SIFAT-SIFAT FUNGSI YANG TERDIFERENSIAL PADA HIMPUNAN BILANGAN REAL

SKRIPSI

OLEH
ETNA LIAFITROH FALABIBAH
NIM. 18610028

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT-SIFAT FUNGSI YANG TERDIFERENSIAL PADA HIMPUNAN BILANGAN REAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
ETNA LIAFITROH FALABIBAH
NIM. 18610028

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT-SIFAT FUNGSI YANG TERDIFERENSIAL PADA HIMPUNAN BILANGAN REAL

SKRIPSI

Oleh
Etna Liafitroh Falabibah
NIM. 18610028

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 25 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, M.Sc	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19741129 200012 2 005	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT-SIFAT FUNGSI YANG TERDIFERENSIAL PADA HIMPUNAN BILANGAN REAL

SKRIPSI

Oleh
Etna Liafitroh Falabibah
NIM. 18610028

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 26 Juni 2024

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 3	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Etna Liafitroh Falabibah

NIM : 18610028

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat-Sifat Fungsi yang Terdiferensial pada Himpunan Bilangan Real

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 Juni 2024

Yang membuat pernyataan,

Etna Liafitroh Falabibah

NIM. 18610028

HALAMAN MOTO

"Continuous improvement is better than delayed perfection."

- Mark Twain

HALAMAN PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim. Dengan mengucap segala puji dan syukur kepada Allah Swt. penulis persembahkan skripsi ini untuk ibu saya Mutmainnah, ayah kandung saya Moh. Hilmi (Almarhum), juga bapak saya Abdul Rouf yang telah tanpa pamrih melahirkan dan membesarkan saya, memberi dukungan dan dorongan baik moral maupun moril, serta menjadi teladan yang selalu memotivasi penulis untuk senantiasa kuat dan tabah melalui perjalanan panjang dalam menyelesaikan penelitian ini.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirobbilalamin, segala ungkapan puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt yang senantiasa melimpahkan karunia dan rahmat kepada hamba-Nya ini rezeki yang berlimpah sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Sifat-Sifat Fungsi yang Terdiferensial pada Himpunan Bilangan Real" ini. Sholawat serta salam tak lupa penulis panjatkan kepada junjungan umat Islam yaitu nabi besar Muhammad Saw yang telah mengenalkan Islam sebagai petunjuk dalam hidup di dunia ini untuk kita semua.

Penulis dengan segala kekurangannya sebagai manusia biasa yang jauh dari kesempurnaan menjadikan penyusunan draf skripsi ini melalui banyak kesulitan serta hambatan. Hingga akhirnya dapat menyelesaikan skripsi ini, penulis mendapatkan dan menerima banyak bantuan, arahan serta bimbingan dari berbagai pihak. Untuk membalas kebaikan yang berlimpah tersebut, penulis menyampaikan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim serta selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan ilmu, arahan, serta motivasi berfikir bagi penulis.
4. Mohammad Nafie Juhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan ilmu, arahan, serta motivasi berfikir bagi penulis.
5. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D., selaku ketua penguji ujian skripsi yang telah memberikan saran dan kritik membangun untuk perbaikan kekurangan pada skripsi penulis.
6. Dian Maharani, M.Si, selaku anggota penguji ujian skripsi yang telah memberikan saran dan kritik membangun untuk perbaikan kekurangan pada skripsi penulis.

7. Seluruh civitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang khususnya seluruh dosen yang dengan ikhlas melimpahkan ilmu serta pengalaman yang luar biasa berharga.
8. Keluarga penulis khususnya ibu Mutmainnah, bapak Abdul Rouf, saudara dan saudari penulis Akhmad Naufal Z., Rahma Dewi S. M., serta Ana Tahta A. M. yang senantiasa mengirimkan doa, motivasi serta dukungan dalam berbagai bentuk demi melancarkan penulisan skripsi ini.
9. Seluruh mahasiswa Program Studi Matematika angkatan 2018, 2019 dan 2020, khususnya mahasiswa konsorsium analisis, Oktavia Eka, Mutmainnah, Jawahir dan nama-nama yang tidak dapat penulis sebutkan yang telah bersama-bersama berjuang menyelesaikan studi.

Penulis berharap besar hasil dari penulisan skripsi ini membuka wawasan ataupun pemahaman serta memberikan manfaat dan inspirasi bagi pembaca. Menyadari akan banyaknya kekurangan serta kelemahan penulis dalam penulisan skripsi ini, saran dan kritik yang bersifat membangun dan membantu perbaikan penulisan akan sangat penulis hargai. Dengan demikian, penulis harapkan penelitian ini dapat menjadi langkah awal dari berbagai perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi di masa yang akan datang khususnya dengan topik yang serupa yakni fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real yang dapat memberikan kontribusi lebih bagi ilmu pengetahuan dan teknologi. Terimakasih atas perhatian dan pengertiannya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuhu

Malang, 26 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam proposal ini memiliki makna sebagai berikut:

$\mathbb{N}$	: Himpunan bilangan asli
$\mathbb{Q}$	: Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{R}$	: Himpunan bilangan real
$x \in \mathbb{R}$	: x anggota $\mathbb{R}$
$f(x)$	: Fungsi terhadap x
$f'(x)$	: Turunan fungsi pada x
$\forall x$	: Untuk setiap x
$\exists x$	: Terdapat x
inf	: Batas bawah terbesar
sup	: Batas atas terkecil
min	: Bilangan terkecil
max	: Bilangan terbesar
$[\![x]\!]$	: Bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x
$\|x\|$	: Mutlak x
(x_n)	: Barisan x dengan n bilangan asli
$\lim_{x\to a} f(x)$	: Limit dari fungsi f pada x saat x mendekati a

ABSTRAK

Falabibah, Etna L. 2024. **Sifat-Sifat Fungsi yang Terdiferensial pada Himpunan Bilangan Real.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata Kunci: Ekstremum Lokal, Fungsi Terdiferensial, Kemonotonan, Kekontinuan Seragam, Limit, Lipschitz, Nilai Rata-Rata, Nilai Rata-Rata Cauchy, Rolle

Banyak dibahas pada matematika bidang analisis khusunya kalkulus, limit dari suatu fungsi merupakan suatu nilai yang didekati fungsi saat peubah bebasnya mendekati suatu nilai atau tak hingga. Suatu fungsi f dikatakan terdiferensial pada suatu titik x_0 pada domainnya apabila nilai $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ada. Penelitian ini bertujuan untuk menunjukkan dan membuktikan sifat fungsi-fungsi yang terdiferensial pada himpunan bilangan real yang telah diperkenalkan oleh Parzynski dan Zipse (1987). Dibuktikan bahwa turunan ekstremum lokal fungsi bernilai nol menggunakan definisi ekstremum lokal dan turunan. Kemudian teorema Rolle diaplikasikan untuk membuktikan teorema nilai rata-rata Cauchy dan teorema nilai rata-rata yang merupakan kasus khusus teorema nilai rata-rata Cauchy saat $g(x) = x$. Menggunakan teorema nilai rata-rata serta definisi-definisi yang diketahui, selanjutnya ditunjukkan dan dibuktikan kekontinuan seragam, kemonotonan naik dan kemonotonan turun fungsi terdiferensial serta keterkaitannya dengan Lipschitz dengan syarat-syarat tertentu .

ABSTRACT

Falabibah, Etna L. 2024. **Properties of Differentiable Functions on Real Number Set.** Undergraduate Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Mohammad Nafiejauhari, M.Sc.

Keywords: Cauchy Mean Value, Differentiable Function, Limit, Lipschitz, Local Extremum, Mean Value, Monotonicity, Rolle, Uniform Continuity.

The limit of a function is a value that the function approaches when the independent variable approaches a value or infinity. A function f is said to be differentiable at a point x_0 in its domain if the value $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ exists. This research aims to show and prove the properties of differentiable functions on real number sets which were introduced by Parzynski and Zipse (1987). It is proven that the derivative of the local extremum of the function is zero using the definition of local extremum and derivative. Then Rolle's theorem is applied to prove Cauchy's mean value theorem and the mean value theorem which is a special case of Cauchy's mean value theorem when $g(x) = x$. Using the mean value theorem and known definitions, we then showed and proved with certain conditions the uniform continuity, increasing monotonicity and decreasing monotonicity of differentiable functions and their relationship to Lipschitz.

مستخلص البحث

فلبيبة، عدن لي فطرة .٢٠٢٤. **خصائص الدوال المتمايزة ف ي مجموعات الأعداد الحقيقية, البحث العلمي**.
قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج,
المشرفة الأولى : (1) د. إيلي سوسنتي، الماجستيرة, المشرف الثاني, (2) محمد نافع جوهري، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: الحد الأقصى المحلي ، الوظيفة التفاضلية ، الرتابة ، الاستمرارية الموحدة ، الحد ، Lipschitz ، متوسط القيمة ، متوسط قيمة كوشي ، رولا

نوقشت على النطاق الكثير في مجل التحليل الرياضي ، وخاصة في حساب التفاضل والتكامل ، حد الدالة الذي له قيمة تقترب منها دالة عندما يكون متغيرها الحر قريبا من القيمة أو اللانهاية. ويقال إن الدالة f متباينة عند نقطة x_0 في مجالها إذا كانت قيمة $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ موجودة. تهدف هذه الدراسة إلى إظهار وإثبات خصائص الدوال المتمايزة في مجموعة الأعداد الحقيقية التي قدمها (Parzynski and Zipse 1987). ثبت أن مشتق الدالة القصوى المحلية له قيمة صفر باستخدام تعريف الحد الأقصى المحلي والمشتق. ثم يتم تطبيق نظرية رول لإثبات نظرية قيمة كوشي المتوسطة ونظرية القيمة المتوسطة وهي حالة خاصة لنظرية قيمة كوشي المتوسطة عندما $g(x) = x$. باستخدام نظرية متوسط القيمة والتعريفات المعروفة ، يتم عرض وإثبات الاستمرارية الموحدة والرتابة الصاعدة والرتابة الهابطة لل دالة المتمايزة وعلاقتها مع Lipschitz في ظل ظروف معينة.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Fungsi merupakan konsep mendasar yang sangat penting dalam matematika karena digunakan untuk memodelkan hubungan dari berbagai fenomena dalam ilmu sosial, sains dan teknologi. Fungsi menyediakan kerangka kerja untuk memahami dan menganalisis berbagai aspek dunia dari persamaan sederhana hingga struktur matematika yang lebih kompleks. Fungsi merupakan suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap obyek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua yang kemudian disebut daerah hasil (Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S., 2003).

Konsep penting yang juga dibahas pada penelitian ini yaitu konsep limit. Purcell, dkk. (2003) mendefinisikan kalkulus sebagai studi mengenai limit karena konsep limit banyak digunakan untuk mempelajari dan membahas turunan dan integral. Konsep limit adalah pusat dalam banyak masalah fisika, rekayasa dan ilmu sosial. Limit dari suatu fungsi secara intuisi merupakan suatu nilai yang didekati fungsi saat peubah bebasnya mendekati suatu nilai atau tak hingga. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ bermakna $f(x)$ dapat dibuat sedekat mungkin ke L asalkan x cukup dekat, tetapi tidak sama dengan x_0.

Dalam salah satu cabang matmatika, analisis, satu konsep yang juga memiliki peran penting untuk mempelajari perubahan serta laju perubahan yaitu turunan. Turunan dari sebuah fungsi f yaitu suatu fungsi baru f' yang menunjukkan laju perubahan nilai fungsi f terhadap perubahan variabel independennya (Parzynski & Zipse, 1987). Suatu fungsi f dikatakan terdiferensial pada suatu titik x_0 pada domainnya apabila nilai $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ada. Nilai tersebut kemudian disebut sebagai turunan dari f pada x_0 dan ditulis sebagai $f'(x_0)$.

Fungsi terdiferensial digunakan untuk memahami sifat-sifat perubahan dalam berbagai konteks matematika dan ilmu terapan. Dalam fisika, turunan fungsi waktu menunjukkan kecepatan dan percepatan benda, sementara dalam ekonomi, turunan fungsi produksi menunjukkan margin produksi dan margin biaya . Kemampuan untuk memahami dan menerapkan konsep fungsi terdiferensial diperlukan untuk menganalisis, memodelkan, dan memecahkan masalah yang melibatkan perubahan dalam berbagai aspek kehidupan dan ilmu pengetahuan. Fungsi terdiferensial merupakan topik yang masih banyak dijadikan penelitian hingga saat ini. Frerick,dkk. pada artikel yang diterbitkan pada tahun 2020 membahas fungsi terdiferensial yang kontinu pada himpunan kompak dengan menunjukkan kelengkapan ruang dari fungsi terdiferensial yang kontinu pada himpunan kompak serta membuktikan kepadatan ruang terbatas pada ruang tersebut. Tsagareishvili (2023) selanjutnya mempelajari kekonvergenan barisan fourier klasik pada fungsi terdiferensial.

Penelitian terkait fungsi terdiferensial terus berlanjut dengan pengaplikasian pada berbagai kondisi sehingga penting untuk memahami sifat-sifatnya. Mempelajari sifat-sifat fungsi terdiferensial akan mengenalkan konsep-konsep penting yang digunakan dalam mempelajari integral, deret serta teori turunan tingkat tinggi. Salah satu sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real yaitu memenuhi teorema nilai tengah. Konsep tersebut sangat krusial dalam kalkulus sebagai pondasi dalam mempelajari matematika analisis. Teorema nilai tengah Rolle, teorema nilai tengah Cauchy serta teorema nilai tengah lainnya banyak digunakan untuk membuktikan ketaksamaan, akar persamaan, menghitung limit, mempelajari deret konvergen maupun divergen, hingga kemonotonan fungsi (Zhou, 2023).

Selain memenuhi teorema nilai tengah, kemonotonan dan kekontinuan seragam merupakan sifat dasar fungsi yang banyak dibahas. Kemonotonan fungsi memiliki hubungan dengan kekontinuan, turunan dan integral Riemann. Suatu fungsi $f: A \to B$ dikatakan monoton naik pada A jika $f(x_1) \leq f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 < x_2$; fungsi $f(x)$ dikatakan monoton turun pada A jika $f(x_1) \geq f(x_2)$ untuk semua $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 < x_2$. Suatu fungsi dikatakan monoton pada A jika monoton naik atau monoton turun pada A. Sedangkan fungsi f dikatakan kontinu seragam pada suatu interval I jika diberikan sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian hingga ketika $x_1, x_2 \in I$ dengan $|x_1 - x_2| < \delta$ maka $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (Parzynski & Zipse, 1987).

Fungsi terdiferensial memegang banyak peran penting dalam memahami dan menganalisis berbagai fenomena dalam dalam dunia nyata. Begitupun dalam Islam, kita sebagai muslim ditekankan untuk mengenal serta mencontoh sifat dan perilaku Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan yang utama dalam menjalani hidup. Allah berfirman pada surat Al-Imran ayat 31:

قُلۡ إِن كُنتُمۡ تُحِبُّونَ ٱللَّهَ فَٱتَّبِعُونِي يُحۡبِبۡكُمُ ٱللَّهُ وَيَغۡفِرۡ لَكُمۡ ذُنُوبَكُمۡۚ وَٱللَّهُ غَفُورٞ رَّحِيمٞ

Artinya: *"Katakanlah (Muhammad), 'jika kamu mencintai Allah, ikutilah aku, niscaya Allah mencintaimu dan mengampuni dosa-dosamu'. Allah Maha Pngampun, Maha Penyayang"* (Fadlan, 2020).

Ayat tersebut membicarakan syarat memperoleh cinta Allah. Dalam Tafsir Al Misbah ditafsirkan bahwa jika seseorang merasa mencintai Allah, hendaknya mengikuti Nabi Muhammad dengan melaksanakan apa yang diperintahkan Allah melalui Nabi, yaitu beriman dan bertakwa kepada-Nya. Seseorang tersebut dapat dikatakan memasuki pintu gerbang meraih cinta Allah jika syarat tersebut dilaksanakan. Ketaatan hendaknya dipelihara serta ditingkatkan dengan melaksanakan kewajiban serta sunnah-sunnah Nabi. Sebagai balasannya, Allah akan mencintai dan mengampuni dosa-dosa mereka. Tafsir ayat tersebut menunjukkan bahwa untuk mendapat cinta Allah mengharuskan kita untuk meneladani beliau dalam seluruh aspek kehidupan dimulai dari mengikuti amalan wajib hingga sunnah termasuk mengikuti cara beliau dalam berperilaku sehari-hari.

Untuk menjadikan Nabi Muhammad SAW teladan dalam seluruh aspek kehidupan, penting bagi kita untuk mengenali sifat-sifat mulia nabi Muhammad SAW yang banyak disebutkan pada berbagai sumber baik Al-Quran maupun hadis. Sejalan dengan pernyataan tersebut, untuk mengoptimalkan pengaplikasian pada berbagai bidang serta melakukan pengembangan ataupun penelitian lebih lanjut mengenai fungsi terdiferensial, penting untuk memahami serta membuktikan sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real. Beberapa sifat penting akan dibuktikan penulis pada penelitian ini dengan menunjukkan bahwa fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real memenuhi teorema Rolle, teorema nilai tengah Cauchy, monoton naik, kontinu seragam, serta memenuhi kondisi Lipchitz.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada penelitian ini berdasarkan penjabaran latar belakang yaitu bagaimana sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real serta pembuktiannya?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan diadakannya penelitian ini berdasarkan rumusan masalah yaitu mengetahui sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilang real serta pembuktiannya.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini, penulis mengharapkan penelitian ini dapat menjadi bahan bacaan hingga referensi penelitian selanjutnya berkaitan dengan sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini terdapat pada pemilihan domain fungsi yang akan dibahas lebih lanjut yaitu himpunan bilangan real. Peneliti hanya akan membahas sifat-sifat fungsi terdiferensial yang terdefinisi pada suatu interval I pada himpunan bilangan real, sehingga peneliti tidak akan membahas sifat-sifat fungsi lain maupun himpunan bilangan lainnya. Sifat-sifat yang akan ditunjukkan dan dibuktikan mengacu pada referensi yaitu “Introduction to Mathematical Analysis” oleh William R. Parzynski dan Philip W. Zipse.

1.6 Definisi Istilah

Berdasarkan masalah yang telah dirumuskan, definisi istilah yang digunakan dalam penelitian ini dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Himpunan dan Fungsi

Himpunan merupakan suatu koleksi objek yang terdefinisi jelas. Putra, (2003) dalam bukunya mendefinisikan himpunan sebagai kumpulan dari objek-objek yang berbeda. Dalam bukunya, Louis (1986) mendefinisikan fungsi sebagai suatu himpunan pasangan terurut bilangan (x, y) di mana tidak terdapat dua pasangan berbeda yang bilangan pertamanya sama. Himpunan semua nilai x yang mungkin dinamakan daaerah asal (domain) fungsi dan himpunan semua nilai y yang dihasilkan dinamakan daerah nilai (range) fungsi.

2. Fungsi terdiferensial

Suatu fungsi f yang terdefinisi di suatu *neighborhood* dari $x_0$dikatakan fungsi yang terdiferensial pada sebarang titik x_0 asalkan limit pada turunan berikut ada dan bukan ∞ atau $-\infty$. Turunan dari f pada x_0 yaitu

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ (Parzynski & Zipse, 1987).

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Himpunan Bilangan Real

Konsep himpunan merupakan konsep yang paling mendasar dalam mempelajari berbagai cabang matematika, salah satunya analisis. Putra, (2023) mendefinisikan himpunan sebagai kumpulan dari objek-objek yang berbeda. Dalam matematika, bilangan yang digunakan untuk mengukur kuantitas dimensi satu yang berkesinambungan seperti jarak, waktu atau suhu adalah bilangan real. Suryawan, (2023) mendefinisikan bilangan real sebagai berikut:

Definisi 2.1

Bilangan real merupakan semua bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk desimal.

Secara geometris, bilangan real dapat dipresentasikan sebagai titik pada sebuah garis yang disebut garis bilangan real. Himpunan bilangan real kemudian dinotasikan sebagai $\mathbb{R}$. Himpunan semua bilangan real memiliki beberapa himpunan bagian yang penting yaitu himpunan bilangan asli, dinotasikan dengan $\mathbb{N}$, himpunan semua bilangan bulat yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}$, dan himpunan semua bilangan rasional, dinotasikan sebagai $\mathbb{Q}$ $(\text{Suryawan}, 2016)$. Selanjutnya akan dikenalkan suatu notasi yang membahas gagasan tentang satu bilangan real yang dekat dengan bilangan lain.

Definisi 2.2 (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $x_0 \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$. Persekitaran ε dari x_0 merupakan himpunan $V_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}: |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Misalkan $x_0 \in \mathbb{R}$, x merupakan anggota dari persekitaran $V_\varepsilon(x_0)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$ ekuivalen dengan pernyataan $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$. Berbeda dengan definisi persekitaran di atas, persekitaran yang dihapus dari x_0 merupakan himpunan dari setiap titik kecuali x_0 pada persekitaran x_0, dapat dinotasikan sebagai $V(x_0) = \{x | 0 < |x - x_0| < \varepsilon\}$, sehingga $x \neq x_0$ (Trench, 2003).

Contoh 2.1

Akan ditunjukkan persekitaran $\varepsilon = 1$ dari $x_0 = \frac{5}{4}$.

Berdasarkan definisi, didapat persekitaran $\varepsilon = 1$ dari $x_0 = \frac{5}{4}$ yaitu himpunan

$$V_\varepsilon\left(\frac{5}{4}\right) = \{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{5}{4}\right| < 1\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : -1 < x - \frac{5}{4} < 1\right\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : -1 + \frac{5}{4} < x < 1 + \frac{5}{4}\right\}$$

$$V_\varepsilon\left(\frac{5}{4}\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{4} < x < \frac{9}{4}\right\}$$

Teorema 2.1 (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $x_0 \in \mathbb{R}$. *Jika* x *merupakan anggota persekitaran* $V_\varepsilon(x_0)$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *maka* $x = x_0$.

Bukti. Akan ditunjukkan $x = x_0$ yang ekuivalen dengan $|x - x_0| = 0$. Asumsikan kontradiksinya di mana $|x - x_0| > 0$. Diketahui dari **definisi 2.2**, suatu nilai x memenuhi $|x - x_0| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Maka apabila dipilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}|x - x_0|$, didapat $|x - x_0| > \varepsilon_0 = \frac{1}{2}|x - x_0|$. Hal tersebut jelas tidak mungkin, sehingga haruslah $|x - x_0| = 0$ atau $x = x_0$.

■

2.1.2 Fungsi

Dalam praktek kehidupan sehari-hari terdapat banyak contoh di mana nilai suatu besaran bergantung pada nilai lainnya. Salah satu contohnya yaitu jarak yang ditempuh suatu objek yang bergantung pada waktu sejak objek tersebut bergerak dari suatu titik. Hubungan di antara dua besaran tersebut dinyatakan sebagai fungsi.

Definisi 2.3 (Purcell, dkk., 2003)

Suatu fungsi f adalah suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap obyek x dalam satu himpunan yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi.

Bilangan x dan y adalah peubah. Nilai y bergantung pada pemilihan nilai x, sehingga x disebut peubah bebas dan y disebut peubah tak bebas.

Contoh 2.2

Kondisi $[f(x)]^2 = x$ dan $f(x) \geq 0$ mendefinisikan fungsi f pada $D_f = [0, \infty)$ dengan nilai $f(x) = \sqrt{x}$. Sama halnya dengan kondisi $[g(x)]^2 = x$ dan $g(x) \leq 0$ yang mendefinisikan suatu fungsi g pada $D_g = [0, \infty)$ dengan nilai $g(x) = -\sqrt{x}$. Himpunan hasil dari f dan g masing-masing yaitu $[0, \infty)$ dan $(-\infty, 0)$.

Misalkan D_f merupakan daerah asal fungsi f dan D_g merupakan daerah asal fungsi g, operasi aritmatik pada fungsi yang didefinisikan oleh Trench dalam bukunya adalah sebagai berikut:.

Definisi 2.4 (Trench, 2003)

Apabila $D_f \cap D_g \neq 0$, maka $f + g, f - g$ dan fg terdefinisi pada $D_f \cap D_g$ dengan $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, dan

$(fg)(x) = f(x)g(x)$. *Hasil bagi* f/g *didefinisikan sebagai* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *untuk* $x \in D_f \cap D_g$.

Contoh 2.3

Jika $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ dan $g(x) = \sqrt{x-1}$, maka $D_f = [-2,2]$ dan $D_g = [1,\infty]$, sehingga $f+g, f-g$ dan fg terdefinisi pada $D_f \cap D_g = [1,2]$ dengan $(f+g)(x) = \sqrt{4-x^2} + \sqrt{x-1}$, $(f-g)(x) = \sqrt{4-x^2} - \sqrt{x-1}$ dan $(fg)(x) = \left(\sqrt{4-x^2}\right)\left(\sqrt{x-1}\right) = \sqrt{(4-x^2)(x-1)}$. Hasil bagi f/g didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{4-x^2}{x-1}}$.

Untuk memahami bagaimana suatu fungsi berperilaku dan bagaimana perubahan peubah bebas memengaruhi nilainya, akan dikenalkan konsep maksimum absolut, minimum absolut, maksimum lokal dan minimum lokal. Pemahaman mengenai konsep nilai ekstremum fungsi berikut akan digunakan untuk pembuktian teorema pada bab selanjutnya. Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada suatu interval $I \subset \mathbb{R}$.

Definisi 2.5 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$, *misalkan* $x_0 \in I$. $f(x_0)$ *merupakan maksimum lokal fungsi* f *apabila untuk setiap* x *di persekitaran* x_0 *memenuhi* $f(x) \leq f(x_0)$. *Begitupun,* $f(x_0)$ *merupakan minimum lokal fungsi* f *apabila untuk setiap* x *persekitaran* x_0 *memenuhi* $f(x) \geq f(x_0)$.

Definisi 2.6 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$, *misalkan* $x_0 \in I$. $f(x_0)$ *merupakan maksimum absolut dari* f *pada* I *apabila* $f(x_0) \geq f(x)$ *untuk setiap* $x \in I$. *Begitupun,* $f(x_0)$ *merupakan minimum absolut dari* f *pada* I *apabila* $f(x_0) \leq f(x)$ *untuk setiap* $x \in I$.

Contoh 2.4

Misal diberikan $f: [0,5] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Akan dibuktikan $f\left(\frac{5}{4}\right)$ merupakan minimum lokal dari fungsi $f(x)$, juga merupakan minimum absolut di [0,5].

Perhatikan bahwa apabila dipilih $\delta = 1$, berdasarkan **contoh 2.1**, persekitaran $x_0 = \frac{5}{4}$ dari $\delta = 1$ yaitu $V_\delta\left(\frac{5}{4}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{4} < x < \frac{9}{4}\right\}$, $x \neq \frac{5}{4}$. Untuk $x = \frac{5}{4}$, $f\left(\frac{5}{4}\right) = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4}\right) + 3 = -\frac{1}{8}$. Perhatikan $f(x)$ pada titik kritis yaitu $x = \frac{1}{4} < \frac{5}{4}$,

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{4}\right) + 3 = \frac{15}{8} > -\frac{1}{8}$$

$f\left(\frac{1}{4}\right) > f\left(\frac{5}{4}\right)$ sehingga f turun untuk $\frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{4}$. Kemudian untuk $x = \frac{9}{4} > \frac{5}{4}$, maka

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = 2\left(\frac{9}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{9}{4}\right) + 3 = \frac{15}{8} > -\frac{1}{8}$$

$f\left(\frac{9}{4}\right) > f\left(\frac{5}{4}\right)$ sehingga f turun untuk $\frac{5}{4} < x \leq \frac{9}{4}$. Untuk setiap $x \in V_\delta\left(\frac{5}{4}\right)$ berlaku $f(x) \geq f\left(\frac{5}{4}\right)$. Terbukti bahwa $f\left(\frac{5}{4}\right)$ merupakan minimum lokal dari fungsi $f(x)$. Terbukti bahwa $f\left(\frac{5}{4}\right)$ merupakan minimum lokal dari fungsi. Kemudian perhatikan bahwa $f(x)$ terbatas pada [0,5], sehingga pada titik kritis yaitu $x = 0$,

$$f(0) = 2(0)^2 - 5(0) + 3 = 3 > -\frac{1}{8}$$

$f(0) > f\left(\frac{5}{4}\right)$ sehingga f turun untuk $0 \leq x < \frac{5}{4}$. Kemudian untuk $x = 5$, maka

$$f(5) = 2(5)^2 - 5(5) + 3 = 28 > -\frac{1}{8}$$

$f(5) > f\left(\frac{5}{4}\right)$ sehingga f turun untuk $\frac{5}{4} < x \leq 5$.

karena untuk setiap $x \in [0,5]$ berlaku $f(x) \geq f(x_0)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$ merupakan minimum absolut di [0,5].

2.1.3 Limit Fungsi

Limit dari suatu fungsi secara intuisi merupakan suatu nilai yang didekati fungsi saat peubah bebasnya mendekati suatu nilai atau tak hingga. Mengatakan bahwa $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ berarti bahwa selisih antara $f(x)$ dan L dapat dibuat sekecil mungkin dengan mensyaratkan bahwa x cukup dekat tetapi tidak sama dengan x_0. Purcell, dkk (2003) mendefinisikan limit secara formal sebagai berikut:

Definisi 2.7

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *berarti bahwa untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat* $\delta > 0$ *yang berpadanan sedemikian hingga* $|f(x) - L| < \delta$ *dengan syarat* $0 < |x - x_0| < \delta$ *memenuhi* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Contoh 2.5 $\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$

Misal diberikan $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, maka $0 < |x - 3| < \delta$ mengakibatkan $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = \varepsilon$. Karena memenuhi definisi, terbukti bahwa $\lim_{x \to 3}(4x - 5) = 7$.

Definisi 2.8 (Purcell, dkk., 2003)

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ *berarti untuk setiap* $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ *sedemikian hingga* $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. *Sedangkan* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ *berarti untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *dan* $\delta > 0$ *sedemikian hingga* $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Teorema 2.2 (Purcell, dkk., 2003)

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

$(\Rightarrow)$

Diketahui $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, akan dibuktikan $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$. Berdasarkan **definisi 2.7** $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga saat $0 < |x - x_0| < \delta$ memenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$. Perhatikan bahwa $0 < |x - x_0| < \delta$ mengakibatkan $0 < x - x_0 < \delta$ atau $0 < x_0 - x < \delta$. Sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga saat $0 < x - x_0 < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$ dan saat $0 < x_0 - x < \delta$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. Jadi, berdasarkan **definisi 2.8** $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

$(\Leftarrow)$

Diketahui $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$, berdasarkan **definisi 2.8** untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga saat $0 < x - x_0 < \delta_1$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$ dan terdapat $\delta_2 > 0$ saat $0 < x_0 - x < \delta_2$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. Dipilih $\delta_3 = \min(\delta_1, \delta_2)$, sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta_1 > 0$ dan $\delta_2 > 0$ sedemikian hingga saat $0 < x - x_0 < \delta_1$ atau $-\delta_2 < x - x_0 < 0$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. Jadi untuk setiap setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta_3 > 0$ sedemikian hingga saat $0 < |x - x_0| < \delta_3$ maka $|f(x) - L| < \varepsilon$. Berdasarkan **definisi 2.7**, terbukti bahwa $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

$\blacksquare$

2.1.4 Barisan Terbatas

Salah satu konsep dasar dari kalkulus adalah keterbatasan. Sebelum menunjukkan sifat-sifat dari fungsi terdiferensial, salah satu konsep terkait yang perlu diperhatikan yaitu keterbatasan dari suatu barisan yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.9 (Bartle & Sherbert, 2010)

Suatu barisan $X = (x_n)$ *dari bilangan real dikatakan terbatas apabila terdapat bilangan real* $M > 0$ *sedemikian hingga* $|x_n| \leq M$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Contoh 2.6

Akan ditunjukkan bahwa $\left(\frac{1}{x}\right)$ terbatas pada (a, ∞) untuk sembarang $a > 0$.

Perhatikan bahwa jika $x > a$ maka $f(x) = \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$, dan $\frac{1}{a}$ merupakan batas atas bagi f pada (a, ∞). Jika $0 < b < \frac{1}{a}$, maka untuk x yang memenuhi $a < x < \frac{1}{b}$ didapat $f(x) = \frac{1}{x} > b$. Hal ini menunjukkan bahwa b bukan merupakan batas atas f pada (a, ∞) sehingga $\frac{1}{a}$ merupakan batas atas terkecil bagi f pada (a, ∞).

Definisi 2.10 (Bartle & Sherbert, 2010)

Suatu barisan $X = (x_n)$ *dari himpunan bilangan real dikatakan konvergen pada* $x \in \mathbb{R}$ *atau* x *disebut sebagai limit dari* (x_n) *jika untuk sebarang* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $K(\varepsilon)$ *sedemikian hingga* $n \geq K(\varepsilon)$, *memenuhi* $|x_n - x| < \varepsilon$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$.

Suatu barisan yang memiliki limit dikatakan sebagai barisan yang konvergen, sedangkan barisan yang tidak memiliki limit disebut barisan divergen.

Contoh 2.7

Barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ merupakan barisan yang konvergen.

Perhatikan bahwa $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Dipilih $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $\frac{1}{K} < \varepsilon$. Maka jika $n \geq K$ maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$. Sehingga jika $n \geq K$, berlaku

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$$

Barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ konvergen dan $\lim \left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$.

Teorema 2.3 (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $X = (x_n)$, *dengan* $n \in \mathbb{N}$ *barisan bilangan real yang konvergen maka* (x_n) *terbatas.*

Bukti. Misalkan $\lim(x_n) = x$ dan dipilih $\varepsilon = 1$. Maka terdapat suatu bilangan asli $K = K_{(1)}$ sedemikian hingga $|x_n - x| < 1$ untuk setiap $n \geq K$. Menggunakan ketaksamaan segitiga didapat

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Jika dipilih $M = \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\}$, maka $|x_n| \leq M$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

■

Contoh 2.8

Barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ merupakan barisan konvergen. Akan ditunjukkan barisan tersebut terbatas.

Dari contoh 2.7 diketahui barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ konvergen dengan nilai $\lim\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$. Perhatikan bahwa terdapat bilangan real $M = 1 > 0$, sedemikian hingga $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} < 1$. Barisan $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$ terbatas dengan nilai batas atas $M = 1$.

Definisi 2.11 (Bartle & Sherbert, 2010)

Suatu barisan interval I_n, dengan n bilangan asli, dikatakan bersarang apabila rantai inklusi berikut terpenuhi:

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$$

Contoh 2.9

$I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$, dengan n bilangan asli. Perhatikan bahwa

$I_1 = [0,1]$

$I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$\vdots$

$I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$

Perhatikan bahwa $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \cdots$ untuk setiap n bilangan asli. $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ merupakan barisan dari interval bersarang.

Teorema 2.4 (Bartle & Sherbert, 2010)

Jika $I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N}$, merupakan barisan dari interval tutup terbatas yang bersarang, maka terdapat suatu $\xi \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Bukti. Karena interval-interval yang dimaksud bersarang, didapat $I_n \subseteq I_1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Sehingga himpunan tak kosong $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas atas.

Kemudian misalkan ξ merupakan supremumnya, jelas bahwa $a_n \leq \xi$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Didapatkan juga $\xi \leq b_n$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan menunjukkan bahwa untuk sembarang n, b_n merupakan batas atas untuk himpunan $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Akan dipertimbangkan dua kasus

(i) Jika $n \leq k$, maka karena $I_n \supseteq I_k$, didapat $a_k \leq b_k \leq b_n$.

(ii) Jika $k < n$ maka karena $I_n \supseteq I_k$ didapat $a_k \leq b_k \leq b_n$. Sehingga didapat $a_k \leq b_n$ untuk setiap k. Sehingga b_n merupakan batas atas dari barisan $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Jadi, $\xi \leq b_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $a_n \leq \xi \leq b_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ terbukti bahwa $\xi \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

■

Teorema 2.5 Bolzano-Weirstrass (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $X = (x_n)$,*dengan* $n \in \mathbb{N}$ *barisan bilangan real yang terbatas. Barisan* (x_n) *memiliki suatu sub barisan yang konvergen.*

Bukti. Perhatikan bahwa himpunan $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ terbatas dan berada pada interval $I_1 = [a, b]$. Ambil $n_1 = 1$. Bagi interval I_1 menjadi dua sub interval yang sama I_1' dan I_1'', serta bagi himpunan indeks $\{n \in \mathbb{N} : n > 1\}$ menjadi dua bagian, yaitu $A_1 = \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in I_1'\}$ dan $B_1 = \{n \in \mathbb{N} : n > n_1, x_n \in I_1''\}$

Jika A_1 tak hingga, ambil $I_2 = I_1'$ dan misalkan n_2 bilangan asli terkecil pada A_1. Jika A_1 himpunan berhingga maka B_1 tak hingga sehingga apabila diambil $I_2 = I_1''$ dan misalkan n_2 bilangan terkecil pada B_1.

Dengan cara yang sama bagi interval I_2 menjadi dua sub interval yang sama I_2' dan I_2'', serta bagi himpunan indeks $\{n \in \mathbb{N} : n > n_2\}$ menjadi dua bagian, yaitu

$A_1 = \{n \in \mathbb{N}: n > n_2,\ x_n \in I_2{'}\}$ dan $B_2 = \{n \in \mathbb{N}: n > n_2, x_n \in I_2{''}\}$.

Jika A_2 tak hingga, ambil $I_3 = I_2{'}$ dan misalkan n_3 bilangan asli terkecil pada A_2. Jika A_2 himpunan berhingga maka B_2 tak hingga sehingga apabila diambil $I_3 = I_2''$ dan misalkan n_3 bilangan terkecil pada B_2.

Dengan cara yang sama selanjutnya didapatkan barisan interval bersarang $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_k \supseteq \cdots$ dan sub barisan (x_{n_k}) pada X sedemikian hingga $x_{n_k} \in I_k$ untuk $k \in \mathbb{N}$. Karena panjang $I_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$, berdasarkan teorema 2.14 terdapat suatu titik tunggal $\xi \in I_k$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$. Lebih jauh karena x_{n_k} dan ξ keduanya berada pada I_k, didapat

$$\left|x_{n_k} - \xi\right| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

Sehingga terbukti sub barisan (x_{n_k}) konvergen ke ξ.

■

2.1.5 Fungsi Terbatas

Pada sub bab ini akan didefinisikan fungsi terbatas yang secara sedehana dapat dijelaskan sebagai suatu fungsi di mana nilai-nilai $f(x)$ terdapat dalam suatu rentang yang terbatas.

Definisi 2.12 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan himpunan tak kosong A dan B. Suatu fungsi $f: A \to B$ dikatakan terbatas apabila terdapat suatu bilangan real $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| < M$, untuk setiap $x \in A$.

Contoh 2.10

Akan ditunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^2$ terbatas pada setiap interval terbatas I.

Bukti. Misal diberikan interval $[a, b]$, kemudian dipilih $M = \max(a^2, b^2)$, maka untuk setiap $x \in [a, b]$ berlaku $|f(x)| = x^2 \leq M$. Sehingga fungsi $f(x) = x^2$ terbatas pada setiap interval terbatas I.

Teorema 2.6 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan himpunan tak kosong A, B, C di mana $f: A \to B$ dan $g: A \to C$. Jika f dan g masing-masing terbatas pada A dan k merupakan sembarang bilangan real maka fungsi $f + g, kf$ dan $f \cdot g$ terbatas pada A.

Bukti. Misalkan $|f(x)| \leq M_1$ dan $|g(x)| \leq M_2$ untuk setiap $x \in A$. Maka didapat

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$$

$$|(kf)(x)| = |k \cdot f(x)| \leq |k| \cdot |f(x)| \leq |k| M_1$$

$$|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| \leq |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M_1 M_2$$

untuk setiap $x \in A$. Misalkan $M_1 + M_2 = M_3, |k|M_1 = M_4$ dan $M_1 M_2 = M_5$, maka terbukti bahwa $f + g, kf$ dan $f \cdot g$ terbatas pada A.

■

2.1.6 Fungsi Monoton

Fungsi monoton memiliki hubungan erat dengan konsep kekontinuan serta turunan. Suatu fungsi dikatakan monoton pada A apabila monoton naik atau monoton turun pada A. Berikut didefinisikan fungsi monoton naik dan turun:

Definisi 2.13 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan himpunan tak kosong A dan B. Suatu fungsi $f: A \to B$ dikatakan monoton naik pada A apabila $f(x_1) \leq f(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$; fungsi $f(x)$ dikatakan monoton turun pada A apabila $f(x_1) \geq f(x_2)$ untuk semua $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 < x_2$.

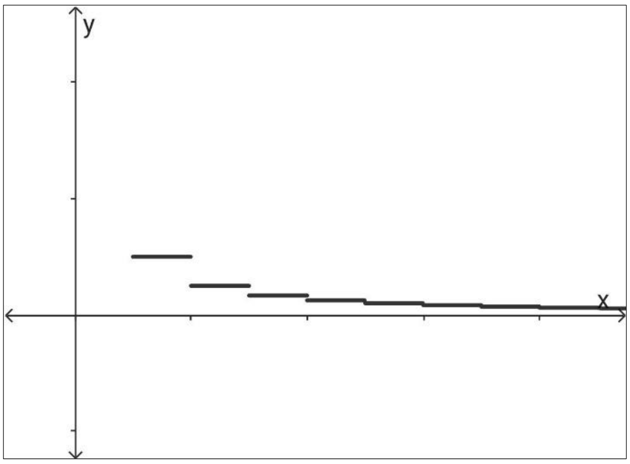
Contoh 2.11

Misalkan $[\![x]\!]$ = bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Diberikan $f(x) = \frac{1}{[\![x]\!]}$ pada $[1, \infty)$, akan ditunjukkan fungsi tersebut monoton turun.

Bukti. Misalkan $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ dengan $x_1 < x_2$. Terdapat suatu bilangan asli unik n_1 dan n_2 sedemikian hingga $x_1 \in [n_1, n_1 + 1)$ dan $x_2 \in [n_2, n_2 + 1)$. Lebih jauh, $n_1 \leq n_2$ karena $x_1 < x_2$. Sehingga

$$f(x_1) = \frac{1}{[\![x_1]\!]} = \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n_2} = \frac{1}{[\![x_2]\!]} = f(x_2)$$

Terbukti $f(x) = \frac{1}{[\![x]\!]}$ monoton turun pada $[1, \infty)$.



Gambar 2.1 Grafik $f(x) = \frac{1}{[\![x]\!]}$

Teorema 2.7 (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan $I \subseteq \mathbb{R}$ interval dan $f: I \to \mathbb{R}$, misalkan $x_0 \in I$ bukan merupakan titik ujung dari I maka

(i) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f = \sup\{f(x): x \in I, x < x_0\}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f = \inf\{f(x): x \in I, x > x_0\}$.

Bukti. Perhatikan bahwa jika $x \in I$ dan $x < x_0$, maka $f(x) \leq f(x_0)$. Sehingga himpunan $\{f(x): x \in I, x < x_0\}$ terbatas atas oleh $f(x_0)$. Hal ni mengindikasikan keberadaan batas atas terkecil, ditulis sebagai L. Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka $L - \varepsilon$ bukan merupakan batas atas himpunan ini. Sehingga terdapat $y_\varepsilon \in I, y_\varepsilon < c$ sedemikian hingga $L - \varepsilon < f(y_\varepsilon) \leq L$. Karena f naik, jika $\delta_\varepsilon = x_0 - y_\varepsilon$ dan $0 < x_0 - y < \delta_\varepsilon$, maka $y_\varepsilon < y < c$ sedemikian hingga $L - \varepsilon < f(y_\varepsilon) \leq f(y) \leq L$. Sehingga $|f(y) - L| < \varepsilon$ ketika $0 < x_0 - y < \delta_\varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{x \to x_0^-} f = \sup\{f(x): x \in I, x < x_0\}$.

Dengan cara yang sama dibuktikan juga $\lim\limits_{x \to x_0^+} f = \inf\{f(x): x \in I, x > x_0\}$.

■

2.1.7 Fungsi Kontinu

Fungsi kontinu pada bilangan real adalah fungsi yang dapat digambarkan tanpa adanya "loncatan" atau "lubang" pada grafiknya, perhatikan grafik pada gambar 2.2. Secara formal fungsi kontinu didefinisikan sebagai berikut:

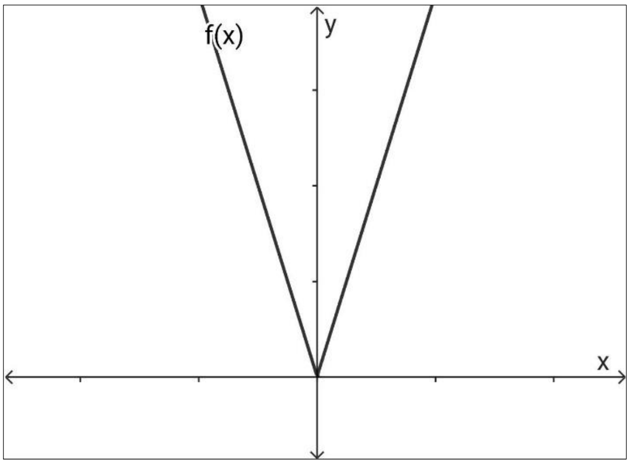
Definisi 2.14 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$, dengan $x_0 \in I$. Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada x_0 apabila $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$; yang berarti apabila diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian hingga $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ketika $|x - x_0| < \delta$.

Dapat diperhatikan bahwa agar dapat dikatakan f kontinu pada x_0, f harus terdefinisi pada δ neighborhood dari x_0. Hal tersebut penting agar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ada.

Contoh 2.12

Diberikan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ kontinu pada setiap titik $c \in \mathbb{R}$.



Gambar 2.2 Grafik $f(x) = |x|$

Misalkan $\delta = \varepsilon > 0$, maka untuk sembarang $c \in \mathbb{R}$ dengan $0 < |x - c| < \delta$. Perhatikan bahwa $|f(x) - f(c)| = \big||x| - |c|\big| \leq |x - c| < \delta = \varepsilon$

Terbukti bahwa f kontinu pada c.

Definisi 2.15 (Louis, 1986)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$, dengan $x_0 \in I$. Fungsi f dikatakan kontinu pada x_0 jika dan hanya jika ketiga syarat berikut dipenuhi:

(i) $f(x_0)$ ada

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ada

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Contoh 2.13

Perhatikan bahwa misalkan $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, untuk $x = 2$ maka $f(2) = \frac{2^2-4}{2-2}$. $f(2)$ tidak terdefinisi sehingga fungsi tersebut tidak memenuhi syarat pertama, $f(x)$ dikatakan tidak kontinu pada $x = 2$. Lebih jauh lagi, perhatikan bahwa $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} (x + 2) = 4.$

Sehingga apabila didefinisikan $f(2) = 4$, maka f dapat dibuat kontinu pada $x = 2$.

Teorema 2.8 (Bartle & Sherbert, 2010)

Misal $I = [a, b]$ suatu interval terbatas yang tertutup dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ maka f terbatas pada $[a, b]$.

Bukti. Asumsikan f tidak terbatas pada I. Maka untuk sembarang $n \in \mathbb{N}$ terapat suatu $x_n \in [a, b]$ sedemikian hingga $|f(x_n)| > n$. Karena $[a, b]$ terbatas, barisan $X := (x_n)$ terbatas. Sehingga berdasarkan teorema *Bolzano-Weirstrass* terdapat suatu himpunan $X' = (x_{n_r})$ pada X yang konvergen pada x. Karena $[a, b]$ tertutup dan anggota X' merupakan anggota$[a, b]$, maka $x \in [a, b]$. Sehingga f kontinu pada x, begitupun $\left(f\left(x_{n_r}\right)\right)$ konvergen pada $f(x)$. T**eorema 2.3** mengakibatkan barisan konvergen $\left(f\left(x_{n_r}\right)\right)$ terbatas. Hal ini menyebabkan kontradiksi karena $\left|f\left(x_{n_r}\right)\right| > n_r > r$ untuk $r \in \mathbb{N}$.

Asumsi bahwa fungsi kontinu f tidak terbatas pada interval terbatas yang tertutup $I = [a, b]$ menimbulkan kontradiksi. Sehingga terbukti bahwa fungsi kontinu f terbatas pada interval terbatas yang tertutup $I = [a, b]$.

■

Teorema 2.9 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$, dengan $x_0 \in I$. .Jika f dan *g kontinu pada x_0 maka $f + g, f \cdot g$* kontinu pada x_0 dan f/g kontinu pada x_0 dengan syarat $g(x_0) \neq 0$.

Bukti. Misalkan f dan g kontinu pada x_0, maka $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f$ dan $g(x_0) = \lim_{x \to x_0} g$. Perhatikan bahwa $(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = \lim_{x \to x_0} (f + g)$. Sehingga $f + g$ kontinu pada x_0. Dengan cara yang sama dibuktikan $f \cdot g$

kontinu pada x_0. Kemudian perhatikan bahwa jika $g(x_0) \neq 0$ maka $\frac{f}{g}(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f}{\lim_{x \to x_0} g} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)$. Terbukti bahwa f/g kontinu pada x_0 dengan syarat $g(x_0) \neq 0$.

■

Teorema 2.10 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$, *dengan* $[a, b] \subset I$. *Jika* f *kontinu pada* $[a, b]$ *maka terdapat* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *sehingga* $f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$ *untuk setiap* $x \in [a, b]$, *di mana* $f(x_1) = M$ *dan* $f(x_2) = m$.

Bukti. Misalkan f kontinu pada $[a, b]$, maka f terbatas pada $[a, b]$ berdasarkan **teorema 2.8**. Sehingga $M = \sup f(x)$ dan $m = \inf f(x)$ ada pada himpunan bilangan real. Misalkan nilai M tidak ditentukan, maka $f(x) < M$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Definisikan $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ pada $[a, b]$. Jelas bahwa $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$, berdasarkan **teorema 2.9** g kontinu pada $[a, b]$. Berdasarkan **teorema 2.8**, g terbatas pada $[a, b]$ sehingga terdapat suatu bilangan real $k > 0$ sedemikian hingga $g(x) \leq k$ untuk setiap $x \in [a, b]$, sehingga untuk setiap $x \in [a, b]$ berlaku

$$k \geq g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

$$M - f(x) \geq \frac{1}{k} > 0$$

$$f(x) \leq M - \frac{1}{k}$$

Hal tersebut kontradiksi dengan definisi M sebagai batas atas paling kecil dari f pada $[a, b]$. Sehingga nilai M haruslah ditentukan, yang artinya terdapat $x_1 \in$

$[a, b]$ dengan $f(x_1) = M$. Dengan argumen yang sama pada fungsi $-f$, dibuktikan keberadaan $x_2 \in [a, b]$ dengan $f(x_2) = m$.

■

2.1.8 Kekontinuan Seragam

Konsep kekontinuan seragam *(uniform continuity)* dalam matematika merujuk pada sifat suatu fungsi yang tetap kontinu dengan mempertimbangkan perubahan variabel di seluruh domain fungsi tersebut. Pada sub bab ini dimisalkan fungsi f terdefinisi pada suatu interval I, baik tertutup, terbuka, atau tidak keduanya, terbatas ataupun tidak terbatas. Fungsi f dikatakan kontinu pada $x_0 \in I$ apabila diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian hingga ketika $x \in I$ dan $|x - x_0| < \delta$ maka $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Secara umum, δ ditemukan bergantung tidak hanya pada ε yang dimisalkan melainkan juga titik x_0 dalam pertimbangan.

Definisi 2.16 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$. *Fungsi* f *dikatakan kontinu seragam pada* I *apabila diberikan sembarang* $\varepsilon > 0$ *terdapat suatu* $\delta > 0$ *sedemikian hingga ketika* $x_1, x_2 \in I$ *dengan* $|x_1 - x_2| < \delta$ *maka* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Contoh 2.14

Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = x^2$ kontinu seragam pada $[0, a]$, di mana a merupakan sembarang bilangan real positif.

Bukti. Perhatikan bahwa agar $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, maka

$|x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$

$|x_1 + x_2||x_1 - x_2| < \varepsilon$

Karena $x_1 < x_{maks}$ dan $x_2 < x_{maks}$, dengan $x_{maks} = \max[0, a] = a$, maka

$|x_1 + x_2||x_1 - x_2| < |a + a||x_1 - x_2| < \varepsilon$

$2a|x_1 - x_2| < \varepsilon$

$|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{2a}$

Sehingga misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ dan dipilih $\delta = \frac{\varepsilon}{2a}$,apabila $x_1, x_2 \in [0, a]$ dengan $|x_1 - x_2| < \delta$ maka

$$
\begin{aligned}
|f(x_1) - f(x_2)| &= |(x_1)^2 - (x_2)^2| \\
&= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\
&\leq 2a|x_1 - x_2| \\
&< 2a\delta
\end{aligned}
$$

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$

Terbukti $f(x) = x^2$ kontinu seragam pada $[0, a]$.

Teorema 2.11 (Bartle & Sherbert, 2010)

Misalkan I interval tutup yang terbatas dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I, maka f kontinu seragam pada I.

Bukti. Asumsikan f tidak kontinu seragam pada *I* maka terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan dua sub barisan (x_n) dan (u_n) pada *I* sedemikian hingga $|x_n - u_n| < 1/n$ dan $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena diketahui *I* terbatas, barisan (x_n) terbatas. Berdasarkan teorema *Bolzano-Weierstrass* terdapat sub barisan (x_{n_k}) pada (x_n) yang konvergen pada z. Karena *I* interval tertutup, *z* merupakan anggota I. Sehingga subbarisan (x_{n_k}) konvergen pada z, karena

$$\left|u_{n_k} - z\right| \leq \left|u_{n_k} - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - z\right|$$

Karena f kontinu pada z, maka barisan $(f(x_{n_k}))$ dan $(f(u_{n_k}))$ konvergen ke $f(z)$. Namun hal tersebut mustahil karena $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap

$n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan hipotesis, f tidak kontinu seragam pada interval I berakibat f tidak kontinu pada sembarang titik $z \in I$. Akibatnya, jika f kontinu pada setiap titik pada I, maka f kontinu seragam pada I.

■

2.1.9 Diferensial

Salah satu prosedur baku yang penting dan sering muncul dalam sains yaitu pengestimasian galat *(error).* Pengestimasian galat yang menentukan seberapa buruk nilai y_0 tercemar galat dalam x, saat variabel x tertentu yang bernilai x_0 dengan galat yang mungkin berukuran $\pm\Delta x$ digunakan untuk menghitung y_0 untuk y yang bergantung pada x, dapat dilakukan dengan sarana diferensial (Purcell, dkk., 2003).

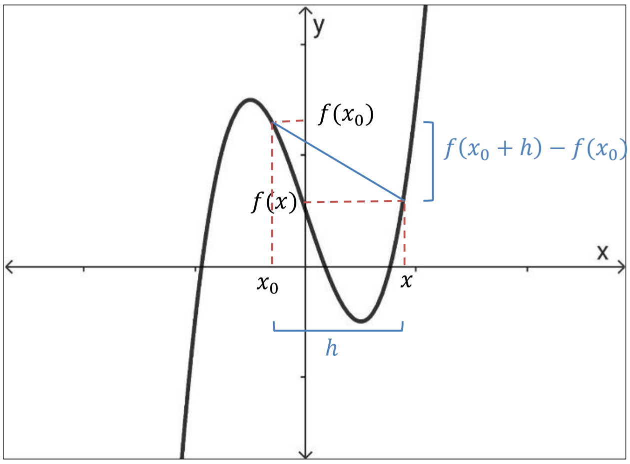
Definisi 2.17 (Purcell, dkk., 2003)

Misal $y = f(x)$ merupakan fungsi yang terdiferensial dari peubah x, Δx merupakan kenaikan sebarang dalam peubah bebas x. dx disebut diferensial peubah bebas x, sama dengan Δx. Δy adalah perubahan aktual dalam peubah y sewaktu x berubah dari x ke $x + \Delta x$; yaitu $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. dy disebut diferensial peubah tak bebas y yang didefinisikan oleh $dy = f'(x)dx$.

Pada penelitian ini kenaikan sebarang dalam peubah bebas x dinotasikan sebagai h. Sehingga h menyatakan perubahan x_0 ke x, dengan $x = x_0 + h$. Pernyataan tersebut ekuivalen dengan $h = x - x_0$. Sehingga perubahan aktual dalam peubah y saat x_0 berubah ke $x_0 + h$ dinyatakan sebagai $f(x_0 + h) - f(x_0)$. Perhatikan gambar 2.3.

Contoh 2.15

Diberikan $y = x^3 - 3x + 1$.



Gambar 2.3 Grafik $y = x^3 - 3x + 1$

Perhatikan bahwa

$dy = (2 \cdot x^{3-1} - 3 \cdot x^{1-1})dx$

$\quad = (2x^2 - 3 \cdot 1)dx$

$dy = (3x^2 - 3)dx$

Berbeda dengan diferensial, turunan memiliki definisi yang akan dibahas pada sub bab berikutnya. Misalkan $f'(x)$ merupakan turunan dari f pada x, diferensial peubah tak bebas y yaitu $dy = f'(x)dx$, sehingga pembagian kedua ruas oleh dx menghasilkan $f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Dari pernyataan tersebut dapat ditafsirkan turunan yaitu sebagai suatu hasil bagi dua diferensial (Purcell, dkk., 2003).

2.1.10 Fungsi Terdiferensial

Fungsi terdiferensial didefinisikan sebagai suatu fungsi yang memiliki turunan. Turunan, selain menjadi topik bahasan penting dalam analisis, juga digunakan dalam berbagai disiplin ilmu di mana perubahan diukur. Kemiringan garis singgung, kecepatan sesaat, laju pertumbuhan organisme, keuntungan marginal, hingga kepadatan kawat merupakan pengaplikasian dari konsep turunan (Purcell, dkk., 2003). Turunan dari fungsi f merupakan suatu fungsi baru f' yang menunjukkan besar perubahan f apabila x berubah. Misalkan f terdefinisi di suatu *neighborhood* dari x_0.

Definisi 2.18 (Parzynski & Zipse, 1987)

Turunan dari f *pada* x_0 *yaitu*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Selama limitnya ada. Apabila terdapat limit, dapat dikatakan bahwa f *terdiferensial pada* x_0.

Apabila dimisalkan $x = x_0 + h$, sehingga $h = x - x_0$, maka definisi dari turunan $f(x)$ di x_0 dapat dinyatakan sebagai

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Domain turunan dari fungsi f atau dituliskan sebagai f', merupakan sub himpunan dari domain himpunan f. Domain tersebut merupakan himpunan semua titik x_0 di mana f terdiferensial. Turunan fungsi f, di mana $f(x) = y$ dapat dituliskan sebagai $D_x f$, $\frac{df}{dx}$, dan $\frac{dy}{dx}$.

Contoh 2.16

Misalkan $f(x) = x^2$, untuk setiap $x \in I$, dengan $I \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + h \end{aligned}$$

$f'(x) = 2x$

$f'(x)$ ada untuk setiap $x \in I$, sehingga f terdiferensial pada I.

Teorema 2.12 (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $f: I \to \mathbb{R}$ *terdiferensial pada* $x_0 \in I$ *maka* f *kontinu pada* x_0

Bukti. Perhatikan bahwa f kontinu pada x_0 jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(x_0)$ atau $\lim_{x\to\infty}[f(x) - f(x_0)] = 0$. Misalkan f terdiferensial pada x_0, maka

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}[f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to\infty}(x - x_0) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa f kontinu pada x_0.

■

Teorema di atas mengakibatkan apabila suatu fungsi f terdiferensial pada setiap titik pada $[a, b]$ maka f kontinu pada $[a, b]$. Perhatikan bahwa kondisi sebaliknya dari teorema tersebut tidak berlaku, sehingga kekontinuan $f: I \to \mathbb{R}$ pada suatu titik tidak menjamin keberadaan turunan pada titik tersebut.

2.1.11 Kondisi Lipschitz

Salah satu konsep penting dalam mempelajari teori persamaan diferensial yaitu kondisi Lipschitz. Konsep ini juga berkaitan dengan teorema nilai tengah yang akan dibahas pada pembahasan untuk menjawab rumusan masalah. Konsep kondisi Lipschitz dalam matematika yaitu kekontinuan suatu fungsi yang diukur dengan batasan seberapa cepat perubahan fungsi terjadi. Parzynski, William R.

dan Zipse, Philip W. dalam bukunya mendefinisikan kondisi Lipschitz sebagai berikut (Parzynski & Zipse, 1987):

Definisi 2.19

Suatu fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz pada suatu interval I apabila terdapat suatu konstan $M > 0$ sedemikian hingga

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \quad \textit{untuk setiap } x_1, x_2 \in I.$$

Contoh 2.16

Diberikan $f: A \to \mathbb{R}$, dengan $A \subset \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = x^2$ merupakan fungsi Lipschitz pada $A = [0, b]$, untuk sembarang $b \in \mathbb{R}$.

Diketahui bahwa $f(x) = x^2$ pada $A = [0, b]$ di mana $b > 0$, maka apabila dipilih $M = 2b$ berlaku

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &\leq 2b|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in [0, b]$. Sehingga f memenuhi kondisi Lipschitz berdasarkan definisi.

Teorema 2.13 (Bartle & Sherbert, 2010)

Jika $f: A \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi Lipschitz maka f kontinu seragam pada A.

Bukti. Diketahui dari **definisi 2.19**, jika f merupakan fungsi Lipschitz, maka $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$. Untuk $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \varepsilon/M$. Jika $x_1, x_2 \in A$ memenuhi $|x_1 - x_2| < \delta$, maka

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq M|x_1 - x_2| \\ &< M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan definisi kontinu seragam, terbukti bahwa f kontinu seragam pada A.

$\blacksquare$

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Nabi Muhammad SAW digambarkan sebagai sosok yang memiliki sifat-sifat mulia pada bebagai sumber, termasuk di dalamnya Al-Quran dan Hadis. pada surah Al-Qalam ayat 4 Allah SWT menyebutkan:

وَإِنَّكَ لَعَلَىٰ خُلُقٍ عَظِيمٍ

Artinya: *“dan sesungguhnya engkau benar-benar berbudi pekerti yang agung”* (Fadlan, 2020).

Keluhuran budi pekerti Nabi Muhammad SAW yang berada pada puncaknya terpampang dari cara Allah, Yang Maha Agung, menyifati budi pekerti Nabi dengan kata agung. Keagungan akhlak Nabi Muhammad SAW disebutkan oleh Sayyid Quthub terbukti dari kemampuan beliau menerima pujian tersebut dengan mantap. Pujian tersebut tidak sedikitpun menggoyahkan kepribadian beliau ataupun membuat beliau menunjukkan sifat sombong. Nabi Muhammad SAW menerima pujian tersebut dengan tenang dan penuh keseimbangan. Ketenangan yang beliau tunjukkan tersebut menurut Sayyid Guthub telah menjadi bukti kuat tentang keagungan beliau (Shihab, 2002).

Meneliti lebih jauh ayat-ayat lain dalam Al-Quran akan menunjukkan lebih banyak sifat-sifat mulia Rasulullah yang memberi dorongan bagi muslim untuk berakhlak baik. Salah satunya pada surat At-Taubah ayat 128 berikut yang menunjukkan sifat belas kasih serta penyayang Nabi Muhammad SAW

لَقَدۡ جَآءَكُمۡ رَسُولٞ مِّنۡ أَنفُسِكُمۡ عَزِيزٌ عَلَيۡهِ مَا عَنِتُّمۡ حَرِيصٌ عَلَيۡكُم بِٱلۡمُؤۡمِنِينَ رَءُوفٞ رَّحِيمٞ

Artinya: “*Sungguh telah datang kepadamu seorang Rasul dari kaummu sendiri, berat terasa olehnya penderitaan yang kamu alami, (dia) sangat*

> *menginginkan (keimanan dan keselamatan) bagimu, penyantun dan penyayang terhadap orang-orang yang beriman"* (Fadlan, 2020).

Menurut quraish shihab dalam tafsirnya, ayat tersebut menjelaskan bahwa seorang Rasul yang diutus akan senantiasa mengharapkan keselamatan serta kebaikan bagi umatnya karena beliau secara langsung dapat merasakan penderitaan mereka baik lahir maupun batin. Rasul juga mengharapkan keimanan mereka kepada Allah. Sifat Rasulullah yang demikan mengindikasikan bahwa Nabi Muhammad memiliki kasih sayang dan kepekaan yang besar sebagai seorang pemimpin.

Nabi Muhammad SAW adalah contoh utama bagi umat Islam dalam menjalani kehidupan sehari-hari. Mempelajari sifat-sifat mulia beliau membantu umat Islam memahami bagaimana menjalani kehidupan yang sesuai dengan ajaran Islam sekaligus membantu umat Islam untuk meningkatkan kualitas diri. Begitupun, dalam mempelajari matematika khususnya bidang analisis, mempelajari sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real mengambil peran penting dalam pengaplikasian pada berbagai aspek kehidupan. Sehingga penelitian ini akan membahas sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Pada subbab ini akan dipaparkan definisi hingga teorema pendukung yang akan dijadikan rujukan untuk membuktikan teorema yang menunjukkan sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real. Sebelumnya, terlebih dahulu didefinisikan fungsi terdiferensial yaitu sebagai berikut:

Definisi 2.18 (Parzynski & Zipse, 1987)

Turunan dari f *pada* x_0 *yaitu*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

asalkan limitnya ada. Ketika terdapat limit, dapat dikatakan bahwa f *terdiferensial pada* x_0.

Definisi 2.5 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$, *misalkan* $x_0 \in I$. $f(x_0)$ *merupakan maksimum lokal fungsi* f *apabila untuk setiap* x *di persekitaran* x_0 *memenuhi* $f(x) \leq f(x_0)$. *Begitupun,* $f(x_0)$ *merupakan minimum lokal fungsi* f *apabila untuk setiap* x *persekitaran* x_0 *memenuhi* $f(x) \geq f(x_0)$.

Definisi 2.6 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$, *misalkan* $x_0 \in I$. $f(x_0)$ *merupakan maksimum absolut dari* f *pada* I *apabila* $f(x_0) \geq f(x)$ *untuk setiap* $x \in I$. *Begitupun,* $f(x_0)$ *merupakan minimum absolut dari* f *pada* I *apabila* $f(x_0) \leq f(x)$ *untuk setiap* $x \in I$.

Teorema 2.10 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$, *dengan* $[a, b] \subset I$. *Jika* f *kontinu pada* $[a, b]$ *maka terdapat* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *sehingga* $f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$ *untuk setiap* $x \in [a, b]$, *di mana* $f(x_1) = M$ *dan* $f(x_2) = m$.

Definisi 2.12 (Parzynski & Zipse, 1987)

Suatu fungsi $f: A \to B$ *dikatakan terbatas apabila terdapat suatu bilangan real* $M > 0$ *sedemikian hingga* $|f(x)| < M$, *untuk setiap* $x \in A$.

Definisi 2.13 (Parzynski & Zipse, 1987)

Suatu fungsi $f: A \to B$ *dikatakan monoton naik pada* A *apabila* $f(x_1) \leq f(x_2)$ *untuk setiap* $x_1, x_2 \in A$ *dengan* $x_1 < x_2$*; fungsi* $f(x)$ *dikatakan monoton turun pada* A *apabila* $f(x_1) \geq f(x_2)$ *untuk semua* $x_1, x_2 \in A$ *dengan* $x_1 < x_2$.

Definisi 2.16 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: I \to \mathbb{R}$*. Fungsi* f *dikatakan kontinu seragam pada* I *apabila diberikan sembarang* $\varepsilon > 0$ *terdapat suatu* $\delta > 0$ *sedemikian hingga ketika* $x_1, x_2 \in I$ *dengan* $|x_1 - x_2| < \delta$ *maka* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Teorema 2.12 (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $f: I \to \mathbb{R}$ *terdiferensial pada* $x_0 \in I$ *maka* f *kontinu pada* x_0.

Definisi 2.19 (Parzynski & Zipse, 1987)

Suatu fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ *dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz pada suatu interval* I *apabila terdapat suatu konstan* $M > 0$ *sedemikian hingga*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \qquad \textit{untuk setiap } x_1, x_2 \in I.$$

Definisi serta teorema tersebut kemudian akan diaplikasikan pada pembuktian teorema-teorema yang menunjukkan sifat-sifat fungsi terdiferensial yang disebutkan pada “Introduction to Mathematical Analysis” oleh William R. Parzynski dan Philip W. Zipse.

Teorema 4.1 (Turunan Ekstremum Lokal Fungsi)

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval I dan x_0 merupakan anggota I. Jika $f(x_0)$ ekstremum (maksimum atau minimum) lokal maka $f'(x_0) = 0$.

Teorema 4.2: Teorema Rolle

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval I dan $[a, b] \subset I$. Jika $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) dan $f(a) = f(b)$ maka terdapat suatu $x_0 \in (a, b)$ sehingga $f'(x_0) = 0$.

Teorema 4.3: Teorema Nilai Rata-Rata Cauchy

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing terdefinisi pada interval I dan $[a,b] \subset I$. Jika f dan g masing-masing fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) maka terdapat suatu $x_0 \in (a,b)$ sehingga $f'(x_0)[g(b)-g(a)] = g'(x_0)[f(b)-f(a)]$.

Teorema 4.4: Teorema Nilai Rata-Rata

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval I dan $[a,b] \subset I$. Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) maka terdapat suatu titik $x_0 \in (a,b)$ sehingga $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema 4.5 (Kemonotonan Naik Fungsi Terdiferensial)

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval I dan $[a,b] \subset I$. Jika f terdiferensial pada (a,b) dan $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$ maka f monoton naik pada (a,b).

Teorema 4.6 (Kemonotonan Turun Fungsi Terdiferensial)

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval I dan $[a,b] \subset I$. Jika f terdiferensial pada (a,b) dan $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$ maka f monoton turun pada (a,b).

Teorema 4.7 (Kekontinuan Seragam Fungsi Terdiferensial)

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval I. Jika f' ada pada setiap titik di I dan terbatas pada interval I maka f kontinu seragam pada I.

Teorema 4.8 (Keterkaitan Keberadaan Turunan dan Lipschitz)

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval I. Jika f' ada pada setiap titik di I dan terbatas pada interval I maka f memenuhi kondisi Lipschitz pada I. Sebaliknya, jika f terdiferensial pada setiap titik di I dan memenuhi kondisi Lipschitz pada I maka f' terbatas pada I.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kepustakaan atau literatur (*literature research*). Metode ini menjadikan informasi yang didapat dari artikel maupun buku menjadi dasar terjawabnya rumusan masalah. Obyek kajian penelitian pustaka menggunakan data pustaka berupa buku-buku sebagai sumber datanya (Hadi, 2002). Kegiatan yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi pengumpulan data kepustakaan, pembacaan dan pemahaman konsep, serta analisis dan pengolahan bahan penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Sebelum memulai penelitian, peneliti telebih dahulu menentukan topik penelitian dengan mencari serta membaca artikel, skripsi serta buku yang kemudian menjadi rujukan penelitian. Peneliti kemudian menentukan rumusan masalah beserta batasannya yang akan dibahas pada penelitian ini. Selanjutnya Peneliti memahami konsep dasar definisi yang digunakan sebagai dasar untuk menjawab rumusan masalah. Pemahaman tersebut dilaksanakan dengan memahami materi yang berhubungan atau menjadi dasar pembuktian dari sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real seperti fungsi, fungsi terdiferensial, fungsi terbatas, fungsi monoton, kekontinuan fungsi, kekontinuan seragam dan kondisi Lipschitz. Selanjutnya peneliti mencari dan memilih ayat-ayat Al-Quran serta hadits yang dapat diintegrasikan dengan topik pada penelitian ini.

3.3 Tahapan Penelitian

Ada pun langkah yang akan dilakukan setelah menyelesaikan tahapan pra penelitian yaitu membuktikan sifat-sifat fungsi terdiferensial yang pada penelitian ini dimisalkan $f(x)$ dan $g(x)$, di mana masing-masing terdefinisi pada suatu interval I pada himpunan bilangan real dengan tahapan sebagai berikut:

1. Mendefinisikan fungsi $f(x)$ yang terdiferensial pada sebarang $x \in I$ dengan memperumum definisi fungsi yang terdiferensial pada x_0.
2. Menunjukkan bahwa jika $f(x_0)$ ekstremum lokal maka $f'(x_0) = 0$.
3. Menunjukkan bahwa jika $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$, dengan $[a, b] \subset I$ dan terdiferensial pada (a, b) dan $f(a) = f(b)$ maka terdapat suatu $x_0 \in (a, b)$ sehingga $f'(x_0) = 0$.
4. Menunjukkan bahwa jika f dan g masing-masing kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) maka terdapat suatu $x_0 \in (a, b)$, dengan $[a, b] \subset I$ sehingga $f'(x_0)[g(b) - g(a)] = g'(x_0)[f(b) - f(a)]$.
5. Menunjukkan bahwa jika f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) maka terdapat suatu titik $x_0 \in (a, b)$, dengan $[a, b] \subset I$ sehingga $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
6. Menunjukkan bahwa jika f terdiferensial pada (a, b), dengan $[a, b] \subset I$ dan $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$ maka f monoton naik pada (a, b).
7. Menunjukkan bahwa jika f terdiferensial pada (a, b), dengan $[a, b] \subset I$ dan $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$ maka f monoton turun pada (a, b).

8. Menunjukkan jika f' ada pada setiap titik di I dan terbatas pada interval I maka f kontinu seragam pada I.

9. Menunjukkan bahwa jika f' ada pada setiap titik di I dan terbatas pada interval I maka f memenuhi kondisi Lipschitz pada I. Sebaliknya, jika f terdiferensial pada setiap titik pada I dan memenuhi kondisi Lipschitz pada I maka f' terbatas pada I.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Sifat-Sifat Fungsi Terdifrensial pada Himpunan Bilangan Real

Subbab ini membahas pembuktian dari sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real yang termuat pada bab kajian teori. Sifat-sifat yang akan dibuktikan dinyatakan kembali pada sub bab ini sebagai teorema 4.1 sampai 4.8. Akan dibuktikan teorema 4.1 yang menyatakan turunan ekstremum fungsi akan bernilai nol, selanjutnya akan dibuktikan teorema rolle, teorema nilai rata-rata Cauchy dan teorema nilai rata-rata. Akan ditunjukkan dan dibuktikan juga pada sub bab ini kekontinuan seragam, kemonotonan naik dan kemonotonan turun fungsi terdiferensial serta keterkaitan fungsi terdiferrensial dengan Lipschitz. Pembuktian tersebut akan dimulai dengan mendefinisikan fungsi terdiferensial, ekstremum lokal, ekstremum absolut yang pada penelitian ini merujuk pada buku oleh Parzynski dan Zipse (1987):

Definisi 2.18

Turunan dari f pada x_0 yaitu

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

asalkan limitnya ada. Apabila terdapat limit, dapat dikatakan bahwa f terdiferensial pada x_0.

Definisi tersebut apabila diperumum, menyatakan bahwa suatu fungsi $f(x)$ yang terdefinsi pada $I \subset \mathbb{R}$ dapat dikatakan terdiferensial pada sebarang $x \in I$ apabila f terdiferensial pada setiap $x_0 \in I$, dengan $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Kemudian dapat dikatakan bahwa f terdiferensial pada interval I apabila f terdiferensial pada setiap $x \in I$.

Contoh 4.1

Misalkan $f(x) = x^2$, untuk setiap $x \in I$, dengan $I \subset \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h}$$

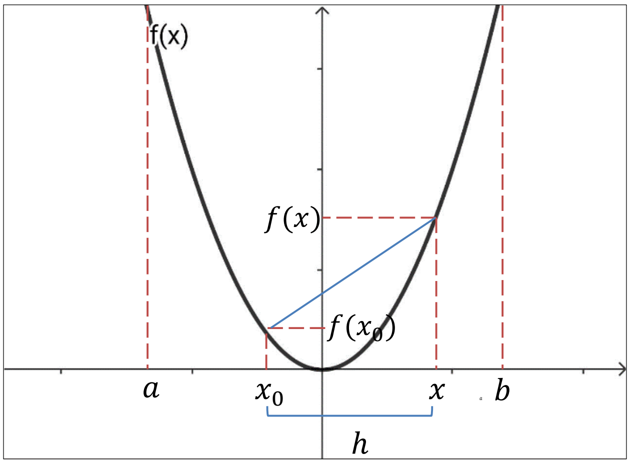
$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h$$

$f'(x) = 2x$,

$f'(x)$ ada untuk setiap $x \in I$, sehingga f terdiferensial pada I.



Gambar 4.1 Grafik $f(x)$ pada interval $I = [a, b]$

Perhatikan bahwa apabila dimisalkan $x = x_0 + h$, kemiringan garis biru pada gambar 4.1 dinyatakan sebagai $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ atau $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Definisi 2.5 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_0)$ *merupakan maksimum lokal fungsi* f *apabila untuk setiap* x *di persekitaran* x_0 *memenuhi* $f(x) \leq f(x_0)$. *Begitupun,* $f(x_0)$ *merupakan minimum lokal fungsi* f *apabila untuk setiap* x *persekitaran* x_0 *memenuhi* $f(x) \geq f(x_0)$.

Contoh 4.2

Misal diberikan $f: [0,5] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Akan dibuktikan $f\left(\frac{5}{4}\right)$ merupakan minimum lokal dari fungsi $f(x)$.

Perhatikan bahwa apabila dipilih $\delta = 1$, berdasarkan **contoh 2.1**, persekitaran $x_0 = \frac{5}{4}$ dari $\delta = 1$ yaitu $V_\delta\left(\frac{5}{4}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}: \frac{1}{4} < x < \frac{9}{4}\right\}$, $x \neq \frac{5}{4}$. Untuk $x = \frac{5}{4}, f\left(\frac{5}{4}\right) = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4}\right) + 3 = -\frac{1}{8}$. Perhatikan $f(x)$ pada titik kritis yaitu $x = \frac{1}{4} < \frac{5}{4}$,

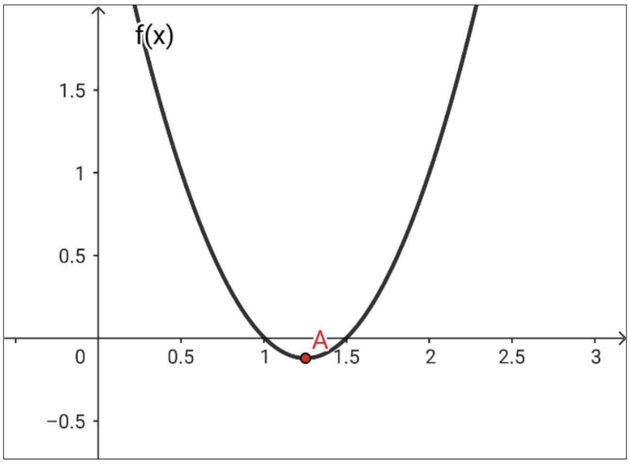
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{4}\right) + 3 = \frac{15}{8} > -\frac{1}{8}$$

$f\left(\frac{1}{4}\right) > f\left(\frac{5}{4}\right)$ sehingga f turun untuk $\frac{1}{4} \leq x < \frac{5}{4}$. Kemudian untuk $x = \frac{9}{4} > \frac{5}{4}$, maka

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = 2\left(\frac{9}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{9}{4}\right) + 3 = \frac{15}{8} > -\frac{1}{8}$$

$f\left(\frac{9}{4}\right) > f\left(\frac{5}{4}\right)$ sehingga f turun untuk $\frac{5}{4} < x \leq \frac{9}{4}$. Untuk setiap $x \in V_\delta\left(\frac{5}{4}\right)$ berlaku $f(x) \geq f\left(\frac{5}{4}\right)$. Terbukti bahwa $f\left(\frac{5}{4}\right)$ merupakan minimum lokal dari fungsi $f(x)$.

Perhatikan gambar berikut di mana titik A$\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{8}\right)$ merupakan titik di mana $f\left(\frac{5}{4}\right)$ merupakan minimum lokal.



Gambar 4.2 Fungsi $f(x)$ dengan $f\left(\frac{5}{4}\right)$ minimum lokal

Definisi 2.6 (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 *merupakan anggota interval* $I \subset \mathbb{R}$. $f(x_0)$ *merupakan maksimum absolut dari* f *pada* I *apabila* $f(x_0) \geq f(x)$ *untuk setiap* $x \in I$. *Begitupun,* $f(x_0)$ *merupakan minimum absolut dari* f *pada* I *apabila* $f(x_0) \leq f(x)$ *untuk setiap* $x \in I$.

Contoh 4.3

Misal diberikan $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. $f(1)$ merupakan minimum absolut dari fungsi $f(x)$ pada $[0,1]$.

Untuk $x = \frac{5}{4}, f\left(\frac{5}{4}\right) = 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{4}\right) + 3 = -\frac{1}{8}$. Perhatikan bahwa $f(x)$ terbatas pada $[0,1]$, sehingga pada titik kritis yaitu $x = 0$ dan $x = 1$,

$$f(0) = 2(0)^2 - 5(0) + 3 = 3 > -\frac{1}{8}$$

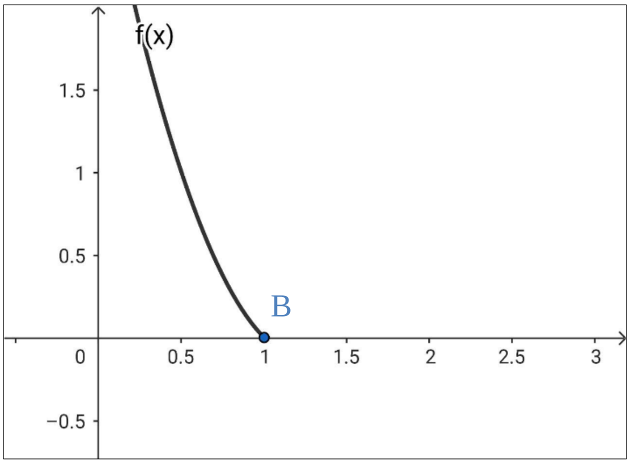
$f(0) > f\left(\frac{5}{4}\right)$ sehingga f turun untuk $0 \leq x < \frac{5}{4}$. Kemudian untuk $x = 1$, maka

$$f(1) = 2(1)^2 - 5(1) + 3 = 0 > -\frac{1}{8}$$

$f(1) > f\left(\frac{5}{4}\right)$ sehingga f turun untuk $\frac{5}{4} < x \leq 5$.

Untuk setiap $x \in [0,1]$ berlaku $f(x) \geq f(x_0)$, sehingga terbukti $f\left(\frac{5}{4}\right)$ merupakan minimum absolut dari fungsi $f(x)$ pada $[0,1]$.

Perhatikan gambar berikut di mana titik B$(1,0)$ merupakan titik di mana $f(1)$ minimum absolut pada $[0,1]$.



Gambar 4.3 Grafik $f(x)$ di mana $f(1)$ minimum absolut pada $[0,1]$

Perlu diperhatikan bahwa berdasarkan definisi tersebut jelas bahwa apabila x_0 merupakan anggota interval I di mana $f(x_0)$ merupakan maksimum absolut dari $f(x)$ pada I maka $f(x_0)$ merupakan maksimum lokal dari f. Pernyataan serupa berlaku untuk minimum.

Selanjutnya akan dibuktian teorema-teorema yang menunjukkan sifat-sifat fungsi yang terdiferensial yang telah disebutkan pada bab kajian teori dengan konstruksi yang dijelaskan pada pembuktian. Pembuktian teorema-teorema berikut akan mengaplikasikan beberapa definisi hingga teorema yang telah dibuktikan secara terpisah pada bab kajian teori.

4.1.1 Turunan Ekstremum Lokal Fungsi

Teorema 4.1

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval $I \subset \mathbb{R}$ dan x_0 merupakan anggota I. Jika $f(x_0)$ ekstremum (maksimum atau minimum) lokal maka $f'(x_0) = 0$.

Bukti

Misalkan $f(x_0)$ maksimum lokal fungsi $f(x)$, maka berdasarkan **definisi 2.5**, terdapat $\varepsilon > 0$, untuk setiap x di persekitaran x_0 sejauh ε yang merupakan irisan I sehingga memenuhi $f(x) \leq f(x_0)$. Perhatikan bahwa

$$f(x) \leq f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \leq 0$$

Karena $x - x_0 \geq 0$ jika $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ dan $x - x_0 \leq 0$ jika $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, maka

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 \;\; jika\; x_0 < x < x_0 + \varepsilon \\ \geq 0 \;\; jika\; x_0 - \varepsilon < x < x_0 \end{cases}$$

Sehingga $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ dan $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ yang mengakibatkan

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

Berdasarkan definisi 2.18, didapat $f'(x_0) = 0$.

Misalkan $f(x_0)$ minimum lokal fungsi $f(x)$, maka berdasarkan **definisi 2.5**, terdapat $\varepsilon > 0$, untuk setiap x di persekitaran x_0 sejauh ε yang merupakan irisan I sehingga memenuhi $f(x) \geq f(x_0)$. Perhatikan bahwa

$$f(x) \geq f(x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \geq 0$$

Karena $x - x_0 \geq 0$ jika $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ dan $x - x_0 \leq 0$ jika $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, maka

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 \;\; jika\; x_0 < x < x_0 + \varepsilon \\ \leq 0 \;\; jika\; x_0 - \varepsilon < x < x_0 \end{cases}$$

Sehingga $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ dan $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ yang mengakibatkan

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

Berdasarkan **definisi 2.18**, didapat $f'(x_0) = 0$. Sehingga terbukti turunan dari ekstremum lokal fungsi bernilai nol.

■

4.1.2 Pembuktian Teorema Rolle

Teorema 4.2: Teorema Rolle

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval $I \subset \mathbb{R}$ dan $[a,b] \subset I$. Jika $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) dan $f(a) = f(b)$ maka terdapat suatu $x_0 \in (a,b)$ sehingga $f'(x_0) = 0$.

Bukti

Diketahui $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b), akan dibuktikan terdapat suatu $x_0 \in (a,b)$ sehingga $f'(x_0) = 0$ saat $f(x) = f(a)$ atau $f(x) \neq f(a)$.

(i) Misalkan $f(x) = f(a)$ untuk setiap $x \in (a,b)$ maka f merupakan fungsi konstan pada $[a,b]$. Sehingga berdasarkan **definisi 2.18**,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h}$$

Jadi, $f'(x) = 0$, untuk setiap $x \in (a,b)$.

(ii) Misalkan $f(x) \neq f(a)$ untuk setiap $x \in (a,b)$ dan diketahui $f(a) = f(b)$ sehingga $f(x) \neq b$. Diketahui $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$ sehingga berdasarkan **teorema 2.10** terdapat $x_1, x_2 \in [a,b]$ sedemikian hingga memenuhi $f(x_1) \geq f(x) \geq f(x_2)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Berdasarkan **definisi 2.6** $f(x_2)$ merupakan maksimum absolut dan $f(x_1)$ minimum absolut f di $[a, b]$. Karena $f(x)$ tidak konstan pada $[a, b]$ dan $f(a) = f(b)$, akibatnya terdapat $x_0 \in (a, b)$ sedemikian hingga $f(x_0)$ merupakan ekstremum (maksimum atau minimum) absolut.

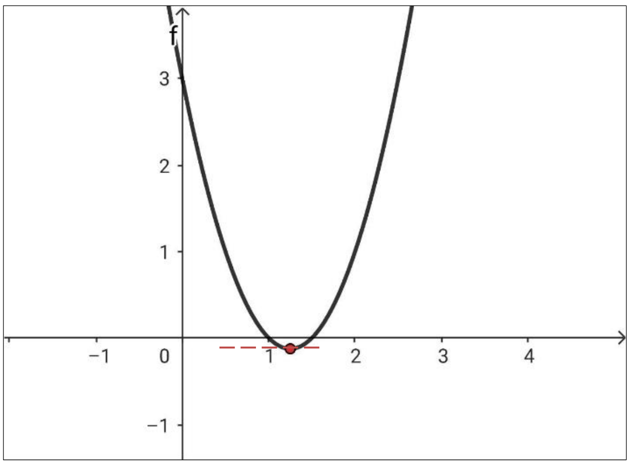
Misalkan $f(x_0)$ maksimum absolut di mana $f(x) \leq f(x_0) = f(x_2)$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Berdasarkan **definisi 2.5** $f(x_0)$ merupakan maksimum lokal dari f. Karena $f(x_0)$ merupakan maksimum lokal dari f dan diketahui $f'(x_0)$ ada, maka berdasarkan **teorema 4.1** $f'(x_0) = 0$.

Begitupun, misalkan $f(x_0)$ minimum absolut di mana $f(x) \geq f(x_0) = f(x_1)$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Berdasarkan **4.2** $f(x_0)$ merupakan minimum lokal dari f. Karena $f(x_0)$ merupakan minimum lokal dari f dan diketahui $f'(x_0)$ ada, maka berdasarkan **teorema 4.1** $f'(x_0) = 0$.

■

Contoh 4.4

Misal diberikan $f: [0,5] \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Telah ditunjukkan pada contoh 4.2 $f\left(\frac{5}{4}\right)$ merupakan minimum lokal dari fungsi $f(x)$. Perhatikan bahwa $f'(x) = 4x - 5$, sehingga $f'\left(\frac{5}{4}\right) = 0$. Perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 4.4 Grafik $f(x)$ di mana $f'\left(\frac{5}{4}\right) = 0$

4.1.3 Pembuktian Teorema Nilai Rata-Rata Cauchy

Teorema 4.3: Teorema Nilai Rata-Rata Cauchy

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing terdefinisi pada interval $I \subset \mathbb{R}$ dan $[a, b] \subset I$. Jika f dan g masing-masing fungsi kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) maka terdapat suatu $x_0 \in (a, b)$ sehingga $f'(x_0)[g(b) - g(a)] = g'(x_0)[f(b) - f(a)]$.

Bukti

Diketahui f dan g masing-masing merupakan fungsi yang kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b). Agar dapat digunakan teorema 4.2 untuk membuktikan terdapat $x_0 \in (a, b)$ sedemikian hingga $F'(x_0) = 0$, dibentuk suatu fungsi F yang kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) di mana untuk setiap $x \in [a, b]$, dengan

$F(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$.

Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
F(b) &= f(b)[g(b) - g(a)] - g(b)[f(b) - f(a)] \\
&= f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) \\
&= g(b)f(a) - f(b)g(a) \\
&= f(a)g(b) - f(b)g(a) - f(a)g(a) + g(a)f(a) \\
&= f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) \\
&= f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)]
\end{aligned}
$$

$F(b) = F(a)$

Karena $F(x)$ kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) maka berdasarkan **teorema 4.2** terdapat $x_0 \in (a, b)$ sedemikian hingga $F'(x_0) = 0$.

$F'(x_0) = f'(x_0)[g(b) - g(a)] - g'(x_0)[f(b) - f(a)] = 0$

$$f'(x_0)[g(b) - g(a)] = g'(x_0)[f(b) - f(a)]$$

■

Misalkan $g(x) = x$ terdefinisi pada $[a, b]$, maka $g'(x) = 1$, $g(a) = a$ dan $g(b) = b$. $g(x)$ merupakan fungsi konstan yang kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b). Apabila dipilih $g(x) = x$, teorema nilai rata-rata Cauchy dapat dinyatakan sebagai teorema nilai rata-rata yang akan dibuktikan berikut.

4.1.4 Pembuktian Teorema Nilai Rata-Rata

Teorema 4.4: Teorema Nilai Rata-Rata

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval $I \subset \mathbb{R}$ dan $[a, b] \subset I$. Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) maka terdapat suatu titik $x_0 \in (a, b)$ sehingga $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Bukti

Diketahui f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b). Misalkan y melalui $\left(a, f(a)\right)$ dan $\left(b, f(b)\right)$ sehingga $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Persamaan garis yang melalui $(a, f(a))$ dengan gradien m yaitu

$$y - f(a) = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x - a)$$

$$y = \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x - a) + f(a)$$

Kemudian misalkan $y = f(x) - g(x)$, didapat

$$g(x) = f(x) - y,$$

$$g(x) = f(x) - \left(\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x - a) + f(a)\right)$$

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x - a) - f(a)$$

Perhatikan bahwa

$$g(a) = f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(a-a) - f(a)$$

$$= f(a) - 0 - f(a)$$

$$= 0$$

$$= f(b) - f(b) + f(a) - f(a)$$

$$= f(b) - \big(f(b) - f(a)\big) - f(a)$$

$$= f(b) - \big(f(b) - f(a)\big)\left(\frac{b-a}{b-a}\right) - f(a)$$

$$= f(b) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(b-a) - f(a)$$

$$g(a) = g(b)$$

$g(x)$ kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b) sehingga berdasarkan **teorema 4.2** terdapat $x_0 \in (a,b)$ sedemikian hingga $g'(x_0) = 0$.

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = 0$$

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

■

4.1.5 Kemonotonan Naik Fungsi Terdiferensial

Teorema 4.5

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval $I \subset \mathbb{R}$ dan $[a,b] \subset I$. Jika f terdiferensial pada (a,b) dan $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$ maka f monoton naik pada (a,b).

Bukti

Diketahui f terdiferensial pada setiap titik pada (a,b) sehingga berdasarkan **teorema 2.12,** f kontinu pada (a,b). Diberikan sebarang $x_1, x_2 \in (a,b)$ dengan $x_1 < x_2$. f kontinu pada $[x_1, x_2]$ dan terdiferensial pada (x_1, x_2), akibatnya berdasarkan **teorema 4.4** terdapat suatu titik x_0, dengan $x_1 < x_0 < x_2$ sedemikian hingga

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

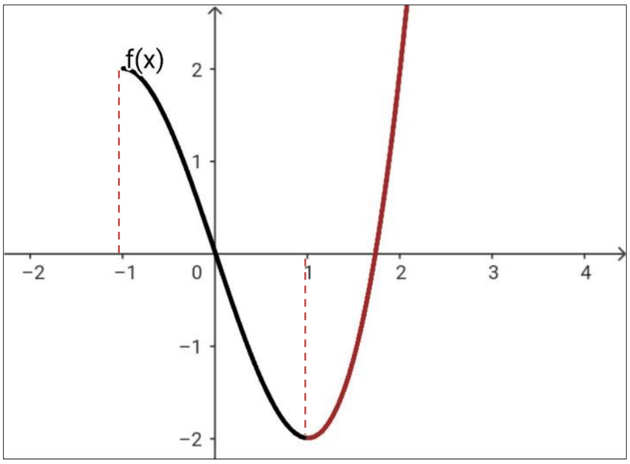
Karena $x_1 < x_2$, maka $x_2 - x_1 > 0$. Karena diketahui $f'(x_0) \geq 0$, akibatnya $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ yang ekuivalen dengan $f(x_1) \leq f(x_2)$. x_1, x_2 anggota sebarang, sehingga $f(x_1) \leq f(x_2)$ berlaku untuk setiap $x_1, x_2 \in (a, b)$. Berdasarkan **definisi 2.13**, terbukti f monoton naik pada (a, b).

■

Contoh 4.5

Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 3x$ yang terdefinisi pada $[-1,3]$, akan ditunjukkan bahwa $f(x)$ naik pada $[1,3]$.

Perhatikan bahwa $f'(x) = 3x^{3-1} - 3x^{1-1} = 3x^2 - 3$. Pada batas-batas $[1,3]$ didapat $f'(1) = 3(1)^2 - 3 = 0$ dan $f'(3) = 3(3)^2 - 3 = 24$. Untuk setiap $x \in [1,3]$, berlaku $f'(x) \geq 0$ sehingga f monoton naik pada $[1,3]$. Perhatikan ilustrasi yang diberikan berikut.



Gambar 4.5 $f(x)$ turun pada $[-1,1]$ dan naik pada $[1,3]$

4.1.6 Kemonotonan Turun Fungsi Terdiferensial

Teorema 4.6

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada interval $I \subset \mathbb{R}$ dan $[a,b] \subset I$. Jika f terdiferensial pada (a,b) dan $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$ maka f monoton turun pada (a,b).

Bukti

Diketahui f terdiferensial pada setiap titik pada (a,b) sehingga berdasarkan **teorema 2.12,** f kontinu pada (a,b). Diberikan sebarang $x_1, x_2 \in (a,b)$ dengan $x_1 < x_2$, karena f kontinu pada $[x_1, x_2]$ dan terdiferensial pada (x_1, x_2) akibatnya berdasarkan **teorema 4.4** terdapat suatu titik x_0, dengan $x_1 < x_0 < x_2$ sedemikian hingga

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Karena $x_1 < x_2$, maka $x_2 - x_1 > 0$. Karena diketahui $f'(x_0) \leq 0$, akibatnya $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$ yang ekuivalen dengan $f(x_1) \geq f(x_2)$. x_1, x_2 anggota sebarang, sehingga $f(x_1) \geq f(x_2)$ berlaku untuk setiap $x_1, x_2 \in (a,b)$. Berdasarkan **definisi 2.13**, terbukti f monoton turun pada (a,b).

■

Contoh 4.6

Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 3x$ yang terdefinisi pada $[-1,3]$, akan ditunjukkan bahwa $f(x)$ turun pada $[-1,1]$.

Perhatikan bahwa $f'(x) = 3x^2 - 3$. Pada batas-batas $[-1,1]$ didapat $f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 0$ dan $f'(1) = 3(1)^2 - 3 = 0$. Kemudian untuk $x = 0, f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$. Untuk setiap $x \in [-1,1]$, berlaku $f'(x) \leq 0$ sehingga f

monoton turun pada $[-1,1]$. Perhatikan bahwa pada ilustrasi yang diberikan (gambar 4.5) $f(x)$ turun pada $[-1,1]$.

4.1.7 Kekontinuan Seragam Fungsi Terdiferensial

Teorema 4.7

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval $I \subset \mathbb{R}$. Jika f' ada pada setiap titik pada I dan terbatas pada interval I maka f kontinu seragam pada I.

Bukti

Diketahui f' ada pada setiap titik pada I sehingga berdasarkan **definisi 2.18,** f terdiferensial pada setiap titik pada I. f yang terdiferensial pada setiap titik pada I berdasarkan **teorema 2.12** mengakibatkan f kontinu pada I. Akibatnya berdasarkan **teorema 4.4**, untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ di mana $x_1 < x_2$ terdapat $x_0 \in (x_1, x_2)$ sedemikian hingga

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

didapat

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1)$$

Kemudian diketahui f' terbatas pada interval I, berdasarkan **definisi 2.12**, terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian hingga $|f'(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in I$. Sehingga

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(x)||x_2 - x_1| \leq M|x_2 - x_1|$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in I$. Kemudian misal diberikan $\varepsilon > 0$, dipilih $\delta = \varepsilon/M$ dengan $|x_2 - x_1| < \delta$. Perhatikan bahwa

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M\delta$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M(\varepsilon/M)$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \varepsilon$$

Sehinga berdasarkan **definisi 2.22**, terbukti bahwa f kontinu seragam pada I.

■

4.1.8 Keterkaitan Fungsi Terdiferensial dengan Lipschitz

Definisi 2.19

Suatu fungsi $f: I \to \mathbb{R}$ dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz pada suatu interval I apabila terdapat suatu konstan $M > 0$ sedemikian hingga

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \quad \textit{untuk setiap } x_1, x_2 \in I.$$

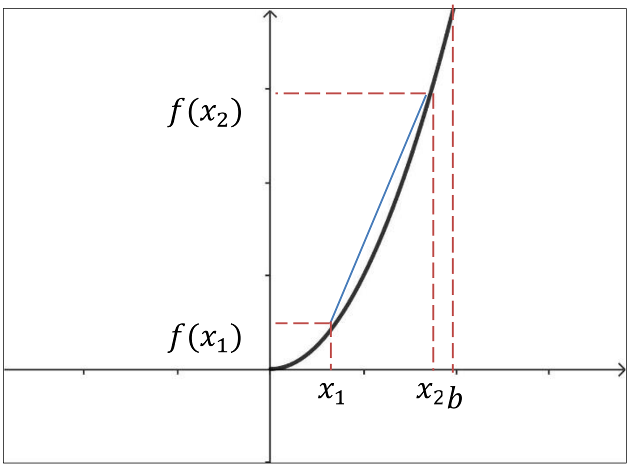
Contoh 4.7

Diberikan $f: A \to \mathbb{R}$, dengan $A \subset \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa $f(x) = x^2$ merupakan fungsi Lipschitz pada $A = [0, b]$, untuk sembarang $b \in \mathbb{R}$.

Diketahui bahwa $f(x) = x^2$ pada $A = [0, b]$ di mana $b > 0$, maka apabila dipilih $M = 2b$ berlaku

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| \\ &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \\ &\leq 2b|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in [0, b]$. Sehingga f memenuhi kondisi Lipschitz berdasarkan definisi. Perhatikan ilustrasi berikut dimana kemiringan garis biru dapat dinyatakan sebagai $\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}$



Gambar 4.6 Grafik $f(x) = x^2$

$f(x) = x^2$ pada $[0, b]$ dibuktikan memenuhi kondisi Lipschitz sehingga terdapat konstan $M > 0$ sedemikian hingga $\frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|} \leq M$ untuk setiap $x_1, x_2 \in [0, b]$.

Teorema 4.8

Misalkan f terdefinisi pada interval $I \subset \mathbb{R}$. Jika f' ada pada setiap titik pada I dan terbatas pada interval I maka f memenuhi kondisi Lipschitz pada I. Sebaliknya, jika f terdiferensial pada setiap titik di I dan memenuhi kondisi Lipschitz pada I maka f' terbatas pada I.

Bukti

$(\Longrightarrow)$

Diketahui f' ada pada setiap titik pada I sehingga berdasarkan **definisi 2.18** diketahui f terdiferensial pada I. f yang terdiferensial pada I berdasarkan **teorema 2.12** mengakibatkan f kontinu pada I. Sehingga berdasarkan **teorema 4.4**, untuk setiap $x_1, x_2 \in I$ di mana $x_1 < x_2$ terdapat $x_0 \in (x_1, x_2)$ sedemikian hingga

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

didapat

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1)$$

Kemudian diketahui f' terbatas pada interval I, berdasarkan **definisi 2.12**, terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian hingga $|f'(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in I$. Sehingga

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(x)||x_2 - x_1|$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$$

Untuk setiap $x_1, x_2 \in I$. Terbukti bahwa f memenuhi kondisi Lipschitz.

($\Leftarrow$)

Diketahui bahwa f terdiferensial pada I dan memenuhi kondisi Lipschitz pada I maka akan dibuktikan f' terbatas pada I. Berdasarkan **definisi 2.18**, karena f terdiferensial pada setiap titik pada I, untuk setiap $x_0 \in I$ berlaku

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Kemudian diketahui f memenuhi kondisi Lipschitz di mana untuk setiap $x, x_0 \in I$, terdapat suatu konstan $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$. Sehingga untuk sebarang $x_0 \in I$ berlaku

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq M$$

Untuk setiap $x \neq x_0, x \in I$. $|f'(x_0)| \leq M$. Berdasarkan **definisi 2.12**, terbukti bahwa f'terbatas pada I.

■

4.2 Kajian Integrasi dengan Hasil Pembahasan

Konsep keimanan sejati merupakan sebuah ajaran Islam yang ditanamkan lewat al-Qur’an. Telah dibahas sebelumnya pada kajian pustaka Nabi Muhammad saw. mengajarkan bahwa keimanan hadir sebagai nilai kemanusiaan, rasa kepedulian, saling menyayangi saling melindungi. Dalam al-Qur’an juga telah dijelaskan bahwa Nabi Muhammad merupakan suri tauladan yang sifat-sifatnya menjadi sifat-sifat ideal orang yang beriman sehingga penting untuk mempelajari serta menjadikannya pedoman dalam hal apapun.

Penelitian ini menunjukkan sifat-sifat fungsi yang terdiferensial di mana fungsi tersebut terdefinisi pada suatu interval I. Salah satu di antara sifat-sifat tersebut yaitu fungsi yang terdiferensial mengakibatkan fungsi monoton naik pada (a, b) apabila $f'(x) \geq 0$ dengan $(a, b) \subset I$, sebaliknya apabila $f'(x) \leq 0$, fungsi terdiferensial mengakibatkan fungsi monoton turun pada (a, b). Kemudian ditunjukkan dan dibuktikan sifat fungsi terdiferensial yang mengakibatkan fungsi kontinu seragam pada I dengan syarat f' terbatas pada I. Sifat lain yang dibahas yaitu fungsi yang terdiferensial mengakibatkan fungsi memenuhi kondisi *Lipschitz* dengan syarat f' terbatas pada I. Agar dikatakan memenuhi sifat-sifat tersebut, suatu fungsi dibuktikan memenuhi suatu kondisi atau syarat-syarat tertentu.

Sejalan dengan pernyataan sebelumnya, untuk menjadi mukmin sejati memerlukan kesungguhan untuk berproses yang dimulai dari mengetahui ciri-cirinya agar dapat mengindentifikasi diri dan mengusahakan untuk memenuhinya. Dalam al-Qur’an disebutkan lima ciri orang mukmin sejati, yaitu pada surat Al-Anfal ayat 2-4. Sifat-sifat yang terkandung pada ayat berikut merupakan sifat-sifat mukmin yang kokoh dan sempurna (Shihab, 2002).

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ الَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ اللَّهُ وَجِلَتْ قُلُوبُهُمْ وَإِذَا تُلِيَتْ عَلَيْهِمْ آيَاتُهُ زَادَتْهُمْ إِيمَانًا وَعَلَى رَبِّهِمْ يَتَوَكَّلُونَ
(2) الَّذِينَ يُقِيمُونَ الصَّلَاةَ وَمِمَّا رَزَقْنَاهُمْ يُنْفِقُونَ (3)

Artinya: *“Sesungguhnya orang*-*orang yang beriman adalah mereka yang apabila disebut nama Allah gemetarlah hatinya, dan apabila dibacakan ayat-ayat-Nya kepada mereka, bertambah (kuat) imannya dan hanya kepada Tuhan mereka bertawakkal (2) (yaitu) orang-orang yang melaksanakan*

> *salat dan yang menafkahkan sebagian dari rezeki yang Kami berikan kepada mereka(3)"* (Fadlan, 2020).

Pada Tafsir Al-Misbah, disebutkan bahwa menurut Sayyid Quthub kata *wajilat qulubuhum* menggambarkan getaran rasa yang menyentuh kalbu seorang mukmin ketika diingat-ingatkan tentang Allah, perintah atau larangan-Nya (Shihab, 2002). Sehingga seseorang dikatakan mukmin sejati yang sempurna imannya saat menyandang sifat pertamanya yaitu memiliki rasa takut kepada Allah yang dibuktikan dengan adanya getaran rasa saat mengingat kebesaran Allah, mengingar pelanggaran juga dosanya. Hal ini mendorong orang mukmin untuk senantiasa beramal dan taat. Sifat kedua yang disebutkan yakni bertambahnya iman saat ayat-ayat-Nya dibacakan. Thahir Ibnu Ssyur berpendapat penambahan iman itu lahir karena ayat-ayat Al-Quran mengandung mukjizat atau bukti-bukti kebenaran sehingga saat berulang terdengar akan menambah keyakinan pendengarnya tentang kebenaran informasinya dan bahwa informasi-informasi tersebut berasal dari Allah (Shihab, 2002). Sifat ketiga yaitu bertawakkal kepada Allah. Disebutkan pada Tafsir Al-Misbah, Thabaathabaa'i menafsirkan bahwa saat sifat-sifat sebelumnya terpenuhi, seorang mukmin akan menyadari kebesaran dan kekuasaan Allah serta menyadari kelemahannya sesuai dengan kenyataan yang ada, yaitu segala persoalan kembali kepada Allah (Shihab, 2002). Dengan demikian, mukmin sejati akan berserah diri kepada-Nya. Setelah sifat tersebut terpenuhi maka seorang mukmin dapat menempatkan dirinya pada posisi hamba Allah yang taat dan tunduk kepada-Nya.

Setelah ayat sebelumnya menggambarkan sisi dalam atau sifat mukmin sejati, ayat ketiga menjelaskan amal lahiriyah mukmin yaitu melaksanakan shalat secara bersinambung dan sempurna, sesuai rukun dan syaratnya (Shihab, 2002).

Sehingga sifat keempat yang harus disandang mukmin sejati yaitu melaksanakan shalat. Sifat terakhir yaitu menafkahkan sebagian rezeki yang dianugerahkan kepada mereka. Kata menafkahkan berarti mengeluarkan apa yang dimiliki dengan tulus setiap saat dan berkesinambungan yang wajib atau sunnah, untuk kepentingan pribadi, keluarga atau siapa pun yang butuh (Shihab, 2002). Sehingga selain memperhatikan hubungan dengan Allah, mukmin juga memperhatikan hubungannya dengan sesama manusia atau masyarakat dengan memenuhi kebutuhan mereka dari apa yang telah dianugerahkan Allah baik harta, ilmu atau lainnya.

Mempelajari serta mengusahakan untuk memenuhi sifat atau ciri-ciri mukmin sejati yang telah dibahas memiliki manfaat atau akibat sebagaimana dijanjikan Allah pada surat Al-Anfal ayat 4 yaitu:

أُولَئِكَ هُمُ الْمُؤْمِنُونَ حَقًّا لَهُمْ دَرَجَاتٌ عِنْدَ رَبِّهِمْ وَمَغْفِرَةٌ وَرِزْقٌ كَرِيمٌ

Artinya: *"Mereka itulah orang-orang yang benar-benar beriman. Mereka akan memperoleh derajat (tinggi) di sisi Tuhannya dan ampunan serta rezeki (nikmat) yang mulia"*

Pada ayat-ayat sebelumnya disebutkan ciri-ciri orang baik melalui tiga pokok amal baik yaitu amal kalbu, berupa hati yang gemetar, penambahan iman dan penyerahan diri kepada Allah. Selanjutnya amal badaniyah berupa shalat dan yang ketiga berupa amal harta berupa zakat. Sebagai imbalannya, disebutkan 3 hal yaitu untuk amal kalbu imbalannya ketinggian derajat untuk amal badan adalah *maghfirah* atau pengampunan tuhan dan untuk amal harta adalah *karim* yakni pelimpahan kemurahan hati (Shihab, 2002). Ayat ini mengukuhkan ayat kedua yang membatasi mukmin sejati yang sempurna imannya yaitu menyandang lima sifat tersebut, sehingga apabila salah satu tidak terpenuhi maka tidak dinamakan mukmin sejati.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan dari pembahasan skripsi ini adalah dibuktikannya beberapa sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real yang diperkenalkan Parzynski dan Zipse (1987) dalam "*Introduction to Mathematical Analysis*". Sebelum membuktikan sifat-sifat tersebut, didefinisikan secara umum fungsi yang terdiferensial pada sebarang $x \in I$ yaitu apabila f terdiferensial pada setiap $x_0 \in I$. Menggunakan definisi ekstremum lokal serta turunan fungsi, terbukti bahwa turunan dari ekstremum lokal fungsi bernilai nol. Fungsi terdiferensial kemudian dibuktikan memenuhi teorema Rolle, teorema nilai rata-rata Cauchy dan teorema nilai rata-rata yang merupakan kasus khusus teorema nilai rata-rata Cauchy saat $g(x) = x$. Kemudian ditunjukkan dan dibuktikan kekontinuan seragam, kemonotonan naik dan kemonotonan turun fungsi terdiferensial serta keterkaitannya dengan Lipschitz. Sifat-sifat fungsi terdiferensial pada himpunan bilangan real tersebut dibuktikan dengan menunjukkan bahwa fungsi tersebut memenuhi syarat-syarat tertentu.

5.2 Saran

Sebagai saran, penelitian selanjutnya dapat menunjukkan serta membuktikan sifat-sifat fungsi terdiferensial yang belum dibahas pada penelitian ini. Penelitian lebih lanjut dapat mempelajari sifat-sifat fungsi terdiferensial dengan karakter khusus secara spresifik seperti fungsi terdiferensial p-adic atau fungsi terdiferensial yang memiliki barisan fourier.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to Real Analysis 4th Edition.* New York: John Wiley & Sons.

Fadlan, F. (2020). *Al-Qur'an dan Terjemah Cetakan 7.* Jakarta: Suara Agung.

Frerick, L., Loosveldt, L., & Wengenroth, J. (2020). Continuously Differentiable Functions on Compact Sets. *Results Maths*, 75:177.

Hadi, S. (2002). *Metodelogi Research.* Yogyakarta: Andi Offset.

Louis, L. (1986). *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik Edisi Kelima.* New York: Penerbit Harper & Row.

Parzynski, W. R., & Zipse, P. W. (1987). *Introduction to Mathematical Analysis.* Singapore: McGraw-Hill.

Purcell, E., Varberg, D., & Rigdon, S. (2003). *Calculus 8th Edition.* Addison Wesley: Prentince Hall.

Putra, G. L. (2023). *Struktur Aljabar I.* Pekalongan: Penerbit NEM.

Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah.* Tangerang: Lentera Hati.

Suryawan, H. (2016). *Kalkulus Diferensial.* Yogyakarta: Sanata Dharma University Press.

Trench, W. F. (2003). *Introduction to real analysis.* San Antonio: Prentice Hall/Pearson Education.

Tsagareishvili, V. (2023). Convergence of General Fourier Series of Differentiable Functions. *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 431-443.

Zhou, Y. (2023). Mean Value Theorem and Its Uses. *Highlights in Science Engineering and Technology*, 926-930.

RIWAYAT HIDUP

Etna Liafitroh Falabibah, lebih dikenal sebagai Etna, dilahirkan di Mojokerto, 7 Desember 2001 sebagai anak kedua dari pasangan (Alm.) Moh. Hilmi dan Mutmainnah. Pendidikan dasar penulis diperoleh dari MI Nurul Ulum Bedagas hingga lulus pada tahun 2013, kemudian lulus dari SMP Darul Hikmah Sawahan pada tahun 2016. Penulis selanjutnya diterima sebagai pelajar MAN 1 Kabupaten Mojokerto pada tahun 2016 di mana selain mendapat banyak kesempatan mengikuti berbagai kegiatan dan lomba akademik dan non akademik, penulis mendapat kesempatan menerbitkan buku kumpulan cerpen dan sajak bersama rekan-rekannya yang bertajuk "Serasa Sebentar". Lulus dari jenjang menengah atas, penulis melanjutkan pendidikan sebagai mahasiswa di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Selama perkuliahan, penulis aktif mengikuti kegiatan dalam komunitas sebagai pengurus serta anggota kepantiaan. Di antaranya yaitu menjadi mentor dalam program Forum Group Discussuon pada tahun 2019 serta menjadi anggota tim soal Olimpiade Matematika tingkat SMA sederajat se-Jawa Bali "KOMET XVIII" dan "KOMET XIX" pada tahun 2020-2021. Penulis yang mendapat kesempatan besar sebagai penerima beasiswa juga mengikuti kegiatan non akademik sebagai anggota divisi desain grafis pada komunitas penerima beasiswa BI (GenBI) pada tahun 2020-2021. Untuk mengisi waktu luang dan mencari pengalaman di luar perkuliahan, penulis kemudian menjadi *part time tutor* dan *reviewer* jawaban pada aplikasi tanya jawab matematika Snapquiz pada tahun 2022. Tahun-tahun selanjutnya penulis juga mendapat banyak relasi dan pengalaman berharga melalui beberapa pekerjaan paruh waktu pada salah satu toko retail khusus di Mojokerto, *cafe* hingga *digital printing*. Apabila didapati pertanyaan, saran, ataupun kritik untuk disampaikan dari penelitian ini, disilahkan menghubungi penulis melalui email : etnaliafitroh.f@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Etna Liafitroh Falabibah
NIM : 18610028
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat-Sifat Fungsi yang Terdiferensial pada Himpunan Bilangan Real
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 Februari 2024	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	26 Februari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	29 Februari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	3.
4.	4 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	8 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	12 Maret 2024	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	12 Maret 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	20 Maret 2024	ACC Seminar Proposal	8.
9.	8 Mei 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	9.
10.	13 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	21 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	11.
12.	29 Mei 2024	ACC Bab IV dan V	12.
13.	31 Mei 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	13.
14.	2 Juni 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	14.
15.	14 Juni 2024	ACC Seminar Hasil	15.

16.	19 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	16.
17.	24 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	17.
18.	26 Juni 2024	ACC Keseluruhan	18.

Malang, 26 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005