

**MENENTUKAN BILANGAN KEBEBASAN TITIK DAN SISI
PADA GRAF KOMPLIT K_n DAN GRAF BIPARTISI
KOMPLIT $K_{m,n}$ DENGAN $m,n \in \mathbb{N}$**

SKRIPSI

Oleh:

DENOK SANGGRAHATI IKA PUJI HANDAYANI

NIM: 05510042



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2009**

**MENENTUKAN BILANGAN KEBEBASAN TITIK DAN SISI
PADA GRAF KOMPLIT K_n DAN GRAF BIPARTISI
KOMPLIT $K_{m,n}$ DENGAN $m, n \in \mathbb{N}$**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri(UIN)
Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
DENOK SANGGRAHATI IKA PUJI HANDAYANI
NIM 05510042**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2009**

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Denok Sanggrahati Ika Puji Handayani

NIM : 05510042

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai paraturan yang berlaku.

Malang, 06 Oktober 2009

Yang membuat pernyataan

Denok Sanggrahati
NIM. 05510042

**MENENTUKAN BILANGAN KEBEBASAN TITIK DAN SISI
PADA GRAF KOMPLIT K_n DAN GRAF BIPARTISI
KOMPLIT $K_{m,n}$, DENGAN $m, n \in \mathbb{N}$**

SKRIPSI

Oleh:
Denok Sanggrahati Ika Puji Handayani
NIM 05510042

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 6 Oktober 2009

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Hairur Rahman, S.Pd, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**MENENTUKAN BILANGAN KEBEBASAN TITIK DAN SISI
PADA GRAF KOMPLIT K_n DAN GRAF BIPARTISI
KOMPLIT $K_{m,n}$, DENGAN $m, n \in \mathbb{N}$**

SKRIPSI

Oleh:
DENOK SANGGRAHATI IKA PUJI HANDAYANI
NIM: 05510042

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 09 Oktober 2009

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: <u>Wahyu H. Irawan, M. Pd</u> NIP. 19710420 200003 1 003	()
2. Ketua Penguji	: <u>Evawati Alisah, M. Pd</u> NIP. 19720604 199903 2 001	()
3. Sekretaris Penguji	: <u>Hairur Rahman, S.Pd, M. Si</u> NIP. 19800429 200604 1 003	()
4. Anggota Penguji	: <u>Abdussakir, M.Pd</u> NIP. 19751006 200312 1 001	()

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

MOTTO

Bukan Kebahagiaan yang Membuat Kita Berterimakasih

Tetapi Rasa Terimakasihlah yang Membuat Kita Bahagia

Bukan Kepuasan yang Membuat Kita Bersyukur

Tetapi Rasa Bersyukurlah yang Membuat Kita Puas



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Penulis persembahkan

Karya ini untuk orang-orang yang sangat berarti:

Kedua orangtua tercinta yang tanpa lelah memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan tak henti-hentinya mencurahkan kasih sayangnya.

Adik-adik tersayang:

Adek Ridho & Adek Nungki

Teruslah berjuang tuk berbakti dan banggakan kedua orangtua.

KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang; dan juga selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih atas bimbingan yang telah diberikan sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
4. Hairur Rahman, S.Pd, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang dengan sabar membimbing dan memberi arahan serta masukan yang amat berguna sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.
5. Segenap dosen UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya dosen Matematika, yang telah memberikan ilmunya tanpa pamrih demi masa depan penulis.

6. Ayahanda Sang-Sang Permadi J dan ibunda Susmiati tercinta, serta semua saudara penulis, yang selalu memberi dorongan dan bantuan, baik spiritual maupun material, sehingga skripsi ini bisa terselesaikan.
7. Sahabat-sahabatku di kos 15B, teman seperjunganku serta teman-teman matematika angkatan 2005, yang selalu memberi dorongan, inspirasi dan selalu menemani dalam suka dan duka.
8. Tidak ketinggalan pula semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 06 Oktober 2009

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL

HALAMAN PENGAJUAN

HALAMAN PERSETUJUAN

HALAMAN PENGESAHAN

HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

HALAMAN MOTTO

HALAMAN PERSEMBAHAN

KATA PENGANTAR i

DAFTAR ISI iii

DAFTAR GAMBAR v

DAFTAR TABEL vi

ABSTRAK vii

BAB I : PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 6

1.3 Tujuan Penulisan 6

1.4 Manfaat Penulisan 7

1.5 Metode Penelitian 7

1.6 Sistematika Penulisan 9

BAB II : KAJIAN TEORI

2.1 Graf 11

2.1.1 Pengertian Graf 11

2.1.2 Derajat Titik pada Graf 13

2.1.3 Graf Komplit (Lengkap) 15

2.1.4 Graf Bipartisi 16

2.1.5 Graf Bipartisi Komplit 16

2.2 Himpunan Bebas (Independent Set) 17

2.3 Kajian Keagamaan	20
----------------------------	----

BAB III: PEMBAHASAN

3.1 Menentukan Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Komplit K_n , dengan $n \in \mathbb{N}$	26
3.2 Menentukan Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$, dengan $m, n \in \mathbb{N}$ dan $m < n$	36
3.3 Tinjauan Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan.....	43

BAB IV: PENUTUP

4.1 Kesimpulan	45
4.2 Saran.....	46

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Graf yang Mempresentasikan Masalah Jembatan Konigsberg.....	3
Gambar 2.1	Titik dan Sisi yang Adjacent dan Incident.....	12
Gambar 2.2	Multigraf.....	13
Gambar 2.3	Titik dan Sisi pada Graf G	13
Gambar 2.4	Graf Komplit.....	15
Gambar 2.5	Graf Bipartisi.....	16
Gambar 2.6	Graf Bipartisi Komplit.....	17
Gambar 2.7	Graf G	18
Gambar 2.8	Titik Bebas pada Graf G	18
Gambar 2.9	Graf Terhubung G	19
Gambar 2.10	Sisi Bebas Pada Graf G	20
Gambar 3.1	Graf Komplit K_1	27
Gambar 3.2	Graf Komplit K_2	27
Gambar 3.3	Graf Komplit K_3	28
Gambar 3.4	Graf Komplit K_4	28
Gambar 3.5	Graf Komplit K_5	29
Gambar 3.6	Graf Komplit K_6	30
Gambar 3.7	Graph Bipartisi Komplit $K_{2,3}$	35
Gambar 3.8	Graph Bipartisi Komplit $K_{2,4}$	36
Gambar 3.9	Graph Bipartisi Komplit $K_{3,4}$	36
Gambar 3.10	Graph Bipartisi Komplit $K_{3,5}$	37
Gambar 3.11	Graph Bipartisi Komplit $K_{4,5}$	38

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Komplit K_n	32
Tabel 3.2 Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Komplit K_n dengan Kolom Genap dan Ganjil	33
Tabel 3.3 Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$ dengan $m \leq n$	40



ABSTRAK

Sanggrahati, Denok. 2009. *Menentukan Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Komplit K_n dan Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$ dengan $m, n \in \mathbb{N}$* . Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: Hairur Rahman, M.Si dan Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: graf komplit, graf bipartisi, bilangan kebebasan titik, bilangan kebebasan sisi.

Himpunan titik bebas (*independent set of vertices*) pada suatu graf G adalah himpunan titik-titik dari graf G yang titik satu sama lain dalam himpunan tersebut tidak terhubung langsung (*adjacent*). Kardinalitas maksimum dari himpunan-himpunan titik bebas disebut bilangan kebebasan titik (*vertex independence number*) dan disimbolkan dengan $\beta(G)$. Himpunan sisi bebas (*independent set of edges*) pada suatu graf G adalah himpunan sisi-sisi dari graf G yang sisi satu sama lain tidak terkait langsung dengan satu titik yang sama. Kardinalitas maksimum dari himpunan-himpunan sisi bebas disebut bilangan kebebasan sisi (*edge independence number*) dan disimbolkan dengan $\beta_1(G)$. Skripsi ini membahas penentuan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit K_n dan graf bipartisi komplit $K_{m,n}$.

Berdasarkan hasil pembahasan, langkah-langkah menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit K_n dan graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ adalah sebagai berikut. (a) Menggambar beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit, (b) Mencari himpunan bebas titik dan himpunan bebas sisi, (c) Menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi, (d) Mencari pola dari data-data bilangan kebebasan titik dan sisi, dan (e) Menyatakan konjektur sebagai teorema dan membuktikannya. Berdasarkan langkah-langkah tersebut diperoleh bahwa:

1. Jika K_n adalah graf komplit, maka rumus bilangan kebebasan titik dan sisi masing-masing adalah

$$\beta(K_n) = 1$$

dan

$$\beta_1(K_n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{dengan } n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}, & \text{dengan } n \text{ genap} \end{cases}$$

2. Jika $K_{m,n}$ adalah graf bipartisi komplit, dengan $m \leq n$ dan $m, n \in \mathbb{N}$, maka rumus bilangan kebebasan titik dan sisi masing-masing adalah

$$\beta(K_{m,n}) = n$$

dan

$$\beta_1(K_{m,n}) = m.$$

Disarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf-graf yang lain.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al-Qur'an telah memberikan kunci kepada manusia yang membahas ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Hal itu menunjukkan keluasan ilmu, ilmu yang dimiliki Allah. Dalam Al-Qur'an hal tersebut telah dijelaskan oleh Allah SWT dengan firman-Nya dalam surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:



Artinya: Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)" (Q. S. Al-Kahfi:109).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa hendaknya manusia memahami akan kewajiban untuk menuntut ilmu serta mempelajarinya. Dalam mempelajari ilmu tidak hanya berbekal kemampuan intelektual saja, tetapi perlu dukungan kemampuan emosional dan spiritual. Sehingga apabila ia telah mampu memahami suatu ilmu, maka ia dapat menyampaikan ilmu yang telah ia miliki kepada orang lain yang belum mengetahui dengan disertai metode yang baik, sehingga apa yang disampaikan akan mudah dipahami oleh orang lain. Sebagaimana firman

Allah SWT yang memerintahkan Rasulullah SAW untuk menyampaikan kepada manusia tentang suatu ilmu kepada umat manusia. Firman Allah tersebut terletak pada surat Al-Maidah ayat 99:



Artinya: "Kewajiban Rasul tidak lain hanyalah menyampaikan (ilmu), dan Allah mengetahui apa yang kamu lahirkan dan apa yang kamu sembunyikan" (Q. S. Al-Maidah: 99).

Manusia tidak lepas dari berbagai permasalahan hidup di dunia. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, yang dapat diselesaikan dengan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai bidang ilmu yang lain dan untuk menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasa matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998:1).

Matematika merupakan penelaahan tentang bilangan-bilangan, bentuk-bentuk dan lambang-lambang sebagai bahasa simbolik yang memungkinkan terwujudnya komunikasi yang cermat dan tepat. Berdasarkan definisi tersebut, matematika dibagi menjadi tiga cabang, yaitu aljabar, analisis dan geometri. Aljabar membahas tentang bilangan dan pengabstrakannya, analisis membahas

tentang kekonvergenan dan limit, sedangkan geometri membahas tentang bentuk dan konsep-konsep yang berkaitan. Dalam perkembangannya, cabang matematika menjadi semakin banyak. Salah satunya adalah teori graf. Teori graf berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan aljabar yang lebih dahulu berkembang (Hasanah, 2008: 1).

Teori graf pertama kali digunakan untuk merepresentasikan Jembatan Königsberg oleh seorang ahli matematika dari Swiss yang bernama Euler pada tahun 1736. Königsberg adalah sebuah kota di sebelah timur Prussia (sekarang berubah nama menjadi Jerman) yang terdapat sungai Pregel dan merupakan tempat tinggal Duke of Prussia pada abad ke-16. Kota tersebut saat ini bernama Kaliningrad yang merupakan pusat ekonomi dan industri utama di Rusia Barat. Tujuh jembatan dibangun pada abad ke-18 untuk menghubungkan keempat daratan tersebut. Masyarakat Königsberg biasanya berjalan-jalan dari daratan satu ke daratan lainnya melalui jembatan tersebut. Mereka mencoba memecahkan masalah, kemungkinan untuk berjalan menyeberangi ketujuh jembatan tanpa melalui jembatan yang sama dari satu daratan dan kembali ke tempat semula. Sungai Pregel membagi kota menjadi 4 daratan dengan mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Solusi Euler pertama kali merepresentasikan masalah ini ke dalam suatu graf dengan keempat daratan sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*). Graf yang dibuat Euler diperlihatkan pada gambar 1.1 (Wirawan, 2008:1).

sucilah Allah, Pencipta yang paling baik. Kemudian, sesudah itu, Sesungguhnya kamu sekalian benar-benar akan mati. Kemudian, Sesungguhnya kamu sekalian akan dibangkitkan (dari kuburmu) di hari kiamat” (Q. S. Al-Mukminin: 12-16).

Ayat tersebut menyatakan bahwa manusia diciptakan dari suatu titik atau saripati, air mani, segumpal darah, dan lain sebagainya yang telah disebutkan dalam surat Al-Mukminun tersebut. Kemudian beberapa garis dalam suatu graf adalah proses perjalanan manusia dari awal diciptakan hingga kemudian mati dan dibangkitkan kembali.

Graf merupakan himpunan tak kosong yang terdiri atas himpunan titik yang beraturan dan himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik. Seiring dengan perkembangan tentang teori graf, jenis-jenis graf pun semakin banyak. Dimulai dari graf sederhana, graf ganda, graf semu, dan hingga ditemukannya graf komplit. Suatu graf komplit didefinisikan sebagai graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi (Purwanto, 1998:21).

Sebuah graf G dikatakan graf komplit jika setiap titik (*vertex*) dihubungkan oleh satu sisi ke setiap titik yang lain. Graf bipartisi adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisah dalam dua himpunan bagian tak kosong X dan Y , dimana X, Y disebut himpunan partisi. Sedangkan graf bipartisi komplit adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi 2 himpunan tak kosong X dan Y sehingga tiap titik di X dihubungkan dengan tiap titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X|=m$ dan $|Y|=n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$ (Purwanto, 1998:22).

Himpunan titik bebas (*independent set of vertices*) pada suatu graf G adalah himpunan titik-titik dari graf G yang titik satu sama lain dalam himpunan

tersebut tidak terhubung langsung (*adjacent*). Kardinalitas maksimum dari himpunan-himpunan titik bebas disebut bilangan kebebasan titik (*vertex independence number*) dan disimbolkan dengan $\beta(G)$. Himpunan sisi bebas (*independent set of edges*) pada suatu graf G adalah himpunan sisi-sisi dari graf G yang sisi satu sama lain tidak terkait langsung (*incident*) dengan satu sisi yang sama. Kardinalitas maksimum dari himpunan-himpunan sisi bebas disebut bilangan kebebasan sisi (*edge independence number*) dan disimbolkan dengan $\beta_1(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:243).

Pembahasan mengenai himpunan titik bebas dan himpunan sisi bebas belum pernah dilakukan. Oleh karena itu, penulis ingin mengkaji himpunan titik bebas dan himpunan sisi bebas pada graf komplit K_n dan graf bipartisi komplit $K_{m,n}$. Pembahasan difokuskan pada penentuan bilangan kebebasan titik dan sisi. Berdasarkan uraian tersebut, penulis mengambil judul **"Menentukan Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Komplit K_n dan Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$ dengan $m, n \in \mathbb{N}$ "**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, maka permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana cara menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit K_n , dengan $n \in \mathbb{N}$?
2. Bagaimana cara menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dengan $m, n \in \mathbb{N}$ dan $m \leq n$?

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini sebagai berikut:

1. Bagaimana cara menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit K_n , dengan $n \in \mathbf{N}$.
2. Bagaimana cara menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dengan $m, n \in \mathbf{N}$ dan $m < n$.

1.4 Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi penulis

Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang teori graf, khususnya himpunan independent pada graf komplit dan graf bipartisi komplit.

2. Bagi lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur (kepuustakaan) atau kajian pustaka, yaitu melakukan penelusuran dan penelaahan terhadap beberapa literatur yang berhubungan dengan topik bahasan. Metode bertujuan untuk mengumpulkan data-data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat di ruang perpustakaan seperti: buku-buku, majalah, dokumen, catatan, kisah-kisah sejarah dan sebagainya. Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah

Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu peneliti menyusun rencana penelitian dari suatu masalah tentang himpunan bebas pada graf komplit dan graf bipartisi komplit.

2. Mengumpulkan Data.

Mengumpulkan data merupakan standar utama dari suatu penelitian. Dalam hal ini peneliti mengumpulkan data dari buku literatur utama *Graphs & Digraphs* (Gary Chartrand dan Linda Lesniak, 1986) dan literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian.

3. Menganalisis Data

Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah :

- a. Menggambar beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit.

- b. Mencari himpunan bebas titik dan himpunan bebas sisi pada beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit.
 - c. Menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi dengan menghitung kardinalitas maksimum dari himpunan bebas titik dan himpunan bebas sisi pada beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit.
 - d. Mencari pola dari data-data bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit dan graf bipartisi komplit. Pola tersebut kemudian dirumuskan sebagai konjektur.
 - e. Menyatakan konjektur sebagai teorema dan membuktikannya.
4. Membuat Kesimpulan
Kesimpulan dalam penelitian ini berupa langkah penentuan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit dan graf bipartisi komplit.
 5. Melaporkan
Langkah terakhir dari penelitian adalah menyusun laporan dari penelitian yang telah dilakukan, yaitu berupa skripsi yang digunakan sebagai syarat memperoleh gelar sarjana.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan sistematika sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang dasar-dasar teori sebagai acuan dalam penulisan skripsi ini, antara lain teori mengenai graf, himpunan independent, dan teori keagamaan berserta relevansi antara keduanya.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang analisis himpunan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit dan graf bipartisi komplit disertai pembuktian dari teorema-teorema yang diperoleh.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Graf

2.1.1 Pengertian Graf

Definisi 1

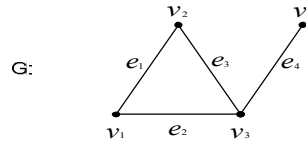
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong unsur-unsur berhingga dari objek-objek yang disebut *titik (vertex)* dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik u dan v yang berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi (edge)*. Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G yang dilambangkan dengan $p(G)$, sedangkan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G yang dilambangkan dengan $q(G)$. Sisi $e = (u, v)$ selanjutnya dapat ditulis $e = uv$ (Chartrand and Lesniak, 1986: 4).

Definisi 2

Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut *terhubung langsung (adjacent)*, v dan e serta u dan e disebut *terkait langsung (incident)*, titik u dan v disebut ujung dari sisi e (Chartrand and Lesniak, 1986: 4).

Contoh 2.1

Misal $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ maka G dapat digambarkan dalam Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2.1 Titik dan Sisi yang Adjacent dan Incident

Dari Gambar 2.1, order dari G adalah 4, atau dapat ditulis: $p(G) = 4$, sedangkan ukuran dari G adalah 4, atau dapat ditulis: $q(G) = 4$. Pada Gambar 2.1, titik yang terhubung langsung di graf G adalah titik v_1 dan v_2 , v_1 dan v_3 , v_2 dan v_3 , serta v_3 dan v_4 . Maka dapat dikatakan bahwa titik v_1 *adjacent* dengan titik v_2 , titik v_1 *adjacent* dengan titik v_3 , titik v_2 *adjacent* dengan v_3 , dan titik v_3 *adjacent* dengan v_4 . Titik v_1 dan v_4 , serta titik v_2 dan v_4 tidak terhubung langsung karena tidak terdapat sisi di antara kedua titik tersebut. Sedangkan titik yang terkait langsung (*incident*) adalah pada sisi e_1 yang terkait langsung v_1 dan v_2 , pada sisi e_2 yang terkait langsung v_1 dan v_3 , pada sisi e_3 yang terkait langsung v_2 dan v_3 , pada sisi e_4 yang terkait langsung v_3 dan v_4 . Sisi e_1 dan e_3 disebut terhubung langsung (*adjacent*) sedangkan e_1 dan e_4 tidak terhubung langsung.

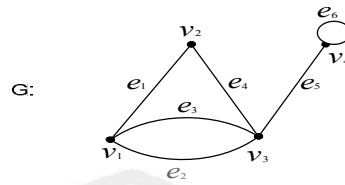
Definisi 3

Sisi yang menghubungkan dua titik yang sama disebut *loop*. Sedangkan dua sisi atau lebih yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan *sisi ganda* (*multiple edge*). Jika terdapat suatu graf yang mengandung loop atau sisi ganda dinamakan *multigraf* (Chartrand and Lesniak, 1986: 4).

Contoh 2.2

Misal G adalah graf terhubung dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ merupakan multigraf maka dapat digambarkan seperti

Gambar 2.2 berikut:



Gambar 2.2 Multigraf

Pada Gambar 2.2 di atas graf G adalah contoh multigraf karena mengandung loop, yaitu sisi e_6 dan mengandung sisi ganda yaitu sisi e_2 dan e_3 .

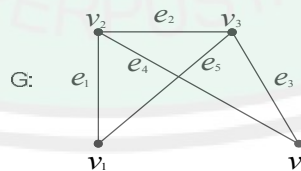
2.1.2 Derajat Titik pada Graf

Definisi 4

Derajat dari titik v di graf G , ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi e di G yang terkait langsung (*incident*) dengan titik v (Chartrand dan Leniak, 1986: 7).

Contoh 2.3

Misal G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ adalah graf terhubung. Dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 2.3 Titik dan Sisi pada Graf G

Berdasarkan gambar di atas, diperoleh $\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 3$, $\deg(v_3) = 3$, dan $\deg(v_4) = 2$. Titik v_1 dan v_4 adalah titik-titik yang berderajat genap (*even vertices*) sedangkan titik v_2 dan v_3 adalah titik yang berderajat ganjil (*odd vertices*).

Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap (even vertices)* dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil (odd vertices)*. Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung (end vertices)*. Jika setiap titik dalam suatu graf mempunyai derajat yang sama maka graf tersebut disebut dengan graf reguler (*Regular Graphs*). Sebuah graf G dikatakan r reguler atau reguler berderajat r jika setiap titik di G mempunyai derajat r (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

Teorema 1.

Misalkan G graph dengan banyaknya titik p dan banyaknya sisi q , maka

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di G , maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G . Terbukti bahwa $\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$. (Chartrand dan

Leniak, 1986:7 dan Siang, 2002:206-207)

Berdasarkan hubungan tersebut, maka banyak titik ganjil dalam suatu graph selalu genap. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.

Banyaknya titik ganjil dalam suatu graf selalu genap.

Bukti:

Misalkan G graph dan misalkan X adalah himpunan titik genap di G dan Y adalah himpunan titik ganjil di G .

Maka $\sum_{v \in G} \deg(v) = \sum_{v \in X} \deg(v) + \sum_{v \in Y} \deg(v) = 2q$. Karena X adalah himpunan

titik genap maka $\sum_{v \in X} \deg(v)$ adalah genap. Karena $2q$ adalah bilangan genap

dan $\sum_{v \in X} \deg(v)$ juga genap maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ haruslah bilangan genap. Karena

Y himpunan titik ganjil dan $\sum_{v \in Y} \deg(v)$ adalah bilangan genap, maka banyak

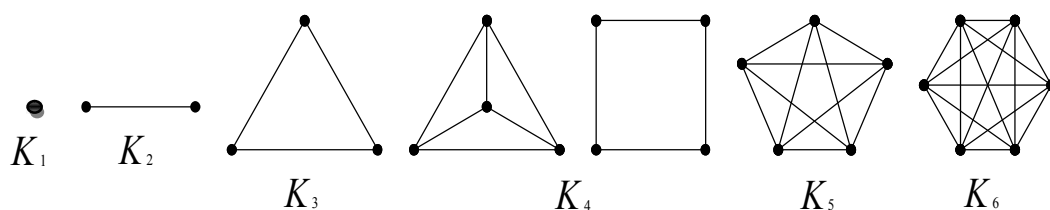
titik di Y haruslah genap, sebab jika banyak titik di Y ganjil maka $\sum_{v \in Y} \deg(v)$

adalah ganjil. Terbukti bahwa banyaknya titik ganjil di G adalah genap (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

2.1.3 Graf Komplit (Lengkap)**Definisi 5**

Graf komplit (*complete graph*) adalah graf yang setiap dua titiknya berbeda dihubungkan oleh tepat satu sisi (Wilson dan Watkins, 1990: 36).

Berikut adalah beberapa contoh graf komplit:



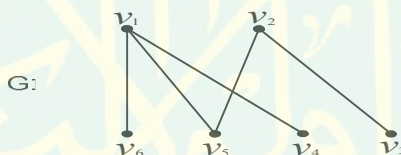
Gambar 2.4 Graf Komplit

Gambar 2.4 di atas merupakan contoh graf komplit dengan jumlah titik sebanyak 1 sampai 6, setiap dua titik yang berbeda dalam masing-masing graf di atas dihubungkan oleh satu sisi, dengan demikian graf-graf tersebut merupakan graf komplit.

2.1.4 Graf Bipartisi

Definisi 6

Graf bipartisi (*bipartit graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi himpunan A dan B sedemikian sehingga setiap sisi graf menghubungkan titik di A ke titik di B (Wilson dan Watkins, 1990: 38).



Gambar 2.5 Graf Bipartisi

Graf G pada Gambar 2.5 adalah graf bipartisi karena himpunan titik di G dapat dipecah menjadi dua himpunan, yaitu $A = \{v_1, v_2\}$ dan $B = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ sehingga masing-masing sisi di G mempunyai ujung di A dan di B. Himpunan titik dalam satu partisi tidak boleh terhubung langsung.

2.1.5 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 7

Graf bipartisi komplit adalah graf bipartisi yang setiap titik di partisi A dihubungkan dengan tepat satu sisi ke setiap titik di partisi B. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada A dan n titik pada B, dilambangkan dengan

$K_{m,n}$ dan jumlah sisi pada graf bipartisi komplit adalah mn (Wilson dan Watkins, 1990: 38).



Gambar 2.6 Graf Bipartisi Komplit

Pada Gambar 2.6 akan dijelaskan sebagai berikut:

$K_{2,4}$ adalah graf bipartisi komplit dengan $A = \{v_1, v_2\}$ dan $B = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$.

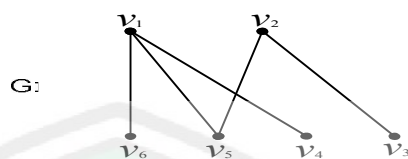
Karena jumlah titik di A dinotasikan dengan m maka $m = 2$. Sedangkan jumlah titik di B dinotasikan dengan n maka $n = 4$. Sedemikian hingga sisi yang menghubungkan titik di A dan titik di B ada $8 = 2 \cdot 4$ sisi.

$K_{5,5}$ adalah graf bipartisi komplit dengan $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $B = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$. Dengan demikian $m = 5$ dan $n = 5$. Maka sisi yang menghubungkan antara titik di A dan titik di B ada 25 sisi.

2.2 Himpunan Bebas (*Independent Set*)

Himpunan titik bebas (*independent set of vertices*) pada suatu graf G adalah himpunan titik-titik dari graf G yang titik satu sama lain dalam himpunan tersebut tidak terhubung langsung (*adjacent*). Kardinalitas maksimum dari himpunan-himpunan titik bebas disebut bilangan kebebasan titik (*vertex independence number*) dan disimbolkan dengan $\beta(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 243).

Perhatikan contoh graf G berikut.



Gambar 2.7 Graf G

Himpunan titik bebas yang mungkin diperoleh dari graf G adalah.

- a. Himpunan titik bebas dengan 1 titik:

$\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_3\}$, $\{v_4\}$, $\{v_5\}$, dan $\{v_6\}$.

- b. Himpunan titik bebas dengan 2 titik:

$\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_2, v_6\}$, $\{v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_4, v_6\}$, dan $\{v_5, v_6\}$.

- c. Himpunan titik bebas dengan 3 titik:

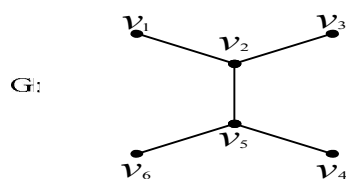
$\{v_3, v_4, v_5\}$, $\{v_3, v_4, v_6\}$, dan $\{v_4, v_5, v_6\}$.

- d. Himpunan titik bebas dengan 4 titik:

$\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$

Terlihat bahwa kardinalitas maksimum dari himpunan-himpunan titik bebas dari graf G adalah 4. Dengan demikian, bilangan kebebasan titik pada graf G adalah $\beta(G) = 4$.

Perhatikan juga contoh berikut.

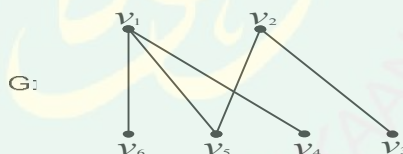


Gambar 2.8 Titik Bebas pada Graf G

Graf G dengan $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ mempunyai himpunan titik bebas yang mungkin antara lain $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_4\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_3, v_6\}, \{v_4, v_6\}, \{v_5, v_6\}, \{v_2, v_4, v_5\}, \{v_3, v_4, v_5\}, \{v_1, v_3, v_5\}, \{v_1, v_4, v_5\}$, dan $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$. Terlihat bahwa kardinalitas maksimum dari himpunan-himpunan titik bebas dari graf G adalah 4. Dengan demikian, bilangan kebebasan titik pada graf G adalah $\beta(G) = 4$.

Himpunan sisi bebas (*independent set of edges*) pada suatu graf G adalah himpunan sisi-sisi dari graf G yang sisi satu sama lain tidak terkait langsung (incident) dengan satu titik yang sama. Kardinalitas maksimum dari himpunan-himpunan sisi bebas disebut bilangan kebebasan sisi (*edge independence number*) dan disimbolkan dengan $\beta_1(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:243).

Perhatikan kembali contoh graf G berikut:



Gambar 2.9 Graf Terhubung G

Himpunan sisi bebas yang mungkin diperoleh dari graf G adalah.

- a. Himpunan sisi bebas dengan 1 sisi:

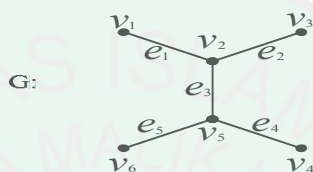
$\{v_1v_4\}, \{v_1v_5\}, \{v_1v_6\}, \{v_2v_3\}$, dan $\{v_2v_5\}$,

- b. Himpunan sisi bebas dengan 2 sisi:

$\{v_1v_6, v_2v_3\}, \{v_1v_6, v_2v_5\}, \{v_1v_5, v_2v_3\}, \{v_1v_4, v_2v_5\}$, dan $\{v_1v_4, v_2v_3\}$

Terlihat bahwa kardinalitas maksimum dari himpunan-himpunan sisi bebas dari graf G adalah 2. Dengan demikian, bilangan kebebasan sisi pada graf G adalah $\beta_1(G) = 2$.

Perhatikan juga contoh berikut



Gambar 2.10 Sisi Bebas pada Graf G

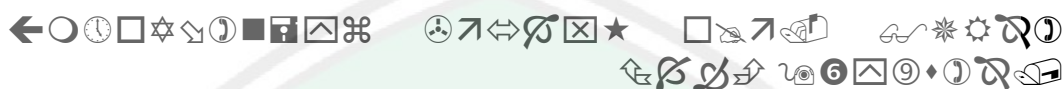
Graf G dengan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, mempunyai himpunan sisi bebas yang mungkin antara lain $\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\}, \{e_2, e_4\}$, dan $\{e_2, e_5\}$. Jadi kardinalitas maksimum pada himpunan sisi bebas adalah 2. Dengan demikian, bilangan kebebasan sisi pada graf G adalah $\beta_1(G) = 2$.

2.3 Kajian Keagamaan

Jika memperhatikan bentuk matahari, bumi, bulan, serta planet-planet yang lain, ternyata semuanya berbentuk bola. Bola merupakan suatu bentuk bangun geometri. Jika memperhatikan bentuk lintasan bumi saat mengelilingi matahari, demikian juga lintasan-lintasan planet lain saat mengelilingi matahari, ternyata lintasannya berbentuk elip. Elip juga merupakan bangun geometri. Geometri merupakan suatu cabang matematika.

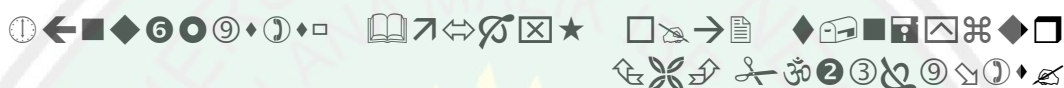
Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Selain itu, alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti,

dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Perhatikan firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 berikut:



Artinya: *Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.*

Demikian juga dalam Al-Qur'an surat Al-Furqan ayat 2



Artinya: *Dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.*

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Albert Einstein tidak membuat rumus $e = mc^2$, dia hanya menemukan dan menyimbolkannya. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika. Lihatlah bagaimana Archimedes menemukan hitungan mengenai volume benda melalui media air. Hukum Archimedes itu sudah ada sebelumnya, dan dialah yang menemukan pertama kali melalui hasil menelaah dan membaca ketetapan Allah.

Dalam Al-Qur'an kata *qadar* dari segi bahasa dapat berarti *ketentuan* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah SWT, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*, tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya

saja. Manusia misalnya, telah ada *qadar yang ditetapkan* Allah SWT baginya. Selaku jenis makhluk hidup ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk, mereka dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah SWT petunjuk dengan kedatangan sekian Rasul untuk membimbing mereka. Akupun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah SWT. Demikian juga Allah SWT telah menetapkan *sistem* dan *qadar* untuk ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang (Shihab, 2003:482).

Dari uraian di atas, penulis mencoba memberikan penjelasan lebih mendalam mengenai *qadar* atau aturan dari berbagai sumber yang bisa dijadikan sebagai dasar atau acuan. Untuk merelansikan kata *qadar* dengan pembahasan skripsi ini, penulis mengambil topik mengenai bagaimana menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit dan graf bipartisi komplit. Bilangan kebebasan ini akan berbentuk rumus yang nilainya bergantung pada banyaknya titik pada graf komplit dan graf bipartisi komplit. Penulis sangat yakin akan menemukan rumus tersebut, karena telah dijamin bahwa segala sesuatu ada *qadarnya*, ada aturannya, dan ada rumusnya.

Penentuan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf yang akan dibahas pada skripsi ini mempunyai nilai penting dalam memahami tafsiran kata *qadar* yang terdapat dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 dan Al-Furqaan ayat 2. Pembahasan skripsi ini akan semakin menguatkan keimanan umat Islam bahwa

memang segala sesuatu telah ada *qadar*nya. *Qadar* dalam pembahasan ini dapat dimaknai bilangan kebebasan titik dan sisi itu sendiri.

Dari ayat surat Al-Qamar ayat 49 terdapat beberapa ulama' yang menafsiri kata *qadar*, diantaranya; *Imam Samarkhan* (As-Samarkandi, 1997:234) menafsiri bahwa Allah SWT menciptakan sesuatu dengan semua tanda-tandanya yang cocok seperti berpasang-pasangan, datang orang-orang musyrik quraisy kepada Rosulullah SAW, dan menentang adanya kepastian *qadar* maka turunlah ayat tersebut. Segala sesuatu yang ada di alam semesta adalah ciptaan Allah SWT dengan segala kebesaran-Nya, makhluk yang berada di langit dan di bumi, dan semua benda yang di langit dan bumi yang terlihat atau tidak telah di ciptakan dengan ketentuan dan tanda-tanda yang cocok/ sesuai agar manusia dapat berfikir dan melebihi kebesaran dan kekuasaan-Nya maka dari itu adanya ketentuan dan kepastian merupakan tanda-tanda ke-esaan yang termasuk dalam rukun iman dan harus diyakini oleh setiap orang. Kepastian itu melengkapi semua hal termasuk ilmu dan pengetahuan.

Imam Baidhowi (Abu Al-Khair dan Al-Baidlawi, 1999: 393) menafsiri bahwa Sesungguhnya Allah SWT menciptakan segala sesuatu dengan ketentuan dan aturan yang teratur dan mendatangkan hikmah atau telah ditentukan di *Lauhul-mahfuzh* sebelum diciptakan. Allah SWT menciptakan segala sesuatu dengan ketentuan-ketentuan dan aturan-aturan yang telah di tentukan dengan berbagai macam hikmah yang bisa didapatkan dari setiap ciptaannya, para malaikat sebagai makhluk yang selalu diperintah untuk melakukan tugas ketentuan itu, karena ketentuan-ketentuan itu telah ditulis di *Lauhul-mahfuzhz*

sebelum diciptakan, seperti hal-hal yang berkaitan dengan usia, rejeki, dan jodoh telah ditentukan dengan jumlah dan bilangan yang teratur dan tertata rapi sesuai dengan ukurannya.

Imam Zamakhsyari (Az-Zamakhsyari, 1999: 432) menafsiri bahwa Telah kami ciptakan segala sesuatu berdasarkan ukuran yang telah ditentukan, dan teratur dengan berbagai hikmah, atau sudah dipastikan ketentuannya di *Lauhul-mahfuzh* yang diketahui sebelum mempunyai bentuk (jadi), yang sudah diketahui hal dan masanya, hanya dengan satu kalimat, seperti kedipan mata hanya dengan keajaiban jadilah, maka untuk mengadakan sesuatu tidak perlu memakai apapun untuk membuatnya. Segala sesuatu yang telah diciptakan oleh Allah SWT itu sudah ada ukurannya dengan ketentuan yang sudah ditentukan terlebih dahulu di *Lauhul-mahfuzh*. Untuk membuat sesuatu Dia tidak pernah menggunakan alat apapun hanya dengan satu kata jadi maka dalam sekejap akan jadi sesuatu yang dikehendaki-Nya, maha besar Allah SWT pencipta segala sesuatu.

Sedangkan pada surat Al-Furqaan ayat 2 beberapa ulama' juga menafsirkan kata *qadar* diantaranya; *Ibnu Katsir* (Umar bin Katsir, 1999: 92) menafsiri bahwa Al-Qur'an diturunkan hanya satu jumlah, terperinci, terpisah-pisah, dan terus menerus ayat demi ayat, hukum demi hukum dan surat demi surat. Dari hal tersebut kita dapat diambil hikmahnya bahwa segala sesuatu itu diciptakan berdasarkan jumlah, contohnya Al-Qur'an yang diturunkan secara berangsur-angsur yaitu, ayat per-ayat, hukum per-hukum hingga sempurna 30 juz, maka patutlah jumlah itu menjadi perhitungan dalam berbagai ilmu pengetahuan.

Imam Baidhowi (Abu Al-Khair dan Al-Baidlawi, 1999: 393) menafsiri bahwa sesungguhnya kami (Allah SWT dan para malaikat) menciptakan sesuatu yang telah ditentukan sehingga menjadi teratur agar mendatangkan kebajikan atau sudah menjadi ketentuan di *Lauhul-mahfuzh*. Dalam penciptaan segala sesuatu, sudah menjadi keharusan ukuran dan jumlah itu harus ditentukan agar tidak ada sesuatu yang merugikan atau malah membahayakan maka disitulah arti pentingnya penjumlahan.



BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini, penulis membahas tentang titik bebas dan sisi bebas pada graf komplit dan graf bipartisi komplit. Langkah-langkah yang dilakukan untuk pembahasan ini adalah :

- a. Menggambar beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit.
- b. Mencari himpunan bebas titik dan himpunan bebas sisi pada beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit.
- c. Menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi dengan menghitung kardinalitas maksimum dari himpunan bebas titik dan himpunan bebas sisi pada beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit.
- d. Mencari pola dari data-data bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit dan graf bipartisi komplit. Pola tersebut kemudian dirumuskan sebagai konjektur.
- e. Menyatakan konjektur sebagai teorema dan membuktikannya.

3.1 Menentukan Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Komplit K_n , dengan $n \in \mathbb{N}$

Graf yang setiap dua titik berbeda dihubungkan oleh tepat satu sisi disebut *graf komplit*. Graf komplit dengan n titik dinotasikan sebagai K_n , dengan n adalah bilangan asli.

1. Graf Komplit K_n , dengan $n = 1$

Graf komplit K_1 dapat digambar sebagai berikut



Gambar 3.1 Graf Komplit K_1

Karena graf komplit K_1 hanya mempunyai 1 titik dan 0 sisi, maka himpunan titik bebas yang mungkin adalah $\{v_1\}$ dan himpunan sisi bebas yang mungkin adalah $\{\}$. Dengan demikian, maka bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_1) = 1$ dan bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_1) = 0$.

2. Graf Komplit K_n , dengan $n = 2$

Graf komplit K_2 dapat digambar sebagai berikut

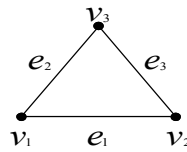


Gambar 3.2 Graf Komplit K_2

Himpunan titik pada graf komplit K_2 adalah $\{v_1, v_2\}$. Graf komplit K_2 hanya mempunyai himpunan titik bebas $\{v_1\}$ dan $\{v_2\}$. Tidak mungkin membuat himpunan titik bebas yang memuat lebih dari satu anggota, karena setiap titik berbeda pada K_2 selalu saling terhubung langsung. Sedangkan himpunan sisi bebas adalah $\{e_1\}$. Dengan demikian, maka bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_1)=1$ dan bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_1) = 1$.

3. Graf Komplit K_n , dengan $n = 3$

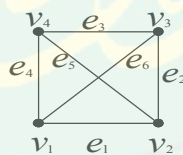
Graf komplit K_2 dapat digambar sebagai berikut:

Gambar 3.3 Graf Komplit K_3

Himpunan titik pada graf komplit K_3 adalah $\{v_1, v_2, v_3\}$. Graf komplit K_3 hanya mempunyai himpunan titik bebas $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, dan $\{v_3\}$. Tidak mungkin membuat himpunan titik bebas yang memuat lebih dari satu anggota, karena setiap titik berbeda pada K_3 selalu saling terhubung langsung. Sedangkan himpunan sisi bebas adalah $\{e_1\}$, $\{e_2\}$, dan $\{e_3\}$. Dengan demikian, maka bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_3) = 1$ dan bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_3) = 1$.

4. Graf Komplit K_n , dengan $n = 4$

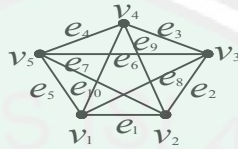
Graf komplit K_4 dapat digambar sebagai berikut

Gambar 3.4 Graf Komplit K_4

Himpunan titik pada graf komplit K_4 adalah $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Graf komplit K_4 hanya mempunyai himpunan titik bebas $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_3\}$, dan $\{v_4\}$. Tidak mungkin membuat himpunan titik bebas yang memuat lebih dari satu anggota, karena setiap titik berbeda pada K_4 selalu saling terhubung langsung. Sedangkan himpunan sisi bebas adalah $\{e_1\}$, $\{e_2\}$, $\{e_3\}$, $\{e_4\}$, $\{e_5\}$, $\{e_6\}$, $\{e_1, e_3\}$, $\{e_2, e_4\}$,

dan $\{e_5, e_6\}$. Dengan demikian, maka bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_3) = 1$ dan bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_3) = 2$.

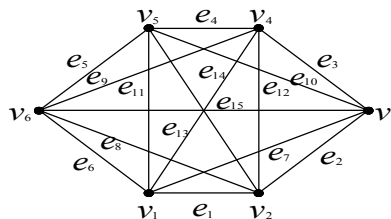
5. Graf Komplit K_n , dengan $n = 5$



Gambar 3.5 Graf Komplit K_5

Graf komplit K_5 mempunyai himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$. Himpunan titik bebas yang mungkin hanya memuat satu titik. Yaitu $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_3\}$, $\{v_4\}$, dan $\{v_5\}$. Tidak mungkin membuat himpunan titik bebas yang memuat lebih dari satu anggota, karena setiap titik berbeda pada K_5 selalu saling terhubung langsung. Himpunan sisi bebas yang mungkin maksimal memuat 2 sisi, yaitu $\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_6\}, \{e_7\}, \{e_8\}, \{e_9\}, \{e_{10}\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_6\}, \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_5\}, \{e_2, e_{10}\}, \{e_3, e_5\}, \{e_3, e_7\}, \{e_4, e_8\}$, dan $\{e_5, e_9\}$. Dengan demikian, maka bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_5) = 1$ dan bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_5) = 2$.

6. Graf Komplit K_n , dengan $n = 6$



Gambar 3.6 Graf Komplit K_6

Graf komplit K_6 mempunyai himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$. Himpunan titik bebas yang mungkin hanya memuat satu titik, yaitu $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}$, dan $\{v_6\}$. Tidak mungkin membuat himpunan titik bebas yang memuat lebih dari satu anggota, karena setiap titik berbeda pada K_6 selalu saling terhubung langsung. Himpunan sisi bebas yang mungkin maksimal memuat 3 sisi, yaitu $\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_6\}, \{e_7\}, \{e_8\}, \{e_9\}, \{e_{10}\}, \{e_{11}\}, \{e_{12}\}, \{e_{13}\}, \{e_{14}\}, \{e_{15}\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\}, \{e_1, e_9\}, \{e_1, e_{10}\}, \{e_1, e_{13}\}, \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_5\}, \{e_2, e_6\}, \{e_2, e_9\}, \{e_2, e_{13}\}, \{e_3, e_5\}, \{e_3, e_6\}, \{e_3, e_8\}, \{e_3, e_{11}\}, \{e_3, e_{13}\}, \{e_4, e_6\}, \{e_4, e_7\}, \{e_4, e_8\}, \{e_4, e_{13}\}, \{e_5, e_7\}, \{e_5, e_{12}\}, \{e_5, e_{13}\}, \{e_6, e_{10}\}, \{e_6, e_{14}\}, \{e_7, e_9\}, \{e_8, e_{10}\}, \{e_{11}, e_{12}\}, \{e_{13}, e_{14}\}, \{e_1 K_6, e_4, e_{15}\}, \{e_2 K_6, e_5, e_{14}\}$, dan $\{e_3 K_6, e_6, e_{13}\}$. Dengan demikian, maka bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_6) = 1$ dan bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_6) = 3$.

7. Graf Komplit K_n , dengan $n = 7$

Misalkan graf komplit K_7 mempunyai himpunan titik

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}.$$

Himpunan titik bebas yang mungkin hanya memuat satu titik, yaitu $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}$, dan $\{v_7\}$. Tidak mungkin membuat himpunan titik bebas yang memuat lebih dari satu anggota, karena setiap titik berbeda pada K_7 selalu saling terhubung langsung. Himpunan sisi bebas yang mungkin maksimal memuat 3 sisi, misalnya $\{v_1 v_2, v_3 v_4, v_5 v_6\}$. Dengan demikian, maka

bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_7) = 1$ dan bilangan kebebasan sisi adalah

$$\beta_1(K_7) = 3.$$

8. Graf Komplit K_n , dengan $n = 8$

Misalkan graf komplit K_8 mempunyai himpunan titik

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}.$$

Himpunan titik bebas yang mungkin hanya memuat satu titik. Tidak mungkin membuat himpunan titik bebas yang memuat lebih dari satu anggota, karena setiap titik berbeda pada K_8 selalu saling terhubung langsung. Himpunan sisi bebas yang mungkin maksimal memuat 4 sisi, misalnya $\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8\}$. Dengan demikian, maka bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_8) = 1$ dan bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_8) = 4$.

9. Graf Komplit K_n , dengan $n = 9$

Misalkan graf komplit K_9 mempunyai himpunan titik

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}.$$

Himpunan titik bebas yang mungkin hanya memuat satu titik. Tidak mungkin membuat himpunan titik bebas yang memuat lebih dari satu anggota, karena setiap titik berbeda pada K_9 selalu saling terhubung langsung. Himpunan sisi bebas yang mungkin maksimal memuat 4 sisi, misalnya $\{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, v_7v_8\}$. Dengan demikian, maka bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_9) = 1$ dan bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_9) = 4$.

Berdasarkan hasil penentuan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit K_n , untuk $n = 1, 2, \dots, 9$, maka dapat dibuat tabel sebagai berikut.

Tabel 3.1 Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Komplit K_n

Graph (K_n)	$\beta(K_n)$	$\beta_1(K_n)$
K_1	1	0
K_2	1	1
K_3	1	1
K_4	1	2
K_5	1	2
K_6	1	3
K_7	1	3
K_8	1	4
K_9	1	4

Untuk menentukan pola, Tabel 3.1 perlu dimodifikasi untuk melihat bilangan kebebasan titik dan sisi, pada indek ganjil dan genap.

Tabel 3.2 Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Komplit K_n dengan Kolom Genap dan Ganjil.

K_n , dengan n ganjil	β	β_1	K_n , dengan n genap	β	β_1
K_1	1	0	K_2	1	1
K_3	1	1	K_4	1	2

K_5	1	2	K_6	1	3
K_7	1	3	K_8	1	4
K_9	1	4	K_{10}	1	5
...	...	...	...	...	...
K_n	1	$\frac{(n-1)}{2}$	K_n	1	$\frac{n-1}{2}$

Berdasarkan Tabel 3.2, maka setelah melihat pola diperoleh konjektur sebagai berikut.

Misalkan K_n adalah graf komplit dengan n titik, maka bilangan kebebasan titik dan sisi masing-masing adalah

$$\beta(K_n) = 1$$

dan

$$\beta_1(K_n) = \begin{cases} \frac{(n-1)}{2}, & \text{dengan } n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}, & \text{dengan } n \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan demikian, maka dapat dirumuskan teorema berikut beserta buktinya.

Teorema

Jika K_n adalah graf komplit, maka

$$\beta(K_n) = 1$$

dan

$$\beta_1(K_n) = \begin{cases} \frac{(n-1)}{2}, & \text{dengan } n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}, & \text{dengan } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan himpunan titik K_n adalah $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Himpunan titik bebas yang mungkin dibuat pada graf K_n hanya memuat satu titik. Tidak mungkin membuat himpunan titik bebas yang memuat lebih dari satu anggota, karena setiap titik berbeda pada K_n selalu saling terhubung langsung. Dengan demikian, maka $\beta(K_n) = 1$.

Pada K_n setiap dua titik berbeda saling dihubungkan oleh satu sisi atau dengan kata lain, satu sisi pasti mempunyai dua titik berbeda sebagai titik ujung.

Jika n ganjil, maka dapat dibuat himpunan sisi bebas maksimal berikut

$$A = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, \dots, v_{n-2}v_{n-1}\}.$$

Dengan melihat indeks titik di atas, diperoleh barisan

$$1, 3, 5, \dots, n-2 \text{ atau } 2, 4, 6, \dots, n-1$$

Ambil salah satu barisan, misalnya $2, 4, 6, \dots, n-1$

Maka barisan ini adalah barisan aritmatika dengan suku awal $a=2$ dan beda $b=2$.

Jadi diperoleh rumus umum suku ke n sebagai berikut

$$\begin{aligned} U_m &= a + (m-1)b \\ &= 2 + (m-1)2 \\ &= 2m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Diketahui } U_m &= n-1 \\ 2m &= n-1 \\ m &= \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

Jadi banyak suku pada barisan $2, 4, 6, \dots, n-1$ adalah $\frac{n-1}{2}$ suku

A memuat anggota sebanyak $\frac{n-1}{2}$ sisi. Jadi $\beta_1(K_n) = \frac{n-1}{2}$.

Jika n genap, maka dapat dibuat himpunan sisi bebas maksimal berikut

$$B = \{v_1v_2, v_3v_4, v_5v_6, \dots, v_{n-1}v_n\}.$$

Dengan melihat indeks titik di atas, diperoleh barisan

1, 3, 5, ..., n-1 atau 2, 4, 6, ..., n

Ambil salah satu barisan, misalnya 2, 4, 6, ..., n

Maka barisan ini adalah barisan aritmatika dengan suku awal $a=2$ dan beda $b=2$. Jadi diperoleh rumus umum suku ke n sebagai berikut

$$\begin{aligned}U_m &= a + (m-1)b \\&= 2 + (m-1)2 \\&= 2m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Diketahui } U_m &= n \\2m &= n \\m &= \frac{n}{2}\end{aligned}$$

Jadi banyak suku pada barisan 2, 4, 6, ..., n-1 adalah $\frac{n}{2}$ suku B memuat anggota sebanyak $\frac{n}{2}$ sisi. Jadi $\beta_1(K_n) = \frac{n}{2}$.

Dengan demikian, disimpulkan

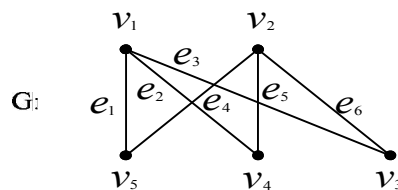
$$\beta_1(K_n) = \begin{cases} \frac{(n-1)}{2}, & \text{dengan } n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}, & \text{dengan } n \text{ genap} \end{cases}$$

3.2 Menentukan Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$, dengan $m, n \in \mathbb{N}$ dan $m < n$.

Berikut ini akan dibahas contoh dari graph bipartisi komplit $(K_{m,n})$.

1. Graph Bipartisi Komplit $K_{2,3}$

Graph bipartisi komplit $K_{2,3}$, digambarkan sebagai berikut:



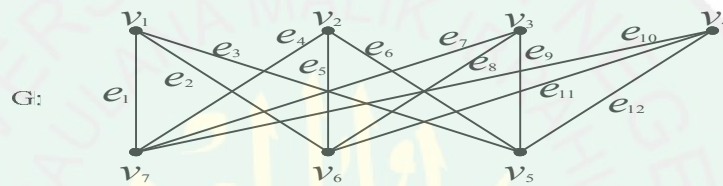
Gambar 3.7 Graph Bipartisi Komplit $K_{2,3}$

Himpunan sisi bebas dengan kardinalitas maksimum yang dapat dibuat adalah

$\{e_1, e_6\}, \{e_1, e_7\}, \{e_1, e_8\}, \{e_2, e_5\}, \{e_2, e_7\}, \{e_2, e_8\}, \{e_3, e_5\}, \{e_3, e_6\}, \{e_3, e_8\},$
 $\{e_4, e_5\},$ dan $\{e_4, e_7\}$. Jadi bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_{2,4}) = 2$.

3. Graph Bipartisi Komplit $K_{3,4}$

Graph bipartisi komplit $K_{3,4}$, digambarkan sebagai berikut:

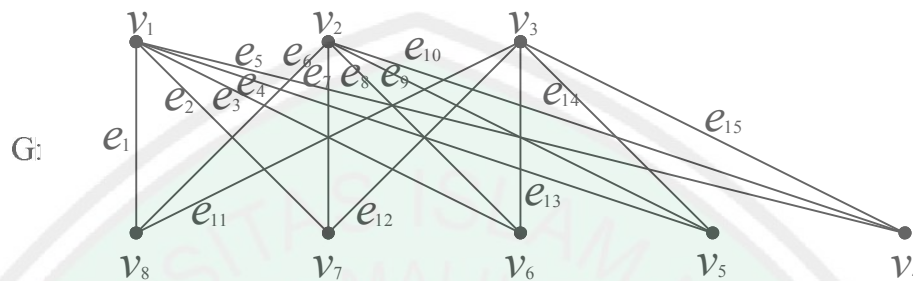


Gambar 3.9 Graph Bipartisi Komplit $K_{3,4}$

Misalkan $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $B = \{v_5, v_6, v_7\}$ merupakan himpunan partisi titik pada graph bipartisi komplit. Himpunan titik bebas yang dapat dibuat adalah $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_7\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\},$
 $\{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_6, v_7\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$ dan $\{v_5, v_6, v_7\}$. Himpunan $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ adalah himpunan titik bebas dengan kardinalitas maksimum karena masing-masing titik pada A tidak saling terhubung langsung. Jadi bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_{3,4}) = 4$. Himpunan sisi yang diketahui adalah $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$. Himpunan sisi bebas dengan kardinalitas maksimum yang dapat dibuat adalah $\{e_1, e_8, e_9\}, \{e_2, e_6\}, \{e_7, e_{11}\},$
 $\{e_3\}, \{e_{10}\}, \{e_2, e_{10}\}, \{e_1, e_8, e_{12}\}, \{e_1, e_9, e_{11}\}, \{e_2, e_7, e_{12}\}, \{e_2, e_6, e_{10}\},$
 $\{e_2, e_8, e_7\}, \{e_3, e_7, e_{11}\}, \{e_2, e_4, e_{12}\},$ dan $\{e_4, e_8, e_{12}\}$. Jadi bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_{3,4}) = 3$.

4. Graph Bipartisi Komplit $K_{3,5}$

Graph bipartisi komplit ($K_{3,5}$), digambarkan sebagai berikut:



Gamabr 3.10 Graph Bipartisi Komplit $K_{3,5}$

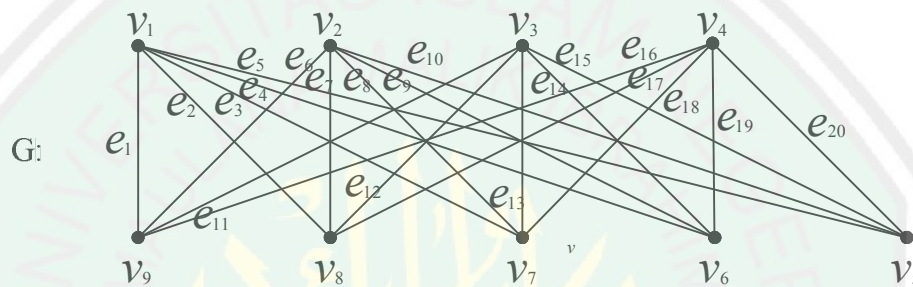
Misalkan $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan $B = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ merupakan himpunan partisi titik pada graph bipartisi komplit. Himpunan titik bebas yang dapat dibuat adalah $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_7\}, \{v_8\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}, \{v_4, v_7\}, \{v_4, v_8\}, \{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_5, v_8\}, \{v_6, v_7\}, \{v_6, v_8\}, \{v_7, v_8\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_4, v_5, v_6\}, \{v_4, v_5, v_7\}, \{v_4, v_5, v_8\}, \{v_5, v_6, v_7\}, \{v_5, v_6, v_8\}, \{v_6, v_7, v_8\}$, dan $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Himpunan $B = \{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ adalah himpunan titik bebas dengan kardinalitas maksimum karena masing-masing titik pada B tidak saling terhubung langsung. Jadi bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_{3,5}) = 5$.

Himpunan sisi yang diketahui adalah $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$. Himpunan sisi bebas dengan kardinalitas maksimum yang dapat dibuat adalah $\{e_1, e_7\}, \{e_1, e_8\}, \{e_1, e_9\}, \{e_1, e_{10}\}, \{e_1, e_{12}\}, \{e_1, e_{13}\}, \{e_1, e_{14}\}, \{e_1, e_{15}\}, \{e_2, e_8\}, \{e_2, e_9\}, \{e_2, e_{10}\}, \{e_2, e_{13}\}, \{e_2, e_{14}\}, \{e_2, e_{15}\}, \{e_3, e_9\}, \{e_3, e_{10}\}, \{e_3, e_{14}\}, \{e_3, e_{15}\}, \{e_4, e_9\}, \{e_4, e_{10}\}, \{e_4, e_{14}\}, \{e_4, e_{15}\}, \{e_7, e_{13}\}, \{e_7, e_{14}\}, \{e_7, e_{15}\}, \{e_8, e_{14}\}, \{e_8, e_{15}\}, \{e_9, e_{15}\}, \{e_1, e_7, e_{13}\}, \{e_2, e_8, e_{14}\},$

$\{e_3, e_9, e_{13}\}, \{e_4, e_{10}\}, \{e_8, e_{12}\}, \{e_9, e_7, e_{11}\}, \{e_3, e_9, e_{11}\}, \{e_9, e_{11}, e_{13}\},$ dan $\{e_3, e_7, e_{13}\}$. Jadi bilangan kebebasan sisi adalah $\beta_1(K_{3,5}) = 3$.

5. Graph Bipartisi Komplit $K_{4,5}$

Graph bipartisi komplit $K_{4,5}$, digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graph Bipartisi Komplit $K_{4,5}$

$A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $B = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ merupakan himpunan partisi titik pada graph bipartisi komplit. Himpunan titik bebas yang dapat terjadi adalah

$\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_5\}, \{v_6\}, \{v_7\}, \{v_8\}, \{v_9\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\},$
 $\{v_1, v_2, v_3\}, \{v_1, v_2, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$
 $\{v_5, v_6\}, \{v_5, v_7\}, \{v_5, v_8\}, \{v_5, v_9\}, \{v_6, v_7\}, \{v_6, v_8\}, \{v_6, v_9\}, \{v_7, v_8\},$
 $\{v_7, v_9\}, \{v_8, v_9\}, \{v_5, v_6, v_7\}, \{v_5, v_6, v_8\}, \{v_5, v_6, v_9\}, \{v_5, v_7, v_8\}, \{v_5, v_7, v_9\},$
 $\{v_5, v_8, v_9\}, \{v_6, v_7, v_8\}, \text{ dan } \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}.$ Himpunan $B = \{v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$

adalah himpunan titik bebas dengan kardinalitas maksimum karena masing-masing titik pada B tidak saling terhubung langsung. Jadi bilangan kebebasan titik adalah $\beta(K_{4,5}) = 5$. Himpunan sisi yang diketahui adalah

$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}\}.$

Himpunan sisi bebas dengan kardinalitas maksimum yang dapat dibuat adalah

$\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_6\}, \{e_7\}, \{e_8\}, \{e_9\}, \{e_{10}\}, \{e_{11}\}, \{e_{12}\}, \{e_{13}\}, \{e_{14}\}, \{e_{15}\},$
 $\{e_{16}\}, \{e_{17}\}, \{e_{18}\}, \{e_{19}\}, \{e_{20}\}, \{e_1, e_7, e_{13}, e_{19}\}, \{e_2, e_8, e_{14}, e_{20}\}, \{e_3, e_9, e_{15}, e_{18}\},$
 $\{e_4, e_{10}, e_{16}, e_{20}\}, \{e_5, e_{11}, e_{17}, e_{18}\},$ dan $\{e_6, e_{12}, e_{19}\}$. Jadi bilangan kebebasan sisi
 adalah $\beta_1(K_{4,5}) = 4$.

Berdasarkan hasil penentuan bilangan kebebasan titik dan sisi pada beberapa contoh graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, maka dapat dibuat tabel sebagai berikut.

Tabel 3.3 Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit $K_{m,n}$ dengan $m \leq n$.

Graph $K_{m,n}$	$\beta(K_{m,n})$	$\beta_1(K_{m,n})$
$K_{2,3}$	3	2
$K_{2,4}$	4	2
$K_{3,4}$	4	3
$K_{3,5}$	5	3
$K_{4,5}$	5	4
$K_{m,n}$	N	m

Berdasarkan Tabel 3.3, maka setelah melihat pola diperoleh konjektur sebagai berikut.

Misalkan $K_{m,n}$ adalah graf bipartisi komplit dengan $m \leq n$, maka bilangan kebebasan titik dan sisi masing-masing adalah

$$\beta(K_{m,n}) = n$$

dan

$$\beta_1(K_{m,n}) = m.$$

Dengan demikian, maka dapat dirumuskan teorema berikut beserta buktinya.

Teorema

Jika $K_{m,n}$ adalah graf bipartisi komplit, maka

$$\beta(K_{m,n}) = n$$

dan

$$\beta_1(K_{m,n}) = m.$$

Bukti:

Misalkan himpunan titik $K_{m,n}$ dipartisi menjadi

$$A = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

dan

$$B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$$

dengan $m \leq n$.

Karena $K_{m,n}$ adalah graf bipartisi komplit maka masing-masing titik di lain partisi akan saling terhubung langsung dan titik dalam satu partisi tidak saling terhubung langsung. Dengan demikian, karena $m \leq n$, maka $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ adalah himpunan titik bebas terbesar yang dapat dibuat. Jadi $\beta(K_{m,n}) = n$.

Salah satu himpunan sisi bebas terbesar yang dapat dibuat adalah

$$S = \{v_1u_1, v_2u_2, v_3u_3, \dots, v_mu_m\}, \text{ karena } m \leq n.$$

Dengan demikian, diperoleh bahwa $\beta_1(K_{m,n}) = m$.

3.3 Tinjauan Agama Berdasarkan Hasil Pembahasan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka dapat diperoleh rumus bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit dan bipartisi komplit sebagai berikut.

3. Jika K_n adalah graf komplit, maka rumus bilangan kebebasan titik dan sisi masing-masing adalah

$$\beta(K_n) = 1$$

dan

$$\beta_1(K_n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{dengan } n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}, & \text{dengan } n \text{ genap} \end{cases}$$

4. Jika $K_{m,n}$ adalah graf bipartisi komplit, maka rumus bilangan kebebasan titik dan sisi masing-masing adalah

$$\beta(K_{m,n}) = n$$

dan

$$\beta_1(K_{m,n}) = m.$$

Dari beberapa rumus-rumus di atas, jika direlevansikan dengan kajian agama adalah sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa segala sesuatu yang

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

ada di dunia ini diciptakan oleh Allah SWT sudah ada ukurannya atau ada rumusnya dan ditata dengan sedemikian rapi dan sempurna, sebagaimana yang tertera pada surat Al-Qamar ayat 49:

Artinya: “Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”
(Q.S. Al-Qamar: 49).

Juga dalam surat Al-Furqaan ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ

فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقْدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: “Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya),

dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (Q.S. Al-Furqaan:2).

Dari penafsiran beberapa para ulama’ pada ayat-ayat di atas terdapat tafsir yang relevan untuk dijadikan sebagai acuan atau dasar pada skripsi ini. Terutama pada tafsir Imam Baidhowi yang menjelaskan sesungguhnya Allah SWT dalam menciptakan sesuatu yang telah ditentukan sehingga menjadi teratur agar mendatangkan kebajikan atau sudah menjadi ketentuan di *Lauhul Mahfud*.

Dari penafsiran di atas kata *qadar* dapat direlevansikan antara konsep bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf dengan Al-Qur’an (surat Al-Qamar ayat 49 dan Al-Furqaan ayat 2) adalah bahwa berdasarkan ayat di atas, sesuai penafsiran Alwi Shihab (*Tafsir Al-Misbah*, 2002:482) yakni *ketentuan dan sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu yang ada di muka bumi ini*, sehingga dengan kekuasaan-Nya maka semua akan terlihat rapi, teratur, dan sempurna. Sama halnya dengan masalah bilangan kebebasan titik dan sisi yang teratur dengan rumus yang telah diperoleh dalam pembahasan skripsi ini.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa langkah-langkah menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit K_n dan graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ adalah sebagai berikut.

- f. Menggambar beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit.
- g. Mencari himpunan bebas titik dan himpunan bebas sisi pada beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit.
- h. Menentukan bilangan kebebasan titik dan sisi dengan menghitung kardinalitas maksimum dari himpunan bebas titik dan himpunan bebas sisi pada beberapa contoh graf komplit dan graf bipartisi komplit.
- i. Mencari pola dari data-data bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit dan graf bipartisi komplit. Pola tersebut kemudian dirumuskan sebagai konjektur.
- j. Menyatakan konjektur sebagai teorema dan membuktikannya.

Berdasarkan langkah-langkah tersebut diperoleh bahwa:

5. Jika K_n adalah graf komplit, maka rumus bilangan kebebasan titik dan sisi masing-masing adalah

$$\beta(K_n) = 1$$

dan

$$6. \quad \beta_1(K_n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{dengan } n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}, & \text{dengan } n \text{ genap} \end{cases}$$

7. Jika $K_{m,n}$ adalah graf bipartisi komplit, dengan $m \leq n$ dan $m, n \in \mathbb{N}$, maka rumus bilangan kebebasan titik dan sisi masing-masing adalah

$$\beta(K_{m,n}) = n$$

dan

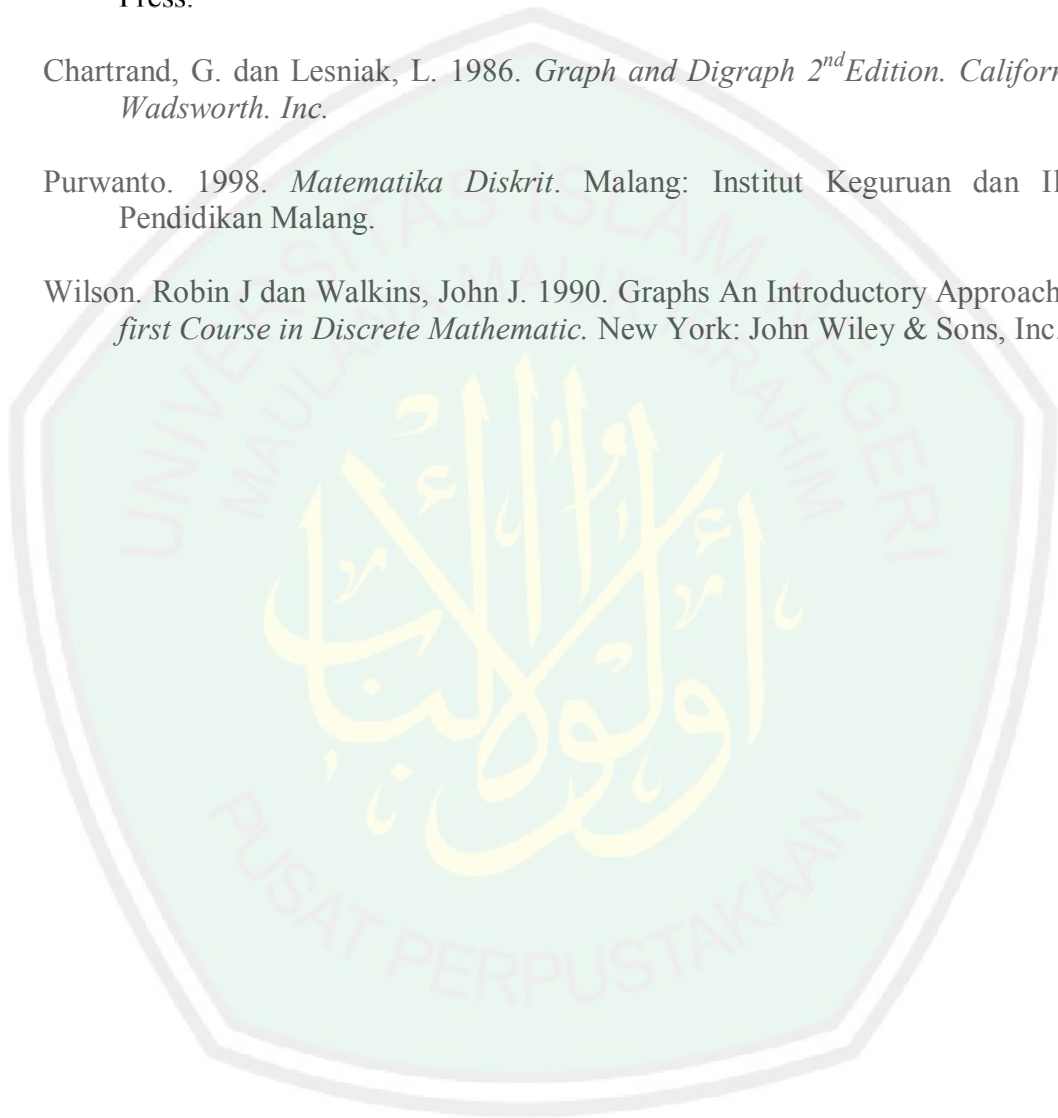
$$\beta_1(K_{m,n}) = m.$$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan bilangan kebebasan titik dan sisi pada graf komplit K_n dan graf bipartisi komplit $K_{m,n}$. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah bilangan kebebasan titik pada graf-graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth. Inc.
- Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan Malang.
- Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.





UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
DEPARTEMEN AGAMA RI
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Denok Sanggrahati Ika Puji Handayani
NIM : 05510042
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Menentukan Bilangan Kebebasan Titik dan Sisi pada Graf
Komplit (K_n) dan Graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$),
dengan m,n
Pembimbing I : Hairur Rahman, S.Pd, M.Si
Pembimbing II : Abdussakir, M.Pd

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	2 Maret 2009	Konsultasi Judul	1.	
2	17 April 2009	Konsultasi BAB I dan II		2.
3	11 Mei 2009	Revisi BAB I dan II	3.	
4	8 Agustus 2009	Konsultasi BAB III		4.
5	1 Oktober 2009	Revisi BAB III	5.	
6	27 Juli 2009	Konsultasi Keagamaan		6.
7	5 Oktober 2009	Revisi Keagamaan	7.	
8	6 Oktober 2009	ACC Keagamaan		8.
9	6 Oktober 2009	Konsultasi Keseluruhan	9.	
10	6 Oktober 2009	ACC Keseluruhan		10.

Malang, 06 Oktober 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001