SIFAT RANTAI NAIK PADA MODUL r-NOETHERIAN SERTA KETERKAITAN MODUL r-NOETHERIAN DENGAN MODUL NOETHERIAN DAN MODUL HAMPIR NOETHERIAN

SKRIPSI

OLEH
QURRATUL AINI AZ-ZAKIYAH
NIM. 200601110100

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT RANTAI NAIK PADA MODUL r-NOETHERIAN SERTA KETERKAITAN MODUL r-NOETHERIAN DENGAN MODUL NOETHERIAN DAN MODUL HAMPIR NOETHERIAN

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Qurratul Aini Az-Zakiyah
NIM. 200601110100

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT RANTAI NAIK PADA MODUL r-NOETHERIAN SERTA KETERKAITAN MODUL r-NOETHERIAN DENGAN MODUL NOETHERIAN DAN MODUL HAMPIR NOETHERIAN

SKRIPSI

Oleh:
Qurratul Aini Az-Zakiyah
NIM. 200601110100

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 19 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Intan Nisfulaila, M.Si.	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
NIP. 19900215 201903 2 015	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT RANTAI NAIK PADA MODUL r-NOETHERIAN SERTA KETERKAITAN MODUL r-NOETHERIAN DENGAN MODUL NOETHERIAN DAN MODUL HAMPIR NOETHERIAN

SKRIPSI

Oleh:
Qurratul Aini Az-Zakiyah
NIM. 200601110100

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S. Mat)
Tanggal 26 Juni 2024

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M. Si., Ph. D.	....
Anggota Penguji I	: Muhammad Khudzaifah, M. Si.	....
Anggota Penguji II	: Intan Nisfulaila, M. Si.	....
Anggota Penguji III	: Mohammad Nafie Jauhari, M. Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan dibawah ini

Nama : Qurratul Aini Az-Zakiyah

NIM : 200601110100

Program Studi : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat Rantai Naik pada Modul r-Noetherian serta Keterkaitan Modul r-Noetherian dengan Modul Noetherian dan Modul Hampir Noetherian

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya akan bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Juni 2024

Qurratul Aini Az-Zakiyah
NIM.200601110100

MOTO

“Rasakan setiap proses yang kamu lalui dalam hidupmu, agar kamu mengetahui betapa hebatnya kamu telah berjuang hingga detik ini”

“Hidup bukan tentang dunia saja maka perbaikilah dirimu untuk menjadi pribadi yang lebih baik walaupun kamu mempunyai segudang dosa dalam hidup”

“Letakan aku dalam hatimu, maka aku akan meletakanmu dalam hatiku”
(QS. Al-Baqarah:152)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda tercinta Bapak Jupni dan Ibu Tatik Rahayu yang senantiasa memberikan dukungan baik moral maupun material, serta selalu memberikan do'a yang setiap hari untuk saya sampai pada hari ini saya dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi, kasih sayang yang tidak dapat terbalaskan semoga Allah SWT selalu memberikan kesehatan kepada beliau.

Adikku tercinta, Azka Mar’atul Isnain. Terima kasih sudah ikut serta dalam proses penulis menempuh pendidikan selama ini, terima kasih atas semangat, doa dan cinta yang selalu diberikan kepada penulis. Tumbuhlah menjadi versi paling hebat, adikku.

Dan yang terakhir, terima kasih untuk diri sendiri, karena telah mampu berusaha keras dan berjuang sejauh ini. Mampu mengendalikan diri dan tak pernah memutuskan menyerah sesulit apapun proses penyusunan skripsi ini dengan menyelesaikan sebaik dan semaksimal mungkin, ini merupakan pencapaian yang patut dibanggakan untuk diri sendiri.

KATA PENGANTAR

Assalaamu'alaikum Warrahmatullaahi Wabarakaatuh

Alhamdulillaahirobbil'alamiin, penulis ucapkan kepada Allah SWT atas rahmat dan pertolongan-Nya, sehingga penyusunan proposal skripsi yang berjudul "Sifat Rantai Naik pada Modul r-Noetherian serta Keterkaitan Modul r-Noetherian dengan Modul Noetherian dan Modul Hampir Noetherian" ini dapat terselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam kami haturkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW yang telah memberikan uswatun hasanah kepada kita dalam menjalankan kehidupan ini. Semoga kita tergolong orang-orang yang beriman dan mendapatkan syafaatnya di hari akhir kelak, Amiin.

Penulis sadar bahwa terdapat beberapa pihak yang membantu dalam proses penyelesaian proposal skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ibu Intan Nisfulaila, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, inspirasi, dan motivasi dengan penuh kesabaran kepada penulis selama mengerjakan proposal skripsi ini.
5. Bapak Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang berkenan membimbing penulis dalam kepenulisan dan kajian topik Al-Quran pada penyusunan proposal skripsi ini.
6. Prof. Dr. H. Turmudi, M. Si., Ph. D., selaku ketua penguji dalam ujian skripsi saya yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
7. Muhammad Khudzaifah, M. Si, selaku anggota penguji I dalam ujian skripsi saya yang telah banyak memberikan arahan serta ilmu kepada penulis.
8. Ibu Dewi Ismiarti, M.Si., selaku dosen program studi matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan arahan, masukan, bimbingan, dan motivasi dalam pengerjaan proposal skripsi.

9. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan dukungan dan saran pada penyusunan proposal skripsi ini.
10. Bapak Jupni S. Ag., S. Pd., dan Ibu Tatik Rahayu serta seluruh keluarga yang telah mendoakan sekaligus memberi dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
11. Seluruh mahasiswa angkatan 2020 Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah berproses bersama selama penulis menempuh pendidikan di Universitas ini.
12. Pihak-pihak lain yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Berkah dan rida Allah penyusunan proposal skripsi ini dapat terselesaikan. Penulis menyadari bahwa penulisan proposal skripsi ini jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis dengan rendah hati memohon saran dan kritik yang membangun dari pembaca. Penulis juga berharap semoga penelitian ini dapat bermanfaat untuk penelitian selanjutnya dan mohon maaf atas segala kekurangan.

Wassalaamu'alaikum Warrahmatullaahi Wabarakaatuh

Malang, 8 Maret 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{Q}$	: Himpunan Bilangan Rasional
$\mathbb{C}$	: Himpunan Bilangan Komplek
$\mathbb{R}$	: Himpunan Bilangan Real
$\mathbb{Z}$	: Himpunan Bilangan Bulat
acc	: *Ascending Chain Condition*

ABSTRAK

Az-Zakiyah, Qurratul Aini. 2024. **Sifat Rantai Naik pada Modul r-Noetherian serta Keterkaitan Modul r-Noetherian dengan Modul Noetherian dan Modul Hampir Noetherian.** Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (1) Intan Nisfulaila, M. si, (2) Mohammad Nafie Jauhari, M. Si.

Kata Kunci: rantai naik, keterkaitan, modul r-Noetherian, modul Noetherian, modul hampir Noetherian.

Modul merupakan struktur aljabar yang dibentuk dari grup Abelian. Modul atas suatu ring adalah grup abelian yang dilengkapi perkalian dengan skalar dari ring yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Suatu modul merupakan modul Noetherian jika modul memenuhi kondisi rantai naik *(ascending chain condition)* atas submodulnya. Sebuah R-modul M disebut modul hampir Noetherian jika setiap submodul sejati di M dibangkitkan secara berhingga. Terdapat sebuah kelas baru yakni Modul r-Noetherian. Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara berhingga. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji sifat rantai naik pada modul r-Noethetian serta keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kualitatif. Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur. Adapun tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu diawali dengan melengkapi pembuktian lemma yang berkaitan rantai naik pada Modul r-Noetherian Selanjutnya, Melengkapi pembuktian proposisi mengenai keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian. Proses pembuktiannya akan terdiri dari dua tahap, yang pertama jika M adalah modul Noetherian, maka M adalah modul hampir Noetherian. Kedua, jika M adalah modul hampir Noetherian, maka M adalah modul r-Noetherian. Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan diperoleh bahwa Sifat rantai naik pada modul r-Noetherian adalah setiap barisan rantai naik dari r-submodul pada modul r-Noetherian akan berhenti pada suatu langkah berhingga. Selanjutnya, keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian adalah saling subset, yaitu $\text{Modul Noetherian} \subseteq \text{Modul Hampir Noetherian} \subseteq \text{Modul r-Noetherian}$.

ABSTRACT

Az-Zakiyah, Qurratul Aini. 2024. **Ascending Chain Condition of r-Noetherian Modules and the Relation of r-Noetherian Modules to Noetherian Modules and Almost Noetherian Modules.** Undergraduate Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Intan Nisfulaila, M. si, (2) Mohammad Nafie Jauhari, M. Si.

Keywords: ascending chain, linkage, r-Noetherian module, Noetherian module, almost Noetherian module.

Modules are algebraic structures formed from Abelian groups. A module over a ring is an abelian group equipped with multiplication by a scalar from the ring that satisfies certain conditions. A module is a Noetherian module if it satisfies the ascending chain condition on its submodules. An R -module M is called an almost Noetherian module if every true submodule in M is finitely generated. There is a new class of r-Noetherian modules. Suppose R is a ring and M is an R-module, M is said to be an r-Noetherian module if every r-submodule of M is finitely generated. This research aims to study the ascending chain property of r-Noetherian module and the relation of r-Noetherian module with Noetherian module and almost Noetherian module.

The method used in this research is qualitative. This research uses a literature study approach. The stages carried out in this study are starting with completing the proof of the lemma relating the ascending chain on the r-Noetherian Module Furthermore, completing the proof of the proposition regarding the relationship of the r-Noetherian module with the Noetherian module and the almost Noetherian module. The proof process will consist of two stages, first if M is a Noetherian module, then M is an almost Noetherian module. Second, if M is an almost Noetherian module, then M is an r-Noetherian module. Based on the results of the research that has been done, it is obtained that the nature of the ascending chain on the r-Noetherian module is that every ascending chain line of r-submodules on the r-Noetherian module will stop at a finite step. Furthermore, the relationship of r-Noetherian module with Noetherian module and almost Noetherian module is a mutual subset, Noetherian Module ⊆ Almost Noetherian Module ⊆ r-Noetherian Module.

مستخلص البحث

الزكية، قرة العيني. ٢٠٢٤. **خصائص السلسلة الصاعدة في وحدة الحلقة النويثريةوربط وحدبهامع وحدة النويثرية**. اطروحه. برنامج دراسة الرياضيات،كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم مالنج الإسلامية الحكومية. مشرف (١) إنتان نصف اللية، الماجستير (٢) محمد نافع جوهري، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: سلسلة ، صلة ، وحدة الحلقة النويثرية، وحدة النويثرية، وحدة شبةالنويثرية.

الوحدات النمطية هي بنى جبرية مكوَّنة من مجموعات أبليان وحلقات كمعدلات قياسية. الوحدة النمطية على حلقة ما هي مجموعة أبيلية مزودة بعملية ضرب في كمية قياسية من الحلقة تستوفي شروطًا معينة. تكون الوحدة وحدة نمطية نوثيرية إذا كانت تستوفي شرط السلسلة التصاعدية على وحداتها الفرعية. تَسمَّى وحدة-R وحدةM وحدة نوثيرية تقريبا إذا كانت كل وحدة فرعية حقيقية في M مولّدة بشكل نهائي. هناك فئة جديدة من الوحدات نوثيرية. لنفترض أنR حلقة و M وحدة نمطيةR ، ويقال إنM وحدة نمطيةR نوثرية إذا كانت كل وحدة فرعية فيM متولدة بشكل منته. الخاصية التي ستتم دراستها هي خاصية السلسلة التصاعدية للوحدات نوثرية. علاوة على ذلك، ستتم دراسة العلاقة بين وحدات الحلقة النويثريةمع الوحدات النوثرية والوحدات شبه النوثرية.

المنهج المستخدم في هذا البحث هو المنهج النوعي. يستخدم هذا البحث منهج الدراسة الأدبية. المراحل التي تم تنفيذها في هذه الدراسة هي البدء بإكمال برهان النظرية المتعلقة بالسلسلة الصاعدة على الوحدة النوثرية ص-نوثريان علاوة على ذلك، إكمال برهان الفرضية المتعلقة بعلاقة الوحدة النوثرية ص-نوثريان بالوحدة النوثرية والوحدة شبه النوثرية. ستتألف عملية الإثبات من مرحلتين، أولًا إذا كانتM وحدة نوثيرية، فإنM وحدة نوثيرية تقريبا. ثانيا، إذا كانتM وحدة نوثرية تقريبا، فإنM وحدة نوثرية تقريبا، فإنM وحدة نوثرية ص. استنادا إلى نتائج البحث الذي تم إجراؤه، تم التوصل إلى أن طبيعة السلسلة الصاعدة على الوحدة نويثيرية هي أن كل خط سلسلة صاعد من الوحدات الفرعية-r نويثيرية على الوحدة نويثيرية سيتوقف عند خطوة منتهية. علاوةً على ذلك، فإن اتصال الوحدة الحلقة النويثريةبالوحدة النوثرية والوحدة شبه النوثرية هو وحدة فرعية متبادلة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ring termasuk dalam struktur aljabar paling sederhana setelah grup. Ring adalah suatu himpunan takkosong yang dilengkapi dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian yang memenuhi aksioma-aksioma ring. Ring yang memenuhi sifat komutatif terhadap perkalian disebut ring komutatif (Wahyuni, Wijayanti et al., 2021). Sebarang ring R paling tidak memiliki ideal $\{0\}$ dan R itu sendiri. Dengan kata lain, suatu ring mempunyai lebih dari satu ideal sehingga akan ada rantai dari ideal-idealnya yaitu $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots \subseteq I_i$ untuk setiap i adalah ideal. Salah satu rantai ideal adalah kondisi rantai naik. Kondisi rantai naik sangat penting dalam teori ideal, yaitu suatu ring memenuhi kondisi rantai naik jika rantai idealnya berhingga (Ghoffari & Gayatri, 2023).

Ring Noetherian merupakan ring yang didefinisikan berdasarkan himpunan ideal berhingga dari suatu ring (Wardhana, 2022). Ideal dari suatu ring diperumum ke dalam struktur aljabar yang dikenal dengan modul. Modul atas ring merupakan bentuk perumuman dari ruang vektor atas lapangan. Ruang vektor atas lapangan adalah suatu himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang merupakan vektor bersama dengan dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian skalar, yang dimana skalar merupakan unsur dari lapangan (Tambayong, Titaley et al., 2019).

Modul atas ring R adalah suatu grup abelian terhadap penjumlahan bersamaan dengan pemetaannya yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Ring R disebut dengan ring dasar dari modul tersebut (Martasari, Arnawa et al., 2020). Diberikan M

merupakan himpunan dengan dua operasi dan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan yang elemennya berupa skalar, maka dinotasikan dengan $M: R$-modul yakni modul M atas ring R (Wahyuni, Wijayanti et al., 2021).

Diketahui bahwa R sebagai ring dengan elemen satuan yang memenuhi sifat rantai naik untuk ideal-ideal di dalamnya. Apabila dipandang sebagai R-modul, setiap ideal di ring R dapat dipandang dengan submodul dari R. Dengan demikian, sifat rantai naik juga berlaku pada submodul-submodul di R. Hal inilah yang melatar belakangi pendefinisian sifat rantai naik untuk suatu R-modul M yang selanjutanya melatarbelakangi munculnya definisi modul noetherian (Wahyuni et al., 2021).

Suatu modul dikatakan sebagai modul Noetherian apabila modul tersebut memenuhi kondisi rantai naik (*ascending chain condition*) atas submodul submodulnya. Rantai naik pada setiap submodul-submodulnya yang akhirnya akan konstan. Konsep mengenai modul Noetherian sendiri dikemukakan oleh Emmy Noether terkait kondisi maksimal yang dapat diformulasikan ke dalam suatu kondisi rantai. Modul M disebut R-modul Noetherian jika setiap barisan rantai naik dari submodul-submodul di M yaitu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdot\cdot\cdot$, terdapat k bilangan bulat positif, sehingga $N_k \subseteq N_{k+1} \subseteq N_{k+2} \subseteq \ldots \subseteq N_{k+n}$ (Wahyuni et al., 2021).

Selain modul Noetherian terdapat modul hampir Noetherian. Efraim P. Armendariz pada penelitiannya yang berjudul ”Rings with An Almost Noetherian Ring Of Fraction” memperkenalkan gagasan tentang modul hampir Noetherian. Sebuah R-modul M disebut modul hampir Noetherian jika setiap submodul sejati di M dibangkitkan secara berhingga (Anebri et al., 2021).

Pada pengertian ideal adalah subhimpunan takkosong S dari ring R adalah subring dari R jika S tertutup terhadap operasi pengurangan dan operasi perkalian, yaitu jika a dan b keduanya ada di S maka $a - b$ dan ab ada di S (Gallian, 2016). Pada salah satu artikel dijelaskan mengenai suatu pengertian r-ideal. Sebuah ideal sejati I dalam sebuah ring R disebut sebuah r-ideal, jika $ab \in I$ dengan $Ann\ \langle a \rangle = \langle 0 \rangle$, maka $b \in I$ untuk setiap $a, b \in R$ (Mohamadian, 2015). Simbol r pada r-ideal mengacu pada ideal sejati dari ring dengan $Ann\ \langle a \rangle = \langle 0 \rangle$, bukan sebagai atas ring R karena hal itu sering didefiniskan pada modul atas ring atau biasa dinotasikan sebagai R-modul.

Setelah membahas r-ideal, akan dijelaskan mengenai r-submodul. Sebuah submodul sejati N dari M dikatakan sebagai r-submodul jika $Ann_M\langle a \rangle = 0_M$ maka, $M \in N$ untuk setiap $a \in R, ma \in M$. Perhatikan bahwa sebuah submodul N dari M adalah sebuah r-submodul sehingga $Z\left({}^{M}/_{N}\right) \subseteq Z(M)$ dan r-submodul dari R-modul R adalah r-ideal dari R (Koc et al., 2018). Dari pendefinisian r-ideal dan r-submodul dikembangkan pada modul Noetherian. Terdapat sebuah kelas baru yakni Modul r-Noetherian. Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara berhingga (Anebri et al., 2021).

Berdasarkan penjelasan mengenai modul Noetherian dan r-noetherian selanjutnya akan dikaji mengenai sifat-sifat dari modul r-Noetherian. Dari sifat-sifat modul r-Noetherian akan dikaji apakah sifat-sifat dari modul Noetherian berlaku pada modul r-Noetherian. Pada modul Noetherian dan modul r-Noetherian akan memiliki sifat-sifat yang berbeda antara satu sama lain atau bahkan akan memiliki sifat yang berlaku pada keduanya. Al-Quran juga menjelaskan tentang perbedaan. Hal ini seperti yang dituliskan di dalam surat Al-Hujarat ayat 13 yang artinya:

"Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal". (Al-Hujarat:13)

Wahyu Tuhan itu berisi tentang bukti kekuasaan Allah SWT yang menciptakan manusia laki-laki dan perempuan, serta menjadikannya bersuku-suku. Ayat tersebut memiliki makna bahwa manusia yang diciptakan berbangsa-bangsa dan berlainan ras maupun suku itu untuk saling mengenal satu sama lain. Allah pun menegaskan dalam ayat tersebut bahwa orang yang paling mulia di sisi-Nya bukan karena warna kulit maupun bahasanya, melainkan ketakwaannya kepada Allah (Jalwis, 2023).

Dalam Tafsir Al Mishbah ayat ini diartikan Allah berfirman: hai manusia, sesunggunya kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang permpuan, yakni Adam dan Hawa, atau dari sperma (benih laki-laki) dan ovum (indung telur perempuan). Serta menjadikan kamu berbangsa-bangsa juga bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal yang mengantar kamu untuk bantu-membantu serta saling melengkapi. Sesungguhnya yang paling mulia diantara kamu di sisi Allah ialah yang paling bertakwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah maha mengetahui lagi maha mengenal sehingga tidak ada suatu pun yang tersembunyi bagi-Nya, walau detak detik jantung dan niat seseorang (Satriani, 2018).

Selanjutnya penulis termotivasi untuk melakukan penelitian mengenai modul r-Noetherian. Skripsi ini merupakan kajian dari beberapa sumber pustaka. Rujukan utama dari pembahasan skripsi ini adalah jurnal ilmiah yang berjudul "*Commutative Rings and Modules That Are r-Noetherian*" yang ditulis oleh Adam Anebri Najib

Mahdou dan Unsal Tekir. Pada artikel tersebut akan dikaji lebih dalam mengenai sifat rantai naik pada modul r-Noetherian serta keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian. Pada skripsi ini terdapat alur penulisan, langkah-langkah pembuktian serta penyajian hasil disesuaikan dengan tujuan penulisan skripsi dan cara pandang penulis sehingga menjadikan skripsi ini tulisan yang utuh.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang, permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana sifat rantai naik pada modul r-Noetherian?
2. Bagaimana keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka dapat disimpulkan bahwa tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui sifat rantai naik pada modul r-Noetherian.
2. Mengetahui keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.

1.4 Manfaat Penelitian

Dengan adanya penelitian skripsi ini, diharapkan dapat memberi manfaat, diantaranya:

1. Bagi Penulis
    a. Menambah pengetahuan dan keilmuan mengenai hal-hal yang berkaitan dengan teori modul, khususnya modul r-Noetherian.
    b. Mengembangkan wawasan keilmuan mengenai sifat rantai naik pada modul r-Noetherian serta keterkaitannya dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.
2. Bagi Pembaca

    Selain itu pembaca juga memperoleh ilmu untuk menjadikan penelitian ini sebagai referensi dalam penelitian-penelitian selanjutnya.
    a. Sebagai sarana informasi mengenai sifat rantai naik pada modul r-Noetherian serta keterkaitannya dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.
    b. Sebagai bahan informasi dalam melakukan kajian lebih lanjut mengenai teori modul, khususnya modul r-Noetherian.

1.5 Batasan Masalah

Penelitian ini hanya akan membahas berkaitan dengan masalah rantai naik serta keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada teori pendukung ini akan dibahas mengenai grup, ring, modul, modul Noetherian, modul hampir Noetherian, dan modul r-Noetherian. Beberapa materi tersebut akan dibahas terkait definisi dan contohnya.

2.1.1 Grup

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai grup akan diberikan pengantar dari definisi operasi biner dan struktur aljabar yang akan digunakan dalam pendefinisian grup pada subbab berikutnya.

2.1.1.1 Operasi Biner dan Struktur Aljabar

Suatu operasi biner pada sebuah himpunan takkosong A adalah pemetaan f dari $A \times A$ ke A (Gilbert, 2014).

Berikut merupakan contoh dari operasi biner.

Matriks $M_2(\mathbb{Z})$ adalah himpunan matriks orde dua dengan entri bilangan bulat. Operasi pada $M_2(\mathbb{Z})$ adalah perkalian matriks.

$$M_2(\mathbb{Z}) \times M_2(\mathbb{Z}) \to M_2(\mathbb{Z})$$

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

Karena hasil perkalian dari $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$ dengan $\begin{bmatrix} e & f \\ h & g \end{bmatrix}$ juga merupakan matriks elemen $M_2(\mathbb{Z})$, maka operasi perkalian di $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan operasi biner. Setelah membahas pengertian dari operasi biner beserta contoh, maka akan dijelaskan mengenai struktur aljabar.

Definisi 2.1. Suatu himpunan $H \neq \emptyset$ disebut **struktur aljabar**, jika H dilengkapi satu atau lebih operasi biner (Andari, 2015).

2.1.1.2 Grup dan Subgrup

Grup adalah struktur aljabar yang sangat mendasar. Grup menjadi dasar terbentuknya struktur aljabar yang lain. Definisi grup dinyatakan sebagai berikut.

Definisi 2.2 Grup adalah pasangan $(G,*)$ dengan G adalah himpunan takkosong dan $*$ adalah suatu operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Himpunan G tertutup terhadap operasi $*$.

$$\forall a, b \in G, \exists a * b \in G$$

2. Operasi $*$ bersifat asosiatif di G.

$$\forall a, b \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$$

3. Grup G memiliki elemen identitas terhadap operasi $*$.

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G), e * a \ = a * e = a$$

4. Grup G memuat invers setiap unsurnya terhadap operasi $*$.

$$(\exists a^{-1} \in G), a * = (a^{-1}) * a$$

Grup $(G,*)$ disebut Abelian (atau komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk setiap a, $b \in G$ (Dummit & Foote, 2004).

Berikut merupakan contoh dari grup.

Misalkan $\mathbb{Q}^+$ merupakan suatu himpunan rasional positif. Didefinisikan operasi biner $*$ pada $\mathbb{Q}^+$ sebagai berikut

$$a * b = \frac{ab}{2}, \forall a, b \in \mathbb{Q}^+$$

Selidiki apakah $(\mathbb{Q}^+, *)$ merupakan suatu grup.

1. Himpunan $(\mathbb{Q}^+, *)$ bersifat tertutup, hal ini sudah jelas dipenuhi dari definisi yang telah diberikan.
2. Operasi $*$ bersifat asosiaif, yaitu $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, berlaku

$$(a * b) * c = \left[\frac{ab}{2}\right] * c = \frac{(ab)c}{4} = \frac{a\frac{bc}{2}}{2} = \frac{a * b * c}{2}$$

3. Himpunan$(\mathbb{Q}^+, *)$ memiliki elemen identitas.

   Jika dimisalkan elemen identitas adalah b, maka

$$a * b = a$$

$$\frac{ab}{2} = a$$

$$ab = 2a$$

$$b = 2$$

   Jadi elemen identitasnya 2 sehingga berlaku $a * 2 = 2 * a = a$.

4. Setiap elemen dari $(\mathbb{Q}^+, *)$ mempunyai invers.

   Dimisalkan invers dari a adalah b, sehingga berlaku $a * b = 2$.

$$a * b = 2$$

$$\frac{ab}{2} = 2$$

$$ab = 4$$

$$b = \frac{4}{a}$$

Jadi invers dari a adalah $\frac{4}{a}$ dengan $a \neq 0$.

Dari tahapan pertama hingga keempat dapat disimpulkan bahwa $(\mathbb{Q}^+, *)$ merupakan grup.

Setelah diberikan penjelasan mengenai grup beserta contohnya, maka akan dijelaskan mengenai bagian dari grup yakni subgrup.

Definisi 2.3. Misalkan G adalah grup, sedangkan H adalah himpunan bagian sembarang dari suatu grup G dan merupakan himpunan takkosong. Maka, H disebut **subgrup** dari G jika dengan operasi yang sama seperti di G, maka H juga merupakan grup (Andari, 2015). Berikut merupakan contoh dari subgrup.

Diketahui $(\mathbb{Z}_6, +)$ merupakan grup dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. Himpunan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_6$. Akan dibuktikan bahwa H subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

1. Dapat dilihat pada Tabel 2.1 bahwa penjumlahan elemen dari H akan menghasilkan elemen dari H juga, sehingga dapat dikatakan bahwa sifat tertutup terpenuhi.

Tabel 2.1 Tabel *Cayley* Operasi Penjumlahan pada H

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{\mathbf{4}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{4}}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

2. Setiap elemen dari H memiliki invers yang juga merupakan elemen dari H itu sendiri.

Invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, sebab $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$;

Invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{4}$, sebab $\bar{2} + \bar{4} = \bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$;

Invers dari $\bar{4}$ adalah $\bar{2}$, sebab $\bar{4} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$;

Dapat ditarik kesimpulan bahwa H subgrup dari $\mathbb{Z}_6$.

2.1.1.3 Koset dan Subgrup Normal

Definisi 2.4. Misalkan G adalah sebuah grup dan misalkan H adalah sebuah himpunan bagian tak kosong dari G (Gallian, 2016).

Untuk setiap $a \in G$, himpunan $\{ah \mid h \in H\}$ dinotasikan dengan aH. Demikian juga untuk, $Ha = \{ah \mid h \in H\}$ dan $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$ Ketika H adalah sebuah subgrup dari G, himpunan aH disebut koset kiri dari H di G yang memuat a, sedangkan Ha disebut koset kanan dari H di G yang memuat a. Dalam hal ini, elemen a disebut koset yang mewakili aH (atau Ha). Kita menggunakan $|aH|$ untuk menyatakan banyaknya elemen dalam himpunan aH, dan $|Ha|$ untuk menyatakan banyaknya elemen dalam Ha (Gallian, 2016). Setelah dijelaskan mengenai definisi dari koset maka akan diberikan contoh dari koset.

Misalkan $(B, +)$ adalah grup bilangan bulat dengan penjumlahan dan $M = \{4n \mid n \in B\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8\}$ adalah suatu subgrup dari B, maka koset kanan dari M di B adalah

$M + 0 = \{4n + 0 \mid n \in B\} = M = M + 4 = M + 8 = M + (-4) = \cdots$

$M + 1 = \{4n + 1 \mid n \in B\}$

$= \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} = M + (-3) = M + 5 = \cdots$

$M + 2 = \{4n + 2 \mid n \in B\}$

$= \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} = M + (-2) = M + 6 = \cdots$

$M + 3 = \{4n + 3 \mid n \in B\}$

$= \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} = M + (-1) = M + 7 = \cdots$

Jadi dapat disimpulkan bahwa himpunan $\{\dots (M + (-3), (M + (-2), (M + (-1), M, M + 1, M + 2, M + 3, \dots\}$ di atas adalah koset kanan dari M di B.

Definisi 2.5. Misalkan G adalah grup dan N adalah subgrup dari G. Maka N dikatakan sebagai **subgrup normal** dari G jika $xN = Nx$ untuk setiap $x \in G$. Himpunan N adalah subgrup normal dari G dinotasikan sebagai $N \trianglelefteq G$ (Gilbert & Gilbert, 2009).

Berikut merupakan contoh dari subgrup normal.

Misalkan $(G, +)$ dengan $G = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$. adalah suatu grup dan $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan subgrup dari G. Akan ditunjukkan apakah H termasuk subgrup normal dari G atau bukan $(G, +)$.

Tabel 2.2 Koset Kanan dan Koset Kiri pada $\mathbb{Z}_6$

Koset kiri	**Koset kanan**
$\bar{0} + H = \bar{0} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$	$H + \bar{0} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} + \bar{0} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$
$\bar{1} + H = \bar{1} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$	$H + \bar{1} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} + \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$
$\bar{2} + H = \bar{2} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}\}$	$H + \bar{2} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} + \bar{2} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}\}$
$\bar{3} + H = \bar{3} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{1}\}$	$H + \bar{3} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} + \bar{3} = \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{1}\}$
$\bar{4} + H = \bar{4} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{4}, \bar{0}, \bar{2}\}$	$H + \bar{4} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} + 4 = \{\bar{4}, \bar{0}, \bar{2}\}$
$\bar{5} + H = \bar{5} + \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} = \{\bar{5}, \bar{1}, \bar{3}\}$	$H + \bar{5} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} + \bar{5} = \{\bar{5}, \bar{1}, \bar{3}\}$

Sehingga,

$$\bar{0} + H = H + \bar{0} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$
$$\bar{1} + H = H + \bar{1} = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}$$
$$\bar{2} + H = H + \bar{2} = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{0}\}$$
$$\bar{3} + H = H + \bar{3} = \{\bar{3}, \bar{5}, \bar{1}\}$$
$$\bar{4} + H = H + \bar{4} = \{\bar{4}, \bar{0}, \bar{2}\}$$
$$\bar{5} + H = H + \bar{5} = \{\bar{5}, \bar{1}, \bar{3}\}$$

Maka koset kanan sama dengan koset kiri, sehingga subgrup $H = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ merupakan subgrup normal.

2.1.1.4 Grup Hasil Bagi atau Grup Faktor

Definisi 2.6. Misalkan G adalah grup, dan N merupakan subgrup normal dari G. Himpunan ${}^{G}/_{N}$ adalah himpunan koset-koset dari N di G. Terhadap operasi perkalian, ${}^{G}/_{N}$ merupakan grup dan disebut sebagai **grup faktor** (Andari, 2015).

Berikut adalah contoh dari grup faktor.

Misalkan $G = \{1, -1, i, -i\}$ adalah grup terhadap operasi perkalian dan $N = \{1, -1\}$ adalah subgrup normal dari G. Maka ${}^{G}/_{N} = \{N, iN\}$ merupakan grup faktor.

2.1.2 Ring dan Subring

Setelah mempelajari struktur suatu himpunan tak kosong yang dilengkapai satu operasi biner, berikutnya akan mempelajari himpunan yang dilengkapi dengan dua operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma tertentu yang bisa diartikan pada struktur aljabar abstrak. Ring merupakan salah satu konsep struktur aljabar yang dilengkapi dua operasi biner, yang disebut dengan penjumlahan + dan perkalian $\bullet$.

Definisi 2.7. Ring adalah suatu himpunan takkosong yang dilengkapi dua operasi biner yaitu penjumlahan + dan perkalian • yang memenuhi aksioma sebagai berikut:

1. Struktur $(R, +)$ merupakan grup abelian.
2. Operasi $\bullet$ pada R bersifat asosiatif, berlaku
$$(p \bullet q) \bullet s = p \bullet (q \bullet s),$$
Untuk setiap $p, q, s \in R$.
3. Berlaku sifat distributif kiri dan distributif kanan operasi $\bullet$ terhadap +.
   a. Distributif kiri
   $$p \bullet (q + s) = (p \bullet q) + (p \bullet s),$$
   untuk setiap $p, q, s \in R$.
   b. Distributif kanan
   $$(p + q) \bullet \mathrm{s} = (p \bullet s) + (q \bullet s),$$
   untuk setiap $p, q, s \in R$ (Wahyuni & dkk, 2016:2).

Suatu ring R dikatakan sebagai ring komutatif apabila operasi perkaliannya bersifat komutatif (Grillet, 2007).

Berikut merupakan contoh dari ring.

Diberikan himpunan $\left(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +\right)$ merupakan grub abelian. Akan ditunjukkan bahwa $\left(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +, \cdot\right)$ merupakan ring.

Penyelesaian.

1. Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian bersifat asosiatif pada himpunan $\mathbb{Z}\sqrt{2}$.

Diberikan sebarang $x, y, w \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$, dengan $x = m_1\sqrt{2}$, $y = m_2\sqrt{2}$ dan $w = m_2\sqrt{2}$ untuk setiap $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$.

Sehingga,

$$\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot w &= \left(m_1\sqrt{2} \cdot m_2\sqrt{2}\right) \cdot m_3\sqrt{2} \\
&= (m_1 \cdot m_2)\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2} \\
&= (m_1 \cdot m_2 \cdot m_3)\sqrt{2} \\
&= \left(m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)\right)\sqrt{2} \\
&= m_1\sqrt{2} \cdot (m_2 \cdot m_3)\sqrt{2} \\
&= m_1\sqrt{2} \cdot \left(m_2\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2}\right) \\
&= x \cdot (y \cdot w)
\end{aligned}$$

2. Akan ditunjukkan himpunan $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ memenuhi sifat distributif.

Diberikan sebarang $x, y, w \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$, dengan $x = m_1\sqrt{2}$, $y = m_2\sqrt{2}$ dan $w = m_2\sqrt{2}$ untuk setiap $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$.

Sehingga,

$$\begin{aligned}
(x + y) \cdot w &= \left(m_1\sqrt{2} + m_2\sqrt{2}\right) \cdot m_3\sqrt{2} \\
&= (m_1 + m_2)\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2} \\
&= (m_1 \cdot m_3 + m_2 \cdot m_3)\sqrt{2}^2 \\
&= \left((m_1 \cdot m_3)\sqrt{2}^2 + (m_2 \cdot m_3)\sqrt{2}^2\right) \\
&= (m_1\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2}) + (m_2\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2}) \\
&= (x \cdot w) + (y \cdot w)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x + (y \cdot w) &= m_1\sqrt{2} \cdot \left(m_2\sqrt{2} + m_3\sqrt{2}\right) \\
&= m_1\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(m_2 + m_3)
\end{aligned}$$

$$= (m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3))\ \sqrt{2}^2$$

$$= (m_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot m_3)\ \sqrt{2}^2$$

$$= \left((m_1 \cdot m_2)\sqrt{2} + \ (m_2 \cdot m_3)\sqrt{2}\right)$$

$$= (m_1\sqrt{2} \cdot m_2\sqrt{2}) + (m_1\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2})$$

$$= (x \cdot y) + (x \cdot w)$$

Jadi terbukti bahwa $\left(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +, \cdot\right)$ merupakan ring.

Perhatikan bahwa jika himpunan bilangan bulat $2\mathbb{Z}$ merupakan ring terhadap operasi perkalian dan penjumlahan. Namun, di sisi lain $2\mathbb{Z} + 1$ bukan merupakan ring terhadap operasi perkalian dan penjumlahan dikarenakan operasi penjumlahan tidak tertutup pada himpunan bilangan ganjil $2\mathbb{Z} + 1$. Dengan memperhatikan dua fenomena tersebut, suatu subhimpunan takkosong dari sutau ring bisa merupakan ring atau tidak terhadap operasi yang sama pada ringnya.

Definisi 2.8. Misalkan S adalah suatu subhimpunan takkosong di dalam ring $(R, +, \bullet)$. Suatu subhimpunan S dari ring R adalah **subring** dari R jika S merupakan ring terhadap operasi yang sama di R (Gallian, 2016).

Setelah dijelaskan mengenai definisi subring, maka akan dijelaskan mengenai contoh dari subring.

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) = \left\{a + b\sqrt{3}\ |a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ merupakan subring dari R.

1. Himpunan $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) \neq \emptyset$.

   Syarat terpenuhi karena $\mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right) = \left\{a + b\sqrt{3}\ |a, b \in \mathbb{Q}\right\}$.

2. Suatu subhimpunan S dari ring R adalah subring dari R jika S merupakan

ring terhadap operasi yang sama di R. Sehingga,

a. Himpunan $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ dengan operasi penjumlahan di $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Misalkan $a + b\sqrt{3}, c + d\sqrt{3}, \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, maka

$$\left(a + b\sqrt{3}\right) + \left(-c - d\sqrt{3}\right) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

b. Himpunan $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ dengan operasi perkalian di $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Misalkan $a + b\sqrt{3}, c + d\sqrt{3}, \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, maka

$$\left(a + b\sqrt{3}\right)\left(c + d\sqrt{3}\right) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Syarat 1 dan 2 terpenuhi sehingga dapat disimpulkan $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Q\}$ merupakan subring dari R.

2.1.3 Lapangan dan Daerah Integral

Berikut akan dijelaskan mengenai definisi dari lapangan dan Daerah Integral serta contoh-contohnya.

Definisi 2.9. Misalkan F adalah suatu ring. Ring F disebut **lapangan** jika syarat-syarat berikut ini dipenuhi:

1. Ring R adalah ring komutatif.
2. Ring R memiliki elemen satuan e dan $e \neq 0$.
3. Setiap elemen tak nol di R memiliki invers perkalian.

(Rasiman et al., 2018)

Berikut akan diberikan contoh mengenai lapangan.

Misal $(R, +, \bullet)$ adalah suatu ring himpunan bilangan riil. Ring $(R, +, \bullet)$ adalah suatu lapangan. Untuk membuktikannya ini berturut-turut ditunjukkan:

1. Ring R adalah ring komutatif.

   Berdasarkan sifat perkalian pada R, maka $a \bullet b = b \bullet a$, untuk setiap $a, b \in R$. Ini berarti R adalah ring komutatif.

2. Ring R memiliki elemen satuan e dan $e \neq 0$.

   Elemen satuan R adalah $e = 1 \neq 0$, karena $a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$, untuk setiap $a \in R$. Telah ditunjukkan R memiliki elemen satuan 1 dan $1 \neq 0$.

3. Setiap elemen tak nol di R memiliki invers perkalian.

   Diambil sebarang $a \in R$, dengan $a \neq 0$, maka terdapat $b = {}^{1}/_{a} \in R$ sedemikian sehingga $a \bullet b = a \bullet {}^{1}/_{a} = 1$. Ini berarti setiap $a \neq 0 \in R$ memiliki invers perkalian yaitu ${}^{1}/_{a}$.

Definisi 2.10. Suatu ring komutatif R dengan elemen satuan disebut **daerah integral** jika R tidak memuat pembagi nol (Wahyuni & dkk, 2016).

Berikut akan diberikan contoh mengenai daerah integral.

Diketahui P = {ganjil, genap} adalah suatu ring komutatif. Syarat dari Integral domain adalah ring komutatif yang tidak mempunyai pembagi nol, dengan kata lain:

$a \cdot b = 0$, untuk $a = 0$ atau $b = 0$.

Misalkan:

$X = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$ adalah himpunan bilangan ganjil dan

$Y = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ adalah himpunan bilangan genap.

Dari himpunan tersebut dapat dilihat bahwa bilangan ganjil tidak ada unsur nol, tetapi bilangan genap ada unsur nol. Jadi dapat disimpulkan bahwa P = {ganjil, genap} merupakan integral domain, karena $a \cdot b = 0$, jika $a = 0$ atau $b = 0$, untuk setiap $a, b \in P$.

2.1.4 Ideal

Berikut akan dijelaskan mengenai definisi dari ideal dan contoh dari ideal.

Definisi 2.11. Misalkan R suatu ring tak nol dan I merupakan himpunan bagian takkosong di R. Himpunan I disebut **ideal** dari R jika memenuhi aksioma berikut,

1. Berlaku $s_1 - s_2 \in I$, untuk setiap $s_1, s_2 \in I$
2. Berlaku $s_1 r, r\, s_1 \in I$, untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in I$

Jika dilihat dari definisi ideal dibandingkan definisi dari subring maka dengan mudah dapat ditarik kesimpulan bahwa jika I merupakan suatu ideal dari ring R maka I merupakan subring dari R. Namun, sebaliknya belum tentu berlaku, jika I adalah subring dari R, maka I belum tentu ideal dari R. (Wahyuni et al., 2020).

Berikut merupakan contoh dari ideal.

Diketahui $\mathbb{Z}$ ring dari bilangan bulat dan $I = \{Kx | x \in \mathbb{Z}\}$ dengan K bilangan bulat. Selidiki apakah I ideal dari $\mathbb{Z}$.

Penyelesaian

Akan dibuktikan apakah I ideal dari ring $\mathbb{Z}$. Ambil dua elemen dari I. Misalkan $Kx_1, Kx_2 \in I$ dengan $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$. Maka diperoleh

1. Untuk setiap $Kx_1, Kx_2 \in I$ sehingga $Kx_1 + (-Kx_1) = K(x_1, -x_2) \in I$. Sebab $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ maka $x_1, -x_2 \in \mathbb{Z}$.
2. Untuk setiap $Kx \in I$ dan $r \in \mathbb{Z}$ sehingga $r(Kx) = (rK)x \in I$ dan $(Kx)r = K(xr) = (Kr)x \in I$.

Karena 1 dan 2 terpenuhi, maka I adalah ideal.

Berikut akan dijelaskan mengenai definisi ideal sejati dan tidak sejati.

Definisi 2.12. Sebuah ideal I dari ring R disebut **ideal sejati** jika $I \neq R$ sebaliknya Ideal I disebut **ideal tidak sejati** jika $I = R$ (Rasiman et al., 2018).

Berikut merupakan contoh dari ideal sejati dan tidak sejati.

1. Ideal bilangan genap dalam ring $2\mathbb{Z}$. Ideal ini dikatakan ideal sejati karena, terdiri dari semua bilangan genap.
2. Ideal $\{3\}$ dalam ring bilangan bulat $\mathbb{Z}$. Ideal ini terdiri dari semua bilangan yang berkelipatan 3 pada $\mathbb{Z}$. Ideal ini dikatakan ideal tidak sejati.

Setelah dijelaskan mengenai ideal berikut akan dijelaskan mengenai ideal prima dan ideal maksimal.

Definisi 2.13. Misalkan R suatu ring komutatif, dan I suatu ideal dari R, maka I disebut **ideal prima** jika dan hanya jika $\forall\, a, b \in R$, jika $ab \in R$, maka $a \in I$ atau $b \in I$ (Suryanti, 2017).

Berikut akan diberikan contoh ideal prima.

Himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian adalah ring. Misal diambil ideal dari $\mathbb{Z}$, yaitu

1. Ambil $M = \langle 7k \rangle = \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Himpunan M adalah ideal prima dari $\mathbb{Z}$, karena apabila $ab \in M$ maka pasti $a \in M$ atau $b \in M$
2. Ambil $N = \langle 6k \rangle = \{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Himpunan N adalah bukan ideal prima dari $\mathbb{Z}$, karena $\exists 12 \in N$ dan $12 = 3 \times 4$ sedangkan $3 \notin N$ dan $4 \notin N$

Berikut akan dijelaskan mengenai ideal maksimal

Definisi 2.14. Misal R suatu ring komutatif dan I suatu ideal dari R, maka I disebut **ideal maksimal** dari R jika dan hanya jika I tidak termuat dalam ideal lainnya, kecuali I sendiri dan R (Suryanti, 2017).

Akan diberikan contoh ideal maksimal dengan mengaitkan pada contoh ideal prima sebelumnya, M adalah ideal maksimal. M tidak termuat dalam ideal lain dalam $\mathbb{Z}$ kecuali M dan $\mathbb{Z}$ sendiri. Selanjutnya perhatikan ideal N. Ideal N tersebut bukan ideal maksimal karena N termuat dalam ideal lain, yaitu ideal yang dibangun oleh elemen 3 dan elemen 2 dalam $\mathbb{Z}$.

2.1.5 Ruang Vektor

Berikut akan dijelaskan mengenai definisi dari ruang vektor dan contoh dari ruang vektor.

Definisi 2.15. Misalkan V himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar. Artinya, diberikan dua elemen $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ di V dan bilangan real s, kemudian jumlah $\bar{u}+\bar{v}$ dan perkalian skalar $\overline{su}$ didefinisikan dan terletak di V juga. Kemudian V dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar tersebut disebut **ruang vektor** jika kedua operasi tersebut memenuhi sifat

Untuk setiap $\bar{u}\,, \bar{v}, \bar{w} \ \in V$ dan $r, s \ \in \mathbb{R}$.

1. Bersifat tertutup pada penjumlahan, jika $\bar{u}\,, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u}+\bar{v} \ \in V$
2. $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$.
3. $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$.
4. Terdapat vektor nol O di V sehingga $\bar{u}+0=0$.
5. Terdapat unsur invers di u yaitu $\bar{u}' \in V$ sehingga $\bar{u}+\bar{u}'=0$.
6. Bersifat tertutup pada perkalian, jika $s \in \mathbb{R}$ maka $s\bar{u} \ \in V$
7. $r(\bar{u}+\bar{v})=r\bar{u}+r\bar{v}$.
8. $(r+s)\bar{u}=r\bar{u}+s\bar{u}$.

9. $r(s\bar{u}) = (rs)\bar{u}$.

10. $1(\bar{u}) = \bar{u}$.

(Anton et al., 2013).

Selanjutnya contoh ruang vektor berikut ini diberikan agar definisi ruang vektor dapat lebih dipahami.

Misal diberikan $V = R^2$, dan didefinisikan sebagai

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa V merupakan ruang vektor.

Bukti

Ambil sebarang $u, v, w \in R^2$ dan $k, l \in \mathbb{R}$, dengan

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

1. $u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in R^2$

2. $u + v = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

   $= v + u$

3. $(u + v) + w = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 \\ (y_1 + y_2) + y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= u + (v + w)$$

4. Anggap bahwa $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ merupakan identitas di V, maka

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

   Jadi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ merupakan identitas di V.

5. Ambil sebarang $u \in R^2$ dan anggap bahwa $-u \in R^2$, maka

$$u + (-u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + (-x_1) \\ y_1 + (-y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-u) + u = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-x_1) + x_1 \\ (-y_1) + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Jadi $-u \in R^2$ invers dari sebarang $u \in R^2$.

6. Perhatikan $V: \mathbb{R} \times R^2 \longrightarrow R^2$.

$$ku = k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} \in R^2$$

7. $k(u + v) = k \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$

$$= k \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k(x_1 + x_2) \\ k(y_1 + y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kx_1 + kx_2 \\ ky_1 + ky_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kx_2 \\ ky_2 \end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= ku + kv$$

8. $(k + l)u = (k + l)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (k + l)x_1 \\ (k + l)y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kx_1 + lx_1 \\ ky_1 + ly_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} lx_1 \\ ly_1 \end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= ku + lu$$

9. $k(lu) = k\left(l\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$

$$= \left(kl\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= (kl)\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= (kl)u$$

10. $1u = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1x_1 \\ 1y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= u$$

2.1.6 Modul

Modul atas ring merupakan bentuk perumuman dari ruang vektor atas lapangan Sembarang ruang vektor V atas lapangan F, dapat dipandang sebagai modul atas ring F. Pada bagian ini dijelaskan mengenai definisi dan contoh yang berkaitan dengan modul (Wahyuni et al, 2021).

Definisi 2.16. Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring komutatif dengan kesatuan, yang mana elemen-elemennya disebut skalar. R-modul (atau suatu modul atas R) adalah himpunan takkosong M yang memenuhi:

1. Struktur $(M, +)$ adalah grup Abelian.
2. Dilengkapi operasi $\bullet : R \times M \to M$, dengan definisi $\bullet\,(x, a) = x \bullet a$, untuk setiap $x \in R$ dan $a \in M$ memenuhi:
   a. $a(x + y) = ax + ay$
   b. $(a + b)x = ax + bx$
   c. $a(xy) = (ax)y$
   d. $1x = x$

   (Bland, 2010)

Berikut akan diberikan contoh mengenai modul. Sebarang ring R merupakan modul atas dirinya sendiri. Himpunan $\mathbb{Z}$ merupakan modul atas $\mathbb{Z}$, himpunan $\mathbb{R}$ merupakan modul atas $\mathbb{R}$, himpunan $\mathbb{Q}$ merupakan modul atas $\mathbb{Q}$.

Jika pada grup memiliki subgrup, begitu pula dengan modul. Modul memiliki submodul yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.17. Diberikan R-modul M. Suatu himpunan tak kosong $N \subseteq M$ disebut **submodul** dari M jika N merupakan subgrup dari M terhadap operasi penjumlahan, serta N juga merupakan modul atas R terhadap operasi perkalian skalar yang sama dengan operasi perkalian pada R-modul M (Wahyuni et al., 2021).

Dari sini, dapat ditarik kesimpulan bahwa jika $(M, +)$ merupakan R-modul terhadap operasi perkalian skalar, maka himpunan bagian takkosong N di M merupakan submodul di R-modul M apabila

1. Himpunan $(N, +)$ merupakan grup komutatif terhadap operasi +. Dengan kata lain, N merupakan subgrup dalam grup komutatif $(M, +)$.
2. Untuk setiap $r \in R$ dans $s \in N$ memenuhi $rs \in R$.

Berikut diberikan contoh mengenai submodul.

Diberikan modul $\mathbb{R}^3$ atas ring $\mathbb{R}$. Akan ditunjukkan himpunan $S \subset \mathbb{R}^3$ dengan $S = \{a, b, 0 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ merupakan submodul dari $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian.

1. Akan ditunjukkan bahwa S merupakan submodul dari $\mathbb{R}^3$.
   a. Akan ditunjukkan $S \neq \emptyset$.

      Ambil $a = 0$ dan $b = 0$ sehingga $(0, 0, 0) \in S$ karena $0 \in \mathbb{R}$.

      Jadi terbukti bahwa $S \neq \emptyset$.

   b. Akan ditunjukkan S tertutup terhadap operasi +.

      Diberika sebarang $(a, b, 0), (x, y, 0) \in S$ untuk semua $a, b, x, y \in \mathbb{R}$.

      Oleh karena itu, $(a, b, 0), +(x, y, 0) = (a + x, b + y, 0) \in S$.

      Jadi terbukti bahwa S tertutup terhadap operasi +.

   c. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x, y \in S, xy^{-1} \in S$ dengan, $x = (a, b, 0)$ dan $y = (c, d, 0)$ untuk setiap $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

      $y^{-1} \quad = (-c, -d, 0) \in S$

$$xy^{-1} = (a, b, 0) + (-c, -d, 0)$$

$$= (a - c, b - d, 0) \in S$$

Jadi terbukti bahwa $xy^{-1} \in S$ untuk setiap $x, y \in S$.

2. Akan ditunjukan S tertutup terhadap operasi perkalian skalar.

   Diberikan sebarang $(a, b, 0) \in S$ untuk setiap $a, b \in R$.

   $r(a, b, 0) = (ra, rb, 0) \in S$

   Jadi terbukti bahwa S tertutup terhadap operasi perkalian skalar.

Dari 1 dan 2 terbukti bahwa S merupakan submodul dari $\mathbb{R}^3$.

Definisi 2.18. Setiap modul M, minimal mempunyai dua submodul yaitu M itu sendiri dan $E = \{e\}$ biasa disebut **submodul tidak sejati**. Suatu submodul N, selain M dan E maka disebut **submodul sejati** (Andari, 2015).

Berikut akan dijelaskan mengenai contoh dari submodul sejati dan tidak sejati

Diberikan $\mathbb{Z}$: $\mathbb{Z}$-modul. Tentukan submodul-submodul dari modul $\mathbb{Z}$.

Submodul tidak sejati dari $\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}$ itu sendiri dan $\{0\}$, sedangkan submodul sejati dari $\mathbb{Z}$ adalah $2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}$, ... Secara umum submodul sejati dari $\mathbb{Z}$ dapat ditulis sebagai $n\mathbb{Z}$ denga $n = 2, 3, 4$, ...

Suatu submodul sejati X di M disebut submodul maksimal apabila tidak terdapat submodul sejati lain di M yang memuat X. Berdasarkan definisi tersebut, berikut disajikan definisi submodul maksimal (Wahyuni et al., 2021).

Definisi 2.19. Submodul $N \subset M$ dikatakan **submodul maksimal** jika $N \neq M$ dan tidak termuat dalam submodul sejati di M (Wisbauer, 1991).

Berikut ini akan diberikan contoh dari submodul maksimal.

Diberikan $p\mathbb{Z}$ merupakan submodul maksimal di $\mathbb{Z}$, sebagai $\mathbb{Z}$-modul, dengan p merupakan bilangan prima. Sebagai contoh, $3\mathbb{Z}$ adalah submodul maksimal di

$\mathbb{Z}$. Himpunan $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ dan himpunan $3\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, 1, \dots\}$.

Sehingga $3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ tidak temuat pada submodul sejati di $\mathbb{Z}$ maka $3\mathbb{Z}$ merupakan submodul maksimal di $\mathbb{Z}$.

Berikut definisi dari annihilator suatu elemen modul.

Definisi 2.20. Diberikan modul M adalah R-modul. $Ann\langle M\rangle$ dikatakan himpunan **annihilator** dari M jika $Ann\langle M\rangle = \{r \in R \mid rn = 0, \forall m \in M\}$ untuk suatu $x \in M$, $Ann\,\langle x\rangle = \{r \in R \mid rx = 0\}$ (Wattimena et al., 2022).

Berikut akan dijelaskan contoh dari annihilator.

Jika diberikan $\mathbb{Z}_6$ adalah $\mathbb{Z}$-modul dengan $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$, maka didapat $Ann\,\langle M\rangle = \{r \in \mathbb{Z} \mid rm = 0, \forall m \in \mathbb{Z}_6\}$, yaitu $Ann_R\langle M\rangle = \{0, \pm 6, \pm 12, \dots\} = 6\mathbb{Z}$.

2.1.6.1 Homomorfisma Modul

Misalkan M dan M' adalah suatu R-modul. Suatu pemetaan ρ dari M ke M' yang mengawetkan kedua operasi pada modul dinamakan homomorfisa modul. Berikut definisi mengenai homomorfisma modul.

Definisi 2.21. Misalkan R adalah ring dan misalkan M dan M' masing-masing modul atas ring R. Didefinisikan pemetaan $\rho: M \to M'$. Pemetaan ρ disebut **homomorfisma modul** jika $\forall a, b \in M$ dan $r \in R$ memenuhi:

$$\rho(a + b) = \rho(a) + \rho(b)$$

$$\rho(ra) = r\rho(a)$$

Misalkan M dan M' masing-masing modul atas ring R dan pemetaan $\rho: M \to M'$ adalah suatu homomorfisma modul. Pemetaan ρ disebut ismorfisma jika bersifat satu-satu atau bijektif (Andari, 2015).

Berikut merupakan contoh dari homomorfisma modul.

Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$. Didefinisikan pemetaan:

$$\rho: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$a \mapsto \rho(a) = 5a$$

Tunjukkan ρ merupakan homorfisma modul. Perhatikan.

$$\rho: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$$

$$a \mapsto \rho(a) = 5a$$

$$b \mapsto \rho(b) = 5a$$

Ambil sebarang $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$.

1. Akan ditunjukkan $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $\rho(a + b) = \rho(a) + \rho(b)$.

$$\rho(a + b) = 5(a + b) = 5a + 5b = \rho(a) + \rho(b)$$

2. Akan ditunjukkan $\forall a \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}$ berlaku $\rho(ra) = r\rho(a)$.

$$\rho(ra) = 5(ra) = r(5a) = r\rho(a)$$

Dari nomor 1 dan 2 terbukti bahwa ρ merupakan homomorfisma modul.

2.1.6.2 Modul Siklik

Pada subbab ini akan dipelajari tentang modul siklik dan contoh modul siklik.

Definisi 2.22. Diberikan modul M atas ring R. Modul M disebut modul siklik jika $M = \langle m \rangle$, untuk suatu $m \in M$.Berikut merupakan contoh dari modul siklik. Modul $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul merupakan modul siklik karena $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$. Secara umum, dapat ditunjukkan bahwa setiap ring R dengan elemen satuan

1_R merupakan R-modul siklik yang dibangun $\{1_R\}$, yakni $R = \langle 1_R \rangle$ setiap $r \in R$ berlaku $r = 1_R r$ (Wahyuni et al., 2021).

2.1.6.3 Modul Hasil Bagi atau Modul Faktor

Konsep tentang modul hasil bagi dapat dianalogikan dengan definisi dari grup hasil bagi. Berikut definisi mengenai modul hasil bagi

Definisi 2.23. Jika N adalah submodul dari modul M atas ring R, maka **modul faktor** adalah grup hasil bagi $M/_N$ (ingat bahwa M adalah grup abel dan N subgrup normal) tertutup terhadap perkalian skalar $r(m + N) = rm + N$ (Roman, 2008).

Berikut merupakan contoh dari modul faktor.

Ring R dengan ideal I dapat dibentuk menjadi ring faktor $R/_I$ karena ring dapat dilihat sebagai modul atas dirirnya sendiri, dengan demikian $R/_I$ adalah modul faktor.

2.1.6.4 Modul Bebas Torsi

Pada subbab ini akan dipelajari tentang elemen torsi, elemen bebas torsi, modul torsi, dan modul bebas torsi.

Definisi 2.24. Misalkan M adalah modul atas ring R dan $m \in M$. Elemen m disebut **elemen torsi** jika terdapat $r \in R, r \neq 0$,sedemikian sehingga $rm = 0$. Suatu elemen m yang bukan elemen torsi disebut **elemen bebas torsi**. Elemen ”0” pada modul M pasti merupakan elemen torsi karena jika diambil beberapa pun $r \in R, r \neq 0$, jelas $rm = 0$ (Andari, 2015).

Definisi 2.25. Misalkan M adalah modul atas ring R. Modul M disebut **modul torsi** jika semua elemen di M merupakan elemen torsi (Andari, 2015).

Berikut merupakan contoh dari bukan modul torsi.

Diketahui: $\mathbb{Z}_4 : \mathbb{Z}_4$-modul. Tentukan elemen-elemen torsi pada modul $\mathbb{Z}_4$.

Elemen torsi pada modul $\mathbb{Z}_4$ adalah $\bar{0}$ dan $\bar{2}$ karena terdapat $r \in \mathbb{Z}_4$ sehingga $rm = 0$. Lebih jelasnya dapat dilihat pada Tabel 2.3 berikut

Tabel 2.3 Elemen Torsi pada Modul $\mathbb{Z}_4$

$\boldsymbol{m \in \mathbb{Z}_4}$	$\boldsymbol{r \in \mathbb{Z}_4, r \neq \bar{0}}$	$\boldsymbol{rm}$
$\bar{0}$	$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	-	-
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	-	-

Untuk $m = \bar{0}, r$ dapat dipilih $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$.

Dari Tabel 2.3 jelas bahwa elemen torsi pada modul $\mathbb{Z}_4$ hanya terdapat pada $\bar{0}$ dan $\bar{2}$, sedangkan pada $\bar{1}$ dan $\bar{3}$ tidak terdapat elemen torsi.

Definisi 2.26. Misalkan M adalah modul atas ring R. Modul M disebut **modul bebas torsi** jika setiap elemen di M yang tidak sama dengan nol merupakan elemen bebas torsi (Andari, 2015).

Berikut merupakan contoh dari modul bebas torsi.

Diketahui $\mathbb{Z}: \mathbb{Z}$-modul. Tentukan elemen-elemen torsi di modul $\mathbb{Z}$.

Perhatikan bahwa modul $\mathbb{Z}$ dan ring $\mathbb{Z}$. Satu-satunya elemen torsi di modul $\mathbb{Z}$ adalah 0 karena jika $m = 0$ anggota $\mathbb{Z}$ sehingga dapat dipilih $r \in \mathbb{Z}$ dengan $r \neq 0$, diperoleh $rm = 0$. Elemen m selain 0 bukan merupkan elemen torsi karena jika dipilih $m \neq 0$, maka tidak dapat menemukan $r \in \mathbb{Z}$ dengan $r \neq$

0sedemikian sehingga $rm = 0$. Akibatnya semua elemen modul M, selain 0 merupakan elemen bebas torsi.

2.1.6.5 Himpunan Pembangun Modul

Definisi 2.27. R-modul M dikatakan dibangun secara hingga jika memuat secara hingga himpunan yang membangun M (Roman, 2008).

Berikut merupakan contoh dari himpunan pembangun modul.

Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul dan himpunan $X = \{3, 6, 9\}$ di $\mathbb{Z}$ karena submodul di $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, maka submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$ yang memuat himpunan X adalah submodul $3\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ itu sendiri. Akibatnya diperoleh submodul yang dibangun oleh X adalah submodul $3\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$.

2.1.7 *Finitely Generated*

Definisi 2.28. Misalkan $j = (r_1, \dots, r_n)$ dan $k \in j$ jika anggota $k \in j$ bisa ditulis sebagai kombinasi linier dari unsur-unsur pembangun j, yaitu terdapat $a_1, \dots, a_n$ $k = ar_1, \dots, a_n r_n$ maka, dikatakan j dibangun secara berhingga (Mardiani, 2016).

Berikut merupakan contoh dari *finitely generated.*

Jika $j = 1,2,3$ dan $k = 5$, maka k tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari unsur-unsur pembangun j, karena 5 tidak dapat ditulis sebagai $1a + 2b + 3c$, dimana $a, b,$ dan c adalah bilangan bulat. Maka, j dibangun secara berhingga.

2.1.8 *Ascending Chain Condition*

Definisi 2.29. memenuhi kondisi rantai naik (***Ascending Chain Condition***) jika setiap barisan naik dari elemen akhirnya berakhir, atau dengan kata lain unsur-unsur barisan tersebut berhingga. Diberikan barisan $a_1 \subseteq a_2 \subseteq \cdots$ terdapat bilangan bulat positif k sedemikian hingga memenuhi $a_{k+i} = a_k$ untuk setiap $i \geq k$ (Fitriani, 2013).

Berikut merupakan contoh dari *Ascending Chain Condition.*

Sebuah ring komutatif R. Ideal dari ring R yang memenuhi ACC disebut ring Noetherian. Sebuah ring R dikatakan memenuhi ACC jika setiap barisan dari ideal kiri (ideal yang dibangun dari unsur kiri) atau ideal kanan (ideal yang dibangun dari unsur kanan) akan berakhir pada satu titik. Misalnya, setiap ideal utama dari ring R memenuhi ACC, karena ideal utamanya hanya dibangun oleh hanya satu elemen.

2.1.9 Modul Noetherian

Sebelumnya, telah diketahui bahwa $\mathbb{Z}$ sebagai ring dengan elemen satuan memenuhi sifat rantai naik untuk ideal-ideal di dalamnya. Apabila dipandang sebagai $\mathbb{Z}$-modul, setiap ideal di $\mathbb{Z}$ dapat dipandang sebagai submodul dari $\mathbb{Z}$. Dengan demikian, sifat rantai naik juga berlaku pada submodul-submodul di $\mathbb{Z}$.

Hal inilah yang melatarbelakangi pendefinisian sifat rantai naik untuk suatu R-modul M yang selanjutnya melatarbelakangi munculnya definisi modul Noetherian (Wahyuni et al., 2021).

Definisi 2.30. Modul M dikatakan memenuhi kondisi rantai naik untuk submodul jika untuk setiap rantai naik submodul-submodul dari M, yaitu $N_1 \subseteq$

$N_2 \subseteq \cdots$, terdapat bilangan bulat positif k sedemikian hingga memenuhi $N_{k+i} = N_k$ untuk setiap $i \geq k$ (Wahyuni et al., 2021).

Berikut merupakan contoh dari modul Noetherian.

Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ adalah suatu $\mathbb{Z}$-modul. Misalkan,

$2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\vdots$

$n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$

adalah submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}$ adalah suatu modul Noetherian dengan langkah-langkah sebagai berikut.

Akan dibuktikan bahwa submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$ memenuhi kondisi rantai naik. Perhatikan bahwa.

Misal $M_1 = 32\mathbb{Z}, M_2 = 16\mathbb{Z}, M_3 = 8\mathbb{Z}, M_4 = 4\mathbb{Z}, M_5 = 2\mathbb{Z}$ dan $M_6 = \mathbb{Z}$ memenuhi kondisi $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq M_4 \subseteq M_5 \subseteq M_6$.

Jadi, jika $M_n \subset M_{n+1} \subset M_{n+2} \subset \cdots$ dengan $n \in \mathbb{Z}$ dan $m_i > m_{i+1}$ dimana m_i adalah pembangkit dari M_i, maka paling banyak terdapat n submodul, sehingga $\mathbb{Z}$ membentuk suatu rantai naik. Karena submodul-submodulnya dari $\mathbb{Z}$ memenuhi kondisi rantai naik, maka $\mathbb{Z}$ adalah suatu modul Noetherian.

Definisi 2.31. Modul M dikatakan memenuhi **kondisi maksimal** pada submodul apabila untuk setiap koleksi submodul-submodul dari M yang tidak kosong memuat suatu submodul yang maksimal, yaitu submodul yang tidak termuat di dalam submodul lain (Wahyuni et al., 2021).

2.1.10 Modul Hampir Noetherian

Definisi 2.32. Sebuah R-modul M disebut **modul hampir Noetherian** jika setiap submodul sejati di M dibangkitkan secara berhingga (Anebri et al., 2021). Berikut diberikan contoh dari modul Hampir Noetherian,

1. Suatu bilangan genap $2\mathbb{Z}$ merupakan suatu submodul dari bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan dibangun secara hingga oleh 2.
2. Bilangan bulat modulo n pada $\mathbb{Z}_n$ memiliki submodul yang dibangun oleh bilangan d yang habis dibagi oleh n. Misalnya pada $\mathbb{Z}_{15} = \{0,5,10,15,...\}$ pada $\mathbb{Z}_{15}$ dibangun secara hingga oleh 5.

Teorema 2.1

Misalkan M adalah modul hampir Noetherian, yang bukan modul Noetherian.

1. Untuk setiap submodul H di M, M/H adalah modul hampir Noetherian, yang bukan modul Noetherian.
2. Untuk setiap H, K submodul di M dan $M = H + K$ maka, $M = H$ atau $M = K$.

Bukti.

1. Untuk setiap submodul H di M, M/H adalah modul hampir Noetherian, yang bukan modul Noetherian.

   Misalkan M adalah modul hampir Noetherian, tetapi bukan modul Noetherian. Akan dibuktikan bahwa untuk setiap submodul H di M, faktor $M/_H$ adalah modul hampir Noetherian yang tidak Noetherian.

   Diketahui bahwa M adalah modul hampir Noetherian. Ini berarti setiap rantai naik dari submodul M akan stabil di suatu titik. Akan diuji apakah $M/_H$ adalah modul hampir Noetherian. Untuk setiap submodul K di

$M/_H$, maka K merupakan submodul dari M. Sehingga, $K/_H$ adalah submodul dari $M/_H$. Oleh karena itu, akan ada titik di mana setiap rangkaian menaik dari submodul $K/_H$stabil. Iini enunjukkan bahwa $M/_H$ adalah modul hampir Noetherian. Namun, $M/_H$ bukan Noetherian, karena jika jika M adalah modul Noetherian, maka $M/_H$ akan menjadi Noetherian karena sifat dari modul Noetherian.

2. Untuk setiap H, K submodul di M dan $M = H + K$ maka, $M = H$ atau $M = K$.

   Misalkan M adalah modul hampir Noetherian dan $M = H + K$. Asumsikan M tidak sama dengan H dan tidak sama dengan K. Karena M bukan H dan bukan K, maka ada elemen x dalam M yang bukan bagian dari H atau K. Namun $M = H + K$, setiap elemen M harus dapat sebagai jumlah dari H dan K. Oleh karena itu, tidak mungkin ada elemen x dalam M yang tidak ada di H atau K, karena setiap elemen M harus dapat ditulis sebagai jumlah dari H dan K. Hal ini kontradiksi. Dengan demikian, M harus sama dengan H atau sama dengan K. Jadi, kita telah membuktikan bahwa untuk setiap H, K submodul di M dan $M = H + K$, maka M harus sama dengan H atau M harus sama dengan K.

2.1.11 Modul r-Noetherian

Sebelum menjelaskan mengenai modul r-Noetherian akan dibahas terlebih dahulu mengenai r-ideal dan r-submodul untuk memperjelas mengenai definisi r-Noetherian. Mohamadian memperkenalkan gagasan tentang r-ideal dalam suatu ring komutatif.

Definisi 2.33. Sebuah ideal sejati I dalam sebuah ring R disebut sebuah **r-ideal** jika $ab \in I$ dengan $Ann\,\langle a\rangle = \langle 0\rangle$ maka, $b \in I$ untuk setiap $a, b \in R$ (Mohamadian, 2015).

Berikut akan diberikan contoh dari r-ideal.

Misalkan R adalah ring dari bilangan bulat dan I adalah himpunan semua bilangan bulat genap. Akan ditunjukkan bahwa I adalah sebuah r-ideal dalam R. Ambil $a \in R$ dan $b \in I$, maka ab adalah bilangan bulat genap, karena perkalian bilangan bulat ganjil dengan bilangan bulat genap menghasilkan bilangan bulat genap. Selain itu, $Ann\,\langle a\rangle = \langle 0\rangle$ karena a bisa jadi genap atau ganjil, sehingga perkalian a dengan bilangan bulat manapun tidak akan pernah menghasilkan bilangan bulat genap. Oleh karena itu, $b \in I$ untuk setiap $a, b \in R$, sehingga I adalah sebuah r-ideal dalam R.

Definisi 2.34. Misalkan M adalah sebuah R-modul. Sebuah submodul sejati N dari M dikatakan sebagai sebuah **r-submodul** jika $Ann_M\langle a\rangle = 0_M$ maka, $M \in N$ untuk setiap $a \in R$, $ma \in M$ (Koc, S., et al., 2018).

Perhatikan bahwa sebuah submodul N dari M adalah sebuah r-submodul berarti secara sederhana bahwa $Z\left({}^{M}/_{N}\right) \subseteq Z(M)$ dan r-submodul dari R-modul R adalah r-ideal dari R (Koc, S., et al., 2018).

Berikut contoh dari r-submodul.

Perhatikan bahw $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_n$ dengan $n \geq 2$. Misalkan $\langle \bar{x}\rangle$ adalah sebuah submodul sejati pada $\mathbb{Z}_n$. Maka $gcd(x, n) = d > 1$. Sehingga, $\langle \bar{x}\rangle = \langle \bar{d}\rangle$ maka

$\mathbb{Z}_n/_{\langle \bar{x} \rangle}$ isomorfis pada $\mathbb{Z}$ -modul $\mathbb{Z}_d$. Karena $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}_d) \subseteq \mathbb{Z}(\mathbb{Z}_n)$ maka $\langle \bar{x} \rangle$ adalah sebuah r-submodul dari $\mathbb{Z}_n$.

Berikut akan dijelaskan mengenai defінsi dari r-Noetherian.

Definisi 2.35. Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah **modul r-Noetherian** jika setiap r-submodul dari M dibangun secara hingga (Anebri et al., 2021).

2.2 Kajian Keislaman

Matematika adalah ilmu yang mengeksplorasi angka dan perhitungannya, membahas masalah jumlah, kuantitas, dan besaran. Selain itu, matematika mempelajari hubungan antara pola, bentuk, dan struktur dan digunakan sebagai alat untuk berpikir dalam sistem dan struktur yang berbeda. Dalam konteks ini, matematika menitik beratkan pada pemecahan masalah yang melibatkan bilangan, baik sebagai bilangan yang memiliki nilai maupun sebagai alat untuk memecahkan masalah (Hamzah, 2014).

Matematika adalah suatu bidang ilmu yang mempelajari konsep-konsep abstrak yang direpresentasikan dengan simbol-simbol, yang bersifat eksak, tepat, dan tidak dipengaruhi oleh emosi (Wahyudi & Kriswandani, 2013). Selain itu, matematika merupakan dasar bagi perkembangan teknologi modern, mempunyai peran sentral dalam berbagai disiplin ilmu, dan meningkatkan daya pikir manusia (Sari et al., 2016).

Pengertian matematika tidak dapat ditentukan secara pasti dan komprehensif, karena tidak ada konsensus atau definisi tunggal mengenai matematika. Pengertian atau ekspresi matematika yang berbeda muncul tergantung pada siapa yang membuat definisi, di mana definisi itu dibuat, dan dari perspektif apa definisi itu dibuat. Beberapa bentuk cenderung menekankan aspek numerik dari perspektif matematika, sementara yang lain lebih fokus pada struktur atau sistem.

Sebagai contoh, ada tokoh yang tertarik dengan angka akan melihat matematika dari perspektif aritmatika, sementara tokoh lain yang lebih tertarik dengan struktur akan melihat matematika dari perspektif struktural. Demikian juga, tokoh-tokoh lain yang lebih menekankan pada pola pikir atau sistematika akan melihat matematika dari perspektif sistematis. Oleh karena itu, terdapat banyak definisi matematika yang berbeda-beda (Susanah, 2014).

Berdasarkan pandangan para ahli tersebut, matematika dapat didefinisikan sebagai suatu kegiatan manusia yang mempelajari berbagai objek abstrak yang berhubungan dengan bilangan atau angka. Matematika memegang peranan penting dalam berbagai disiplin ilmu, tidak hanya dalam ilmu pengetahuan dan teknologi tetapi juga dalam kehidupan sehari-hari. Rumus-rumus matematika dapat digunakan untuk memecahkan masalah sehari-hari, dan matematika juga berkaitan dengan aspek religius, seperti dalam konteks Islam. Ilmu matematika juga tidak terlepas dalam agama Islam.

Hal tersebut dapat ditinjau dari beberapa ayat Al-Quran yang memiliki keterkaitan dengan matematika, misalnya ayat yang mengenai perhitungan, bilangan, dan pengukuran seperti yang telah dijelaskan dalam QS. Maryam ayat 94 yang artinya

”Dia (Allah) benar-benar telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti.”(QS. Maryam/19:94)

Dalam penelitian ini akan membuktikan mengenai sifat-sifat pada Modul r-noetherian. Dalam pembuktiannya banyak mengkaji mengenai teorema dan *corollary* dengan pembuktian yang lebih detail dan diperinci. Dalam setiap proses pembuktiannya akan memerlukan banyak informasi dari berbagi sumber yang dijmin keakuratannya. Oleh sebab itu, perlu dilakukannya proses tabayun. Istilah "tabayun" dalam bahasa Arab berarti mencari penjelasan atau kebenaran. Dalam konteks ilmiah atau informasi, hal ini mengacu pada upaya mencari data dan kejadian untuk tujuan pemahaman atau penggunaan (Zain G, 2017). Sebagaimana firman Allah SWT dalam QS. Al-Hujurat:6 sebagai berikut,

"Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa berita maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaanya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu" (QS. Al-Hujurat/49:6).

Munculnya individu yang tidak bermoral di antara individu yang beriman adalah peristiwa yang jarang terjadi. Orang yang beriman dikenal tidak mudah tertipu dan cenderung menyelidiki keaslian setiap informasi. Istilah "fasiq" digunakan untuk menggambarkan sesuatu yang manja atau terlalu matang. Penting untuk menentukan apakah informasi itu penting dan apakah orang yang membawanya dapat dipercaya. Semua berita perlu disaring untuk menghindari tindakan impulsif yang dapat mengarah pada tindakan yang tidak masuk akal (Quraish Shihab, 2009).

Maksud dari ayat ini adalah agar orang-orang beriman berhati-hati dalam menerima berita atau informasi, terutama jika berita atau informasi tersebut berasal dari orang yang tidak dapat dipercaya. Kalimat ini menekankan perlunya penelitian terlebih dahulu untuk memastikan integritas laporan tersebut. Mempercayai informasi tanpa melakukan investigasi dapat beresiko kehilangan nyawa, harta benda dan hanya penyesalan. Sebagai masyarakat yang cerdas, penting untuk memiliki sikap kritis dan tabu terhadap informasi yang diterima. Layaknya pepatah

Arab mengatakan *"al-Khabar ka al-ghubar"* yang artinya ialah informasi itu bagaikan debu yang belum jelas kebenarannya (Kadir & Vahlevi, 2021).

Berikutnya akan dibahas bagaimana Al-Quran menjelaskan keterkaitan antara sifat-sifat dari modul r-noetherian dengan sifat- sifat yang harus dimiiki oleh seseorang tercantum pada Q.S Ali Imran/3:159 yakni,

"Maka disebabkan rahmat dari Allah-lah kamu berlaku lemahlembut terhadap mereka. sekiranya kamu bersikap keras lagi berhati kasar, tentulah mereka menjauhkan diri dari sekelilingmu. Karena itu ma'afkanlah mereka, mohonkanlah ampun bagi mereka, dan bermusyawarahlah dengan mereka dalam urusan itu. Kemudian apabila kamu telah membulatkan tekad, maka bertawakkallah kepada Allah. Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang bertawakkal kepadaNya" (Q.S Ali Imran/3:159).

Dalam menafsirkan ayat ini, M. Quraish Shihab mengatakan bahwa tindakan Nabi Muhammad saw sangat mulia, tanpa sikap keras, lemah lembut, pemaaf dan mau menerima pendapat orang lain. Semua sifat tersebut adalah berkat rahmat Allah kepadanya, yang mendidiknya dengan menghilangkan semua faktor yang dapat mempengaruhi kepribadian Nabi. Empat faktor utama yang seharusnya mempengaruhi Nabi Muhammad SAW telah dihindari oleh Allah sejak beliau masih kecil.

Pertama, ayahnya meninggal sebelum Nabi dilahirkan. Kedua, ibunya tinggal jauh dari Nabi ketika beliau masih kecil. Ketiga, buta huruf tanpa bisa membaca. Keempat, lingkungan keluarga Halimatus Sakdiyah yang mengasuhnya di luar peradaban manusia, membentuk kepribadian Nabi menjadi sosok yang sangat mulia, seperti yang telah dijelaskan. Sikap Nabi yang mulia itulah, beliau diperintahkan untuk memaafkan para sahabatnya yang membangkang dan memohon kepada Allah untuk mengampuninya. Selain itu, Nabi diperintahkan untuk mendengarkan saran dan berdiskusi dengan para sahabatnya mengenai masalah yang muncul di antara mereka (Quraish Shihab, 2007).

Dalam Tafsir al-Azhar, Hamka menjelaskan bahwa pada awal ayat 159 surat Ali Imran, Allah memuji Nabi Muhammad SAW karena sikapnya yang lemah lembut. Beliau tidak cepat marah kepada orang-orang yang sedang dibimbing dan dididik dalam keimanan untuk menjadi lebih sempurna. Meskipun beberapa sahabat melakukan kesalahan dengan meninggalkan misi yang dipimpin oleh Nabi saat perang Uhud.

Nabi tidak tetap marah tetapi dengan kepemimpinan yang tinggi beliau membimbing mereka. Dalam ayat ini, Allah menegaskan ketika memuji Rasulullah bahwa sikap lemah lembutnya adalah hasil dari rahmat yang Allah berikan kepadanya. Perasaan belas kasihan, kasih sayang dan cinta ditanamkan Allah dalam hati Rasulullah, sehingga belas kasihan mempengaruhi sikap Rasulullah dalam peran kepemimpinannya (Hamka, 2003).

Dari pembahasan di atas dapat diambil kesimpulan bahwa QS. Ali Imran/3: 159 mejelaskan sifat-sifat yang harus dimiliki seseorang yaitu lemah lembut, pemaaf, tekad yang kuat dan bertawakkal kepada Allah Swt. Sifat-sifat ini merupakan sifat yang dimiliki oleh Nabi Muhammad Saw yang pernah ditunjukkannya dalam menghadapi para sahabat di dalam perang Uhud. Seorang seharusnya memiliki sifat-sifat terpuji ini supaya dakwahnya mudah diterima oleh masyarakat (Fauziah, 2020). Seperti halnya sifat-sifat yang dijelaskan pada surah QS. Ali Imran/3: 159 pada matematika teori modul yakni, pada pada modul r-noetherian memiliki beberapa sifat. Sifat-sifat pada modul r-noetherian akan dibuktikan dari teorema-teorema yang berlaku sehingga akan terpenuhi sifat-sifat dari corollary modul r-noetherian.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Dalam pembahasan sifat-sifat modul r-Noetherian dalam penelitian ini, memperkenalkan dan menyelidiki sebuah kelas modul baru yang berkaitan dengan kelas modul Noetherian. Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara hingga (Anebri et al., 2021). Seperti halnya dalam artikel yang berjudul "Commutative Rings and Modules That Are r-Noetherian" yang ditulis oleh Adam Anebri Najib Mahdou dan Unsal Tekir. Hanya saja pada penelitian tersebut masih belum detail dalam membuktikan bagaimana proses menentukan sifat-sifat modul r-Noetherian.

1. Melengkapi pembuktian lemma yang berkaitan rantai naik pada Modul r-Noetherian yakni, misalkan M adalah sebuah R-modul r-Noetherian yang dibangkitkan secara berhingga, jika M memenuhi kondisi rantai naik *ascending chain condition* (acc) pada r-submodul.
2. Melengkapi pembuktian proposisi mengenai keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.
    a. Jika M adalah modul Noetherian, maka M adalah modul hampir Noetherian.
    b. Jika M adalah modul hampir Noetherian, maka M adalah modul r-Noetherian.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah kualitatif, sebab mengkaji tahapan suatu definisi, teorema dan sifat-sifat dari modul r-Noetherian. Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur atau studi pustaka (*library research*). Studi literatur yakni proses mengumpulkan data maupun informasi dengan mengkaji berbagai macam sumber literatur seperti buku, artikel jurnal, *lecture note* dan lain sebagainya yang membahas mengenai modul r-Noetherian yang bertujuan untuk dasar acuan atau pendukung dalam penyelesaian masalah penelitian.

3.2 Pra Penelitian

Langkah-langkah yang ditempuh sebelum melakukan penelitian ini adalah:

1. Mempelajari dan memahami konsep mengenai modul yang memenuhi kondisi rantai naik pada setiap submodulnya dengan membuat contoh rantai naik.
2. Mempelajari modul Noetherian beserta sifat-sifatnya.
3. Mempelajari dan memahami modul r-Noetherian terkait r-ideal dan r-submodul untuk memperjelas definisinya.
4. Memahami keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.
5. Mempelajari dan memahami teorema rantai naik yang berlaku pada modul r-Noetherian.

3.3 Tahapan Penelitian

Berikut adalah tahapan-tahapan penelitian yang akan digunakan dalam membahas penelitian,

1. Melengkapi pembuktian lemma yang berkaitan rantai naik pada Modul r-Noetherian yaitu, misalkan M adalah sebuah R-modul r-Noetherian yang dibangkitkan secara berhingga, jika M memenuhi kondisi rantai naik *ascending chain condition* (acc) pada r-submodul. Proses pembuktiannya, akan dibuktikan pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen. Pertama, M merupakan modul r-Noetherian. Kedua, M memenuhi kondisi maksimal. Ketiga, Setiap submodul di M dibangun secara berhingga.
2. Melengkapi pembuktian proposisi mengenai keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian. Proposisi tersebut adalah misalkan R adalah sebuah ring, maka modul Noetherian $\subseteq$ modul hampir Noetherian $\subseteq$ modul r-Noetherian. Proses pembuktiannya akan terdiri dari dua tahap, yaitu.
    a. Jika M adalah modul Noetherian, maka M adalah modul hampir Noetherian.
    b. Jika M adalah modul hampir Noetherian, maka M adalah modul r-Noetherian.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai sifat-sifat pada modul r-Noetherian pada subbab pertama akan dibahas mengenai sifat rantai naik pada modul r-Noetherian kemudian dilanjutkan pada subbab kedua akan dibahas mengenai keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.

4.1 Sifat Modul r-Noetherian

Sebelum membuktikan rantai naik pada modul r-Noetherian akan dijelaskan mengenai definisi rantai naik, memenuhi kondisi rantai naik (*Ascending Chain Condition*) jika setiap barisan naik dari elemen akhirnya berakhir, atau dengan kata lain unsur-unsur barisan tersebut berhingga. Diberikan barisan $a_1 \subseteq a_2 \subseteq \cdots$ terdapat bilangan bulat positif k sedemikian hingga memenuhi $a_{k+i} = a_k$ untuk setiap $i \geq k$ (Fitriani, 2013).

Berikut merupakan contoh dari *Ascending Chain Condition.* Sebuah ring komutatif R. Ideal dari ring R yang memenuhi ACC disebut ring Noetherian. Sebuah ring R dikatakan memenuhi ACC jika setiap barisan dari ideal kiri (ideal yang dibangun dari unsur kiri) atau ideal kanan (ideal yang dibangun dari unsur kanan) akan berakhir pada satu titik. Misalkan, setiap ideal utama dari ring R memenuhi ACC, karena ideal utamanya hanya dibangun oleh hanya satu elemen.

Pada proses pembuktiannya, akan dibuktikan pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen. Pertama, M merupakan modul r-Noetherian. Kedua, M memenuhi kondisi maksimal. Ketiga, Setiap submodul di M dibangun secara berhingga.

Modul M dikatakan memenuhi kondisi maksimal pada submodul apabila untuk setiap koleksi submodul-submodul dari M yang tidak kosong memuat suatu submodul yang maksimal, yaitu submodul yang tidak termuat di dalam submodul lain (Wahyuni et al., 2021).

Misalkan $j = (r_1, \dots, r_n)$ dan $k \in j$ jika anggota $k \in j$ bisa ditulis sebagai kombinasi linier dari unsur-unsur pembangun j, yaitu terdapat $a_1, \dots, a_n$ dengan $k = ar_1, \dots, a_n r_n$ maka, dikatakan j dibangun secara berhingga (Mardiani, 2016).

Berikut merupakan contoh dari *finitely generated.* Jika $j = 1{,}2{,}3$ dan $k = 5$, maka k tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari unsur-unsur pembangun j, karena 5 tidak dapat ditulis sebagai $1a + 2b + 3c$, dimana $a, b,$ dan c adalah bilangan bulat. Maka, j dibangun secara berhingga.

4.2 Sifat Rantai Naik Modul r-Noetherian

Untuk membuktikan jika modul r-Noetherian memiliki sifat pada setiap r-submodulnya, akan dibuktikan Lemma 4.1 sebagai berikut.

Lemma 4.1. Misalkan M adalah sebuah R-modul r-Noetherian yang dibangun secara berhingga, jika M memenuhi kondisi rantai naik *ascending chain condition* (acc) pada r-submodul (Anebri, A., & Mahdou, N., 2021).

Bukti. Untuk membuktikan R-modul r-Noetherian yang dibangun secara hingga, jika M memenuhi kondisi rantai naik *ascending chain condition* (acc) pada r-submodul maka akan dibuktikan pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen.

1. M merupakan modul r-Noetherian;
2. M memenuhi kondisi maksimal;
3. Setiap submodul di M dibangun secara berhingga.

$(1. \Rightarrow 2.)$ Diketahui bahwa M merupakan modul r-Noetherian yang berarti bahwa memenuhi kondisi rantai naik dalam setiap r-submodulnya. Diambil sebarang submodul dari M, yaitu N dengan $N \neq \emptyset$.

1. Proses ke-1. $N = \langle a_1 \rangle$, maka a_1 merupakan submodul maksimal di dalam N. Jika $a_1 \notin N$ maka terdapat $a_2 \in N$ sedemikian sehigga $a_1 \subset a_2$.
2. Proses ke-2. $N = \langle a_2 \rangle$, maka a_2 merupakan submodul maksimal di dalam N. Jika $a_2 \notin N$ maka terdapat $a_3 \in N$ sedemikian sehigga $a_2 \subset a_3$.

   $\vdots$
3. Proses ke-n. $N = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1} \rangle$, maka a_0, a_1 merupakan submodul maksimal di dalam N. Jika $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1} \notin N$ maka terdapat $a_n \in N$ sedemikian sehingga $a_{n-1} \subset a_n$.

Proses dilanjutkan sampai diperoleh salah satu submodul maksimal di dalam N. Oleh karena diketahui M memenuhi kondisi rantai naik pada r-submodulnya, proses pengulangan tersebut akan berhenti pada suatu langkah yang berhingga, misalkan langkah ke-n. Dengan demikian, diperoleh a_n merupakan submodul maksimal di dalam N. Jadi, terbukti bahwa modul M memenuhi kondisi maksimal.

$(2. \Rightarrow 3.)$ Diketahui bahwa modul M memenuhi kondisi maksimal. Akan dibuktikan bahwa setiap submodul di M dibangun secara hingga. Diambil sebarang r-submodul N di M. Dibentuk koleksi submodul-submodul N yang dibangun secara hingga, misalkan himpunan

$$H = \{A \subseteq M \mid A \text{ r} - \text{submodul } N, A \text{ dibangun secara berhingga}\}$$

Jelas bahwa $H \neq \emptyset$ karena $\{0_M\} \in H$. Menurut ketentuan, H mememiliki elemen maksimal, misalkan A^*. Akan ditunjukkan bahwa $A^* = N$. Jelas bahwa, $A^* \subseteq N$ sehingga akan ditunjukkan bahwa $A^* \supseteq N$. Diambil sebarang $x \in N$, maka $A^* + \langle x \rangle$ merupakan submodul di N dan dibangun secara berhingga. Akibatnya, $A^* + \langle x \rangle \in H$. Karena diketahui bahwa A^* merupakan elemen maksimal di dalam H, haruslah $A^* + \langle x \rangle = A^*$. Dengan demikian diperoleh bahwa $\langle x \rangle \subseteq A^*$. Sehingga, $x \in A^*$. Maka terbukti $N = A^*$, yaitu setiap r-submodulnya di M dibangun secara hingga.

$(3. \Rightarrow 1.)$ Diketahui bahwa setiap submodul di M dibangun secara berhingga. Akan ditunjukkan bahwa M merupakan modul r-Noetherian. Berarti akan ditunjukkan bahwa modul M memenuhi kondisi rantai naik untuk r-submodulnya.

Diambil sebarang rantai naik submodul di M, yaitu $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ Diperoleh bahwa $N^* \coloneqq \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, merupakan submodul di M. Karena diketahui bahwa setiap submodul di M dibangun secara hingga, terdapat $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sehingga $N^* = \langle n_1, n_2, \ldots, n_k \rangle$. Selanjutnya setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, diperoleh $n_i \in N^*$, sehingga $n_i \in N_{k_i}$ untuk suatu $k_i \in \mathbb{Z}^+$. Kemudian dipilih bilangan $j = max\,\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Akibatnya, dieroleh $N_{k_i} \subseteq N_j$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Jadi, diperoleh $n_1, n_2, \ldots, n_k \in N_j$ sehingga memenuhi

$$N^* = \langle n_1, n_2, \ldots, n_k \rangle \subseteq N_j \subseteq N^*$$

Dengan demikian terbukti bahwa $N^* = N_j$ untuk semua $j \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga memenuhi $N_t = N_j$, untuk setiap bilangan bulat positif $t \geq j$. Sehingga, terbukti bahwa modul M memenuhi kondisi rantai naik untuk submodulnya. Jadi, terbukti bahwa M merupakan modul r-Noetherian.

Pada subbab kedua akan dibahas mengenai hubungan modul r-Noetherian, terhadap modul Noetherian dan modul hampir Noetherian.

4.3 Keterkaitan Modul r-Noetherian dengan Modul Noetherian dan Modul Hampir Noetherian.

Selanjutnya akan dibahas mengenai keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian. Dalam pembuktiannya akan dibagi menjadi dua tahap yaitu keterkaitan modul Noetherian dengan modul hampir Noetherian dan keterkaitan modul hampir Noetherian dengan modul r-Noetherian.

4.3.1 Keterkaitan Modul Noetherian dengan Modul Hampir Noetherian

Selanjutnya pada pembahasan ini akan ditunjukkan keterkaitan modul Noetherian dengan modul hampir Noetherian. Jika M adalah modul Noetherian, maka M adalah modul hampir Noetherian. Untuk mempermudah dalam pembuktiannya dimisalkan $R' = \{r \in R | rM \neq M\}$. Hal ini dinyatakan pada Proposisi 4.1 berikut.

Proposisi 4.1

Misalkan R adalah sebuah ring, M adalah R-modul dan $R' = \{r \in R | rM \neq M\}$. Jika M adalah modul hampir Noetherian, maka M adalah (R')-Noetherian (Faisol et al., 2019).

Bukti.

Untuk setiap $r \in R'$ dan setiap submodul N dari M,

$$rN \subseteq rM \subset M.$$

Maka, M adalah modul hampir Noetherian, rN adalah sebuah submodul sejati yang dibangkitkan secara berhingga di M. Sehingga, untuk setiap submodul N dari M terdapat $r \in R'$ dan submodul yang dibangkitkan secara berhingga. $F = rN$ dari M. Sedemikian sehingga,

$$rN \subseteq Fr \subseteq N$$

Jadi, M adalah modul (R')-Noetherian.

Proposisi 4.1 menjelaskan keterkaitan modul Noetherian dengan modul hampir Noetherian yaitu jika M adalah modul Noetherian, maka M adalah modul hampir Noetherian. Selanjutnya akan dibahas keterkaitan modul hampir Noetherian dengan modul r-Noetherian.

4.3.2 Keterkaitan Modul Hampir Noetherian dengan Modul r-Noetherian

Selanjutnya pada pembahasan ini akan ditunjukkan keterkaitan modul hampir Noetherian dengan modul r-Noetherian. Jika M adalah modul hampir Noetherian, maka M adalah modul r-Noetherian. Hal ini dinyatakan pada Proposisi 4.2 berikut.

Proposisi 4.2

Misalkan M adalah modul hampir Noetherian namun bukan Noetherian.

1. Untuk sebarang $x \in R$ maka $xM = 0$ atau $xM = M$.
2. $Ann(M)$ adalah ideal prima dari R dan M adalah modul bebas torsi pada integral domain $R/Ann\ (M)$.

(Armendariz, 1977).

Bukti.

1. Setiap elemen di x dari R menginduksi endomorfisme M melalui perkalian kernelnya,

   Maksud dari menginduksi endomorfisma adalah suatu pemetaan modul ke modul itu sendiri. Misalkan M adalah suatu modul atas ring R dan $\phi : M \to M$ adalah suatu endomorfisma modul. Kernel dari ϕ atau dapat ditulis ker (ϕ) adalah submodul dari M yang terdiri dari semua elemen yang dipetakan ke nol oleh ϕ.

$$\ker(\phi) = \{m \in M | \phi(m) = 0\}$$

   Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara berhingga. Sedangkan r-submodul adalah sebuah submodul sejati N dari M dikatakan sebagai r-submodul jika $Ann_M\langle a\rangle = 0_M$ maka, $M \in N$ untuk setiap $a \in R$, $ma \in M$.Simbol r pada r-submodul mengacu pada submodul sejati dari ring dengan $Ann\,\langle a\rangle = \langle 0\rangle$, bukan sebagai atas ring R karena hal itu sering didefiniskan pada modul atas ring atau biasa dinotasikan sebagai R-modul. Sehingga menjadi,

$$Ann_M(x) = \{u \in M\colon xu = 0\}$$

   Jika $xM \neq 0$ maka $Ann_M(x) \neq 0$ sehingga $xM \approx M/Ann_M(x)$ bukan merupakan Noetherian. Oleh karena itu, $xM = M$.

2. Sebelum membuktikan akan dikaji mengenai daerah intgral utama.

   Suatu daerah integral dimana setiap idealnya merupakan ideal utama, yaitu idealnya dapat dibangun oleh satu elemen saja, disebut Daerah Ideal Utama (*Principal Ideal Domain*, PID) (Amir, 2008). Artinya utnuk setiap ideal $I \subseteq R$ ada elemen $a \in R$ sehingga $I = (a)$ dimana (a) adalah ideal utama yang dihasilkan oleh a. Ideal utama (a) terdiri dari semua kelipatan a, yaitu

$$(a) = \{ra | r \in R\}$$

Salah satu sifat dari PID adalah tidak memiliki elemen pembagi nol, PID adalah domain integral, yang berarti tidak ada dua elemen bukan nol $a, b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Modul torsi pada domain ideal utama (PID) seringkali memiliki struktur yang memungkinkan mereka untuk memenuhi sifat ACC. Misalkan R adalah domain ideal utama dan M adalah modul torsi atas R. Berdasarkan teori struktur modul atas PID, kita tahu bahwa M dapat dinyatakan sebagai penjumlahan langsung dari modul-modul siklik. Oleh karena itu, setiap rantai naik dari submodul-submodul di M akan berhenti pada suatu titik, dan M memiliki ACC pada submodul-submodulnya.

Berdasarkan penjelasan meneganai daerah ideal utama dan modul torsi hal ini merujuk pada definisi modul r-Noetherian. Diketahui jika R adalah sebuah ring dan M adalah sebuah R-modul, M dikatakan sebuah modul r-Noetherian jika setiap r-submodul dari M dibangkitkan secara berhingga. Sedangkan r-submodul adalah sebuah submodul sejati N dari M dikatakan sebagai r-submodul jika $Ann_M\langle a\rangle = 0_M$ maka, $M \in N$ untuk setiap $a \in R$, $ma \in M$.Simbol r pada r-submodul mengacu pada submodul sejati dari ring dengan $Ann\,\langle a\rangle = \langle 0\rangle$. Sehingga diperoleh,

Jika $x, y \in R$ dengan $x \notin Ann(M)$ dan $y \notin Ann(M)$ dengan $xM = M$, maka $M = xyM$. Jadi, $xy \notin Ann(M)$ akan ditunjukkan bahwa $Ann(M)$

adalah ideal dari R. Asumsikan bahwa R domain dan $Ann(M) = 0$. Kemudian untuk $x \in R$ dengan $x \neq 0$ dan $xM = M$. Sehingga, M adalah R-modul yang habis dibagi. Misalkan M tidak bebas torsi, pilih $x \in R$ dengan $x \neq 0$. Sehingga,

$$Ann_M(x) \subseteq Ann_M(x^2) \subseteq \cdots$$

adalah rantai naik submodul di M. Selanjutnya,

$$Ann_M(x) \neq M \text{ dan } {}^{M}\!/_{Ann_M(x)} \approx M$$

Maka, rantai akan terus naik. Artinya $\bigcup_{i=1}^{\infty} Ann_M\left(x^i\right)$ bukan merupakan submodul sejati dari M. Sehingga, $\bigcup_{i=1}^{\infty} Ann_M\left(x^i\right) = M$. Oleh karena itu, M adalah modul bebas torsi.

Proposisi 4.2 menjelaskan keterkaitan modul hampir Noetherian dengan modul r-Noetherian. Jika M adalah modul hampir Noetherian, maka M adalah modul r-Noetherian.

Dari Proposisi 4.1 dan Proposisi 4.2 dapat ditarik kesimpulan jika modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian memiliki keterkaitan antara satu sama lain yaitu saling subset sehingga modul Noetherian $\subseteq$ modul hampir Noetherian $\subseteq$ modul r-Noetherian.

4.4 Integrasi Keislaman terhadap Sifat Rantai Naik pada Modul r-Noetherian serta Keterkaitannya dengan Modul Noetherian dan Modul Hampir Noetherian.

Penelitian ini membuktikan mengenai sifat-sifat pada Modul r-noetherian serta keterkaitannya dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian, diperoleh keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian adalah saling subset. Dimana ketiganya merupakan himpunan bagian yang saling berkitan antara satu sama lain.

Islam memiliki ajaran yang membentangkan dua bentuk hubungan yang harmonis. Pertama, habluminallah adalah hubungan manusia dengan Allah. Tata hubungan yang mengatur antara manusia dengan Tuhannya dalam hal ibadah (ubudiyah). Kedua, hablum minannas hubungan manusia dengan manusia. Tata hubungan yang mengatur antara manusia dengan makhluk yang lainnya dalam wujud amaliyah sosial (Lubis, 2019). Dalam Alquran surat Ali Imran ayat 112 Allah swt berfirman

"*Mereka diliputi kehinaan di mana saja mereka berada, kecuali jika mereka berpegang kepada tali (agama) Allah dan tali (perjanjian) dengan manusia dan mereka kembali mendapat kemurkaan dari Allah dan mereka diliputi kerendahan. yang demikian itu karena mereka kafir kepada ayat-ayat Allah dan membunuh Para Nabi tanpa alasan yang benar. yang demikian itu disebabkan mereka durhaka dan melampaui batas."* (QS. Ali Imran/3:112).

Ayat ini memberikan kepada kita tentang malapetaka yang telah menimpa Bani Israil sebagai akibat kedurhakaan mereka kepada Allah dan kepada para nabi. Sehingga mereka harus mengalami malapetaka, kehinaan, kemiskinan, dan kemurkaan dari Allah. Dalam ayat tersebut diberitakan pula bahwa jalan keluar dari segala malapetaka tersebut adalah membangun kembali hablum minallah dan hablum minannas. Sehingga dapat dipahami bahwa untuk membangun hubungan kepada Allah, mempunyai kewajiban untuk menunaikan hak-hak Allah. Hak-hak Allah adalah mentauhidkan dan tidak menyekutukan-Nya dengan yang lain serta menjalankan syariat Allah. Misalnya: sholat, puasa dan sebagainya (Lubis, 2019).

Di dalam Alquran terdapat ayat-ayat yang menyebutkan tentang perintah mengerjakan sesuatu yang berkaitan dengan hablum minannallah namun diiringi juga dengan hablum minannas, antara lain pada antara lain pada QS. Al-Ma'arij ayat 19-24 yang artinya

"Sesungguhnya manusia diciptakan bersifat keluh kesah lagi kikir (19), Apabila ia ditimpa kesusahan ia berkeluh kesah (20), Dan apabila ia mendapat kebaikan ia amat kikir (21), Kecuali orang-orang yang mengerjakan shalat (22), Yang mereka itu tetap mengerjakan shalatnya (23), Dan orang-orang yang dalam hartanya tersedia bagian tertentu (24), Bagi orang (miskin) yang meminta dan orang yang tidak mempunyai apa-apa (yang tidak mau meminta)." (QS. Al-Ma'arij/70:19-24).

Dalam ayat tersebut secara tegas Allah menyebutkan bahwa keluh kesah dan kikir itu telah menjadi sifat bawaan manusia sejak dia diciptakan. Bukankah jika seseorang tidak memiliki harta sering berkeluh kesah. Sebaliknya, jika memiliki banyak harta kita sering lebih cenderung untuk kikir. Cara untuk menghindari sifat mengeluh dan kikir adalah Allah menyebutkan paling tidak ada dua jalan, pertama, mengerjakan sembahyang (hablum minallah) secara kontinu. Kedua, menyadari bahwa dalam harta yang kita miliki terkandung bagian tertentu untuk fakir miskin (hablum minannas) (Lubis, 2019).

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan antara lain:

1. Sifat rantai naik pada modul r-Noetherian adalah setiap barisan rantai naik dari r-submodul pada modul r-Noetherian akan berhenti pada suatu langkah berhingga. Artinya, jika diberikan r-submodul $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$, maka terdapat bilangan pulat positif k sehingga $N_k \subseteq N_{k+1} \subseteq N_{k+2} \subseteq \ldots \subseteq N_{k+n}$.
2. Keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian adalah saling subset dan dapat ditulis sebagai berikut. Modul Noetherian ⊆ Modul Hampir Noetherian ⊆ Modul r-Noetherian.

5.2 Saran

Pada skripsi ini peneliti melakukan penelitian terhadap modul r-Noetherian memiliki rantai naik pada setiap r-submodulnya, serta diteliti keterkaitan modul r-Noetherian dengan modul Noetherian dan modul hampir Noetherian. Saran yang dapat diberikan untuk penelitian selanjutnya keterkaitan modul Noetherian dengan modul r-Noetherian yang dibangkitkan secara berhingga dan modul endo Noetherian.

DAFTAR PUSTAKA

Andari, A. (2015). *Teori Grup*. Universitas Brawijaya Press.

Andari, A. (2015). *Pengantar Teori Modul*. Universitas Brawijaya Press.

Anebri, A., & Mahdou, N. (2021). *Commutative rings and modules that are r-Noetherian*. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 58(5), 1221-1233.

Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra: applications version*. John Wiley & Sons.

Armendariz, E. P. (1977). Rings with an almost Noetherian ring of fractions. *Mathematica Scandinavica*, *41*(1), 15-18.

Bland, Paul. 2011. *Rings and Their Modules*. Berlin: De Gruyter.

Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract algebra.* Vol. 3. Hoboken: Wiley.

Faisol, A., Surodjo, B., & Wahyuni, S. (2019, August). The Relation between Almost Noetherian Module, Almost Finitely Generated Module and T-Noetherian Module. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1306, No. 1, p. 012001). IOP Publishing.

Fauziah, M. (2020). *Sifat-Sifat Da'i Dalam Al-Qur'an (Kajian Surah Ali'Imran Ayat 159)*. Jurnal Ilmiah Al-Mu ashirah: Media Kajian Al-Qur'an dan Al-Hadits Multi Perspektif, 17(1), 126-135.

Fitriani. (2013). Ring Noetherian dan Ring Artinian. *Jurnal Sainsmat*,2(1), 79-83.

Gallian, J. A. (2016). *Contemporary Abstract Algebra (ninth edit).* Brooks/Cole Cengage Learning.

Ghoffari, L. H., & Gayatri, M. R. (2023). *Ideal, Gelanggang Faktor Dari Gelanggang Noether*. Fraktal: Jurnal Matematika dan Pendidikan, 4(1), 31-36.

Gillbert, L. dan Gilbert, J. 2009. *Element of Modern Algebra*. Boston: nelson Education, Ltd.

Gilbert, L. (2014). *Elements of modern algebra*. Cengage Learning.

Grillet, P. A. (2007). *Semisimple Rings and Modules*. Abstract Algebra, 359-392.

Hamka. (2003). *Tafsir al- Azhar*, jilid 2, cet. ke- 5. Singapura: Pustaka Nasional, hal.965.

Hamzah, A. (2014). *Evaluasi Pembelajaran Matematika*. Jakarta. PT Raja Grafindo Persada.

Jalwis, J., & Habibie, N. (2023). *Telaah Karakter Pendidikan Multikultural Dalam Al-Qur'an (Studi Terhadap Surat Al-Hujarat Ayat 13)*. Proceedings IAIN Kerinci, 1(1), 100-110.

Kadir, S. M. D. A., & Vahlepi, S. (2021). *Mendalami Informasi dengan Bertabayyun Menurut Al-Qur'an di Tinjau Dari Tafsir Klasik dan Kontemporer*. Jurnal Ilmiah Universitas Batanghari Jambi, 21(2), 825-831.

Kemenag RI. (2024). *Quran Kemenag*. Lajnah Pentasihan Mushaf Al-Quran. https://quran.kemenag.co.id.

Koc, S., & Tekir, Ü. N. S. A. L. (2018). *r-Submodules and sr-Submodules.* Turkish Journal of Mathematics, 42(4), 1863-1876.

Lubis, S. A. S. (2019). Hadis Rasulullah Seputar Komunikasi Antarbudaya. *Jurnal Interaksi: Jurnal Ilmu Komunikasi*, *3*(1), 66-80.

Mardiani, D. (2016). Modul dan keujudan basis pada modul bebas. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, *5*(3), 195-204.

Martasari, S., Arnawa, I. M., & Bakar, N. (2020). Sifat-sifat Modul Noetherian. *Jurnal Matematika UNAND*, *9*(2), 121-129.

Mohamadian, R. (2015). *r-ideals in commutative rings*. Turkish Journal of Mathematics, 39(5), 733-749.

M. Quraish Shihab. (2009). *Tafsir Al-Misbah*, Jakarta: Lentera Hati.

M. Quraish Shihab. (2007). *Tafsir al- Mishbah: Pesan, Kesan dan Keserasian al-Quran*, vol. 2, cet. ke- 8. Jakarta: Lentera hati, hal. 256- 257.

Rasiman, Rubowo, M. R., Pramasdyahsari A. S. (2018). *Teori Grup*. Universitas PGRI Semarang Press.

Roman, S. (2007). *Advance Linear Algebra*. New York: Springer.

Satriani, L. (2018*). Alquran dan etika pergaulan: studi perbandingan Penafsiran qs al-hujurat ayat 10-13*. Doctoral dissertation, IAIN Curup.

Suryanti, S. (2017). *Teori Ring (Struktur Aljabar 2).* UMG Press.

Susanah, M. P. (2014). *Matematika dan Pendidikan Matematika*. Universitas Terbuka.

Tambayong, C. Y., Titaley, J., & Tumilaar, R. (2019). Eksistensi Ruang Vektor Atas Lapangan terhadap Modul Bebas. *Jurnal Ilmiah Sains*, 37-40.

Wahyudi, Kriswandani. 2013. *Pengembangan Pembelajaran Matematika*. Salatiga: Widya Sari Press.

Wahyuni, S., Wijayanti, I. E., Yuwaningsih, D. A., & Hartanto, A. D. (2021). *Teori ring dan modul*. UGM PRESS.

Wardhana, I. G. A. W. (2022). *The Decomposition of a Finitely Generated Module over Some Special Ring*. JTAM (Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika), 6(2), 261-267.

Wattimena, E. M., Patty, H. W., Patty, D., & Rahakbauw, D. L. (2022). *Some Necessary and Sufficient Conditions of Comultiplication Module.* Parameter: Jurnal Matematika, Statistika dan Terapannya, 1(2), 79-84.

Wono Setya Budhi. (1995). Aljabar Linear. Jakarta: Gramedia

Zain, G. (2017). *Konsep tabayun dalam Islam dan kaitannya dengan informasi*. Shaut al-Maktabah: Jurnal Perpustakaan, Arsip Dan Dokumentasi, 9(1), 57-72.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Qurratul Aini Az-Zakiyah, lahir di Malang pada tanggal 22 September 2001, biasa dipanggil Aini. Bertempat tinggal di Desa Mulyoagung, Kecamatan Dau, Kabupaten Malang. Anak pertama dari dua bersaudara. Ayahnya bernama Jupni, ibunya bernama Tatik Rahayu, dan saudara kandungnya bernama Azka Mar'atul Isnain. Pendidikan formal yang telah ditempuhnya yaitu diawali dengan pendidikan sekolah dasar di SDN Dinoyo II Kota Malang dan lulus pada tahun 2014. Melanjutkan pendidikan jenjang sekolah menengah pertama di SMPN 4 Kota Malang dan lulus pada tahun 2017. Selanjutnya, penulis menempuh pendidikan sekolah menengah atas di MAN Kota Batu dan lulus pada tahun 2020. Penulis kembali melanjutkan jenjang pendidikannya di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama menjadi mahasiswi, penulis mengikuti beberapa acara kepanitiaan dan komunitas di program studi matematika. Selain itu, penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) saat masa liburan semester enam di Dinas Sosial Kota Batu pada bidang Program Keluarga Harapan (PKH) di Kecamatan Junrejo.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Qurratul Aini Az-Zakiyah
NIM : 200601110100
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Sifat Rantai Naik pada Modul r-Noetherian serta Keterkaitan Modul r-Noetherian dengan Modul Noetherian dan Modul Hampir Notherian
Pembimbing I : Intan Nisfulaila, M. Si.
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M. Si.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	18 September 2023	Konsultasi Topik dan ACC Judul	1.
2.	3 Oktober 2023	Konsultasi Bab I	2.
3.	17 Oktober 2023	Revisi Bab I	3.
4.	2 November 2023	Revisi Bab I	4.
5.	13 November 2023	Konsultasi Bab II	5.
6.	15 November 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	21 November 2023	Revisi dan Konsultasi Bab II	7.
8.	1 Desember 2023	Revisi dan Konsultasi Bab II	8.
9.	7 Desember 2023	Revisi dan Konsultasi Bab II	9.
10.	12 Desember 2023	Revisi Bab II dan Konsultasi Bab III	10.
11.	13 Desember 2023	Konsultasi Bab III	11.
12.	19 Desember 2023	Revisi Bab III	12.
13.	20 Desember 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	13.
14.	21 Desember 2023	Review Bab I, II, dan III	14.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

15.	8 Januari 2024	Review Bab I, II, dan III	15.
16.	19 Januari 2024	Review Bab I, II, dan III	16.
17.	24 Januari 2024	Review Bab I, II, dan III	17.
18.	1 Februari 2024	Review Bab I, II, dan III	18.
19.	5 Februari 2024	ACC Bab I, II, dan III	19.
20.	8 Maret 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal dan Bab IV	20.
21.	2 Mei 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	21.
22.	3 Mei 2024	Revisi Bab IV dan Konsultasi Bab V	22.
23.	8 Mei 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	23.
24.	13 Mei 2024	ACC Bab IV dan V	24.
25.	3 Juni 2024	Revisi Seminar Hasil	25.
26.	4 Juni 2024	ACC Sidang	26.
27.	26 Juni 2024	ACC Keseluruhan	27.

Malang, 26 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005