penulis mendaftarkan diri sebagai pelajar di SMA Islam Malang di tahun 2017-2020. Setelah lulus SMA, penulis mendapatkan kesempatan diterima jalur SNMPTN di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama Perkuliahan, penulis aktif dalam berorganisasi seperti terdaftar sebagai anggota PMII 2020 di bidang Teater Galileo. Apabila ada pertanyaan, saran, dan kritik mengenai penelitian ini, dapat menghubungi penulis melalui
email : baiqafifah5@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Baiq Afifah Zahra Himmawan
NIM	:	200601110019
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Pembentukan Representasi Adjoin pada Aljabar Lie
Pembimbing I	:	Intan Nisfulaila, M.Si.
Pembimbing II	:	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	25 September 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	29 Januari 2024	Konsultasi Kajian Agama	2.
3.	30 Januari 2024	Konsultasi Revisi Kajian Agama	3.
4.	30 Januari 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	22 November 2023	Konsultasi Revisi Bab III	5.
6.	2 Maret 2024	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	2 Maret 2024	ACC Seminar Proposal	7.
8.	13 Maret 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	16 Mei 2024	Konsultasi Bab IV	9.
10.	16 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	21 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	30 Mei 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	12.
13.	30 Mei 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	13.
14.	29 Mei 2024	ACC Bab IV dan V	14.
15.	29 Mei 2024	ACC Seminar Hasil	15.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
16.	05 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	16.
17.	6 Juni 2024	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	17.
18.	19 juni 2024	ACC Sidang Skripsi	18.
19.	26 Juni 2024	ACC Keseluruhan	19.

Malang, 26 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005