MULTIPLISITAS SIKEL GRAF *COMMUTING* DAN *NONCOMMUTING* GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

OLEH
MINNATIN CHARIZAH
NIM. 11610002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

MULTIPLISITAS SIKEL GRAF *COMMUTING* DAN *NONCOMMUTING* GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam NegeriMaulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Minnatin Charizah
NIM. 11610002

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

MULTIPLISITAS SIKEL GRAF *COMMUTING* DAN *NONCOMMUTING* GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Minnatin Charizah
NIM. 11610002

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 09 Juni 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M.Pd	Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19751006 200312 1 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

MULTIPLISITAS SIKEL GRAF *COMMUTING* DAN *NONCOMMUTING* GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh
Minnatin Charizah
NIM. 11610002

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama	:	H. Wahyu H. Irawan, M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd	....
Sekretaris Penguji	:	Dr. Abdussakir, M.Pd	....
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Minnatin Charizah
NIM	: 11610002
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Multiplisitas Sikel Graf *Commuting* dan *Noncommuting* Grup Dihedral

menyatakan dengan sebenarnya bahwa tugas akhir/skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan tugas akhir/skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Juni 2015
Yang membuat pernyataan,

Minnatin Charizah
NIM. 11610002

MOTO

Pelajarilah ilmu, karena mempelajarinya karena Allah adalah khasyah, menuntutnya adalah ibadah, mempelajarinya adalah tasbih, mencarinya adalah jihad, mengajarkannya kepada orang yang tidak mengetahui adalah shadaqah, menyerahkan kepada ahlinya adalah taqarrub. Ilmu adalah teman dekat dalam kesendiriandan sahabat dalam kesunyian.

(Muadz bin Jabal Radhiyyallahu'anhu)

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada *abuyya* Kholisul Fikri, *ummy* Zahrotur Rizqiah, Hj. Nurjannah, Zahirotul Kamiliyah, Achmad Chaza Ainal Chaq, Muhammad Rojil Hikam dan Ahmad Murobbil Hadziq.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah segala puji lagi pencipta alam semesta raya Allah Swt. yang senantiasa memberikan rahmat serta berjuta nikmat kepada penulis, sehingga dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Multiplisitas Sikel Graf Commuting dan Noncommuting Grup Dihedral*". Sholawat dan segenap salam rindu untuk baginda Muhammad Saw. yang telah menyampaikan risalah pada umatnya dan berjuang demi tegaknya agama Allah sehingga mampu mengajak umat manusia beranjak dari kejahiliyaan menuju umat yang berpendidikan dan berakhlak.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak lepas dari saran, bimbingan, arahan, serta do'a dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis haturkan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya serta penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen pembimbing I yang senantiasa dengan sabar memberikan arahan, dan ilmu yang sangat berharga kepada penulis.
4. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah mamberikan saran dan arahan dalam penulisan skripsi ini.

5. Seluruh sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Hj. Nurjannah, Kholisul Fikri, dan Zahrotur Rizqiah yang telah mencurahkan kasih sayangnya, do'a, nasehat, dan motivasi hingga skripsi ini selesai.
7. Saudara-saudara yang telah memberikan semangat kepada penulis.
8. Rausand Fikri yang selalu memberikan motivasi kepada penulis.
9. Segenap keluarga besar "Abelian", teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2011.
10. Semuapihak yang turut membantu selesainya skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan khususnya bagi penulis dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Charizah, Minnatin. 2015. **Multiplisitas Sikel Graf *Commuting* dan *Noncommuting* Grup Dihedral.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: multiplisitas sikel, graf *commuting*, graf *noncommuting*, grup dihedral.

Sikel adalah jalan tertutup tak trivial yang setiap titiknya berbeda. Multiplisitas sikel adalah maksimal banyaknya sikel dari suatu graf yang sisi-sisinya saling lepas.

Metode penelitian yang digunakan dalam peneltian ini adalah studi kepustakaan dengan tahapan analisis yang diawali dengan memberikan grup dihedral dan menentukan elemen-elemengrup dihedral-$2n$dengan $3 \leq n \leq 8$, kemudian hasil operasi komposisi antar elemen disajikan dalam bentuk table *Cayley*, selanjutnya mencari elemen-elemen yang komutatif dan yang tidak komutatif, menggambarkan graf *commuting*$(C(D_{2n}))$ dan graf *noncommuting*$(NC(D_{2n}))$dari grup dihedral, selanjutnya mencari pola multiplisitas sikel, dan membangun suatu teorema beserta pembuktiannya. Hasil penelitian ini adalah:

1. Multiplisitas sikel graf *commuting* grup dihedral adalah

$$CM[C(D_{2n})] = \begin{cases} \left[\left[\dfrac{n^2 - n}{6}\right]\right], untuk\ n\ ganjil \\ \left[\left[\dfrac{n^2 + n}{6}\right]\right], untuk\ n\ genap \end{cases}$$

2. Multiplisitas sikel graf *noncommuting* grup dihedral adalah

$$CM[NC(D_{2n})] = \begin{cases} \left[\left[\dfrac{n^2 - 2n + 1}{2}\right]\right], untuk\ n\ ganjil \\ \left[\left[\dfrac{n^2 - 2n}{2}\right]\right], untuk\ n\ genap \end{cases}$$

Bagi penelitian selanjutnya diharapkan dapat menemukan bermacam-macam teorema tentang graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup lainnya.

ABSTRACT

Charizah, Minnatin. 2015. **Cycle Multiplicity of Commuting and Noncommuting Graphs of Dihedral Group.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Abdussakir, M.Pd. (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Keyword: cycle multiplicity, commuting graph, noncommuting graph, dihedral group.

Cycle is non-trivial closed path which all of the vertices are distinct. Then cycle multiplicity is the maximum number of edge disjoint cycle in a graph.

The research method that used in this research is literature study with analysis phase. It begins by giving a dihedral grup and determining the elements of the dihedral-$2n$ group, which $3 \leq n \leq 8$, then the resulting of elements composition operation is presented using Cayle's table. The next step is determining the commutative and noncommutative elements, and then figuring commuting graph $(C(D_{2n}))$ and noncommuting graph $(NC(D_{2n}))$ from dihedral group. From this step we can observe the model of cycle multiplicity, forming the theorems and its proof. The results of this research are:

1. The cycle multiplicity of commuting graph of dihedral group

$$CM[C(D_{2n})] = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{n^2 - n}{6}\right]\!\right], n\ odd\ number \\ \left[\!\left[\dfrac{n^2 + n}{6}\right]\!\right], n\ even\ number \end{cases}$$

2. The cycle multiplicity of noncommuting graph of dihedral group

$$CM[NC(D_{2n})] = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{n^2 - 2n + 1}{2}\right]\!\right], n\ odd\ number \\ \left[\!\left[\dfrac{n^2 - 2n}{2}\right]\!\right], n\ even\ number \end{cases}$$

This research can be continued for cycle multiplicity of another graph. And the another hopes that the further research can determine another theorem of commuting and noncommuting from another groups.

ملخص

حارزة, منة.٢٠١٥. تعددية الدورة للمخطط النحوية ولاالنحوية فيمنظومة ديهدرال. البحثالجامي.
شعبة الرياضيات،كلية العلوم و التكنولوجيا،الجامعة الاسلمية الحكمية مولنا ملك ابراهم مالانج. المشرف (١) الدكتور عبد الشاكر،الماجستير، (٢) احمد نصيح الدين،الماجستير.

الكلمة الرئسية: تعددية الدورة،المخطط النحوية و لا النحوية،منظمة ديهدرال.

الدورة هي مجازة المحصونة الذي لا طفيف و كل خط منها مختلف. اما تعددية الدورة هي غاية **بضع** الذي مقدمة مناسلة الدورة.

طريقة البحث المستخدمة في هذا البحث هو دراسة الادب مع مؤحلة التحليل الذي يبداء من **حلال** توفر منظومة ديهدرال. و تحديد عناصرها ثم يتم عرض النتائج التشغيلية تكوين امور عنصر في شكل جدول $Cayley$ ثم **ابحث** عن العناصر التي تبادلى و ان لا تبادلى،ثم رسوم المخطط النحوية ولا النحوية من منظومة ديهدرال. ثم ابحث عن انماط **تعددية** الدورة, و بناء نظرية و حجته. نتائج هذه الدراسة،هي:

١. **تعدد**ية الدورة للمخطط النحوية في منظومة ديهدرال

$$CM[C(D_{2n})] = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{n^2-n}{6}\right]\!\right], & \text{وتري } n \\ \left[\!\left[\dfrac{n^2+n}{6}\right]\!\right], & \text{شفعي } n \end{cases}$$

٢. **تعدد**ية الدورة لمخطط لا نحوي في منظومة ديهدرال:

$$CM[NC(D_{2n})] = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{n^2-2n+1}{2}\right]\!\right], & \text{وتري } n \\ \left[\!\left[\dfrac{n^2-2n}{2}\right]\!\right], & \text{شفعي } n \end{cases}$$

يريد لمزيد من البحث ان تجد متنوعة من النظريات عن المخطط النحوية ولا النحوية من غير المنظو

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali dikenalkan pada tahun 1736 oleh matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler dalam tulisannya tentang upaya pemecahan masalah jembatan Koningsbergdi Eropa.Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk visualisasi obyek-obyek agar mudah dimengerti.Oleh karena itu graf dapat memuat informasi jika diinterpretasikan dengan tepat. Salah satu alasan perkembangan teori graf yang sangat pesat adalah aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari dan dalam berbagai ilmu seperti ilmu komputer, teknik, sains, bisnis, dan ilmu sosial (Budayasa, 2007:1). Dalam perkembangannya, tulisan dan pembahasan tentang teori graf banyak ditemukan dalam berbagai buku dan literatur matematika.

Pada perkembangannya, teori graf juga dapat diterapkan pada cabang ilmu matematika yang lain, diantaranya struktur aljabar. Salah satu pembahasan yang menarik adalah suatu graf yang dibentuk oleh grup, dalam hal ini grup yang dimaksud adalah grup dihedral. Graf *commuting*$C(G,X)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika saling komutatif di G, sedangkan graf *noncommuting*$NC(G,X)$ adalah graf yang memiliki himpunan titik X dan dua titik berbeda akan terhubung langsung jika tidak komutatif di G, Terkait penelitian mengenai graf *commuting* dan *noncommuting* yang dibentuk oleh grup dihedral adalah penelitian oleh Abdussakir, dkk, (2013) yang meneliti tentang spektrum dari graf *commuting*yang diperoleh dari grup dihedral dan Muflihatun Navisah (2014) yang meneliti tentang spektrum detour graf *noncommuting* dari grup dihedral.

Dalam agama Islam, konsep *commuting* dan *noncommuting* bisa kita lihat dalam hubungan antara muslim dan kafir. Umat muslim diperbolehkan untuk berinteraksi dengan orang-orang kafir dalam berbagai hal, namun dalam urusan agama yang meliputi aqidah, *'ubudiyah*, hukum dan semacamnya kita dituntut untuk memurnikannya dan tidak sedikitpun mencampuradukkannya dengan agama lain. Sebagaimana tertulis pada Q.S. al-Baqarah/2:139 yang berbunyi:

قُلْ أَتُحَآجُّونَنَا فِي ٱللَّهِ وَهُوَ رَبُّنَا وَرَبُّكُمْ وَلَنَآ أَعْمَٰلُنَا وَلَكُمْ أَعْمَٰلُكُمْ وَنَحْنُ لَهُۥ مُخْلِصُونَ ١٣٩

"Katakanlah: "Apakah kamu memperdebatkan dengan Kami tentang Allah, Padahal Dia adalah Tuhan Kami dan Tuhan kamu; bagi Kami amalan Kami, dan bagi kamu amalan kamu dan hanya kepada-Nya Kami mengikhlaskan hati,"(Q.S al-Baqarah/2:139).

Meskipun permasalahan tentang graf telah banyak diteliti, namun penelitian tentang multiplisitas sikel dari suatu graf masih belum banyak orang yang mengkaji lebih dalam. M.M. Akbar Ali, dkk, (2010) dalam jurnalnya mendefinisikan multiplisitas sikel suatu graf G sebagai jumlah maksimal sikel yang saling lepas sisi di G. Terkait peneliatian mengenai multiplisitas sikel, Navis (2011) meneliti tentang multiplisitas sikel graf tangga, graf *star*, dan graf *doublestar*, dan Muslihatin (2011) meneliti tentang multiplisitas sikel graf komplit, graf total pada graf kipas, dan graf total pada grafroda.

Penggabungan konsep antara teori graf dan konsep aljabar menginspirasi penulis untuk meneliti lebih dalam tentang graf *commuting* dan *noncommuting* yang dibentuk oleh grup dihedral yang diarahkan kepada multiplisitas sikelnya. Sehingga penelitian ini berjudul "Multiplisitas Sikel Graf *Commuting* dan *Noncommuting* Grup Dihedral".

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah apa pola umum multiplisitas sikel graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan pola umum multiplisitas sikel graf *commuting* dan *noncommuting* yang dibentuk oleh grup dihedral.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah

1. Bagi peneliti yaitu menambah wawasan dalam teori graf khususnya multiplisitas sikel dari suatu graf dan menambah pengalaman dalam hal penelitian.
2. Bagi lembaga yaitu menambah bahan kepustakaan mengenai teori graf khususnya tentang multiplisitas sikel
3. Bagi pembaca yaitu memperkaya referensi mengenai teori graf

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, karena penelitian ini adalah berbentuk suatu kajian. Metode ini dilakukan dengan cara pengumpulan data dan mencari bahan-bahan literatur berupa buku, jurnal maupun makalah sebagai landasan teori yang berhubungan dengan objek penelitian. Adapun tahapan yang akan dilakukan adalah sebagai berikut:

1) Mengumpulkan rujukan yang berasal dari buku ataupun jurnal yang berhubungan dengan multiplisitas sikel *commuting* dan *noncommuting* grup dihedral. Diantara rujukan tersebut adalah sebagai berikut: jurnal *Commuting Graphs of Dihedral Type Groups* (Zahid Raza dan Shahzad Faizi, 2013), *Non-commuting Graph of a Group* (A. Abdollahi, S. Akbari dan H.R.

Maimani, 2006), dan *Cycle Multiplicity of Total Graph of Cn, Pn, and Kn* ((Ali & Panayappan, 2010:1).

2) Mempelajari materi tentang multiplisitas sikel *commuting* dan *noncommuting* grup dihedral.

3) Memberikan grup dihedral-$2n$, yaitu $D_{2n} = \{1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots., sr^{n-1}\}$ terhadap operasi komposisi "o".

4) Menyajikan hasil operasi komposisi "o" antar elemen dari grup dihedral-$2n$ dalam bentuk tabel *Cayley* dan menentukan unsur yang saling komutatif dan tidak komutatif pada suatu grup dihedral-$2n$ untuk n = 3, 4, 5, 6, 7 dan 8.

5) Menggambarkan graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup tersebut.

6) Mengamati pola multiplisistas sikel dari graf *commuting* dan *noncommuting*.

7) Membuat dugaan (konjektur) berdasarkan pola yang ditemukan.

8) Merumuskan konjektur sebagai suatu teorema tentang multiplisitas sikel *commuting* dan *noncommuting* grup dihedral.

9) Menghasilkan suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti.

10) Menulis laporan penelitian.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam sistematika penulisan penelitian ini dibagi menjadi 4 bab dan masing-masing bab dibagi dalam subbab sebagaimana berikut:

Bab I Pendahuluan

Pada bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Pada bab ini penulis menjelaskan beberapa konsep (teori-teori) yang berhubungan dengan penelitian ini, yaitu mengenai operasi biner,grup, grup dihedral, graf, keterhubungan langsung, grup *dihedral-2n*, graf *commuting*, dan *noncommuting* serta multiplisitas sikel.

Bab III Pembahasan

Pada bab ini penulis menjelaskan tentang bagaimana mencari multiplisitas sikel graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup *dihedral-2n.*

Bab IV Penutup

Pada bab ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian dan saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Perkembangan teori graf yang sangat pesat salah satunya disebabkan oleh banyaknya penelitian mengenai graf dan aplikasi graf yang sangat luas. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

Graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi*. Banyaknya unsur di $V(G)$ disebut ***order*** dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, banyaknya unsur di $E(G)$ disebut ***ukuran*** dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$ (Abdussakir, dkk, 2009:4).

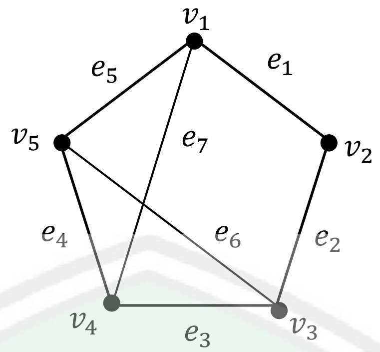
Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik $u$dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, dkk., 2009:6).

Penulis memberikan contoh mengenai graf sebagai berikut

Contoh:

Diberikan graf G sebagai berikut



Gambar 2.1 Graf dengan Lima Titik dan Tujuh Sisi

Diketahui$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$sehingga order dari G adalah 5 atau $p(G) = 5$. Dan $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_3, v_5), (v_1, v_4)\}$ atau lebih singkat $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, \}$ sehingga ukuran dari G adalah 7 atau $q(G) = 7$.

Titik-titik yang terhubung langsung adalah v_1 dengan v_2, v_2 dengan v_e, v_3 dengan v_4, v_4 dengan v_5, v_1 dengan v_4 dan v_3 dengan v_5. Titik-titik yang terkait langsung dengan sisi-sisi adalah v_1 dengan e_1, e_5 dan e_7, v_2 dengan e_1 dan e_2, v_3 dengan e_2, e_3 dan e_6, v_4 dengan e_3, e_4 dan e_7, serta v_5 dengan e_4, e_5 dan e_6. Sisi-sisi yang terhubung langsung adalah e_1 dengan e_2, e_1 dengan e_5, e_1 dengan e_7, e_2 dengan e_3, e_2 dengan e_6, e_3 dengan e_4, e_3 dengan e_6, e_3 dengan e_7, e_4 dengan e_5, e_4 dengan e_6, e_4 dengan e_7, e_5 dengan e_6, serta e_5 dengan e_7.

Definisi 3

Jika v adalah titik pada G, maka himpunan semua titik di G yang terhubung langsung dengan v disebut *lingkungan dari v* dan ditulis $N_G(v)$. *Derajat dari titik* v di graf G, ditulis dengan $deg_G(v)$, adalah banyak sisi di G yang terkait langsung dengan v. Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan$deg_G(v)$ disingkat $deg(v)$ dan

$N_G(v)$disingkat $N(v)$. Jika dikaitkan dengan konsep lingkungan, derajat titik v di graf G adalah banyaknya anggota dalam $N(v)$. Jadi,

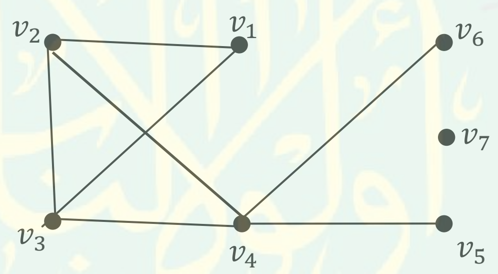
$$deg(v) = |N(v)|$$

Titik yang berderajat 0 disebut *titik terasing* atau *titik terisolasi*.Titik yang berderajat 1 disebut *titik ujung* atau *titik akhir*.Titik yang berderajat genap disebut *titik genap*. Titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (Abdussakir, dkk., 2009:9).

Penulis memberikan contoh sebagai berikut:

Contoh:

Diberikan graf G sebagai berikut



Gambar 2.2 Graf yang Memuat Titik Terasing

Berdasarkan Gambar 2.2, diperoleh bahwa

$N(v_1) = \{v_2, v_3\}$, $deg(v_1) = 2$

$N(v_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $deg(v_2) = 3$

$N(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$, $deg(v_3) = 3$

$N(v_4) = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$, $deg(v_4) = 4$

$N(v_5) = \{v_4\}$, $deg(v_5) = 1$

$N(v_6) = \{v_4\}$, $deg(v_6) = 1$

$N(v_7) = \{\ \}$, $deg(v_7) = 0$

Diperoleh titik $v_1$adalah titik genap, titik v_2, v_3, v_4, v_5dan v_6 adalah titik ganjil.Titik v_5 dan v_6 adalah titik ujung, dan titik v_7 adalah titik terasing.

Teorema 1: **0020**

Misalkan G adalah graf dengan order p dan ukuran q, dengan $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, \dots, v_p\}$. maka

$$\sum_{i=1}^{p} deg(v_i) = 2q$$

Bukti Setiap kali menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di Gsama dengan 2 kali jumlah sisi di G (Abdussakir, dkk, 2009:11).

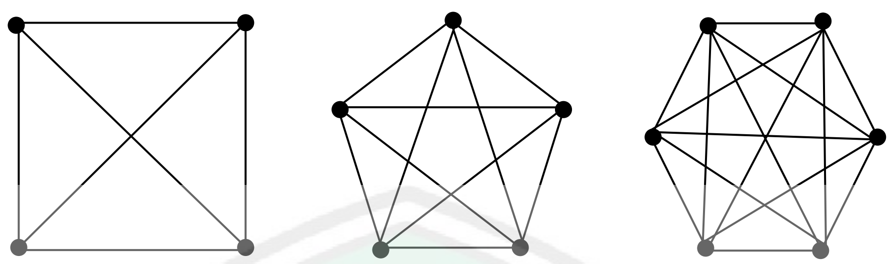
Definisi 4:

Graf G dikatakan ***beraturan-r*** atau ***beraturan dengan derajat r*** jika masing-masing titik $v$di G, maka $deg(v) = r$, untuk bilangan bulat taknegatif r. Suatu graf disebut ***beraturan*** jika graf tersebut beraturan-r untuk suatu bilangan bulat taknegatif r. Graf beraturan-3 biasa juga disebut dengan ***graf kubik***(Abdussakir, dkk, 2009:20).

Penulis memberikan contoh tentang graf beraturan-r sebagai berikut:

Contoh:

Diberikan graf G_1, G_2 dan G_3 sebagai berikut



Gambar 2.3 Graf G_1 beraturan-3, graf G_2 beraturan-4 dan graf G_3 beraturan-5

Pada graf G_1 setiap titikpada graf G_1 berderajat 3, oleh karena itu graf G_1 adalah graf beraturan-3. Sedangkan pada graf G_2 dan graf G_3 setiap titik pada kedua graf tersebut masing-masing berderajat 4 dan 5, oleh karena itu graf G_2 adalah graf beraturan-4 dan graf G_3 adalah graf beraturan-5.

Definisi 5

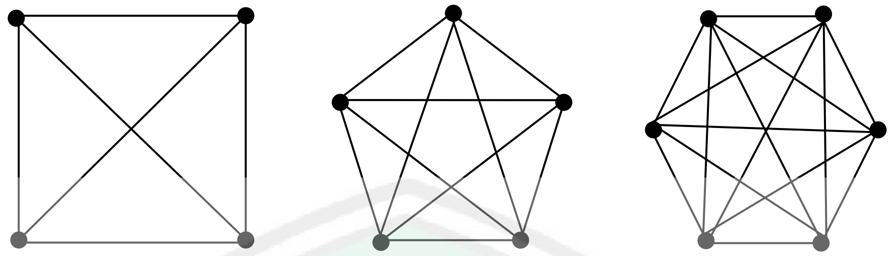
Graf G dikatakan ***komplit*** jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan-$(n-1)$ dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ (Abdussakir, dkk, 2009:21).

Penulis memberikan contoh tentang graf komplit K_n sebagai berikut:

Contoh:

Diberikan graf seperti pada contoh 2.1.9, karena G_1 adalah graf beraturan-3 maka graf G_1 adalah graf komplit K_4, begitu pula graf G_2 dan G_3 masing-masing adalah graf komplit K_5 dan K_6. Seperti pada Gambar 2.4 berikut ini:

K_4 : K_5 : K_6 :



Gambar 2.4 Graf Komplit K_4, Graf Komplit K_5 dan Graf Komplit K_6

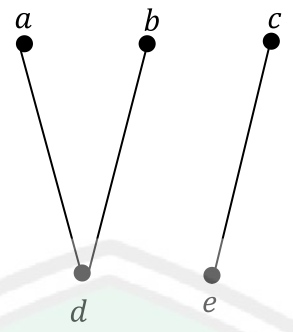
Definisi 6

Graf G dikatakan ***bipartisi*** jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1dengan satu titik di V_2. Jika G adalah graf bipartisi beraturan-r, dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_2|$. Graf G dikatakan *partisi*-$n$jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak n himpunan tak kosong $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ sehingga masing-masing sisi pada graf G menghubungkan titik pada V_i dengan titik pada V_j, untuk $i \neq j$. Jika $n = 3$, graf partisi-n disebut graf tripartisi (Abdussakir, dkk, 2009:21).

Penulis memberikan contoh tentang graf bipartisi sebagai berikut:

Contoh:

Berikut ini diberikan contoh graf bipartisi dengan himpunan partisi $V_1 = \{a, b, c\}$ dan $V_2 = \{d, e\}$ yang disajikan pada Gambar 2.5 berikut ini:



Gambar 2.5 Graf Bipartisi

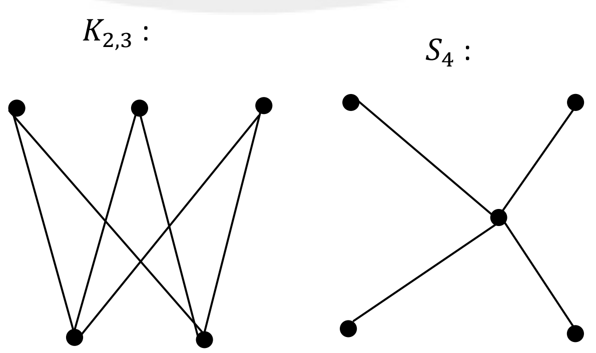
Definisi 7

Suatu graf G disebut ***bipartisi komplit*** jika G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$. Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$disebut graf ***bintang (star)*** dan dinotasikan dengan S_n. Jadi, S_n mempunyai order $(n - 1)$ dan ukuran n (Abdussakir, dkk, 2009:22).

Penulis memberikan contoh graf bipartisi komplit dan graf bintang sebagai berikut:

Contoh:

Gambar 2.6 adalah contoh grafbipartisikomplit $K_{2,3}$dan graf bintang S_4.



Gambar 2.6 Graf Bipartisi Komplit $K_{2,3}$ dan Graf BintangS_4

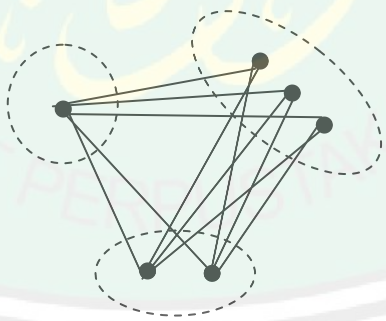
Definisi 8

Graf G dikatakan ***partisi-n komplit*** jika G adalah graf partisi-n dengan himpunan partisi $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$, sehingga jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j, i \neq j$, maka $uv \in E(G)$. Jika $|V_i| = p_i$ maka graf ini dinotasikan dengan $K_{p_1, p_2, \ldots, p_n}$. Urutan $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ tidak begitu diperhatikan. Graf partisi-n komplit merupakan graf komplit K_n jika dan hanya jika $p_i = 1$ untuk semua i. Jika $p_i = t$ untuk semua i, $t \geq 1$, maka graf partisi-n komplit ini merupakan graf beraturan dan dinotasikan dengan $K_{n(t)}$. Jadi, $K_{n(1)}$tidak lain adalah K_n (Abdussakir, dkk., 2009:23).

Penulis memberikan contoh graf n-partisi komplit sebagai berikut:

Contoh:

Pada Gambar 2.7 berikut ini akan diberikan contoh graf tripartisi komplit $K_{1,2,3}$



Gambar 2.7 Graf Tripartisi Komplit $K_{1,2,3}$

2.2 Graf Terhubung

Definisi 9

Misalkan Gadalah suatu graf.Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda).***Jalan* $\boldsymbol{u-v}$**pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$$

antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_i = v_{i-1}, v_{i,}$ $i = 1,2,3, \dots, n$adalah sisi di G. $v_0$disebut*titik awal*, v_n disebut *titik akhir*, titik $v_1, v_2, \dots, v_3$ disebut *titik internal*, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut *jalan terbuka*. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut *jalan tertutup*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial*.

Karena dalam graf dua titik hanya akan dihubungkan oleh tepat satu sisi, maka jalan $u - v$

$$W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$$

dapat ditulis menjadi

$$W: u = v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n = v$$

Jalan W yang semua sisinya berbeda disebut ***trail***.Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut ***lintasan***. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Abdussakir, dkk., 2009:51).

Teorema 2

Setiap jalan $u - v$ pada suatu graf selalu memuat lintasan $u - v$.

Bukti Misalkan$W$ adalah jalan $u - v$ di graf G. Jika W tertutup, maka jelas W memuat lintasan trivial di G. Misalkan

$$W: u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n = v$$

adalah jalan $u - v$ terbuka. Jika tidak ada titik yang berulang di W, maka W adalah lintasan $u - v$. Jika ada titik yang berulang di W, misalkan i dan j adalah bilangan bulat positif berbeda dengan $i < j$ sehingga $v_i = v_j$. Maka, suku $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ dihapus dari W. Hasilnya sebut W_1, yakni jalan $u - v$ baru yang panjangnya kurang dari panjang W. Jika pada W_1 tidak ada titik yang berulang, maka W_1 adalah lintasan $u - v$. Jika pada W_1 ada titik yang berulang, maka lakukan proses penghapusan seperti sebelumnya, sampai akhirnya diperoleh jalan $u - v$ yang merupakan lintasan $u - v$ (Abdussakir, dkk., 2009:52).

Definisi 10

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan ***graf lintasan order n***dan ditulis P_n. Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut ***sirkuit***. Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup tak trivial. Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut ***sikel***.Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel. Jika dicarikan hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa: trail tertutup dan taktrivial pada graf G disebut *sirkuit* di G. Sirkuit $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1$ $(n \geq 3)$ dengan $v_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$ berbeda disebut *sikel*. Sikel dengan panjang k disebut sikel-k. Sikel-k disebut genap atau ganjil bergantung pada k genap atau ganjil (Abdussakir, dkk., 2009:54).

Definisi 11

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Titik u dan v dikatakan ***terhubung*** **(*connected*)**, jika terdapat lintasan $u - v$di G. Suatu graf G dikatakan ***terhubung*** **(*connected*)**, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan ***terhubung*** **(*connected*)**, jika untuk setiap titik $u$dan v di G terdapat lintasan $u - v$ di G. Sebaliknya, jika ada dua titik u dan v di G, tetapi tidak ada lintasan $u - v$ di G, maka G dikatakan **tak terhubung (*disconnected*)** (Abdussakir, dkk., 2009:55).

2.3 Multiplisitas Sikel

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak n, $n \geq 3$, disebut ***graf sikel*** dan ditulis C_n. Graf sikel sering juga disebut sebagai graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran.Perlu dicatat bahwa tidak selamanya graf sikel digambar dalam bentuk suatu lingkaran.

Graf sikel dapat juga digambar dalam bentuk poligon.C_3dapat disebut segitiga, C_4 segiempat, dan secara umum C_n dapat disebut ***segi-n***. Sikel yang banyak titiknya ganjil disebut *sikel ganjil* dan sikel yang banyak titiknya genap disebut *sikel genap*.

Definisi 12

"Jika G adalah sebuah graf, $V(G)$ dan $E(G)$ adalah himpunan titik dan sisi dari graf G. $CM(G)$merupakan notasi dari multiplisitas sikel yang didefinisikan sebagai banyaknya sikel yang saling lepas sisi di graf G" (Ali & Panayappan, 2010:1).

Teorema 3

Multiplisitas sikel pada graf komplit K_n adalah:

$$CM[K_n] = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{n^2-n}{6}\right]\!\right], untuk\ n\ ganjil \\ \left[\!\left[\dfrac{n^2-2n}{6}\right]\!\right], untuk\ n\ genap \end{cases}$$

Bukti:

Kasus I: jika n ganjil

Sikel yang *disjoint* sisi dari K_n adalah: $C_1 = \{v_i v_{(i+3)} v_{(i+1)} v_i | 1 \leq i \leq n-3\}$, $C_2 = \{v_i v_{(i+2)} v_{(i+(n-1))} v_i | i \geq 1\}$, $C_3 = \{v_i v_{(i+4)} v_{(i+5)} v_i | i \geq 1\}$, $C_4 = \{v_i v_{(i+2)} v_{(i+3)} v_{(i+4)} v_i | i \geq 1\}, C_5 = \{v_i v_{(i+2)} v_{(i+1)} v_i | i \geq 1\}$.

C_1, C_2, C_3, C_4,dan $C_5 = \mathcal{C}_i. |\mathcal{C}_i| = \left[\!\left[\frac{n^2-n}{6}\right]\!\right]$, akan dibuktikan banyaknya sikel yang *disjoint* sisi di $\mathcal{C}_i$adalah $\left[\!\left[\frac{n^2-n}{6}\right]\!\right]$ jika n ganjil. Jika $n = 3$, maka banyaknya sikel yang *disjoint* sisi di K_3 adalah 1, yaitu $\{v_1 v_3 v_2 v_1\}$dan dapat ditulis $\left[\!\left[\frac{3^2-3}{6}\right]\!\right] = 1$. Sama halnya dengan $n = 5$, banyaknya sikel yang *disjoint* sisi di K_5 adalah 3 yaitu $\{v_1\, v_4 v_2 v_1, v_2 v_5 v_3 v_2, v_1 v_3 v_4 v_5 \boldsymbol{v_1}\}$ dan dapat ditulis $\left[\!\left[\frac{5^2-5}{6}\right]\!\right] = 3$. Perhatikan bahwa $|\mathcal{C}_i|$ dengan $i = 3{,}5$ benar.

Anggap $m = 2k - 1$ benar, $|\mathcal{C}_i| = \left[\!\left[\frac{n^2-n}{6}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{(2k-1)^2-(2k-1)}{6}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{2k^2-3k+1}{6}\right]\!\right]$ benar. Maka akan dibuktikan bahwa $n = 2k + 1$ benar, yaitu:

$$|\mathcal{C}_{2k+1}| = \left[\!\left[\frac{n^2-n}{6}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{(2k+1)^2-(2k+1)}{6}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{2k^2+k}{3}\right]\!\right]$$

Jadi ternyata $n = 2k + 1$ benar.Berdasarkan prinsip induksi matematika, kita simpulkan bahwa $|\mathcal{C}_i| = \left[\!\left[\frac{n^2-n}{6}\right]\!\right]$ benar untuk n ganjil.

Kasus II: Untuk n genap

Sikel yang *disjoint* sisi dari K_n adalah: $C_1 = \{v_i v_{(i+3)} v_{(i+1)} v_i | 1 \leq i \leq n-3\}$, $C_2 = \{v_i v_{(i+5)} v_{(i+6)} v_i | i \geq 1\}$, $C_3 = \{v_i v_{(i+2)} v_{(i+(n-1))} v_i | i \geq 1\}$, $C_4 = \{v_i v_{(i+4)} v_{(i+(n-1))} v_i | i \geq 1\}$, $C_1, C_2, C_3, C_4 = C_i . |C_i| = \left[\!\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]\!\right]$, jumlah maksimal sikel yang *disjoint* sisi diambil dari K_n menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1

Ambil sikel yang *disjoint*sisi $c_i = e_i e_{(i+1)} e_{i+2} e_i (i = 1,3,5, \ldots, n-1)$. Jelas bahwa $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}$adalah sikel yang *disjoint* sisi, sehingga didapatkan $\frac{n}{2}$ sikel yang *disjoint* sisi.

Langkah 2

Hapus sisi $e_i e_{\frac{n}{2}-i} \left(i = 1,2, \ldots, \frac{n}{2}\right)$ dari K_n.

Langkah 3

Ambil sejumlah $\left[\!\left[\frac{n^2-5n}{6}\right]\!\right]$ sikel yang *disjoint* sisi dari $K_n - \{e_i e_{\frac{n}{2}-i} \left(i = 1,2, \ldots, \frac{n}{2}\right)\}$. Karena itu $\frac{n}{2} + \left[\!\left[\frac{n^2-5n}{6}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]\!\right]$. Karena $e_i e_{\frac{n}{2}-i} \left(i = 1,2, \ldots, \frac{n}{2}\right)$ adalah sisi yang tidak *adjacent* dalam K_n, jadi terbukti $CM[K_n] = \left[\!\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]\!\right]$ untuk n genap (Muslihatin, 2011:59).

2.4 Grup

Definisi 13

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua $a,b,c \in G$ (yaitu $*$ assosiatif).
2. Ada suatu elemen *e* di *G* sehingga $a*e = e*a = a$, untuk semua $a \in G$ (*e* disebut identitas di *G*).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (a^{-1} disebut invers dari *a*)

Adapun grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a*b = b*a$ untuk semua $a,b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14).

2.5 Grup Dihedral

Definisi 14

Grup *dihedral* adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-n beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup *dihedral* dengan D_n (Dummit & Foote, 1991:24-25). Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh *st* untuk $s,t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga *st* adalah fungsi komposisi).Jika s,t akibat permutasi titik berturut-turut σ,τ, maka *st* akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n}

adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri s (jadi jika s akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit & Foote, 1991:24-25).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ekstensif, maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua i.

(4) $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i,\ j \leq n-1$ dengan $i \neq j$. Jadi $D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$ yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$ (Dummit dan Foote, 1991:26).

Sebagai contoh D_6 adalah grup dihendral yang memuat semua simetri (rotasi dan refleksi) pada bangun segitiga sehingga $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.

2.6 Center Grup

Definisi 15

"Misal G adalah sebuah grup, maka himpunan Z dikatakan center dari grup G,dituliskan $Z = \{z \in G : zx = xz, \forall x \in G\}$" (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:229).

2.7 Graf *Commuting*

Definisi 16

"Diberikan G adalah grup yang non-abelian, dan $X \subset G$. **Graf *Commuting*** didefinisikan sebagai graf dengan $V(G) = X$ dan untuk dua titik yang berbeda $x, y \in X$ dihubungkan dengan sisi jika dan hanya jika $xy = yx$" (Raza & Faizi, 2013:1).

Contoh:

Grup dihedral order 6 yaitu $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$ terhadap operasi fungsi komposisi, maka akan ditentukan unsur yang saling komutatif melalui tabel berikut.

Tabel 2.1 *Cayley* untuk D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari Tabel 2.1 terlihat bahwa:

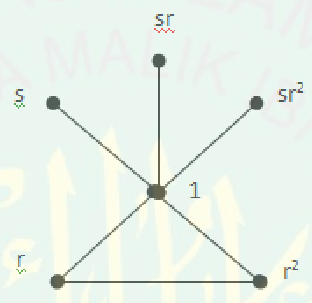
1. 1 komutatif dengan setiap elemen D_6 (sifat elemen identitas) sehingga 1

terhubung langsung dengan setiap elemen di $C(D_6, X)$.

2. $r \circ r^2 = r^2 \circ r = 1$ merupakan elemen-elemen yang komutatif sehingga terhubung langsung di $C(D_6, X)$.

3. Untuk elemen-elemen yang tidak komutatif maka elemen-elemen tersebut tidak terhubung langsung di $C(D_6, X)$.

Secara geometri, graf *commuting* pada D_6 dapat disajikan sebagai berikut.



Gambar 2.8 Graf *Commuting* pada D_6

2.8 Graf *Noncommuting*

Definisi 17

"Misal G grup non abelian dan *Z(G)* adalah center dari G. Graf *non commuting* $\Gamma_G$adalah sebuah graf yang mana titik-titiknya merupakan himpunan dari $G \backslash Z(G)$ dan dua titik x dan y beradjacent jika dan hanya jika $xy \neq yx$" (Abdollahi, 2006:1).

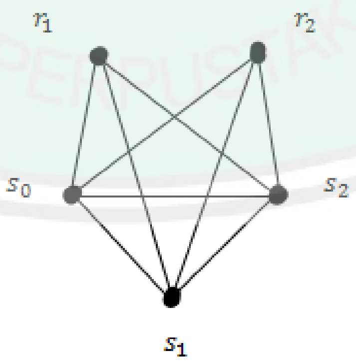
Contoh:

Diberikan grup $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$terhadap operasi fungsi komposisi. Dihedral D_6dibangun dari elemen-elemen $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral berbentuk tabel *Cayley* yang menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif pada D_6sebagai berikut:

Tabel 2.2 Tabel *Cayley* untuk D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari tabel diatas, kita menentukan center D_6 atau $Z(D_6)$yaitu $\{1\}$ yang ditunjukkan pada tabel dengan warna ungu, dan elemen-elemen pada D_6 yang tidak komutatif ditunjukkan pada tabel dengan warna biru. Sehingga graf dari grup D_6 memiliki himpunan titik $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Dari hasil tersebut akan digambarkan ke dalam bentuk graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 2.9 Graf *Noncommuting* D_6

2.9 Hubungan Kafir dan Muslim

Umat muslim diperbolehkan untuk berinteraksi dengan kafir dalam berbagai hal, kecuali hal-hal yang berkaitan dengan masalah agama, sebagaimana firman Allah Swt.,

لَكُمْ دِينُكُمْ وَلِيَ دِينِ ﴿٦﴾

"Untukmu agamamu, dan untukkulah, agamaku."(QS. al-Kafirun/109:6).

Pada ayat ini terdapat makna ancaman, sama seperti yang terdapat pada firman Allah Swt., "*Lanaa a'maalunaa wa lakum a'maalukum*" yang berarti "Bagi kami amal-amal kami dan bagimu amal-amalmu". Yakni maknanya adalah kalian telah ridha dengan agama yang kalian anut, dan kami telah ridha dengan agama yang kami anut ('Abdullah, 2007:285).

Adapun makna dari kalimat "*Lakum diinukum*" adalah kalian mendapat balasan sesuai dengan agama kalian, dan aku juga akan mendapat balasan sesuai dengan agamaku. Dan sebab penyebutan "agama" atas ajaran yang mereka anut adalah karena mereka meyakini dan mengamalkannya (Shihab, 2002:132). Dan dalam suratal-Baqarah/2:139, Allah Swt. berfirman:

قُلْ أَتُحَآجُّونَنَا فِي ٱللَّهِ وَهُوَ رَبُّنَا وَرَبُّكُمْ وَلَنَآ أَعْمَٰلُنَا وَلَكُمْ أَعْمَٰلُكُمْ وَنَحْنُ لَهُۥ مُخْلِصُونَ ﴿١٣٩﴾

"Katakanlah: "Apakah kamu memperdebatkan dengan kami tentang Allah, padahal Dia adalah Tuhan kami dan tuhan kamu; bagi kami amalan kami, dan bagi kamu amalan kamu dan hanya kepada-Nya kami mengikhlaskan hati, ""(QS. al-Baqarah/2:139).

Artinya kami berlepas diri dari kalian sebagaimana kalian berlepas diri dari kami, dan hanya kepada-Nya kami mengikhlaskan hati, yaitu dalam beribadah dan menghadapkan diri.

Allah Swt. berfirman dalam rangka membimbing Nabi-Nya, Muhammad untuk menolak perdebatan orang-orang musyrik: “Katakanlah, apakah kamu memperdebatkan dengan kami tentang Allah” artinya kalian mendebat kami mengenai pengesaan Allah, ketulusan ibadah serta ketundukpatuhan kepada-Nya, “Padahal Dia adalah *Rabb* kami dan *Rabb*-mu” yaitu *Rabb* yang mengatur dan mengurus diri kami dan juga kalian, hanya Dia-lah yang berhak atas pemurnian ibadah, tiada sekutu bagi-Nya (‘Abdullah, 2007:285)..

“Bagi kami amalan-amalan kami dan bagimu amalan-amalanmu” artinya, kami berlepas diri dari kalian dan apa yang kalian sembah, dan kalian juga lepas dari kami. Sebagaimana firmannya dalam ayat yang lain yaitu surat Yunus/10:41:

وَإِن كَذَّبُوكَ فَقُل لِّي عَمَلِي وَلَكُمْ عَمَلُكُمْ ۖ أَنتُم بَرِيٓـُٔونَ مِمَّآ أَعْمَلُ وَأَنَا۠ بَرِيٓءٌ مِّمَّا تَعْمَلُونَ ﴿٤١﴾

“Jika mereka mendustakan kamu, maka katakanlah: "Bagiku pekerjaanku dan bagimu pekerjaanmu. Kamu berlepas diri terhadap apa yang aku kerjakan dan akupun berlepas diri terhadap apa yang kamu kerjakan”(QS. Yunus/10:41).

.

Islam mengizinkan umatnya untuk berinteraksi dengan umat yang lain dalam berbagai hal, kecuali dalam hal yang berkenaan dengan *‘ubudiyah*, termasuk di dalamnya yaitu *munakahah*. Sebagaimana tertulis dalam al-Qur’an surat al-Baqarah/2:221, yang berbunyi:

وَلَا تَنكِحُوا۟ ٱلْمُشْرِكَٰتِ حَتَّىٰ يُؤْمِنَّ ۚ وَلَأَمَةٌ مُّؤْمِنَةٌ خَيْرٌ مِّن مُّشْرِكَةٍ وَلَوْ أَعْجَبَتْكُمْ ۗ وَلَا تُنكِحُوا۟ ٱلْمُشْرِكِينَ حَتَّىٰ
يُؤْمِنُوا۟ ۚ وَلَعَبْدٌ مُّؤْمِنٌ خَيْرٌ مِّن مُّشْرِكٍ وَلَوْ أَعْجَبَكُمْ ۗ أُو۟لَٰٓئِكَ يَدْعُونَ إِلَى ٱلنَّارِ ۖ وَٱللَّهُ يَدْعُوٓا۟ إِلَى ٱلْجَنَّةِ وَٱلْمَغْفِرَةِ
بِإِذْنِهِۦ ۖ وَيُبَيِّنُ ءَايَٰتِهِۦ لِلنَّاسِ لَعَلَّهُمْ يَتَذَكَّرُونَ ﴿٢٢١﴾

“Dan janganlah kamu menikahi wanita-wanita musyrik, sebelum mereka beriman. Sesungguhnya wanita budak yang mukmin lebih baik dari wanita musyrik, walaupun dia menarik hatimu. dan janganlah kamu menikahkan orang-orang musyrik (dengan wanita-wanita mukmin) sebelum mereka beriman. Sesungguhnya budak yang mukmin lebih baik dari orang musyrik, walaupun dia menarik hatimu. Mereka mengajak ke neraka, sedang Allah mengajak ke surga

dan ampunan dengan izin-Nya. dan Allah menerangkan ayat-ayat-Nya (perintah-perintah-Nya) kepada manusia supaya mereka mengambil pelajaran" (QS. al-Baqarah/2:221).

Hal ni adalah pengharaman bagi kaum muslim untuk menikahi wanita-wanita musyrik, para penyembah berhala. Jika yang dimaksudkan adalah kaum wanita musyrik secara umum yang mencakup semua wanita, baik dari kalangan *ahl al- kitab* maupun penyembah berhala ('Abdullah, 2009:427). Sebagaimana dalam surat al-Maidah/5:5, yang berbunyi:

ٱلْيَوْمَ أُحِلَّ لَكُمُ ٱلطَّيِّبَٰتُ ۖ وَطَعَامُ ٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْكِتَٰبَ حِلٌّ لَّكُمْ وَطَعَامُكُمْ حِلٌّ لَّهُمْ ۖ وَٱلْمُحْصَنَٰتُ
مِنَ ٱلْمُؤْمِنَٰتِ وَٱلْمُحْصَنَٰتُ مِنَ ٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْكِتَٰبَ مِن قَبْلِكُمْ إِذَآ ءَاتَيْتُمُوهُنَّ أُجُورَهُنَّ
مُحْصِنِينَ غَيْرَ مُسَٰفِحِينَ وَلَا مُتَّخِذِىٓ أَخْدَانٍ ۗ وَمَن يَكْفُرْ بِٱلْإِيمَٰنِ فَقَدْ حَبِطَ عَمَلُهُۥ
وَهُوَ فِى ٱلْءَاخِرَةِ مِنَ ٱلْخَٰسِرِينَ ﴿٥﴾

"Pada hari ini dihalalkan bagimu yang baik-baik.makanan (sembelihan) orang-orang yang diberi al-kitab itu halal bagimu, dan makanan kamu halal (pula) bagi mereka. (dandihalalkan mengawini) wanita yang menjaga kehormatandiantara wanita-wanita yang beriman dan wanita-wanita yang menjaga kehormatan di antara orang-orang yang diberi al-kitab sebelum kamu, bila kamu telah membayar mas kawin mereka dengan maksud menikahinya, tidak dengan maksud berzina dan tidak (pula) menjadikannya gundik-gundik. Barangsiapa yang kafir sesudah beriman (tidak menerima hukum-hukum Islam) Maka hapuslah amalannya dan ia di hari kiamat termasuk orang-orang merugi"(QS.al-Maidah/5:5).

Ayat ini membagi orang-orang kafir menjadi dua kelompok yang berbeda, yaitu *ahlal-kitab* dan orang-orang musyrik.Perbedaan itu dipahami dari huruf *waw* pada ayat itu yang diterjemahkan *dan*.Huruf ini, dari segi bahasa, digunakan untuk menghimpun dua hal yang berbeda.Adapun, yang dilarang mengawinkannya dengan wanita muslimah adalah pria musyrik, sedang yang dibenarkan oleh ayat ini adalah mengawini wanita *ahl al-kitab* (Shihab, 2001:29).

Alwi Shihab (2001) juga mengatakan larangan pernikahan beda agama dilatarbelakangi oleh tujuan dari pernikahan itu sendiri, yaitu pernikahan yang bertujuan untuk menciptakan *sakinah*. Menurutnya, perkawinan akan langgeng dan tentram jika keduanya memiliki pandangan hidup yang sama dan sejalan. Jangankan perbedaan agama, perbedaan budaya bahkan tingkat pendidikan pun tidak jarang menimbulkan salahpaham dan kegagalan perkawinan.

Meskipun ayat ini membolehkan perkawinan antara laki-laki muslim dengan wanita ahl al-kitab, tetapi izin ini adalah sebagai jalan keluar kebutuhan mendesak ketika itu, dimana kaum muslimin sering berpergian jauh melaksanakan jihad tanpa mampu kembali ke keluarga mereka. Pria muslim mengakui kenabian Isa, serta menggarisbawahi prinsip toleransi beragama, *lakum dinukum wa liya din*. Pria yang biasanya, bahkan seharusnya, menjadi pemimpin rumah tangga dapat mempengaruhi istrinya, sehingga jika suami tidak mengakui ajaran dan kepercayaan istrinya maka dikhawatirkan akan terjadi pemaksaan beragama.Alwi Shihab melanjutkan, Firman Allah *wal muhshonat/wanita yang menjaga kehormatan* merupakan isyarat bahwa yang seharusnya dikawini adalah wanita yang menjaga kehormatannya, baik mukminah atapun *ahl al-kitab*. Selanjutnya didahulukannya penyebutan wanita-wanita mukminah memberi isyarat bahwa mereka yang seharusnya didahulukan.

Di sisi lain, ditempatkannya ayat ini sesudah pernyataan keputusan orang-orang kafir dan sempurnanya agama Islam, member isyarat bahwa dihalalkannya hal-hal tersebut antara lain karena umat Islam telah memiliki kesempurnaan tuntunan agama dan karena orang-orang kafir sudah sedemikian lemah, sehingga telah berputus asa untuk mengalahkan kaum muslim. Ini, sekali lagi, menunjukkan bahwa izin tersebut bertujuan pula untuk menampakkan kesempurnaan Islam serta keluhuran budi pekerti yang diajarkan dan diterapkan oleh suami terhadap istri penganut Yahudi dan Nasrani, tanpa harus memaksanya untuk masuk Islam. Atas dasar di atas, maka sangat tepat jika dikatakan bahwa tidak dibenarkan menjalin hubungan perkawinan dengan wanita *ahlal-kitab* bagi yang tidak mampu menampakkan kesempurnaan agama Islam, lebih-lebih yang diduga akan terpengaruh oleh ajaran calon istri atau keluarga calon istri (Shihab, 2001:30).

Menurut Saleh al-Fauzan (2006: 659), tidak diperbolehkan seorang laki-laki muslim menikahi wanita musyrik sebagaimana firman Allah pada ayat sebelumnya, yaitu surat al-Baqarah/2:221, namun hal ini dikecualikan bagi seorang wanita yang merdeka atau budak yang mampu memerdekakan dirinya sendiri, maka bagi muslim diperbolehkan menikahinya sebagaimana firman Allah pada surat al-Maidah/5:5, maksudnya dihalalkan bagimu untuk menikahi mereka. Ayat ini mengkhususkan al-Baqarah/2:221 yang secara umum melarang menikahi wanita-wanita musyrik bagi orang-orang muslim.

Secara ringkas hukum pernikahan beda agama terbagi sebagai berikut:

1. Lelaki muslim diperbolehkan menikah dengan perempuan *ahl al-kitab* dengan syarat utama adalah lelaki muslim (suami) dapat berpegang teguh pada agamanya dan menampakkan kesempurnaan agama Islam.
2. Lelaki Islam haram menikahi wanita kafir (bukan *ahl al-kitab*).

Wanita muslimah haram menikah dengan lelaki kafir ataupun *ahl al-kitab*.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Multiplisitas Sikel dari Graf *Commuting* Grup Dihedral

Diberikan grup dihedral D_{2n} dengan $n \geq 3$, sehingga elemen-elemen dari D_{2n} adalah $\{1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^3, \dots., sr^{n-1}\}$.Kemudian dibentuk subhimpunan u yang merupakan himpunan rotasi dari D_{2n} yaitu $u = \{1, r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}\}$ dan subhimpunan v yang merupakan himpunan refleksi dari D_{2n} yaitu $v = \{s, sr, sr^3, \dots., sr^{n-1}\}$.

3.1.1 Multiplisitas Sikel dari Graf *Commuting*D_6

Elemen-elemen dari grup dihedral D_6adalah $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_6 dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.1 Tabel *Cayley* untuk D_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Warna hijau pada Tabel 3.1 menunjukkan elemen-elemen D_6 yang komutatif terhadap operasi $\circ$ yang diuraikan sebagai berikut:

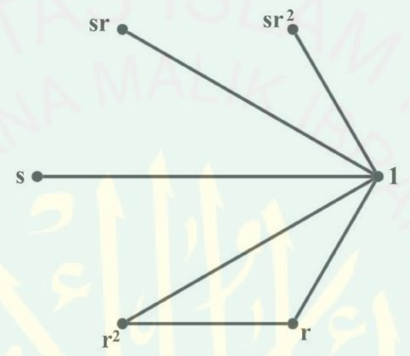
1. Antar elemen dalam subhimpunan rotasi u saling komutatif,

$$1 \circ r = r \circ 1 \qquad 1 \circ r^2 = r^2 \circ 1 \qquad r \circ r^2 = r^2 \circ r$$

2. Setiap elemen dalam subhimpunan refleksi v komutatif terhadap 1,

$$s \circ 1 = 1 \circ s \qquad sr \circ 1 = 1 \circ sr \qquad sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$$

Setiap elemen pada D_6 komutatif terhadap 1, oleh karena itu himpunan titik pada graf *commuting* dari grup D_6adalah $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Sehingga diperoleh graf *commuting* dari grup dihedral D_6 sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf *Commuting*D_6

Dari Gambar 3.1 diperoleh 1 sikel-3 yang saling lepas sisi adalah$\{1\ r\ r^2\}$, sehingga multiplisitas sikel pada graf *commuting*D_6 adalah

$$CM[C(D_6)] = 1.$$

3.1.2 Multiplisitas Sikel dari Graf *Commuting*D_8

Elemen-elemen dari grup dihedral D_8adalah $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_8 dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel *Cayley* untuk D_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr	sr^2	sr^3	s
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr^3	s	sr	sr^2
s	s	sr^3	sr^2	sr	1	r^3	r^2	r
sr	sr	s	sr^3	sr^2	r	1	r^3	r^2
sr^2	sr^2	sr	s	sr^3	r^2	r	1	r^3
sr^3	sr^3	sr^2	sr	s	r^3	r^2	r	1

Warna hijau pada Tabel 3.2 menunjukkan elemen-elemen D_8yang komutatif terhadap operasi $\circ$ yang diuraikan sebagai berikut:

1. Antar elemen dalam subhimpunan rotasi saling komutatif,,

   $1 \circ r = r \circ 1$ $\quad$ $1 \circ r^3 = r^3 \circ 1$ $\quad$ $r \circ r^3 = r^3 \circ r$

   $1 \circ r^2 = r^2 \circ 1$ $\quad$ $r \circ r^2 = r^2 \circ r$ $\quad$ $r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$

2. Setiap elemen dalam subhimpunan refleksi komutatif terhadap center grup yaitu $\{1, r^2\}$.

   $s \circ 1 = 1 \circ s$ $\quad$ $sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$ $\quad$ $sr \circ r^2 = r^2 \circ sr$

   $sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$ $\quad$ $s \circ r^2 = r^2 \circ s$ $\quad$ $sr^3 \circ r^2 = r^2 \circ sr^3$

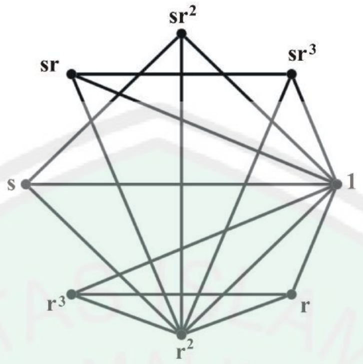
   $sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $\quad$ $sr^2 \circ r^2 = r^2 \circ sr^2$

3. Elemen sr^i komutatif dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$,

   $s \circ sr^2 = sr^2 \circ s$ $\quad$ $sr \circ sr^3 = sr^3 \circ sr$

Setiap elemen pada D_8 komutatif terhadap 1, oleh karena itu himpunan titik pada graf *commuting* dari grup D_8 adalah

$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.Sehingga diperoleh graf *commuting* dari grup dihedral D_8 sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf *Commuting*D_8

Dari Gambar 3.2 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah 3 sikel-3 yaitu $\{1\ r\ r^2, 1\ s\ sr^2, 1\ sr\ sr^3\}$, atau 2 sikel-3 yaitu $\{1\ s\ sr^2, 1\ sr\ sr^3\}$ dan 1 sikel-4 yaitu $\{1\ r\ r^2 r^3\}$, atau 1 sikel-3 yaitu $\{1\ s\ sr^2\}$ dan 2 sikel-4 yaitu $\{1\ r\ r^2 r^3, 1\ r^2\ sr\ sr^3\}$. Sehingga multiplisitas sikel pada graf *commuting*D_8 adalah:

$$CM[C(D_8)] = 3.$$

3.1.3 Multiplisitas Sikel dari Graf *Commuting* D_{10}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{10}adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{10} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.3 Tabel *Cayley* untuk D_{10}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^2	sr^3	sr^3	sr^3	sr^3

r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^3	sr^3	sr^3	sr^3	sr^3
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^3	sr^3	sr^3	sr^3
s	s	sr^4	sr^3	sr^2	sr	1	r^4	r^3	r^2	r
sr	sr	s	sr^4	sr^3	sr^2	r	1	r^4	r^3	r^2
sr^2	sr^2	sr	s	sr^4	sr^3	r^2	r	1	r^4	r^3
sr^3	sr^3	sr^2	sr	s	sr^4	r^3	r^2	r	1	r^4
sr^4	sr^4	sr^3	sr^2	sr	s	r^4	r^3	r^2	r	1

Warna hijau pada Tabel 3.3 menunjukkan elemen-elemen D_{10} yang komutatif terhadap operasi $\circ$ yang diuraikan sebagai berikut:

1. Antar elemen dalam subhimpunan rotasi saling komutatif,

$1 \circ r = r \circ 1$ $\qquad$ $r \circ r^2 = r^2 \circ r$ $\qquad$ $r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$

$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1$ $\qquad$ $r \circ r^3 = r^3 \circ r$ $\qquad$ $r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$

$1 \circ r^3 = r^3 \circ 1$ $\qquad$ $r \circ r^4 = r^4 \circ r$

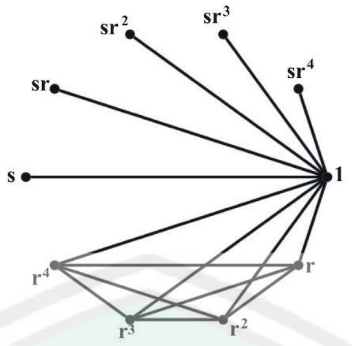
$1 \circ r^4 = r^4 \circ 1$ $\qquad$ $r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$

2. Setiap elemen dalam subhimpunan refleksi komutatif terhadap 1,

$s \circ 1 = 1 \circ s$ $\qquad$ $sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$ $\qquad$ $sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$

$sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $\qquad$ $sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$

Setiap elemen pada D_{10} komutatif terhadap 1, oleh karena itu himpunan titik pada graf *commuting* dari grup D_{10}adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Sehingga diperoleh graf *commuting* dari grup dihedral D_{10} sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf *Commuting*D_{10}

Dari Gambar 3.3 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah 2 sikel-3 yaitu $\{1rr^2, 1r^3r^4\}$ dan 1 sikel-4 yaitu $\{rr^3r^2r^4\}$, sehingga multiplisitas sikel pada graf *commuting*D_{10} adalah:

$$CM[C(D_{10})] = 3.$$

3.2.4 Multiplisitas Sikel dari Graf *Commuting*D_{12}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{12}adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{12} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.4 Tabel *Cayley* untuk D_{12}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
s	s	sr^5	sr^4	sr^3	sr^2	sr	1	r^5	r^4	r^3	r^2	r

sr	sr	s	sr^5	sr^4	sr^3	sr^2	r	1	r^5	r^4	r^3	r^2
sr^2	sr^2	sr	s	sr^5	sr^4	sr^3	r^2	r	1	r^5	r^4	r^3
sr^3	sr^3	sr^2	sr	s	sr^5	sr^4	r^3	r^2	r	1	r^5	r^4
sr^4	sr^4	sr^3	sr^2	sr	s	sr^5	r^4	r^3	r^2	r	1	r^5
sr^5	sr^5	sr^4	sr^3	sr^2	sr	s	r^5	r^4	r^3	r^2	r	1

Warna hijau pada Tabel 3.4 menunjukkan elemen-elemen D_8yang komutatif terhadap operasi $\circ$ yang diuraikan sebagai berikut:

1. Antar elemen dalam subhimpunan rotasi saling komutatif

$r \circ 1 = 1 \circ r$ $\qquad$ $r \circ r^2 = r^2 \circ r$ $\qquad$ $r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$

$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$ $\qquad$ $r \circ r^3 = r^3 \circ r$ $\qquad$ $r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$

$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$ $\qquad$ $r \circ r^4 = r^4 \circ r$ $\qquad$ $r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$

$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$ $\qquad$ $r \circ r^5 = r^5 \circ r$ $\qquad$ $r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$

$r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5$ $\qquad$ $r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$ $\qquad$ $r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$

2. Setiap elemen dalam subhimpunan refleksi komutatif terhadap center grup yaitu $\{1, r^3\}$.

$s \circ 1 = 1 \circ s$ $\qquad$ $sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$ $\qquad$ $sr^2 \circ r^3 = r^3 \circ sr^2$

$sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $\qquad$ $sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$ $\qquad$ $sr^3 \circ r^3 = r^3 \circ sr^3$

$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$ $\qquad$ $s \circ r^3 = r^3 \circ s$ $\qquad$ $sr^4 \circ r^3 = r^3 \circ sr^4$

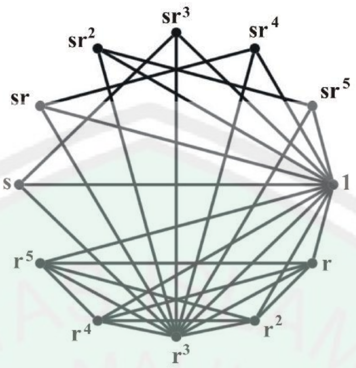
$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$ $\qquad$ $sr \circ r^3 = r^3 \circ sr$ $\qquad$ $sr^5 \circ r^3 = r^3 \circ sr^5$

3. Elemen sr^i komutatif dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$,

$s \circ sr^3 = sr^3 \circ s$ $\qquad$ $sr \circ sr^4 = sr^4 \circ sr$ $\qquad$ $sr^2 \circ sr^5 = sr^5 \circ sr^2$

Setiap elemen pada D_{12} komutatif terhadap 1, oleh karena itu himpunan titik pada graf *commuting* dari grup D_{12}adalah

$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Sehingga diperoleh graf *commuting* dari grup dihedral D_{12} sebagai berikut:



Gambar 3.4 Graf *Commuting*D_{12}

Dari Gambar 3.4 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah 7 sikel-3 yaitu $\{1\,rr^2, 1\,r^3r^4,\ r^5r^3r,\ r^5r^2r^4,\ 1\,ssr^3,\ 1\,srsr^4,\ 1\,sr^2sr^5\}$, atau 6 sikel-3 yaitu $\{r^5\,1\,r,\ r^5r^2r^3,\ r^4\,1\,r^2,\ r^4rr^3,\ 1\,ssr^3,\ 1\,srsr^4\}$ dan 1 sikel-4 yaitu $\{1\,r^3sr^2sr^3\}$, sehingga multiplisitas sikel pada graf *commuting*D_{12} adalah:

$$CM[C(D_{12})] = 7.$$

3.1.5 Multiplisitas Sikel dari Graf *Commuting*D_{14}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{14} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{14} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.5 Tabel *Cayley* untuk D_{14}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

Dari tabel 3.5 dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi ∘ adalah sebagai berikut:

1. Antar elemen dalam subhimpunan rotasi u saling komutatif,

$r \circ 1 = 1 \circ r$

$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$

$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$

$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$

$r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5$

$r^6 \circ 1 = 1 \circ r^6$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r$

$r \circ r^3 = r^3 \circ r$

$r \circ r^4 = r^4 \circ r$

$r \circ r^5 = r^5 \circ r$

$r \circ r^6 = r^6 \circ r$

$r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$

$r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$ $\quad$ $r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$ $\quad$ $r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$

$r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$ $\quad$ $r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$ $\quad$ $r^4 \circ r^6 = r^6 \circ r^4$

$r^2 \circ r^6 = r^6 \circ r^2$ $\quad$ $r^3 \circ r^6 = r^6 \circ r^3$ $\quad$ $r^5 \circ r^6 = r^6 \circ r^5$

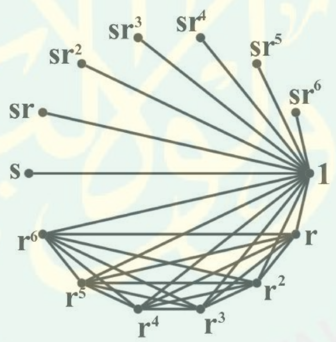
2. Setiap elemen dalam subhimpunan refleksi v komutatif terhadap 1,

$s \circ 1 = 1 \circ s$ $\quad$ $sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$ $\quad$ $sr^6 \circ 1 = 1 \circ sr^6$

$sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $\quad$ $sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$

$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$ $\quad$ $sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$

Setiap elemen pada D_{14} komutatif terhadap 1, oleh karena itu himpunan titik pada graf *commuting* dari grup D_{14} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$.Sehingga diperoleh graf *commuting* dari grup dihedral D_{14} sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf *Commuting*D_{14}

Dari gambar 3.5 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah 7 sikel-3 yaitu $\{1\,rr^2, 1\,r^3r^4, 1\,r^5r^6,\ rr^3r^5,\ rr^4r^6,\ r^2r^3r^6,\ r^2r^4r^5\}$, sehingga multiplisitas sikel pada graf *commuting*D_{14} adalah:

$$CM[C(D_{14})] = 7.$$

3.1.6 Multiplisitas Sikel dari Graf *Commuting* D_{16}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{16} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{16} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.6 Tabel *Cayley* untuk D_{16}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Dari Tabel 3.6 dapat diketahui elemen-elemen yang mempunyai sifat komutatif dengan operasi $\circ$ adalah sebagai berikut:

1. Antar elemen dalam subhimpunan rotasi saling komutatif,

$r \circ 1 = 1 \circ r$ $\quad$ $r \circ r^5 = r^5 \circ r$ $\quad$ $r^3 \circ r^6 = r^6 \circ r^3$

$r^2 \circ 1 = 1 \circ r^2$ $\quad$ $r \circ r^6 = r^6 \circ r$ $\quad$ $r^3 \circ r^7 = r^7 \circ r^3$

$r^3 \circ 1 = 1 \circ r^3$ $\quad$ $r \circ r^7 = r^7 \circ r$ $\quad$ $r^4 \circ r^5 = r^5 \circ r^4$

$r^4 \circ 1 = 1 \circ r^4$ $\quad$ $r^2 \circ r^3 = r^3 \circ r^2$ $\quad$ $r^4 \circ r^6 = r^6 \circ r^4$

$r^5 \circ 1 = 1 \circ r^5$ $\quad$ $r^2 \circ r^4 = r^4 \circ r^2$ $\quad$ $r^4 \circ r^7 = r^7 \circ r^4$

$r^6 \circ 1 = 1 \circ r^6$ $\quad$ $r^2 \circ r^5 = r^5 \circ r^2$ $\quad$ $r^5 \circ r^6 = r^6 \circ r^5$

$r^7 \circ 1 = 1 \circ r^7$ $\quad$ $r^2 \circ r^6 = r^6 \circ r^2$ $\quad$ $r^5 \circ r^7 = r^7 \circ r^5$

$r \circ r^2 = r^2 \circ r$ $\quad$ $r^2 \circ r^7 = r^7 \circ r^2$ $\quad$ $r^6 \circ r^7 = r^7 \circ r^6$

$r \circ r^3 = r^3 \circ r$ $\quad$ $r^3 \circ r^4 = r^4 \circ r^3$

$r \circ r^4 = r^4 \circ r$ $\quad$ $r^3 \circ r^5 = r^5 \circ r^3$

2. Setiap elemen dalam subhimpunan refleksi komutatif terhadap center grup yaitu $\{1, r^3\}$.

$s \circ 1 = 1 \circ s$ $\quad$ $sr^6 \circ 1 = 1 \circ sr^6$ $\quad$ $sr^4 \circ r^4 = r^4 \circ sr^4$

$sr \circ 1 = 1 \circ sr$ $\quad$ $sr^7 \circ 1 = 1 \circ sr^7$ $\quad$ $sr^5 \circ r^4 = r^4 \circ sr^5$

$sr^2 \circ 1 = 1 \circ sr^2$ $\quad$ $s \circ r^4 = r^4 \circ s$ $\quad$ $sr^6 \circ r^4 = r^4 \circ sr^6$

$sr^3 \circ 1 = 1 \circ sr^3$ $\quad$ $sr \circ r^4 = r^4 \circ sr$ $\quad$ $sr^7 \circ r^4 = r^4 \circ sr^7$

$sr^4 \circ 1 = 1 \circ sr^4$ $\quad$ $sr^2 \circ r^4 = r^4 \circ sr^2$

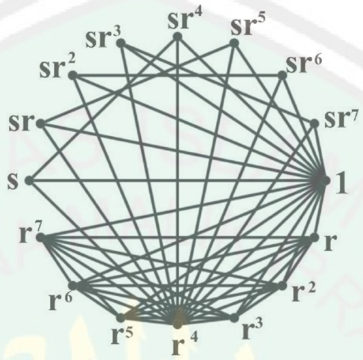
$sr^5 \circ 1 = 1 \circ sr^5$ $\quad$ $sr^3 \circ r^4 = r^4 \circ sr^3$

3. Elemen sr^i komutatif dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$,

$s \circ sr^4 = sr^4 \circ s$ $\quad$ $sr^2 \circ sr^6 = sr^6 \circ sr^2$

$sr \circ sr^5 = sr^5 \circ sr$ $\quad$ $sr^2 \circ sr^7 = sr^7 \circ sr^2$

Setiap elemen pada D_{16} komutatif terhadap 1, oleh karena itu himpunan titik pada graf *commuting* dari grup D_{16} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$.Sehingga diperoleh graf *commuting* dari grup dihedral D_{16} sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf *Commuting*D_{16}

Dari Gambar 3.6 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah sikel-3 yaitu $\{1\,rr^2,\ r^2r^3r^4,\ r^4r^5r^6,\ r^6r^7\,1,\ rr^3r^6,\ r^7r^5r^2,\ rr^4r^7,\ r^3\,1\,r^5,\ 1\,ssr^4,\ 1\,srsr^5,\ 1\,sr^2sr^6,\ 1\,sr^3sr^7\}$ atau 11 sikel-3 yaitu $\{1\,rr^2,\ r^2r^3r^4,\ r^4r^5r^6,\ r^6r^7\,1,\ rr^3r^6,\ r^7r^5r^2,\ rr^4r^7,\ r^3\,1\,r^5,\ 1\,ssr^4,\ 1\,srsr^5,\ 1\,sr^2sr^6\}$ dan 1 sikel-4 yaitu $\{1\,r^3sr^3sr^7\}$, sehingga multiplisitas sikel pada graf *commuting*D_{16} adalah:

$$CM[C(D_{16})] = 12.$$

Sehingga diperoleh multiplisitas sikel graf *commuting*D_{2n}, untuk $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ yang disajikan pada Tabel 3.7 sebagai berikut:

Tabel 3.7 Multiplisitas Sikel Graf *Commuting*D_{2n}

No.	n	$CM[D_{2n}]$
1.	3	$\frac{3^2-3}{6}=1$
2.	4	$\frac{4^2+4}{6}=3$
3.	5	$\frac{5^2-5}{6}=3$
4.	6	$\frac{6^2+6}{6}=7$
5.	7	$\frac{7^2-7}{6}=7$
6.	8	$\frac{8^2+8}{6}=12$
	$\vdots$	$\vdots$
	n ganjil	$\frac{(n-1)^2}{6}=\frac{n^2-n}{6}$
	n genap	$\frac{n(n+1)}{6}=\frac{n^2+n}{6}$

Teorema 3.1 Multiplisitas sikel untuk graf *commuting* dari grup dihedral adalah

$$CM[D_{2n}] = \begin{cases} \left[\!\left[\frac{n^2-n}{6}\right]\!\right], untuk\ n\ ganjil \\ \left[\!\left[\frac{n^2+n}{6}\right]\!\right], untuk\ n\ genap \end{cases}$$

Bukti:

Diberikan graf *commuting* grup dihedral $D_{2n}=\{1,r,\dots,r^{n-1},s,sr,\dots,sr^{n-1}\}$, kemudian dibentuk subhimpunan u yang merupakan himpunan rotasi dari D_{2n} yaitu $u=\{1,r,r^2,r^3,\dots,r^{n-1}\}$ dan subhimpunan v yang merupakan himpunan refleksi dari D_{2n} yaitu $v = \{s, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$.

Ambil sebarang r^i dan r^j pada subhimpunan u, dengan $i \neq j$, maka$r^i \circ r^j = r^{i+j} = r^{j+i} = r^j \circ r^i$. Diperoleh $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, dapat disimpulkan sebarang r^i akan komutatif pada r^j dengan $i \neq j$. Oleh karena itu pada graf *commuting* grup dihedral titik-titik pada subhimpunan rotasi u saling terhubung dan membentuk subgraf komplit K_n.Multiplisitas dari subgraf komplit K_n telah diketahui yaitu

$$CM[K_n] = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{n^2 - n}{6}\right]\!\right], untuk\ n\ ganjil \\ \left[\!\left[\dfrac{n^2 - 2n}{6}\right]\!\right], untuk\ n\ genap \end{cases}$$

Selanjutnya untuk subhimpunan refleksi pada D_{2n} dengan n ganjil, ambil sebarang $sr^i \in v$, maka$1 \circ sr^i = sr^i = sr^i \circ 1$, sehingga diperoleh $1 \circ sr^i = sr^i \circ 1$, dapat disimpulkan sebarang sr^i komutatif pada 1.Ambil sebarang $r^i \in u$ dan $sr^j \in v$, dengan $i \neq n$, maka$r^i \circ sr^j = s(r^{-i})r^j = sr^{-i+j}$, dan $sr^j \circ r^i = sr^{j+i}$, sehingga diperoleh $r^i \circ sr^j \neq sr^j \circ r^i$, dapat disimpulkan sebarang sr^j tidak komutatif pada sebarang r^i dengan $i \neq n$.Ambil sebarang $sr^i, sr^j \in v$dengan $i \neq j$, maka$sr^i \circ sr^j = s(sr^{-i})r^j = r^{-i+j}$, dan $sr^j \circ r^i = s(sr^{-j})r^i = r^{-j+i}$, sehingga diperoleh $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, dapat disimpulkan sebarang sr^i tidak komutatif pada sebarang sr^j dengan $i \neq j$.Karena $r^i \circ sr^j \neq sr^j \circ r^i$dan $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, tetapi $1 \circ sr^i = sr^i \circ 1$, maka sr^i hanya komutatif terhadap 1. Oleh karena itu $v = \{s, sr, sr^3, \dots, sr^{n-1}\}$ pada graf *commuting* grup dihedral-$2n$ dengan n ganjil hanya terhubung pada 1 dan tidak bisa membentuk sikel, artinya sikel yang dibentuk oleh titik-titik pada subhimpunan refleksi v pada graf dihedral-$2n$adalah

0. Multiplisitas sikel dari graf *commuting* grup dihedral-$2n$ dengan n ganjil adalah $K_n + 0 = \left[\!\left[\frac{n^2-n}{6}\right]\!\right] + 0 = \left[\!\left[\frac{n^2-n}{6}\right]\!\right]$.

Sedangkan untuk subhimpunan refleksi pada D_{2n} dengan n genap, diketahui bahwa 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$ adalah center dari grup D_{2n} dengan n genap.Ambil sebarang $sr^i \in v$, maka $1 \circ sr^i = sr^i = sr^i \circ 1$, sehingga diperoleh $1 \circ sr^i = sr^i \circ 1$. Selanjutnyaambil sebarang $sr^i \in v$,maka $r^{\frac{n}{2}} \circ sr^i = s(r^{-\frac{n}{2}})r^i = sr^{i-\frac{n}{2}} = sr^i \circ r^{-\frac{n}{2}}$, mengingat bahwa r^i adalah rotasi sebesar $\frac{2\pi i}{n}$, maka $r^{\frac{n}{2}}$ adalah rotasi sebesar $\frac{2\pi}{n}\frac{n}{2} = \pi$, sedangkan$r^{-\frac{n}{2}}$ adalah rotasi sebesar $\frac{2\pi}{n}\left(-\frac{n}{2}\right) = -\pi$. Rotasi sebesar π adalah sama dengan rotasi sebesar $-\pi$, sehingga $r^{\frac{n}{2}} = r^{-\frac{n}{2}}$. Oleh karena itu $r^{-\frac{n}{2}} \circ sr^i = r^{\frac{n}{2}} \circ sr^i$, sehingga diperoleh$sr^i \circ r^{\frac{n}{2}} = r^{\frac{n}{2}} \circ sr^i$.

Dari uraian diatas dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $sr^i \in v$ maka sr^i terhubung pada centre grup D_{2n}yaitu $\left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$. Selanjutnya akan ditunjukkan pula bahwa dalam subhimpunan refleksi $v = \{s, sr, sr^3, \ldots, sr^{n-1}\}$, sr^i hanya saling terhubung dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$. Ambil sebarang sr^i, maka$sr^i \circ sr^{i+\frac{n}{2}} = s(sr^{-i})r^{i+\frac{n}{2}} = r^{-i+i+\frac{n}{2}} = r^{\frac{n}{2}}$, karena n genap, maka $r^{\frac{n}{2}} = r^{-\frac{n}{2}}$, sehingga $sr^{-\frac{n}{2}} = sr^{i-i-\frac{n}{2}} = sr^{-\left(\frac{n}{2}+i\right)+i} = s\left(sr^{-\left(\frac{n}{2}+i\right)}\right)r^i = sr^{\frac{n}{2}+i} \circ r^i$,sehingga diperoleh $sr^i \circ sr^{i+\frac{n}{2}} = sr^{\frac{n}{2}+i} \circ r^i$. Karena setiap sr^i terhubung pada 1, $r^{\frac{n}{2}}$, dan $sr^{i+\frac{n}{2}}$, maka subhimpunan refleksi pada graf *commuting* grup dihedral-$2n$ dengan n genap hanya bisa membentuk sebanyak $\frac{n}{2}$ sikel, karena n adalah bilangan genap, maka $\frac{n}{2}$

adalah bilangan bulat, sehingga $\frac{n}{2}$ dapat ditulis $\left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right]$, sehingga total sikel maksimal yang saling lepas sisi yang diperoleh adalah $K_n + \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{n^2-2n}{6}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{n}{2}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{n^2+n}{6}\right]\!\right]$.

3.2 Multiplisitas Sikel dari Graf *Noncommuting* Grup Dihedral

Diberikan graf *noncommuting* grup dihedral D_{2n}dengan $n \geq 3$, sehingga elemen-elemen dari D_{2n} adalah $\{1, r, r^2, r^3, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^3, \ldots., sr^{n-1}\}$.

3.2.1 Multiplisitas Sikel dari Graf *Noncommuting*D_6

Elemen-elemen dari grup dihedral D_6adalah $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_6 dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.8 Tabel *Cayley* untukD_6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

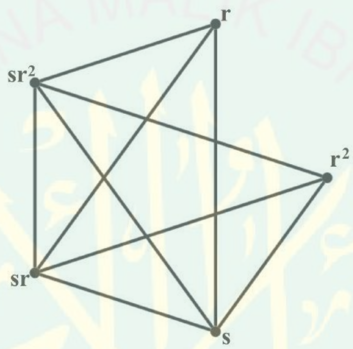
Dari Tabel 3.8, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_6yaitu $\{1\}$, sedangkan warna kuning menunjukkan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_6. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_6 sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$ $\quad$ $r \circ sr \neq sr \circ r$ $\quad$ $r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$

$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$ $\quad$ $r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$ $\quad$ $r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$

$s \circ sr \neq sr \circ s$ $\quad$ $s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$ $\quad$ $sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$

Dengan menghilangkan center dari grup D_6yaitu $Z(D_6) = \{1\}$, maka graf *noncommuting* dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_6} = \{r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf *Noncommuting*D_6

Dari Gambar 3.7 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah 2 sikel-3 yaitu $\{r\ s\ sr,\ r^2\ s\ sr^2\}$ atau 1 sikel-3 yaitu $\{r^2\ s\ sr^2\}$ dan 1 sikel-4 yaitu $\{r\ s\ sr\ sr^2\}$, sehingga multiplisitas sikel pada graf *noncommuting*D_6 adalah:

$$CM[NC(D_6)] = 2.$$

3.2.2 Multiplisitas Sikel dari Graf *Noncommuting*D_8

Elemen-elemen dari grup dihedral D_8adalah $\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_8 dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

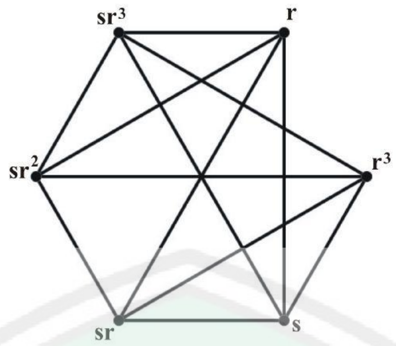
Tabel 3.9 Tabel *Cayley* untukD_8

$\circ$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Dari Tabel 3.9 di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_8yaitu $\{1, r^2\}$, karena 1 dan r^2 komutatif dengan semua elemen di D_8. Sedangkan warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_8. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_8 sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$	$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$	$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$
$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$	$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$	$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$
$s \circ sr \neq sr \circ s$	$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$

Dengan menghilangkan center dari grup D_8yaitu $Z(D_8) = \{1, r^2\}$, maka graf *noncommuting* dari grup D_8 memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_8} = \{r, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.8 Graf *Noncommuting*D_8

Dari Gambar 3.8 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah 4 sikel-3 yaitu $\{r\ s\ sr,\ r^2 sr^2 sr^3, r^3\ sr\ sr^2,\ r^3\ s\ sr^3\}$. Sehingga multiplisitas sikel pada graf *noncommuting*D_8 adalah:

$$CM[NC(D_8)] = 4.$$

3.2.3 Multiplisitas Sikel dari Graf *Noncommuting*D_{10}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{10}adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{10} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.10 Tabel *Cayley* untukD_{10}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
1	1	r	r^2	r^3	r^4	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r	r	r^2	r^3	r^4	1	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^2	r^3	r^4	1	r	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r^4	1	r	r^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr
r^4	r^4	1	r	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	1	r	r^2	r^3	r^4
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	s	r^4	1	r	r^2	r^3

sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	s	sr	r^3	r^4	1	r	r^2
sr^3	sr^3	sr^4	s	sr	sr^2	r^2	r^3	r^4	1	r
sr^4	sr^4	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	r^4	1

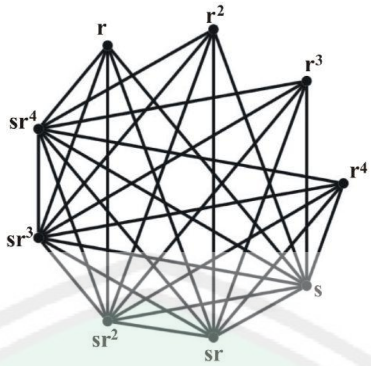
Dari Tabel 3.10, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{10}yaitu $\{1\}$, karena 1 komutatif dengan semua elemen di D_{10}. Sedangkan warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{10}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{10} sebagai berikut:

$$r \circ s \neq s \circ r$$
$$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$$
$$s \circ sr \neq sr \circ s$$
$$r \circ sr \neq sr \circ r$$
$$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$$
$$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$$
$$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$$
$$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$$
$$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$$
$$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$$

$$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$$
$$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$$
$$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$$
$$r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3$$
$$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$$
$$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$$
$$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$$
$$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$$
$$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$$
$$r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$$

$$sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$$
$$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$$
$$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$$
$$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$$
$$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$$
$$r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$$
$$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$$
$$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$$
$$r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$$
$$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{10}yaitu $Z(D_{10}) = \{1\}$, sehingga graf *noncommuting* dari grup D_{10} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{10}} = \{r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf *Noncommuting*D_{10}

Dari Gambar 3.9 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah 8 sikel-3 yaitu $\{r\ s\ sr,\ r^2\ s\ sr^2, r^3\ s\ sr^3, r^4\ s\ sr^4,\ r^3\ sr\ sr^2,\ r^4\ sr\ sr^3,$ $r\ sr^2 sr^3, r^2\ sr\ sr^4\}$ atau 7 sikel-3 yaitu $\{r\ s\ sr,\ r^2\ s\ sr^2, r^3\ s\ sr^3, r^4\ s\ sr^4,$ $r^3\ sr\ sr^2,\ r^4\ sr\ sr^3,\ r^2\ sr\ sr^4\}$ dan 1 sikel-4 yaitu $\{\, r\ sr^2 sr^3 sr^4\}$, sehingga multiplisitas sikel pada graf *noncommuting*D_{10} adalah:

$$CM[NC(D_{10})] = 8.$$

3.2.4 Multiplisitas Sikel dari Graf *Noncommuting*D_{12}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{12}adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{12} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

Tabel 3.11 Tabel *Cayley* untukD_{12}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr

r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	1		r^2	r^3	r^4	r^5
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2
sr^4	sr^4	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r
sr^5	sr^5	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1

Dari Tabel 3.11 di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{12}yaitu $\{1, r^3\}$, karena 1 dan r^3 komutatif dengan semua elemen di D_{12}. Sedangkan warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{12}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{12} sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$ $\quad s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$ $\quad r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$

$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$ $\quad r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$ $\quad sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$

$s \circ sr \neq sr \circ s$ $\quad r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$ $\quad r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$

$r \circ sr \neq sr \circ r$ $\quad sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$ $\quad r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$

$r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$ $\quad r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$ $\quad sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$

$s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$ $\quad r^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^4$ $\quad r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$

$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$ $\quad sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$ $\quad r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$

$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$ $\quad r^2 \circ s \neq s \circ r^2$ $\quad sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$

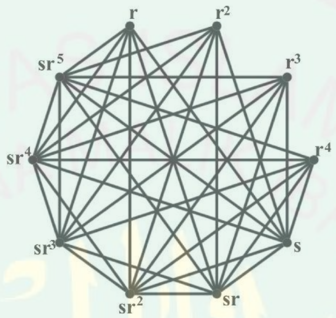
$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$ $\quad r^5 \circ s \neq s \circ r^5$ $\quad r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$

$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$ $\quad sr \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr$ $\quad r^5 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^5$

$r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$ $\quad r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$ $\quad sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$

$r^{2} \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^{2}$ $\quad$ $r^{5} \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^{5}$ $\quad$ $sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{12} yaitu $Z(D_{12}) = \{1, r^3\}$, sehingga graf *noncommuting* dari grup D_{12} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{12}} = \{r, r^2, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.10 Graf *Noncommuting*D_{12}

Dari gambar 3.10 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah $\{r\ s\ sr, r^2\ s\ sr^2, r^4\ s\ sr^4,\ r^5\ s\ sr^5, r\ sr^2 sr^3,\ r\ sr^4 sr^5,\ r^4\ sr\ sr^2,\ r^5\ sr\ sr^3,$ $r^2\ sr\ sr^5,\ r^4 sr^3 sr^5,\ r^2 sr^3 sr^4,\ r^5 sr^2 sr^4\}$. Sehingga multiplisitas sikel pada graf *noncommuting*D_{12} adalah:

$$CM[NC(D_{12})] = 12.$$

3.2.5 Multiplisitas Sikel dari Graf *Noncommuting*D_{14}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{14} adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{14} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

\

Tabel 3.12 Tabel *Cayley* untukD_{14}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3
r^4	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2
r^5	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr
r^6	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2	r^3
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r	r^2
sr^5	sr^5	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1	r
sr^6	sr^6	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	1

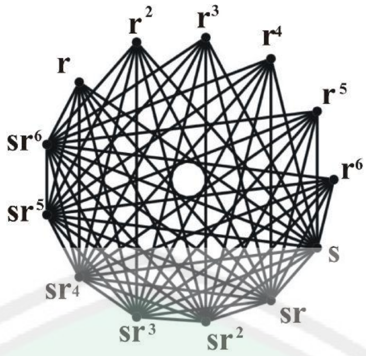
Dari Tabel 3.12 di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{14}yaitu $\{1\}$, karena 1 komutatif dengan semua elemen di D_{14}. Sedangkan warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{14}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{14} sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$ $\quad$ $s \circ sr \neq sr \circ s$ $\quad$ $r^4 \circ sr \neq sr \circ r^4$

$r^4 \circ s \neq s \circ r^4$ $\quad$ $r \circ sr \neq sr \circ r$ $\quad$ $s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$

$r \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r$	$r^5 \circ sr \neq sr \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^2$
$r^4 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^4$	$sr \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr$	$r^3 \circ sr \neq sr \circ r^3$
$s \circ sr^3 \neq sr^3 \circ s$	$r^2 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^2$	$r^6 \circ sr \neq sr \circ r^6$
$r \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r$	$r^5 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^5$	$sr^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^3$
$r^4 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^4$	$sr \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr$	$r^3 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^3$
$s \circ sr^4 \neq sr^4 \circ s$	$r^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^2 \neq sr^2 \circ r^6$
$r \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r$	$r^5 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^5$	$sr^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^3$
$r^4 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^4$	$sr \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr$	$r^3 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^3$
$s \circ sr^5 \neq sr^5 \circ s$	$r^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ r^6$
$r \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r$	$r^5 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^5$	$sr^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^3$
$r^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^4$	$sr^2 \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr^2$	$r^3 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^3$
$s \circ sr^6 \neq sr^6 \circ s$	$r^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ r^6$
$r \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r$	$r^5 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^5$	$sr^4 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^4$
$r^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^4$	$sr^2 \circ sr^4 \neq sr^4 \circ sr^2$	$r^3 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^3$
$sr \circ sr^2 \neq sr^2 \circ sr$	$r^2 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$	$r^6 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ r^6$
$r^2 \circ s \neq s \circ r^2$	$r^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^5$	$sr^4 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^4$
$r^5 \circ s \neq s \circ r^5$	$sr^2 \circ sr^5 \neq sr^5 \circ sr^2$	$r^3 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^2$
$sr \circ sr^3 \neq sr^3 \circ sr$	$r^3 \circ s \neq s \circ r^3$	$r^6 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ r^6$
$r^2 \circ sr \neq sr \circ r^2$	$r^6 \circ s \neq s \circ r^6$	$sr^5 \circ sr^6 \neq sr^6 \circ sr^5$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{14}yaitu $Z(D_{14}) = \{1\}$, sehingga graf *noncommuting* dari grup D_{14} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{14}} = \{r, r^2,\ r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5,\ sr^6\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf *Noncommuting*D_{14}

Dari Gambar 3.11 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah 18 sikel-3 yaitu $\{r\ s\ sr,\ r^2\ s\ sr^2,\ r^3\ s\ sr^3, r^4\ s\ sr^4,\ r^5\ s\ sr^5,\ r^6\ s\ sr^6,$ $r^3\ sr\ sr^2,\ r^4\ sr\ sr^3,\ r^5\ sr\ sr^4,\ r^6\ sr\ sr^5,\ r^5sr^2sr^3,\ r^6sr^2sr^4,\ r\ sr^3sr^4,$ $r^2sr^3sr^5,\ r^3sr^4sr^5,\ r\ sr^2sr^5,\ r^2\ sr\ sr^6,\ r^4sr^2sr^6\}$. atau 17 sikel-3 yaitu $\{r\ s\ sr,\ r^2\ s\ sr^2,\ r^3\ s\ sr^3, r^4\ s\ sr^4,\ r^5\ s\ sr^5,\ r^6\ s\ sr^6,\ r^3\ sr\ sr^2,$ $r^4\ sr\ sr^3,\ r^5\ sr\ sr^4,\ r^6\ sr\ sr^5,\ r^5sr^2sr^3,\ r^6sr^2sr^4,\ r\ sr^3sr^4,\ r^2sr^3sr^5,$ $r\ sr^2sr^5,\ r^2\ sr\ sr^6,\ r^4sr^2sr^6\}$ dan 1 sikel-4 yaitu $\{r^3sr^4sr^6sr^5\}$, sehingga multiplisitas sikel pada graf *noncommuting*D_{14} adalah:

$$CM[NC(D_{14})] = 18.$$

3.2.6 Multiplisitas Sikel dari Graf *Noncommuting*D_{16}

Elemen-elemen dari grup dihedral D_{16}adalah $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_{16} dalam bentuk tabel *Cayley* sebagai berikut:

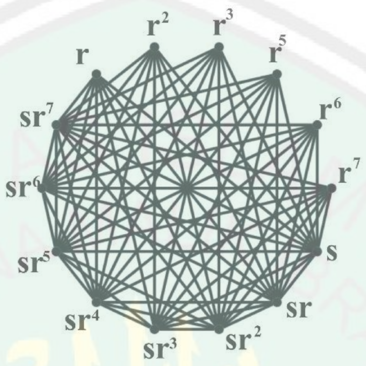
Tabel 3.13 Tabel *Cayley* untukD_{16}

$\circ$	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5
r^3	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4
r^4	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3
r^5	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2
r^6	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr
r^7	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7
sr	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6
sr^2	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5
sr^3	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3	r^4
sr^4	sr^4	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2	r^3
sr^5	sr^5	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r	r^2
sr^6	sr^6	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1	r
sr^7	sr^7	s	sr	sr^2	sr^3	sr^4	sr^5	sr^6	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	1

Dari Tabel 3.13 di atas, warna biru menunjukkan center grup dihedral D_{16}yaitu $\{1, r^4\}$, karena 1 dan r^4 komutatif dengan semua elemen di D_{16}. Sedangkan warna kuning merupakan unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{16}. Sehingga unsur-unsur yang tidak komutatif pada grup dihedral D_{16} sebagai berikut:

$r \circ s \neq s \circ r$	$r^{2} \circ s \neq s \circ r^{2}$	$r^{3} \circ s \neq s \circ r^{3}$
$r^{5} \circ s \neq s \circ r^{5}$	$r^{6} \circ s \neq s \circ r^{6}$	$r^{7} \circ s \neq s \circ r^{7}$
$s \circ sr \neq sr \circ s$	$sr \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ sr$	$sr^{3} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ sr^{3}$
$r \circ sr \neq sr \circ r$	$r^{2} \circ sr \neq sr \circ r^{2}$	$r^{3} \circ sr \neq sr \circ r^{3}$
$r^{5} \circ sr \neq sr \circ r^{5}$	$r^{6} \circ sr \neq sr \circ r^{6}$	$r^{7} \circ sr \neq sr \circ r^{7}$
$s \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ s$	$sr \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ sr$	$sr^{3} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ sr^{3}$
$r \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r$	$r^{2} \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r^{2}$	$r^{3} \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r^{3}$
$r^{5} \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r^{5}$	$r^{6} \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r^{6}$	$r^{7} \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ r^{7}$
$s \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ s$	$sr \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ sr$	$sr^{4} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ sr^{4}$
$r \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r$	$r^{2} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r^{2}$	$r^{3} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r^{3}$
$r^{5} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r^{5}$	$r^{6} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r^{6}$	$r^{7} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ r^{7}$
$s \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ s$	$sr^{2} \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ sr^{2}$	$sr^{4} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ sr^{4}$
$r \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r$	$r^{2} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r^{2}$	$r^{3} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r^{3}$
$r^{5} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r^{5}$	$r^{6} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r^{6}$	$r^{7} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ r^{7}$
$s \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ s$	$sr^{2} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ sr^{2}$	$sr^{4} \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ sr^{4}$
$r \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r$	$r^{2} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r^{2}$	$r^{3} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r^{3}$
$r^{5} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r^{5}$	$r^{6} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r^{6}$	$r^{7} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ r^{7}$
$s \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ s$	$sr^{2} \circ sr^{5} \neq sr^{5} \circ sr^{2}$	$sr^{5} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ sr^{5}$
$r \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r$	$r^{2} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r^{2}$	$r^{3} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r^{2}$
$r^{5} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r^{5}$	$r^{6} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r^{6}$	$r^{7} \circ sr^{6} \neq sr^{6} \circ r^{7}$
$sr \circ sr^{2} \neq sr^{2} \circ sr$	$sr^{2} \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ sr^{2}$	$sr^{5} \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ sr^{5}$
$r \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ r$	$r^{2} \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ r^{2}$	$r^{3} \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ r^{2}$
$r^{5} \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ r^{5}$	$r^{6} \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ r^{6}$	$r^{7} \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ r^{7}$
$sr \circ sr^{3} \neq sr^{3} \circ sr$	$sr^{3} \circ sr^{4} \neq sr^{4} \circ sr^{3}$	$sr^{6} \circ sr^{7} \neq sr^{7} \circ sr^{6}$

Dengan menghilangkan center dari grup D_{16}yaitu $Z(D_{16}) = \{1, r^4\}$, sehingga graf *noncommuting* dari grup D_{16} memiliki himpunan titik-titik $\Gamma_{D_{16}} = \{r, r^2, r^3, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.12 Graf *Noncommuting*D_{16}

Dari Gambar 3.12 diperoleh sikel-sikel yang saling lepas sisi adalah 24 sikel-3 yaitu $\{r\ s\ sr,\ r^2\ s\ sr^2,\ r^3\ s\ sr^3,\ r^5\ s\ sr^5,\ r^6\ s\ sr^6,\ r^7\ s\ sr^7,$ $r^5\ sr\ sr^2,\ r^6\ sr\ sr^3,\ r^7\ sr\ sr^4,\ r^2\ sr\ sr^6,\ r^3\ sr\ sr^7,\ r^7 sr^2 sr^3,$ $r\ sr^2 sr^4, r^3 sr^2 sr^5,\ r^6 sr^2 sr^7,\ r^5 sr^3 sr^4, r^2 sr^3 sr^5,\ r\ sr^3 sr^6,\ r^6 sr^4 sr^5,$ $r^3 sr^4 sr^6, r^2 sr^4 sr^7,\ r^7 sr^5 sr^6, r\ sr^5 sr^7, r^5 sr^6 sr^7\}$. Sehingga multiplisitas sikel pada graf *noncommuting*D_{16} adalah:

$$CM[NC(D_{16})] = 24.$$

Sehingga diperoleh multiplisitas sikel graf *noncommuting*D_{2n}, untuk $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ yang disajikan pada Tabel 3.14 sebagai berikut:

Tabel 3.14 Multiplisitas Sikel Graf *Noncommuting*D_{2n}

No.	n	$CM[D_{2n}]$
1.	3	$\frac{(3-1)^2}{2}=2$
2.	4	$\frac{4(4-2)}{2}=4$
3.	5	$\frac{(5-1)^2}{2}=8$
4.	6	$\frac{6(6-2)}{2}=12$
5.	7	$\frac{(7-1)^2}{2}=18$
6.	8	$\frac{8(8-2)}{2}=24$
	$\vdots$	$\vdots$
	n ganjil	$\frac{(n-1)^2}{2}=\frac{n^2-2n+1}{2}$
	$n$genap	$\frac{n(n-2)}{2}=\frac{n^2-2n}{2}$

Teorema 3.2 Multiplisitas sikel untuk graf *noncommuting* grup dihedraladalah

$$D_{2n}=\begin{cases}\left[\!\left[\frac{n^2-2n+1}{2}\right]\!\right], untuk\ n\ ganjil\\ \left[\!\left[\frac{n^2-2n}{2}\right]\!\right], untuk\ n\ genap\end{cases}$$

Bukti :

Diberikan grup dihedral $D_{2n}=\{1,r,\dots,r^{n-1},s,sr,,\dots,sr^{n-1}\}$, kemudian dibentuk subhimpunan u yang merupakan himpunan rotasi dari D_{2n}, yaitu

$u = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ dan subhimpunan v yang merupakan himpunan refleksi dari D_{2n}, yaitu $v = \{s. sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$.

Ambil sebarang $r^i, r^j \in u$, dengan $i \neq j$, maka$r^i \circ r^j = r^{i+j} = r^{j+i} = r^j \circ r^i$. Diperoleh $r^i \circ r^j = r^j \circ r^i$, dapat disimpulkan sebarang r^i akan komutatif pada r^jdengan $i \neq j$. Oleh karena itu pada graf *noncommuting* grup dihedral titik-titik pada subhimpunan rotasi u tidak saling terhubung.

Ambil sebarang $r^i \in u$dan $sr^j \in v$, dengan $i \neq n$, maka$r^i \circ sr^j = s(r^{-i})r^j = sr^{-i+j}$, dan $sr^j \circ r^i = sr^{j+i}$, sehingga diperoleh $r^i \circ sr^j \neq sr^j \circ r^i$, dapat disimpulkan sebarang sr^j tidak komutatif pada sebarang r^i dengan $i \neq n$. Oleh karena itu pada graf *noncommuting* grup dihedral setiap titik pada subhimpunan u terhubung pada setiap titik pada subhimpunan v.

Untuk n ganjil:

Diketahui center dari grup D_{2n} dengan n ganjil adalah $\{1\}$, sehingga himpunan titik pada graf *noncommuting* grup dihedral-$2n$ adalah $D_{2n} \backslash Z(D_{2n}) = \{r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Diperoleh $|r, r^2, \dots, r^{n-1}| = n - 1$ dan $|s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}| = n$.

Selanjutnya akan dicari derajat r^i dan sr^i. Diketahui bahwa r^itidak terhubung pada anggota himpunan rotasi yang lainnya, tetapi terhubung pada setiap anggota himpunan refleksi. Oleh karena itu derajat titik r^i pada graf *noncommuting* dari grup dihedral-$2n$ dengan n ganjil adalah n, atau ditulis $de\,g(r^i) = n$. Sedangkan untuk derajat mencari sr^i, akan ditunjukkan bahwa setiap $sr^i \in D_{2n}$ dengan n ganjil terhubung pada semua anggota himpunan refleksi yang lainnya, ambil sebarang $sr^i, sr^j \in v$ dengan $i \neq j$, maka$sr^i \circ sr^j =$

$s(sr^{-i})r^j = r^{-i+j}$, dan $sr^j \circ r^i = s(sr^{-j})r^i = r^{-j+i}$, sehingga diperoleh $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, dapat disimpulkan sebarang sr^i tidak komutatif pada sebarang sr^j dengan $i \neq j$, oleh karena itu pada graf *noncommuting* grup dihedral-$2n$ dengan n ganjil sr^i saling tehubung dengan anggota himpunan refleksi yang lainnya, di lain pihak diketahui sr^i juga terhubung pada setiap anggota dari himpunan rotasi, sehingga derajat dari sr^i adalah $(n-1)+(n-1) = 2n-2$, atau ditulis $deg\, sr^i = 2n-2$.

Diketahui bahwa antar r^i tidak saling terhubung dan antar sr^i saling terhubung, oleh karena itu untuk membentuk sikel-3 atau sikel dengan tiga titik, maka dua titik diantaranya adalah anggota dari $\{s, sr, \ldots sr^{n-1}\}$, dan satu titik yang lainnya adalah anggota dari$\{r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$. Untuk membentuk satu sikel-3 maka setiap titiknya memerlukan tepat dua sisi,maka setiap r^i bisa membentuk $\frac{n-1}{2}$ sikel, diketahui pula bahwa $|r, r^2, \ldots, r^{n-1}| = n-1$, sehingga total maksimal sikel yang dibentuk adalah $\frac{(n-1)}{2}(n-1) = \frac{(n-1)^2}{2}$. Karena n ganjil, maka $n-1$ adalah genap, dan $(n-1)^2$ juga genap, sehingga $\frac{(n-1)^2}{2}$ adalah bilangan bulat, sehingga bisa ditulis $\left[\!\left[\frac{(n-1)^2}{2}\right]\!\right]$.

Untuk n genap:

Diketahui center dari grup D_{2n} dengan n genap adalah $\{1, r^{\frac{n}{2}}\}$, sehingga himpunan titik pada graf *noncommuting* grup dihedral-$2n$ adalah $D_{2n} \backslash Z(D_{2n}) = \left\{r, \ldots, r^{\frac{n}{2}-1}, r^{\frac{n}{2}+1}, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\right\}$. Diperoleh $|r, r^2, \ldots, r^{n-1}| = n - 2$ dan $|s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}| = n$.

Selanjutnya akan dicari derajat r^i dan sr^i. Diketahui bahwa r^i tidak terhubung pada anggota himpunan rotasi yang lainnya, tetapi terhubung pada setiap anggota himpunan refleksi. Oleh karena itu derajat titik r^i pada graf *noncommuting* dari grup dihedral-$2n$ dengan $n$genap adalah $n,$ atau ditulis $deg(r^i) = n$. Sedangkan untuk mencari derajat sr^i, akan ditunjukkan bahwa setiap $sr^i \in D_{2n}$ dengan $n$genap terhubung pada semua anggota himpunan refleksi yang lainnya kecuali $sr^{i+\frac{n}{2}}$, ambil sebarang $sr^i, sr^j \in v$dengan $i \neq j$ dan $j \neq i + \frac{n}{2}$, maka$sr^i \circ sr^j = s(sr^{-i})r^j = r^{-i+j}$, dan $sr^j \circ r^i = s(sr^{-j})r^i = r^{-j+i}$, sehingga diperoleh $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$, dapat disimpulkan sebarang sr^i tidak komutatif pada sebarang sr^j dengan dengan $i \neq j$ dan $j \neq i + \frac{n}{2}$, sedangkan untuk menunjukkan sr^ikomutatif dengan $sr^{i+\frac{n}{2}}$, maka ambil sebarang sr^i, maka $sr^i \circ sr^{i+\frac{n}{2}} = s(sr^{-i})r^{i+\frac{n}{2}} = r^{-i+i+\frac{n}{2}} = r^{\frac{n}{2}}$, karena n genap, maka $r^{\frac{n}{2}} = r^{-\frac{n}{2}}$, sehingga $sr^{-\frac{n}{2}} = sr^{i-i-\frac{n}{2}} = sr^{-\left(\frac{n}{2}+i\right)+i} = s\left(sr^{-\left(\frac{n}{2}+i\right)}\right)r^i = sr^{\frac{n}{2}+i} \circ r^i$ sehingga diperoleh $sr^i \circ sr^{i+\frac{n}{2}} = sr^{\frac{n}{2}+i} \circ r^i$, dapat disimpulkan sr^i komutatif pada $sr^{\frac{n}{2}+i}$. Karena $sr^i \circ sr^j \neq sr^j \circ sr^i$ untuk $i \neq j$ dan $j \neq i + \frac{n}{2}$dan $sr^i \circ sr^{i+\frac{n}{2}} = sr^{\frac{n}{2}+i} \circ r^i$ maka dapat disimpulkan pada graf *noncommuting* grup dihedral-$2n$ dengan $n$genapsr^i saling tehubung dengan anggota himpunan refleksi yang lainnya kecuali $sr^{\frac{n}{2}+i}$, di lain pihak diketahui sr^i juga terhubung pada setiap anggota dari himpunan rotasi, sehingga derajat dari sr^i adalah $(n-2) + (n-2) = 2n - 4$, atau ditulis $deg\, sr^i = 2n - 4$.

Diketahui bahwa antar r^i tidak saling terhubung dan antar sr^i saling terhubung kecuali pada $sr^{\frac{n}{2}+i}$, oleh karena itu untuk membentuk sikel-3 atau sikel dengan tiga titik, maka dua titik diantaranya adalah anggota dari $\{s, sr, \dots sr^{n-1}\}$, dan satu titik yang lainnya adalah anggota dari$\{r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$. Untuk membentuk satu sikel-3 maka setiap titiknya memerlukan tepat dua sisi, maka setiap r^i bisa membentuk $\frac{n}{2}$ sikel, diketahui pula bahwa $|r, r^2, \dots, r^{n-1}| = n - 2$, sehingga total maksimal sikel yang dibentuk adalah $\frac{n}{2}(n-2) = \frac{n(n-1)}{2}$. Karena $n$genap, maka $n(n-1)$ adalah genap, sehingga $\frac{n(n-1)}{2}$ adalah bilangan bulat, sehingga bisa ditulis $\left[\!\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]\!\right]$.

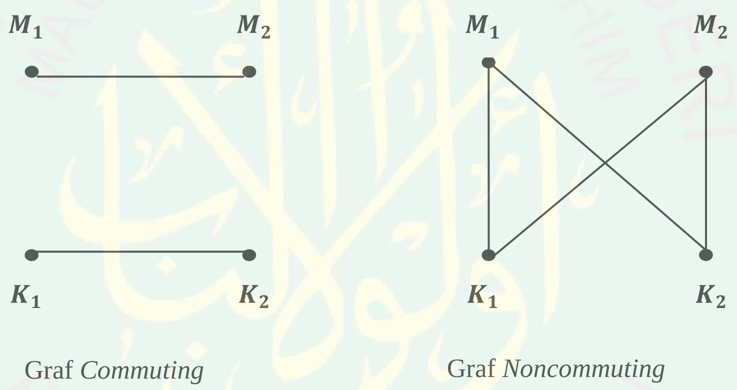
3.3 Hubungan Muslim dan Kafir dalam Pernikahan dengan Konsep Graf *Commuting* dan *Noncommuting*

Agama Islam memperbolehkan umatnya untuk berinteraksi dengan umat selain Islam dalam berbagai hal, misalnya masalah ekonomi, kemasyarakatan, dan interaksi sosial lainnya, yang tentunya interaksi-interaksi tersebut tidak menyalahi ajaran-ajaran dalam Islam, tetapi untuk hal-hal yang berhubungan dengan masalah agama, kita harus benar-benar berlepas dan memurnikan diri dari ajaran selain Islam, misalnya masalah *'Ubudiyah* sehari-hari, termasuk di dalamnya pernikahan.

Syarat utama pernikahan dalam Islam adalah kedua mempelai adalah beragama Islam. Dengan kata lain jika salah satu dari mempelai bukan beragama Islam, maka pernikahan tersebut dinilai tidak sah. Sebagaimana yang ter*maktub* dalam al-Qur'an surat al-Baqarah/2:221.

Beragama Islam sebagai syarat sah pernikahan dalam Islam dapat diintegrasikan dengan konsep graf *commuting* dan *noncommuting*. Dengan mengkorespondensikan himpunan titik dalam graf sebagai himpunan manusia yang terbagi dalam 2 bagian yaitu muslim dan nonmuslim (Kafir) dan dengan mengkorespondensikan sisi dengan sah atau tidaknya pernikahan antar dua manusia, maka pada graf *commuting*, dua titik akan terhubung jika pernikahan antar dua manusia adalah sah menurut Islam, dan pada graf *noncommuting*, dua titik akan terhubung jika pernikahan antar dua manusia tidak sah menurut Islam.

Misalkan M_1 adalah muslim 1, M_2 adalah muslim 2, K_1 adalah kafir 1 dan K_2 adalah kafir 2, maka dapat disajikan graf *commuting* dan *noncommuting* sebagai berikut:



Gambar 3.13 Graf *Commuting* dan *Noncommuting* dalam Pernikahan

Pada graf *commuting*, M_1 terhubung dengan M_2 karena keduanya beragama Islam, artinya pernikahan antara M_1 dan M_2 adalah sah.Tetapi M_1 dan M_2 keduanya tidak terhubung pada K_1 maupun K_2 karena pernikahan antara Kafir dan Muslim tidah sah.Sebaliknya pada graf *noncommuting*M_1 terhubung dengan K_1 dan K_2 dan M_2 terhubung dengan K_1dan K_2 karena pernikahannya tidak sah.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan mengenai multiplisitas sikel graf *commuting* dan *noncommuting* dari grup dihedral yaitu sebagai berikut:

1. Multiplisitas Sikel graf *commuting* grup dihedral adalah

$$CM[C(D_{2n})] = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{n^2-n}{6}\right]\!\right], untuk\ n\ ganjil \\ \left[\!\left[\dfrac{n^2+n}{6}\right]\!\right], untuk\ n\ genap \end{cases}$$

2. Multiplisitas Sikel graf *noncommuting* grup dihedral adalah

$$CM[NC(D_{2n})] = \begin{cases} \left[\!\left[\dfrac{n^2-2n+1}{2}\right]\!\right], untuk\ n\ ganjil \\ \left[\!\left[\dfrac{n^2-2n}{2}\right]\!\right], untuk\ n\ genap \end{cases}$$

4.2 Saran

Dalampenulisanpenelitianini, penulishanyamembatasipembahasandarigraf yang dibentukdarigrupdehidralsaja, dan untuk pembuktian, penulis hanya memperhatikan pada sikel-3.OlehKarenaitu, penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari multiplisitas dari graf yang lainnya dan dengan lebih memperhatikan gejala-gejala lain yang timbul.

DAFTAR PUSTAKA

Abdollahi, A., Akbari, S., & Maimani, H. R. 2006. Non-Commuting Graph of a Group.

Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. 2009. *Teori Graf.* Malang: UIN-Malang Press.

Ali, M.A., & Panayappan, S. 2010. Cycle Multiplicity of Total Graph of Cn, Pn, and Kn. *International Journal of Engineering, Science and Technology* , 54-58.

Budayasa, I. K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya.* Surabaya: Unesa University Press.

Chartrand, G., & Lesniak, L. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition.* California: a Division of Wadsworth, Inc.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. 1991. *Abstract Algebra.* New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Fauzan, S. B. 2005. *Fiqih Sehari-hari.* Terjemahan Abdul Hayyie al-Kattani, Ahmad Ikhwani, dan Budiman Mushtofa. Jakarta: Gema Insani Press.

Muslihatin. 2011. *Multiplisitas Sikel pada Graf Komplit dan Graf Total pada Graf Kipas dan Graf Roda.* Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.

Raza, Z., & Faizi, S. 2013. Mathematics Subject Classification. *Commuting Graphs Of Dihedral Type Groups* , 221.

Shihab, Q. 2001. *Tafsir Al-Mishbah.* Jakarta: Lentera Hati.

Syaikh, A.B.A. 2009. *Tafsir Ibnu Katsir, Jilid 1.* Terjemah M. 'Abdul Ghoffar E.M. ____: Pustaka Imam Syafi'i.