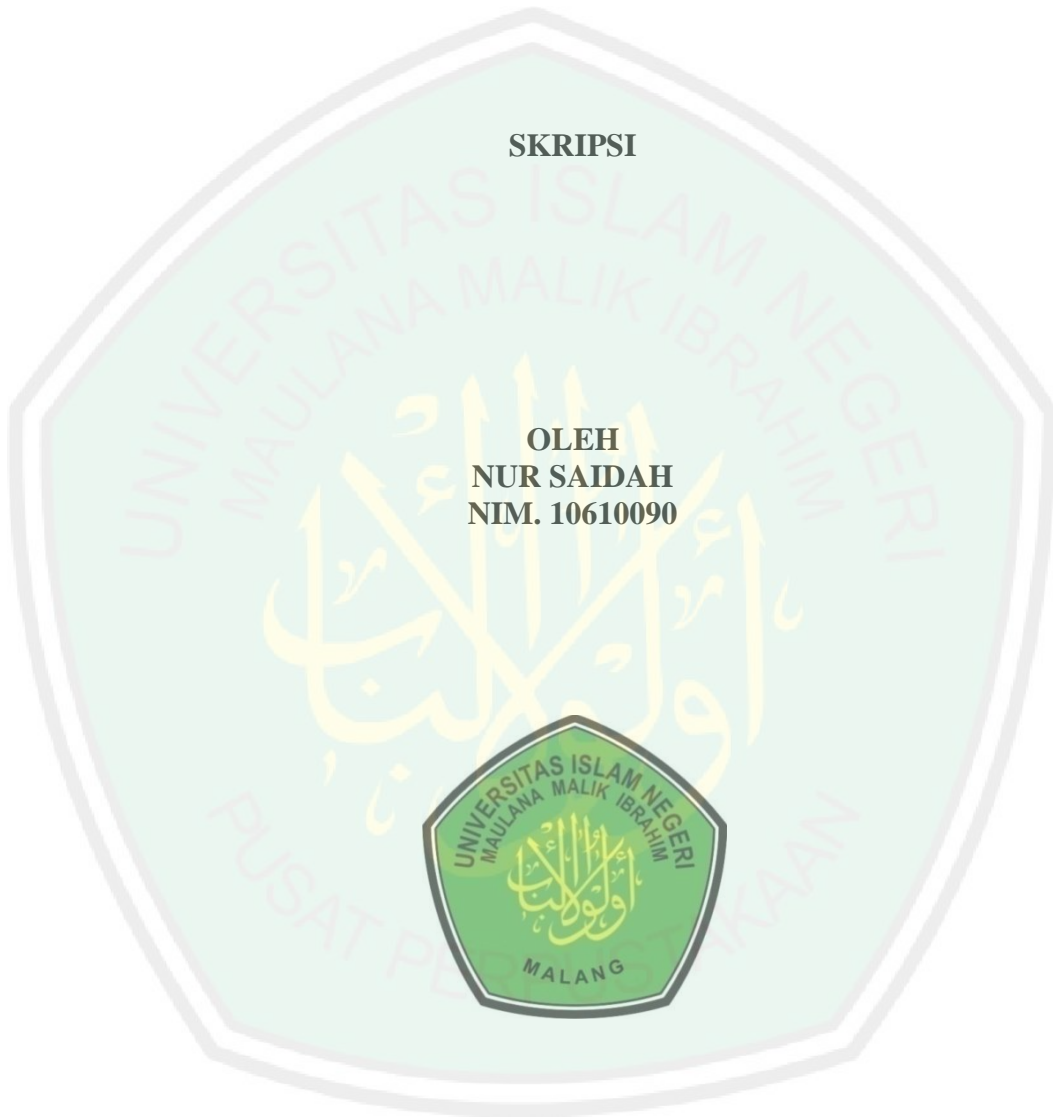


**ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL INTERAKSI PERTUMBUHAN  
ALGA DAN PERUBAHAN KADAR AMONIAK, NITRIT DAN NITRAT**

**SKRIPSI**

**OLEH  
NUR SAIDAH  
NIM. 10610090**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL INTERAKSI PERTUMBUHAN  
ALGA DAN PERUBAHAN KADAR AMONIAK, NITRIT DAN NITRAT**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Nur Saidah  
NIM. 10610090**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**ALGA DAN PERUBAHAN KADAR AMONIAK, NITRIT DAN NITRAT**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Nur Saidah  
NIM. 10610090**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 10 Desember 2014

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

Fachrur Rozi, M.Si  
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**ANALISIS KESTABILAN PADA MODEL INTERAKSI PERTUMBUHAN  
ALGA DAN PERUBAHAN KADAR AMONIAK, NITRIT DAN NITRAT**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Nur Saidah  
NIM. 10610090**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal 07 Januari 2015

Penguji Utama : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd .....

Ketua Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si .....

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si .....

Anggota Penguji : Fachrur Rozi, M.Si .....

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Nur Saidah

NIM : 10610090

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Analisis Kestabilan pada Model Interaksi Pertumbuhan Alga dan Perubahan Kadar Amoniak, Nitrit dan Nitrat

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Januari 2015  
Yang membuat pernyataan,

Nur Saidah  
NIM. 10610090

## MOTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا (٥) إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا (٦)

*“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. al-Insyirah/94:5-6).*



## PERSEMBAHAN

Dengan segenap rasa cinta kasih, skripsi ini penulis persembahkan untuk orang-orang yang sangat berarti serta yang penulis sayangi dan cintai. Kepada ayahanda tercinta bapak Abdul Chalim dan ibunda tercinta ibu Maidah yang selalu mendukung dan mendoakan penulis dalam menyelesaikan studi dan penulisan skripsi ini.

Kepada mas Abdul Azis yang sangat inspiratif dan yang selalu menjadi kebanggaan penulis dan selalu berjuang siang dan malam serta tak pernah lelah untuk memberi teladan yang baik bagi penulis. Kepada kakak-kakak tercinta mas Abu Yazid, neng Uswatun Khasanah, mas Abdullah Abdar, mas Muhammad Nadzir dan adik tersayang Achmad Aldy Mirza Fahmi yang selalu memberi doa, semangat dan dukungan. Muchamad Khikmawan yang selalu memberi semangat, dukungan, nasehat dan arahan serta menyediakan tempat untuk berkeluh-kesah bagi penulis.

## KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Pujisyukur kepada Allah Swt. berkat rahmat dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad Saw. berkat perjuangannya yang telah menghadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar dan berusaha agar menjadi lebih baik.

Dalam menyelesaikan tugas akhir ini penulis telah berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak tugas akhir ini tidak dapat terselesaikan. Dengan iringan doa dan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si selaku pembimbing I yang dengan sabar selalu meluangkan waktu demi memberikan bimbingan, masukan dan arahan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Fachrur Rozi, M.Si selaku pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, masukan dan arahan dalam menyelesaikan skripsi ini.

6. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen wali yang telah memberikan motivasi dan bimbingan.
7. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang banyak memberikan pelajaran.
8. Bapak dan Ibu dosen serta karyawan Fakultas Sains dan Teknologi yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.
9. Kedua orang tua penulis Bapak Abdul Chalim dan Ibu Khamidah yang selalu memberikan kasih sayang, do'a dan semangat kepada penulis.
10. Kakak-kakak Abu Yazid, Uswatun Khasanah, Abdul Azis, Abdullah Abdar, Muhammad Nadzirdanadik Achmad Aldy Mirza Fahmi yang telah mendoakan dan mendukung serta menghibur saat susah dan senang.
11. Muchamad Khikmawan yang telah mendoakan, menemani di saat suka dan duka, memberi semangat, masukan serta arahan kepada penulis.
12. Keluarga besar Arkesa 15 A yang selalu memberi semangat.
13. Teman-teman jurusan Matematika, terutama angkatan 2010.
14. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak dan semoga Allah Swt. membalas kebaikan mereka semua. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, Januari 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>ABSTRACT</b> .....	xv
<b>ملخص</b> .....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	6
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b> .....	8
2.1 Persamaan Diferensialserta Persamaan Diferensial Linier dan Nonlinier ....	8
2.2Sistem Persamaan Diferensial.....	9
2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier dan Non Linier .....	10
2.2.2 SistemPersamaanDiferensialBiasaNonlinier Autonomous .....	10
2.3 Kestabilan Suatu SistemPersamaan.....	11
2.4 Analisis Kestabilan pada Titik Tetap dari Sistem Persamaan Diferensial Nonlinier Autonomous .....	13
2.4.1 Titik Tetap.....	14
2.4.2 Linierisasi.....	16
2.4.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	17
2.5 Alga .....	18
2.6 Siklus Nitrogen dan Asimilasi Nitrogen .....	19

2.7 Hubungan antara Alga, Amoniak, Nitrit dan Nitrat .....	20
2.8 Ekologi, Pemodelan Matematika dan Keseimbangan dalam Islam .....	22
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	<b>25</b>
3.1 Indentifikasi Variabel, Parameter dan Model Matematika .....	25
3.1.1 Indentifikasi Variabel.....	25
3.1.2 Nilai Awal Variabel dan Parameter pada Model .....	26
3.1.3 Indentifikasi Model Matematika .....	27
3.1.4 Interpretasi Model .....	29
3.2 Analisis Kestabilan.....	30
3.2.1 Menentukan Titik Tetap.....	31
3.2.2 Linierisasi dan Analisis Kestabilan pada Titik Tetap .....	34
3.3 Solusi Numerik dan Interpretasi Grafik .....	41
3.4 Simulasi dan Interpretasi Grafik.....	46
3.5 Siklus dan Asimilasi Nitrogen serta Konsep Keseimbangan dalam Perspektif Islam.....	48
<b>BAB IV PENUTUP</b> .....	<b>51</b>
4.1 Kesimpulan.....	51
4.2 Saran .....	52
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	<b>53</b>
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b> .....	<b>55</b>
<b>RIWAYAT HIDUP</b> .....	<b>64</b>

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Nilai Awal Variabel yang Digunakan pada Model.....	27
Tabel 3.2 Nilai Parameter yang Digunakan pada Model .....	27



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Asimilasi Amoniak dan Nitrat oleh Alga .....	22
Gambar 3.1	Interaksi Pertumbuhan Alga dan Perubahan Kadar Amoniak, Nitrit, dan Nitrat .....	25
Gambar 3.2	Grafik Perubahan Pertumbuhan Alga .....	41
Gambar 3.3	Grafik Perubahan Kadar Amoniak .....	41
Gambar 3.4	Grafik Perubahan Kadar Nitrit .....	42
Gambar 3.5	Grafik Perubahan Kadar Nitrat .....	42
Gambar 3.6	Grafik Perubahan Pertumbuhan Alga dengan Pengaruh dan Tanpa Pengaruh Amoniak Sebesar $P$ dan Nitrat Sebesar $(1 - P)$ pada Pertumbuhan Alga .....	44
Gambar 3.7	Grafik Perubahan Kadar Amoniak dengan Pengaruh dan Tanpa Pengaruh Amoniak Sebesar $P$ dan Nitrat Sebesar $(1 - P)$ pada Pertumbuhan Alga .....	44
Gambar 3.8	Grafik Perubahan Kadar Nitrit dengan Pengaruh dan Tanpa Pengaruh Amoniak Sebesar $P$ dan Nitrat Sebesar $(1 - P)$ pada Pertumbuhan Alga .....	45
Gambar 3.9	Grafik Perubahan Kadar Nitrat dengan Pengaruh dan Tanpa Pengaruh Amoniak Sebesar $P$ dan Nitrat Sebesar $(1 - P)$ pada Pertumbuhan Alga .....	45
Gambar 3.10	Grafik Simulasi Perubahan Pertumbuhan Alga dengan $P = 0,02$ ; $P = 0,07$ dan $P = 0,12$ .....	46
Gambar 3.11	Grafik Simulasi Perubahan Kadar Amoniak dengan $P = 0,02$ ; $P = 0,07$ dan $P = 0,12$ .....	46
Gambar 3.12	Grafik Simulasi Perubahan Kadar Nitrit dengan $P = 0,02$ ; $P = 0,07$ dan $P = 0,12$ .....	47
Gambar 3.13	Grafik Simulasi Perubahan Kadar Nitrat dengan $P = 0,02$ ; $P = 0,07$ dan $P = 0,12$ .....	47

## ABSTRAK

Saidah, Nur. 2015. **Analisis Kestabilan pada Model Interaksi Pertumbuhan Alga dan Perubahan Kadar Amoniak, Nitrit dan Nitrat**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si (II) Fachrur Rozi, M.Si

**Kata kunci:** pertumbuhan alga, perubahan kadaramoniak, nitrit dan nitrat, analisis kestabilan, analisis perilaku.

Model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat membentuk suatu sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu autonomous dengan empat variabel bergantung waktu, yaitu alga  $A(t)$ , amoniak  $N_1(t)$ , nitrit  $N_2(t)$  dan nitrat  $N_3(t)$ . Berdasarkan hal tersebut maka penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan dari model tersebut dan menganalisis perilaku setiap variabel dengan bantuan software Maple dan Matlab 2008.

Pada penelitian ini mula-mula dilakukan identifikasi variabel dan parameter pada model. Selanjutnya dilakukan linierisasi pada sistem untuk mendapatkan nilai eigen dari sistem yang terlinierisasi. Kemudian dilakukan analisis perilaku dari setiap variabel yang ada pada model.

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa hanya terdapat satu titik tetap, yang pada keadaan ini sistem pada model dinyatakan stabil berdasarkan nilai-nilai eigen yang dihasilkan. Nilai-nilai eigen  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  yang diperoleh merupakan anggota bilangan kompleks dengan bagian real negatif, maka sistem tersebut stabil asimtotik. Sedangkan berdasarkan hasil simulasi, dilakukan analisis perilaku yang menunjukkan bahwa ketika faktor preferensi amoniak ( $P$ ) ditingkatkan maka amoniak yang digunakan oleh alga juga meningkat sehingga pertumbuhan alga juga meningkat. Penggunaan amoniak yang semakin besar menyebabkan kadar amoniak menurun sehingga hasil oksidasi amoniak menjadi nitrit dan nitrat juga menurun. Sedangkan ketika faktor preferensi amoniak ( $P$ ) diturunkan, maka amoniak yang digunakan oleh alga juga menurun sehingga pertumbuhan alga juga mengalami penurunan. Penggunaan amoniak yang semakin kecil menyebabkan kadar amoniak meningkat sehingga hasil oksidasi amoniak menjadi nitrit dan nitrat juga meningkat.

## ABSTRACT

Saidah, Nur. 2015. **Stability Analysis of Growth Interaction Model of Alga and Rate Change of Ammonia, Nitrite and Nitrate**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Supervisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si (II) Fachrur Rozi, M.Si

**Key word:** growth of alga, rate change of ammonia, nitrite and nitrate, stability analysis, behaviour analysis.

Growth interaction model of alga and rate change of ammonia, nitrite and nitrate is a first order autonomous nonlinear system of differential equation with four time dependent variables, that is alga ( $A(t)$ ), ammonia ( $N_1(t)$ ), nitrite ( $N_2(t)$ ) and nitrate ( $N_3(t)$ ). Based on the problem, this research intent to analyze stability of the model and behavior of each variables with Maple and Matlab 2008.

In this study, the variables and parameters in the model are initially identified. Linearization is then performed on the system to get the eigenvalues of the linearized system. Then the behavior analysis of any existing variables in the model.

The results of this study indicate that there was only one fixed point, where on this situation system is stable based on the resulting eigen values. Eigen values ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ) is member of complex number with real part is negative, therefore that system is asymptotically stable. Based on the simulation result, the performed behaviour analysis shows that while ammonia factor preference ( $P$ ) improved, ammonia which is utilized by alga also increases so does alga growth. The greater ammonia causes ammonia rate is decrease, and ammonia oxidation result becomes nitrite and nitrate also decreases. While preference factor of ammonia ( $P$ ) decrease, ammonia which utilized by alga also decrease so alga growth is decrease too. The smaller the use of ammonia, the more the ammonia increases. This resulted in the increase of ammonia oxidation into nitrite and nitrate.

## ملخص

سعيدة، نور. ٢٠١٥. تحليل الاستقرار للنموذج التفاعل من نمو الطحالب وتغير مستويات الأمونيا، النتريت والنترات. بحث جامعي قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. مشرف: (١) الدكتور عثمانفكالاوي، ماجستير (٢) فحرالرازي، ماجستير.

الكلمات الرئيسية: نماذج الطحالب، تغيرات مستويات الأمونيا والنتريت والنترات، تحليل الاستقرار، لتحليل السلوك.

نماذج التفاعل لنمو الطحالب وتغيرات مستويات الأمونيا والنتريت والنترات تشكيل نظام المعادلات التفاضلية غير الخطية من الرتبة الأولى مستقل مع أربعة متغيرات تعتمد على الوقت وهي الطحالب ( $A(t)$ )، الأمونيا ( $N_1(t)$ ) والنتريت ( $N_2(t)$ )، والنترات ( $N_3(t)$ ). في ظل هذه الظروف، وتهدف هذه الدراسة إلى تحليل الاستقرار للنموذج وتحليل سلوك كل متغير مع مساعدة البرمجيات  $\text{IpaMe}$  و  $\text{baltaM}$  ٨ .٢٠٠

في هذه الدراسة اكتشف مرة المتغيرات والمعلومات في النموذج أولاً. ثم يتم تنفيذ الخطية على النظام للحصول على القيم الذاتية للنظام الخطية. ثم قيم بتحليل السلوك لكل أية متغير في النموذج. نتائج هذه الدراسة تشير إلى أن هناك نقطة ثابتة واحدة فقط، وهو في هذه الحالة نموذج نظام مستقر إلا على أساس القيم الذاتية المحسولة. القيم الذاتية ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ) التي حصل عليها عضو في عدد معقدة مع جزء حقيقي سلبي، فكاف نظام مستقر مقارب. بناء على نتائج المحاكاة، تحليل السلوك الذي يدل على أنه عندما زاد عامل تفضيل الأمونيا، الأمونيا المستخدمة من قبل الطحالب إدت بحيث زيادة نمو الطحالب. زيادة استخدام الأمونيا يسبب انخفاض مستويات الأمونيا بحيث أكسدة الأمونيا إلى نترات، وانخفض أيضا نترات. وفي الوقت نفسه، عندما عامل تفضيل تستمد الأمونيا، ثم الأمونيا الذي يستخدم من قبل الطحالب انخفضت أيضا بحيث نمو الطحالب انخفض أيضا. استخدام متزايد الأمونيا مما تسبب في أصغر مستويات الأمونيا في الارتفاع بحيث أكسدة الأمونيا إلى نتريت ونترات زادت أيضا.



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Alga merupakan organisme tingkat rendah yang bersifat eukariotik dan memiliki klorofil. Berdasarkan jumlah selnya, alga terdiri dari organisme uniseluler dan multiseluler. Alga mampu mengabsorpsi nutrisi dari lingkungan sekitarnya dan berfotosintesis. Karena dapat berfotosintesis, maka alga digolongkan sebagai organisme photoautrophic (Ali, 2013:11).

Nitrogen merupakan senyawa yang biasanya berbentuk amonium, amoniak, nitrit dan nitrat. Nitrogen merupakan suatu senyawa yang biasanya berbentuk senyawa terlarut. Siklus nitrogen merupakan serangkaian proses yang mendeskripsikan transformasi nitrogen. Adanya siklus nitrogen (nitrifikasi) akan menyebabkan amoniak teroksidasi menjadi nitrit oleh bakteri *Nitrocomonas* yang kemudian teroksidasi menjadi nitrat oleh bakteri *Nitrocobacter*. Nitrat yang terbentuk merupakan nutrisi utama bagi pertumbuhan alga di perairan. Alga menggunakan amoniak dan nitrat untuk berfotosintesis. Peristiwa ini dinamakan asimilasi amoniak dan nitrat oleh alga. Penggunaan nitrat dan amoniak yang berlebihan dapat menyebabkan terjadinya eutrofikasi dan dapat memacu pertumbuhan alga secara pesat. Hal ini dapat mengurangi dan menghalangi masuknya cahaya matahari ke dalam perairan. Nitrat yang terdapat di perairan dalam jangka waktu yang lama dapat membahayakan kelangsungan hidup makhluk di dalamnya.

Pada penelitian sebelumnya, dalam karya tulis yang berjudul “*Konstruksi Model Dinamik Pertumbuhan Alga dan Pengaruhnya pada Perubahan Kadar Nitrogen*” Widowati, dkk, (2010:386-394) mengkaji adanya pengaruh pertumbuhan alga pada perubahan kadar nitrogen yaitu amoniak, nitrit dan nitrat. Penelitian tersebut mempresentasikan adanya hubungan antara pertumbuhan alga dengan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat dalam sistem persamaan diferensial nonlinier, selanjutnya dilakukan analisis kestabilan pada sistem persamaan tersebut. Dalam penelitian tersebut tidak dipresentasikan adanya faktor nitrogen (amoniak dan nitrat) yang dapat mempengaruhi pertumbuhan alga sedangkan alga menggunakan sejumlah amoniak ( $\text{NO}_3$ ) dan nitrat ( $\text{NH}_3$ ) untuk pertumbuhannya karena amoniak dan nitrat merupakan nutrisi utama bagi pertumbuhan alga (Ali, 2013:20).

Beberapa faktor yang dapat mempengaruhi pertumbuhan alga diantaranya adalah nitrogen dalam bentuk amoniak dan nitrat yang digunakan alga untuk berfotosintesis. Penggunaan amoniak dan nitrat oleh alga ini dinamakan proses asimilasi nitrogen (amoniak dan nitrat) oleh alga. Selanjutnya berdasarkan adanya siklus nitrogen, Brown dan Barnwell (1987:1-33) membahas perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat dengan melibatkan proses asimilasi nitrogen (amoniak dan nitrat) oleh alga. Banyaknya kadar amoniak dan nitrat yang digunakan oleh alga didasarkan pada faktor preferensi amoniak ( $P$ ) yang digunakan oleh alga sehingga jika pada waktu  $t$  amoniak yang digunakan adalah sebesar  $P$ , maka nitrat yang digunakan adalah sebesar  $(1-P)$ . Hal ini menunjukkan bahwa parameter  $P$  sangat berpengaruh pada pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat.

Dalam karya tulis lainnya yang berjudul “*Mathematical Modeling and Analysis of Ammonia, Nitrite and Nitrate Concentration: Case Study in The Polder Tawang Semarang, Indonesia*”, Widowati, dkk, (2009:1-9) telah membuat dan menganalisis model matematika pada perubahan kadar amoniak, nitrit, dan nitrat melalui eksperimen yang dilakukan di laboratorium dengan sampel yang berasal dari perairan Polder Tawang Semarang. Model tersebut dibentuk berdasarkan proses transformasi nitrogen dalam proses nitrifikasi, sehingga membentuk sistem persamaan diferensial linier orde satu.

Allah Swt. telah menciptakan seluruh jagat raya ini beserta seluruh isinya dengan sangat sempurna. Tidak ada satupun ciptaan Allah Swt. di dunia ini yang diciptakan tanpa disertai adanya manfaat dan tujuannya. Nitrogen dalam bentuk amoniak dan nitrat yang terdapat di perairan sebagai hasil ekskresi hewan-hewan yang ada di perairan digunakan oleh alga untuk berkembang biak. Penggunaan amoniak dan nitrat oleh alga ini merupakan salah satu bentuk penjagaan keseimbangan yang ada di bumi oleh Allah Swt. Jika nitrogen yang ada di perairan ini terus bertambah tanpa digunakan, maka akan memberikan dampak negatif bagi lingkungan. Oleh karena itu, untuk menanggulangi hal tersebut Allah Swt. telah menciptakan suatu siklus yang dikenal sebagai siklus nitrogen dan asimilasi amoniak dan nitrat oleh alga. Semua ini terjadi secara otomatis dan terus-menerus tanpa adanya campur tangan dan bantuan manusia, sebagaimana firman Allah Swt. dalam Q.S al-Nisa/4:132, yaitu:

وَلِلَّهِ مَا فِي السَّمَاوَاتِ وَمَا فِي الْأَرْضِ وَكَفَى بِاللَّهِ وَكِيلًا (١٣٢)

Artinya: “Dan kepunyaan Allah apa yang di langit dan apa yang di bumi. Dan cukuplah Allah sebagai Pemelihara” (Q.S al-Nisa/4:132).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah Swt. telah menunjukkan keagungan-Nya dengan menciptakan segala sesuatu yang ada di langit dan di bumi, termasuk berbagai macam makhluk yang hidup di darat maupun di air dan Allah Swt. yang menjaganya agar tetap seimbang. Makhluk hidup yang ada di perairan mengekskresi amoniak kemudian oleh bakteri *Nitrocomonas* dan *Nitrocobacter* diubah menjadi nitrit dan nitrat. Amoniak dan nitrat menjadi sumber nutrisi utama yang dibutuhkan oleh tumbuhan yang ada di perairan, terutama oleh alga. Amoniak dan nitrat digunakan oleh alga dengan ukuran tertentu untuk berfotosintesis. Tumbuhan dan alga yang ada di dalam perairan selanjutnya menjadi sumber makanan bagi hewan-hewan yang ada di perairan tersebut.

Berdasarkan uraian tersebut, penulis membahas dan mengkaji model pada interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat pada penelitian yang dilakukan oleh Widowati, dkk, (2010:386-394) dengan menambahkan pengaruh amoniak sebesar  $P$  dan nitrat sebesar  $(1 - P)$  pada pertumbuhan alga. Model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat yang stabil akan membentuk suatu lingkungan yang seimbang. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis akan menguraikan interaksi antara variabel pertumbuhan alga, perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat sehingga pada penelitian ini akan didapatkan empat persamaan diferensial orde satu yang membentuk suatu sistem persamaan diferensial nonlinier. Oleh karena itu penulis memilih judul “*Analisis Kestabilan pada Model Interaksi Pertumbuhan Alga dan Perubahan Kadar Amoniak, Nitrit dan Nitrat*”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana analisis kestabilan dari model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat.

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui analisis kestabilan dari model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat.

## 1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penulisan penelitian ini antara lain untuk memperdalam pengetahuan mengenai model matematika dari persamaan diferensial dan implementasinya di berbagai bidang serta sebagai tambahan wawasan dan informasi seputar analisis model matematika.

## 1.5 Batasan Masalah

Model matematika dan parameter yang digunakan dalam penelitian ini merujuk pada karya tulis yang berjudul "*Konstruksi Model Dinamik Pertumbuhan Alga dan Pengaruhnya pada Perubahan Kadar Nitrogen*", karya Widowati, dkk, (2010:386-394). Pertumbuhan alga dapat dipengaruhi oleh beberapa faktor, namun pada penelitian ini penulis hanya akan meneliti satu faktor yang berpengaruh yaitu nitrogen (amoniak dan nitrat) berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Brown dan Barnwell (1987:1-33) yang berjudul "*The Enhanced*

*Stream Water Quality Models Qual2E and Qual2E-Uncas: Documentation and User Manual*". Sedangkan nilai awal variabel pada penelitian ini merujuk pada karya tulis yang berjudul "*Mathematical Modeling and Analysis of Ammonia, Nitrite and Nitrate Concentration: Case Study in The Polder Tawang Semarang, Indonesia*", karya Widowati, dkk, (2009:1-9).

### **1.6 Metode Penelitian**

Metode yang digunakan adalah studi literatur, yaitu dengan menelaah buku, jurnal dan referensi lain yang mendukung. Secara rinci, langkah penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Mengidentifikasi variabel, parameter dan model matematika.
2. Menentukan titik tetap dari model matematika.
3. Melinierisasi sistem persamaan nonlinier pada model matematika.
4. Menentukan nilai eigen dari sistem persamaan yang terlinierisasi dengan bantuan software Maple dan menentukan jenis kestabilannya.
5. Menentukan solusi numerik dan simulasi pada model dengan bantuan software Matlab 2008.
6. Menginterpretasi dan menganalisis hasil grafik.
7. Membuat kesimpulan

### **1.7 Sistematika Penulisan**

Penulisan penelitian ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri atas sub bab sebagai berikut:

## BAB I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

## BAB II Kajian Pustaka

Pada bab dua ini memberikan kajian-kajian yang menjadi landasan masalah yang dibahas, yaitu persamaan diferensial serta persamaan diferensial linier dan nonlinier, sistem persamaan diferensial, kestabilan suatu sistem persamaan, analisis kestabilan pada titik tetap dari sistem persamaan diferensial biasa nonlinier autonomous, alga, siklus nitrogen dan asimilasi nitrogen, hubungan antara alga, amoniak, nitrit dan nitrat, serta ekologi, pemodelan matematika dan keseimbangan dalam islam.

## BAB III Pembahasan

Bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian. Selain itu, akan dibahas masalah mengenai siklus nitrogen dan asimilasi nitrogen serta konsep keseimbangan dalam perspektif Islam.

## BAB IV Penutup

Bab empat ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan dan beberapa saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penelitian dalam penelitian ini.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Persamaan Diferensial serta Persamaan Diferensial Linier dan Nonlinier

##### Definisi 1:

Sebuah persamaan yang mengandung derivatif (diferensial) dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial (PD). Jika hanya satu variabel bebasnya, maka persamaannya disebut persamaan diferensial biasa. Sedangkan jika variabel bebasnya lebih dari satu maka persamaannya disebut persamaan diferensial parsial (Baiduri, 2002:2).

Model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat adalah sebagai berikut:

$$\frac{dA(t)}{dt} = (PN_1(t) + (1 - P)N_3(t))\delta A(t) - \frac{\delta A(t)^2}{K} \quad (2.1)$$

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -k_1N_1(t) + \frac{\sigma_2}{d} - \left( \frac{PN_1(t)}{PN_1(t) + (1-P)N_3(t)} \right) \alpha\mu A(t) \quad (2.2)$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = k_1N_1(t) - k_2N_2(t) \quad (2.3)$$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = k_2N_2(t) - \frac{(1-P)N_3(t)}{PN_1(t) + (1-P)N_3(t)} \alpha\mu A(t) \quad (2.4)$$

Berdasarkan uraian tersebut, persamaan (2.1), (2.2), (2.3) dan (2.4) merupakan contoh dari persamaan diferensial biasa (PDB) yang terdiri dari lebih dari satu variabel terikat dan satu variabel bebas  $t$ .

##### Definisi 2:

Persamaan diferensial linier ialah persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah tak bebas dan turunan-turunannya, yaitu persamaan diferensial yang berbentuk:

$$a_m(x) \frac{d^m y}{dx^m} - a_{m-1}(x) \frac{d^{(m-1)}y}{dx^{(m-1)}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = r(x) \quad (2.6)$$

Dengan  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  didefinisikan pada suatu selang I (Pamuntjak, 1990:1).

Jika  $\exists x \in I, \exists a_i(x) \neq 0$  maka persamaan tersebut adalah persamaan linier tingkat  $m$ . Selanjutnya persamaan diferensial yang bukan persamaan diferensial linier disebut persamaan diferensial nonlinier. Dengan demikian persamaan diferensial  $F = (x, y, y', \dots, y^m) = 0$  adalah persamaan nonlinier, jika salah satu dari yang berikut ini dipenuhi oleh  $F$ :

- a.  $F$  tidak berbentuk polinomial dalam  $y, y', \dots, y^m$
- b.  $F$  berbentuk polinomial berpangkat  $\geq 2$  dalam  $y, y', \dots, y^m$  (Pamuntjak, 1990:1).

Berdasarkan uraian tersebut, dapat diketahui bahwa pada model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat persamaan (2.1), (2.2) dan (2.4) merupakan contoh persamaan diferensial nonlinier. Sedangkan persamaan (2.3) merupakan contoh dari persamaan diferensial linier.

## 2.2 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang terdiri atas lebih dari satu persamaan diferensial yang saling terkait. Finizio dan Ladas (1982:132) menyatakan bahwa “Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat  $n$  persamaan diferensial dengan  $n$  fungsi yang tidak diketahui dengan  $n$  merupakan bilangan bulat positif lebih besar atau sama dengan 2”.

Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial orde pertama adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.7)$$

dengan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel bebas dan  $t$  adalah variabel terikat, sehingga  $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_n = x_n(t)$  dengan  $\frac{dx_n}{dt}$  merupakan derivatif fungsi  $x_n$  terhadap  $t$  dengan  $g_n$  adalah fungsi yang tergantung pada variabel  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan  $t$  (Claudia, 2004:702). Berdasarkan uraian tersebut, dapat diketahui bahwa model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat membentuk suatu sistem persamaan diferensial.

### 2.2.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier dan Nonlinier

#### Definisi 3:

Sistem persamaan diferensial linier adalah sistem persamaan yang terdiri lebih dari satu persamaan diferensial linier yang saling terkait. Sedangkan sistem persamaan diferensial nonlinier adalah persamaan yang terdiri atas lebih dari satu persamaan diferensial linier maupun linier dan nonlinier yang saling terkait. Berdasarkan hal tersebut, dapat diketahui bahwa model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier karena setiap persamaannya saling berkaitan, dengan persamaan (2.1), (2.2) dan (2.4) merupakan persamaan diferensial nonlinier sedangkan persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial linier.

### 2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier Autonomous

Sistem persamaan diferensial biasa nonlinier merupakan suatu sistem persamaan yang terdiri atas lebih dari satu persamaan diferensial biasa nonlinier atau linier dan nonlinier. Sistem persamaan diferensial biasa dikatakan autonomous jika waktu  $t$  secara eksplisit tidak muncul pada fungsi  $f$ . Tetapi jika

sebaliknya, maka dikatakan sistem tersebut nonautonomous (Iswanto, 2012:3). Berdasarkan pernyataan tersebut, maka model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat termasuk sistem persamaan diferensial nonlinier autonomous karena waktu  $t$  secara eksplisit tidak muncul pada setiap fungsi pada sistem persamaan diferensial nonlinier tersebut.

### 2.3 Kestabilan Suatu Sistem Persamaan

Tanggapan suatu sistem stabil dapat dikenali dari adanya peralihan yang menurun menuju nol terhadap pertambahan waktu. Sehingga untuk mendapatkan sebuah sistem yang stabil, koefisien-koefisien dari suku eksponensial yang terdapat dalam tanggapan peralihan tersebut harus merupakan bilangan-bilangan real yang negatif atau bilangan kompleks dengan bagian real adalah negatif. Hal ini menunjukkan bahwa jika nilai eigen yang dihasilkan mempunyai bagian real yang positif, maka mengakibatkan perubahan akan bertambah besar terhadap pertambahan waktu. Dengan kata lain, titik tetap dari suatu sistem persamaan diferensial dikatakan stabil jika semua bagian real dari nilai eigen matriks  $J$  adalah negatif (Tu, 1994:3).

Kestabilan dan jenis kestabilan dari suatu sistem persamaan dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen. Distefano (1992) dalam Darmawansyah (2012:17) membagi jenis kestabilan titik tetap (0,0) menjadi 5 macam, yaitu:

1. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah real berbeda dan berlawanan tanda ( $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ) maka  $x \rightarrow \infty$  dan  $y \rightarrow \infty$  jika  $t \rightarrow \infty$  dan titik tetap sistem dinamakan *saddle* (pelana). Akibatnya titik tetap tidak stabil.

2. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah real berbeda dan sama tanda, maka titik tetap dinamakan *node* (simpul). Jika kedua nilai eigen negatif ( $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ) maka titik tetapnya stabil (asimtotik), yaitu  $x \rightarrow 0$  dan  $y \rightarrow 0$  jika  $t \rightarrow \infty$  dan jika keduanya positif ( $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ) maka titik tetap tidak stabil yaitu  $x \rightarrow \infty$  dan  $y \rightarrow \infty$  jika  $t \rightarrow \infty$ .
3. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah real sama, maka titik tetap dinamakan *star*. Jika kedua nilai eigen negatif ( $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ) maka titik tetap *star* stabil (asimtotik), dan jika keduanya positif ( $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ) maka titik tetap *star* tak stabil.
4. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah kompleks konjugat  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , maka titik tetap dinamakan *focus* (spiral). Sistem dikatakan stabil (asimtotik) untuk  $\alpha < 0$ , tidak stabil untuk  $\alpha > 0$ . Dengan  $\alpha$  adalah anggota bilangan real.
5. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah imajiner sejati yaitu  $\lambda_{1,2} = i\beta$  maka titik tetap dinamakan *centre* (pusat). Titik tetap sistem adalah stabil netral.

Berdasarkan pernyataan tersebut, maka kestabilan titik tetap ( $A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)$ ) pada model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat berdasarkan nilai eigen ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ ) yang dihasilkan dibagi menjadi 5 macam, yaitu:

1. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah real berbeda dan berlawanan tanda ( $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_4$ ) maka  $A(t) \rightarrow \infty, N_1(t) \rightarrow \infty, N_2(t) \rightarrow \infty$  dan  $N_3 \rightarrow \infty$  jika  $t \rightarrow \infty$  sehingga titik tetap sistem dinamakan *saddle* (pelana) dan bersifat tidak stabil.
2. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah real berbeda dan sama tanda, maka titik tetap dinamakan *node* (simpul). Jika keempat nilai eigen negatif

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 < 0)$  maka titik tetapnya stabil (asimtotik), yaitu  $A(t) \rightarrow 0, N_1(t) \rightarrow 0, N_2(t) \rightarrow 0$  dan  $N_3 \rightarrow 0$  jika  $t \rightarrow \infty$  dan jika keempatnya positif  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 > 0)$  maka titik tetap tidak stabil yaitu  $A(t) \rightarrow \infty, N_1(t) \rightarrow \infty, N_2(t) \rightarrow \infty$  dan  $N_3 \rightarrow \infty$  jika  $t \rightarrow \infty$ .

3. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah real sama, maka titik tetap dinamakan *star*. Jika keempat nilai eigen negatif  $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 < 0)$  maka titik tetap *star* stabil (asimtotik), dan jika keempatnya positif  $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 > 0)$  maka titik tetap *star* tak stabil.
4. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah kompleks konjugat  $\lambda_{1,2,3,4} = \alpha \pm i\beta$ , maka titik tetap dinamakan *focus* (spiral) yaitu stabil (asimtotik) untuk  $\alpha < 0$ , tidak stabil untuk  $\alpha > 0$ . Dengan  $\alpha$  adalah anggota bilangan real.
5. Jika nilai eigen dari matriks  $J$  adalah imajiner sejati yaitu  $\lambda_{1,2,3,4} = i\beta$  maka titik tetap dinamakan *centre* (pusat). Titik tetap sistem adalah stabil netral.

#### 2.4 Analisis Kestabilan pada Titik Tetap dari Sistem Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier Autonomus

Model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat membentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu autonomous. Suatu sistem persamaan diferensial nonlinier tidak selalu mudah diselesaikan secara eksplisit, namun dapat diaproksimasi melalui sistem pelinierannya. Kestabilan titik kesetimbangan dari sistem nonlinier ditentukan dengan terlebih dahulu melakukan linearisasi di sekitar titik tetapnya. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk pelinieran sistem persamaan diferensial nonlinier adalah dengan menggunakan deret Taylor. Linearisasi sistem persamaan diferensial nonlinier tersebut menghasilkan matriks Jacobi. Kestabilan titik tetap

serta jenis kestabilan sistem dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen yang dihasilkan (Boyce dan DiPrima, 1999:459).

### 2.4.1 Titik Tetap

Menurut Finizio dan Ladas (1982:291), misalkan  $\dot{x}$  dan  $\dot{y}$  merupakan sistem autonomous, maka:

$$\dot{x} = f(x, y) \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (2.8)$$

Titik  $(x_0, y_0)$  merupakan titik tetap dari sistem (2.8) jika  $f(x_0, y_0) = 0$  dan  $g(x_0, y_0) = 0$ , maka turunan konstantanya sama dengan nol. Akibatnya jika titik  $(x_0, y_0)$  merupakan titik-titik konstanta dari persamaan (2.8), maka:

$$x(t) = x_0 \quad \text{dan} \quad y(t) = y_0 \quad (2.9)$$

#### Definisi 4:

Titik tetap  $(x_0, y_0)$  dari suatu sistem persamaan disebut stabil jika untuk setiap bilangan  $\epsilon$  positif dan suatu  $\delta$  positif sedemikian sehingga setiap penyelesaian  $(x(t), y(t))$  dari suatu persamaan pada  $t = 0$  memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \delta \quad (2.10)$$

dan

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \epsilon \quad (2.11)$$

untuk semua  $t \geq 0$  (Finizio dan Ladas, 1982:292).

#### Definisi 5:

Sebuah titik tetap  $(x_0, y_0)$  disebut stabil asimtotik jika titik itu stabil dan suatu  $\delta_0$  positif sedemikian sehingga setiap penyelesaian  $(x(t), y(t))$  dari suatu sistem persamaan pada  $t = 0$  memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \delta_0 \quad (2.12)$$

untuk semua  $t \geq 0$  dan

$$\lim_{t \rightarrow x} x(t) = x_0 \quad \text{dan} \quad \lim_{t \rightarrow y} y(t) = y_0 \quad (2.13)$$

(Finizio dan Ladas, 1982:291).

Berdasarkan uraian tersebut, maka dapat diketahui bahwa jika persamaan (2.1) sampai (2.4) membentuk sebuah sistem persamaan dan dimisalkan

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= f_1(A(t), N_1(t), N_2(t), N_3(t)) \\ \frac{dN_1(t)}{dt} &= f_2(A(t), N_1(t), N_2(t), N_3(t)) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= f_3(A(t), N_1(t), N_2(t), N_3(t)) \\ \frac{dN_3(t)}{dt} &= f_4(A(t), N_1(t), N_2(t), N_3(t)) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Titik  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$  merupakan titik tetap dari sistem (2.14) jika:  $f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = 0$ ,  $f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = 0$ ,  $f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = 0$  dan  $f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = 0$  maka turunan kostantanya sama dengan nol. Akibatnya jika titik  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$  merupakan titik-titik konstanta dari persamaan (2.14), maka fungsi konstantanya adalah

$$A(t) = A^*(t), \quad N_1(t) = N_1^*(t), \quad N_2(t) = N_2^*(t), \quad N_3(t) = N_3^*(t) \quad (2.15)$$

Titik tetap  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$  dari sistem persamaan (2.14) disebut stabil jika untuk setiap bilangan  $\epsilon > 0$  dan  $\delta > 0$  sedemikian sehingga setiap penyelesaian  $(A(t), N_1(t), N_2(t), N_3(t))$  dari persamaan (2.14) pada  $t = 0$  memenuhi

$$[A(0) - A^*(t)]^2 + [N_1(0) - N_1^*(t)]^2 + [N_2(0) - N_2^*(t)]^2 + [N_3(0) - N_3^*(t)]^2 < \delta \quad (2.16)$$

serta

$$[A(0) - A^*(t)]^2 + [N_1(0) - N_1^*(t)]^2 + [N_2(0) - N_2^*(t)]^2 + [N_3(0) - N_3^*(t)]^2 < \epsilon \quad (2.17)$$

untuk semua  $t \geq 0$ .

Titik tetap  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$  disebut stabil asimtotik jika titik itu stabil dan jika  $\delta_0$  positif sedemikian sehingga setiap penyelesaian  $(A(t), N_1(t), N_2(t), N_3(t))$  dari sistem persamaan (2.14) pada  $t = 0$  memenuhi

$$[A(0) - A^*(t)]^2 + [N_1(0) - N_1^*(t)]^2 + [N_2(0) - N_2^*(t)]^2 + [N_3(0) - N_3^*(t)]^2 < \delta_0 \quad (2.18)$$

untuk semua  $t \geq 0$  dan

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow A(t)} A(t) &= A^*(t) & \lim_{t \rightarrow N_2(t)} N_2(t) &= N_2^*(t) \\ \lim_{t \rightarrow N_1(t)} N_1(t) &= N_1^*(t) & \lim_{t \rightarrow N_3(t)} N_3(t) &= N_3^*(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

**Definisi 6:**

Sebuah titik yang tidak stabil disebut tak stabil (Finizio dan Ladas, 1982:291).

**2.4.2 Linierisasi**

Linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial nonlinier dengan persamaan diferensial linier untuk membantu memahami persamaan diferensial nonlinier. Suatu sistem autonomus sebagaimana berikut

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2.20)$$

dimana  $f$  dan  $g$  adalah nonlinier (Boyce dan DiPrima, 1999:471). Selanjutnya akan dicari pendekatan pada sistem linier di sekitar titik tetap  $(x^*, y^*)$  dengan deret Taylor di sekitar titik tetap  $(x^*, y^*)$  dan akan menghilangkan suku nonliniernya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Misalnya  $(x - x^*) = u$  dan  $(y - y^*) = v$  maka  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$  dan  $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$  pada

keadaan setimbang  $f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$ , kemudian disubstitusikan pada persamaan (2.20) sehingga diperoleh sistem persamaan linier

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)v\end{aligned}\quad (2.22)$$

Sistem persamaan (2.22) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\quad (2.23)$$

Sehingga sistem persamaan linier pada titik tetap  $(x^*, y^*)$  diberikan dengan

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\quad (2.24)$$

dimana semua turunan parsial di dalam matriks dievaluasi pada  $(x^*, y^*)$ . Maka didapatkan matriks Jacobi

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}\quad (2.25)$$

### 2.4.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

#### Definisi 7:

Untuk suatu matriks  $J_{n \times n}$ , suatu bilangan real  $\lambda$  disebut nilai eigen dari matriks  $J$  jika terdapat vektor tak nol  $x$  di  $\mathbb{R}^n$  sedemikian sehingga  $Jx = \lambda x$

ekuivalen dengan persamaan  $(J - \lambda I)x = 0$ , sehingga pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:

1.  $\lambda$  adalah nilai eigen dari matriks  $J$
2.  $(J - \lambda I)x = 0$  mempunyai solusi trivial
3.  $J - \lambda I$  adalah singular
4.  $\det(J - \lambda I) = 0$  (Zahnur, 2012:1-2).

Vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$  adalah solusi tak nol  $x$  untuk persamaan  $(J - \lambda I)x = 0$ . Vektor-vektor ini bersama dengan vektor 0 disebut ruang eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda$ . Ekspresi  $\det(J - \lambda I) = 0$  adalah suku banyak berderajat  $n$  yang selanjutnya disebut suku banyak karakteristik dari  $J$ . Sehingga nilai eigen merupakan akar-akar dari persamaan karakteristik  $\det(J - \lambda I)$  (Zahnur, 2012:2).

## 2.5 Alga

Alga merupakan organisme tingkat rendah yang bersifat eukariotik dan memiliki klorofil. Alga mampu mengabsorpsi nutrisi dari lingkungan sekitarnya dan berfotosintesis dengan bantuan sinar matahari untuk menghasilkan oksigen. Karena kemampuannya melakukan proses fotosintesis, alga digolongkan sebagai organisme photoautrophic. Pertumbuhan alga sangat bergantung pada adanya nutrisi yang terdiri atas nitrogen dalam bentuk amoniak dan nitrat serta fosfor yang diabsorpsi dari lingkungan sekitarnya (Ali, 2013:12).

## 2.6 Siklus Nitrogen dan Asimilasi Nitrogen

Nitrogen merupakan suatu senyawa yang dapat ditemui di setiap badan air dalam bermacam-macam bentuk, yaitu  $N_2$ ,  $NH_3$ ,  $NO_2$  dan  $NO_3$ . Siklus nitrogen merupakan serangkaian proses perubahan senyawa yang mengandung nitrogen. Retnosari (1998) dalam Ali (2013:6-7) menggolongkan siklus nitrogen menjadi dua, yaitu:

### 1. Siklus Nitrogen di Atmosfer

Cadangan utama nitrogen adalah nitrogen bebas ( $N_2$ ), yang meliputi 79% volume atmosfer. Kemudian nitrogen bebas tersebut di konversi secara alami menjadi nitrogen tersedia melalui proses fiksasi nitrogen oleh mikroorganisme dan alga, muatan elektrik, serta secara artifisial oleh kegiatan kimiawi di pabrik-pabrik. Gas nitrogen kembali ke alam atau atmosfer melalui proses denitrifikasi oleh mikroorganisme.

### 2. Siklus Nitrogen di Air Permukaan

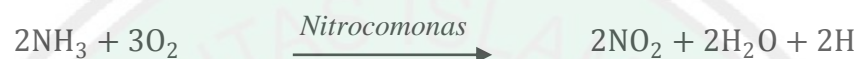
Siklus nitrogen pada air permukaan merupakan subsiklus yang diawali dengan masuknya nitrogen ke dalam air permukaan dan jatuhnya debu (*dust fall*), aliran permukaan (*surface run off*), masuknya air tanah dari *subsurface*, fiksasi nitrogen dari atmosfer oleh alga hijau dan biru serta beberapa jenis bakteri dan aliran langsung dari air buangan. Dalam lingkungan *aquatic* akan terjadi proses mineralisasi, nitrifikasi dan denitrifikasi.

Proses mineralisasi atau biasa disebut peristiwa amonifikasi merupakan proses oksidasi nitrogen organik menjadi nitrogen tersedia berupa amoniak ( $NH_3$ ). Proses nitrifikasi merupakan proses perubahan nitrogen amoniak menjadi nitrit oleh bakteri *Nitrocomonas*, yang dilanjutkan dengan perubahan nitrit menjadi

nitrat oleh bakteri *Nitrocobacter*. Sedangkan proses denitrifikasi adalah proses reduksi nitrat untuk kembali menjadi gas nitrogen (N<sub>2</sub>) untuk menyelesaikan siklus nitrogen (Ali, 2013:7).

Menurut Ali (2013:7-8) proses nitrifikasi terjadi melalui 2 tahap, yaitu:

- a. Tahap nitritasi, yaitu tahap oksidasi amonium (NH<sub>3</sub>) menjadi nitrit (NO<sub>2</sub>) yang dilakukan oleh bakteri *Nitrocomonas*.



- b. Tahap nitratasi, yaitu tahap oksidasi nitrit (NO<sub>2</sub>) menjadi nitrat (NO<sub>3</sub>) yang dilakukan oleh bakteri *Nitrocobacter*.



Asimilasi nitrogen adalah peristiwa penyerapan nitrogen oleh tumbuhan dan alga untuk berfotosintesis. Asimilasi nitrogen untuk pertumbuhan tumbuhan dan alga akan mengurangi kadar nitrogen di perairan. Ketika nutrisi (nitrogen) sangat rendah maka laju produksi menjadi terbatas. Alga menggunakan NH<sub>3</sub> dan NO<sub>3</sub> sebagai sumber nitrogen. Nitrat (NO<sub>3</sub>) merupakan bentuk nitrogen utama di perairan alami dan juga merupakan nutrisi utama bagi pertumbuhan tanaman dan alga demikian halnya dengan amoniak. Nitrat dan amoniak adalah sumber utama nitrogen di perairan. Kadar nitrogen yang berlebihan dapat mengakibatkan terjadinya pengayaan nutrisi, sehingga dapat menstimulasi pertumbuhan alga dan tumbuhan air di perairan tersebut secara cepat (Febrianty, 2011:7).

## 2.7 Hubungan antara Alga, Amoniak, Nitrit dan Nitrat

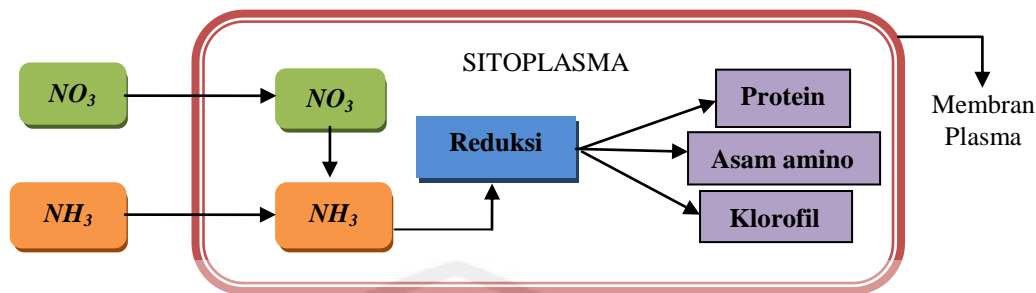
Amoniak berasal dari hasil ekskresi hewan dan manusia serta bangkai makhluk hidup yang sudah mati. Amoniak yang ada dalam kotoran hewan

merupakan hasil dari sisa proses pencernaan protein yang tidak sempurna. Sisa protein yang banyak tersebut akan menyebabkan banyak unsur Nitrogen (N) di dalam kotoran yang selanjutnya sisa protein tersebut diubah menjadi amoniak ( $\text{NH}_3$ ) atau amonium ( $\text{NH}_4^+$ ). Amoniak dalam kadar yang kecil menimbulkan bau yang tidak sedap, namun dalam kadar yang besar dapat berdampak pada masalah pernapasan, iritasi, serta dapat menyebabkan kematian. Nitrit ( $\text{NO}_2$ ) dan nitrat ( $\text{NO}_3$ ) merupakan bentuk dari nitrogen anorganik hasil oksidasi amoniak ( $\text{NH}_3$ ).

Nitrat merupakan salah satu senyawa nitrogen yang ada di perairan dan bersifat stabil. Nitrat merupakan salah satu unsur yang penting untuk sintesa protein tumbuh-tumbuhan dan hewan. Riani (1994) dalam Alam (2011:13) menyatakan bahwa “Kandungan nitrat dalam kadar yang berbeda dibutuhkan oleh setiap jenis alga untuk keperluan pertumbuhannya sedangkan kadar nitrat untuk alga dapat tumbuh dan optimal diperlukan kandungan nitrat  $0,9 - 3,5 \text{ mg/l}$ ”.

Adanya siklus nitrogen (nitrifikasi) menyebabkan amoniak teroksidasi menjadi nitrit oleh bakteri *Nitrocomonas* kemudian teroksidasi menjadi nitrat oleh bakteri *Nitrocobacter*. Amoniak dan nitrat merupakan nutrisi utama bagi pertumbuhan alga di perairan sehingga dapat menyebabkan terjadinya eutrofikasi yang dapat memacu pertumbuhan alga secara pesat. Hal ini dapat mengurangi dan menghalangi masuknya cahaya matahari ke dalam perairan.

Alga memiliki kemampuan untuk melakukan fotosintesis sehingga dapat menggunakan energi matahari dan memanfaatkan nutrisi yang ada di perairan. Secara umum penyerapan amoniak dan nitrat dapat digambarkan sebagaimana berikut:



Gambar 2.1 Asimilasi Amoniak dan Nitrat Oleh Alga  
Sumber : Afandi (2003) dalam Ali (2013:29)

Berdasarkan gambar tersebut, dapat diketahui bahwa nitrogen dalam bentuk amoniak dan nitrat digunakan oleh alga untuk membentuk asam amino, klorofil dan protein. Proses penyerapan nitrat diawali dengan terserapnya nitrat oleh membran plasma pada alga, kemudian nitrat tersebut masuk ke dalam sitoplasma. Nitrat yang ada dalam sitoplasma tidak langsung dapat digunakan untuk membentuk asam amino dan protein, melainkan harus dikonversi terlebih dahulu menjadi amoniak melalui bantuan enzim nitrate reductase. Sedangkan penyerapan amoniak dapat langsung membentuk asam amino dan protein. Oleh karena itu jumlah nitrat yang terserap oleh sel alga ditentukan oleh kadar amoniak yang dihasilkan enzim nitrate reductase (Ali, 2013:34).

## 2.8 Ekologi, Pemodelan Matematika dan Keseimbangan dalam Islam

Pada dasarnya, matematika sering dikaitkan dengan pekerjaan menghitung sehingga dikenal sebagai ilmu hitung atau *al-hisab*. Dalam perkembangannya, matematika dapat digunakan untuk mengungkapkan suatu kejadian atau peristiwa menjadi ungkapan yang sistematis. Salah satu keajaiban Allah Swt. adalah telah ditemukannya suatu cabang ilmu matematika, yaitu pemodelan matematika.

Interaksi pada pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat dibahas dalam beberapa cabang ilmu, diantaranya ekologi. Ekologi

merupakan ilmu yang mempelajari tentang interaksi antar makhluk hidup dan interaksi antara makhluk hidup dan lingkungannya, dimana tujuan dari interaksi ini adalah demi tercapainya suatu keadaan yang seimbang (Fitria, 2009:26).

Ekologi tidak lepas dari pembahasan tentang ekosistem dengan berbagai komponen penyusunnya, yaitu faktor abiotik dan biotik. Amoniak yang ada di perairan dioksidasi menjadi nitrit dan nitrat oleh bakteri *Nitrocomonas* dan *Nitrocobacter* kemudian alga menggunakan amoniak dan nitrat tersebut untuk berfotosintesis. Interaksi pada pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat ini dapat didiskripsikan dalam suatu sistem persamaan yang dibahas dalam suatu cabang ilmu, yaitu pemodelan matematika. Interaksi tersebut harus selalu dalam keadaan stabil agar tercipta suatu lingkungan yang seimbang. Allah Swt. sudah mengatur keseimbangan tersebut, sebagaimana firman Allah Swt. dalam surat al-Baqarah/2:164 yang berbunyi:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَالْفُلْكِ الَّتِي تَجْرِي فِي الْبَحْرِ بِمَا يَنْفَعُ النَّاسَ وَمَا أَنْزَلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ مَاءٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِنْ كُلِّ دَابَّةٍ وَتَصْرِيفِ الرِّيَّاحِ وَالسَّحَابِ الْمُسَخَّرِ بَيْنَ السَّمَاءِ وَالْأَرْضِ لَآيَاتٍ لِقَوْمٍ يَعْقِلُونَ (١٦٤)

Artinya: “*Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya malam dan siang, bahtera yang berlayar di laut membawa apa yang berguna bagi manusia, dan apa yang Allah turunkan dari langit berupa air, lalu dengan air itu Dia hiduapkan bumi sesudah mati (kering)-nya dan Dia sebarkan di bumi itu segala jenis hewan, dan pengisaran angin dan awan yang dikendalikan antara langit dan bumi; sungguh (terdapat) tanda-tanda (keesaan dan kebesaran Allah) bagi kaum yang memikirkan*” (QS. al-Baqarah/2:164).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah Swt. telah membuat sebuah siklus kehidupan untuk menjaga keseimbangan seluruh ciptaan-Nya. Salah satu siklus yang dibuat Allah Swt. adalah siklus nitrogen. Dimulai dengan adanya oksidasi nitrogen (N) menjadi amoniak (NH<sub>3</sub>). Selanjutnya bakteri *Nitrocomonas* mengubah amoniak menjadi nitrit (NO<sub>2</sub>) dan bakteri *Nitrocobacter* mengubah

nitrit menjadi nitrat ( $\text{NO}_3$ ). Setelah itu amoniak dan nitrat digunakan dalam proses asimilasi amoniak dan nitrat oleh tumbuhan dan alga. Tumbuhan dan alga kemudian menjadi sumber makanan bagi hewan dan manusia.

Dalam Tafsir Jalalain, Jalaluddin al-Mahalli dan Jalaluddin as-Suyuthi secara jelas mengatakan bahwa “Tidak ada satupun makhluk ciptaan Allah Swt. yang diciptakan tidak seimbang”. Bahkan Abil Fida’ Ismail bin Katsir dalam Tafsir Ibnu Katsir mengatakan bahwa “Pada dasarnya manusia, hewan, tumbuhan dan seluruh makhluk ciptaan Allah Swt. layaknya sahabat yang tidak pernah berselisih karena saling membutuhkan” (Fitria, 2009:28).



## BAB III

### PEMBAHASAN

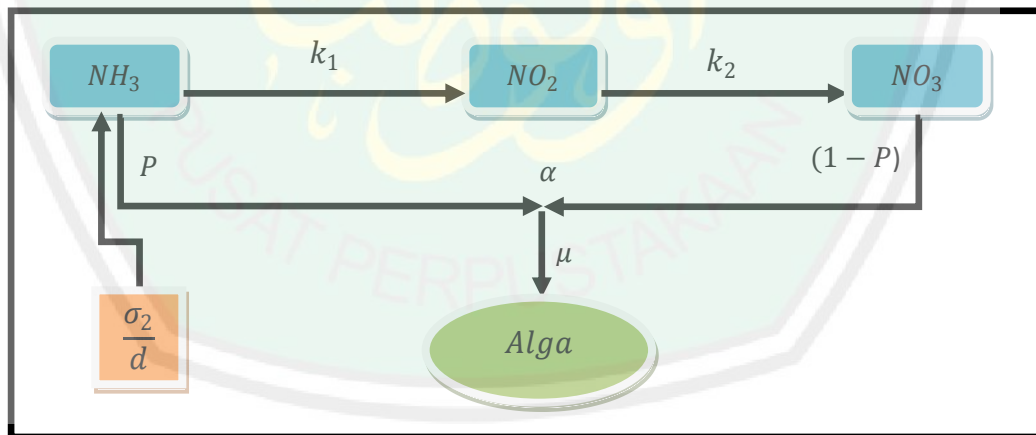
#### 3.1 Identifikasi Variabel, Parameter dan Model Matematika

##### 3.1.1 Identifikasi Variabel

Variabel yang digunakan dalam penelitian ini merujuk pada penelitian Widowati, dkk, (2010:386-394) sebagaimana berikut:

1. Pertumbuhan alga (sel/mL) pada waktu  $t$  disimbolkan  $A(t)$ .
2. Kadar amoniak ( $\text{NH}_3$ ) (mg/L) pada waktu  $t$  disimbolkan  $N_1(t)$ .
3. Kadar nitrit ( $\text{NO}_2$ ) (mg/L) pada waktu  $t$  disimbolkan  $N_2(t)$ .
4. Kadar nitrat ( $\text{NO}_3$ ) (mg/L) pada waktu  $t$  disimbolkan  $N_3(t)$ .

Interaksi pada pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat digambarkan pada bagan berikut:



Gambar 3.1 Interaksi pada Pertumbuhan Alga dan Perubahan Kadar Amoniak, Nitrit, dan Nitrat

Sumber: Brown dan Barnwel (1987:23)

Berdasarkan Gambar 3.1 tersebut, dapat diketahui bahwa alga menggunakan kadar amoniak ( $\text{NH}_3$ ) sebanyak  $P$  dan nitrat ( $\text{NO}_3$ ) sebanyak  $(1 - P)$  yang ada di perairan dengan laju pertumbuhan sebesar  $\mu$ . Fungsi asimilasi amoniak oleh alga

dinyatakan dengan  $\frac{PN_1(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)}$  dan total nitrogen yang terdapat di dalam alga sebesar  $\alpha$ . Sedangkan fungsi asimilasi nitrat oleh alga dinyatakan dengan  $\frac{(1-P)N_3(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)}$  dan total nitrogen yang terdapat di dalam alga sebesar  $\alpha$  (Brown dan Barnwel, 1987:23-24). Perbandingan kadar amoniak dan nitrat yang digunakan oleh alga adalah sebesar  $P$  dan  $(1 - P)$  didasarkan pada faktor preferensi amoniak ( $P$ ). Sehingga apabila saat  $t$  kadar amoniak yang digunakan adalah sebesar  $P$ , maka kadar nitrat yang digunakan adalah sebesar  $(1 - P)$ . Kadar amoniak  $NH_3$  di dalam perairan mengalami perubahan karena adanya hasil ekskresi bentos yang dipengaruhi oleh kedalaman perairan  $\left(\frac{\sigma_2}{d}\right)$  (Widowati, dkk, 2010:388). Kemudian dengan laju  $k_1$  bakteri *Nitrocomonas* mengoksidasi amoniak menjadi nitrit ( $NO_2$ ) pada proses nitrifikasi, sehingga kadar nitrit ( $NO_2$ ) yang ada di perairan berubah. Setelah itu bakteri *Nitrocobacter* mengoksidasi nitrit ( $NO_2$ ) menjadi nitrat ( $NO_3$ ) dengan laju  $k_2$  pada proses nitrifikasi.

### 3.1.2 Nilai Awal Variabel dan Parameter pada Model Matematika

Nilai awal variabel pada penelitian ini merujuk pada karya tulis yang berjudul “*Konstruksi Model Dinamik Pertumbuhan Alga dan Pengaruhnya pada Perubahan Kadar Nitrogen*”, karya Widowati, dkk, (2010:386-394). Sedangkan nilai parameter merujuk pada “*Mathematical Modeling and Analysis of Ammonia, Nitrite and Nitrate Concentration: Case Study in the Polder Tawang Semarang, Indonesia*”, karya Widowati, dkk, (2009:1-9):

Tabel 3.1 Nilai Awal Variabel yang Digunakan pada Model (Widowati, dkk, 2009:6)

Variabel	Simbol	Nilai	Satuan
Jumlah (kepadatan) alga	$A(0)$	5	(sel/mL)
Kadar Amoniak	$N_1(0)$	30,68	(mg/L)
Kadar Nitrit	$N_2(0)$	0,011	(mg/L)
Kadar Nitrat	$N_3(0)$	1,87	(mg/L)

Tabel 3.2 Nilai Parameter yang Digunakan pada Model (Widowati, dkk, 2010:392)

Parameter	Simbol	Nilai	Satuan
Laju pertumbuhan lokal alga	$\mu$	1,05	perhari
Daya tumbuh alga	$\delta$	0,7125	perhari
Laju perubahan amoniak menjadi nitrit oleh bakteri <i>Nitrocomonas</i> dalam proses nitrifikasi	$k_1$	0,00184	perhari
Laju perubahan nitrit menjadi nitrat oleh bakteri <i>Nitrocobacter</i> dalam proses nitrifikasi	$k_2$	1,6041	perhari
Kadar amoniak hasil ekskresi bentos yang dipengaruhi oleh kedalaman perairan	$\frac{\sigma_2}{d}$	6,6058	mg/L
Faktor preferensi amoniak	$P$	0,07	skalar
Total nitrogen yang terdapat dalam alga	$\alpha$	0,08	mg N/mg A
Kapasitas daya tampung	$K$	78,64	skalar

### 3.1.3 Identifikasi Model Matematika

Model pada interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat diawali dengan adanya daya tumbuh alga sebesar  $\delta$  yang dipengaruhi oleh kadar amoniak yang digunakan oleh alga sebesar  $P$  dan nitrat sebesar  $(1 - P)$ , sehingga pertumbuhannya adalah sebagai berikut:

$$(PN_1(t) + (1 - P)N_3(t))\delta A(t)$$

Pertumbuhan alga akan dihambat dengan adanya daya tumbuh yang dipengaruhi oleh kapasitas daya tampung ( $K$ ) sehingga pertumbuhannya menjadi terhambat

$$-\frac{\delta A(t)^2}{K}$$

Dari uraian tersebut didapatkan model pertumbuhan alga sebagai berikut:

$$\frac{dA(t)}{dt} = (PN_1(t) + (1 - P)N_3(t))\delta A(t) - \frac{\delta A(t)^2}{K} \quad (3.1)$$

Amoniak yang ada di perairan dioksidasi menjadi nitrit oleh bakteri *Nitrocomonas* dengan laju  $k_1$ . Selain itu, bentos atau hewan-hewan yang ada di air ( $\sigma_2$ ) mengekskresi amoniak dengan dipengaruhi kedalaman air ( $d$ ), sehingga kadar amoniak adalah sebagai berikut:

$$-k_1 N_1(t) + \frac{\sigma_2}{d}$$

Kadar amoniak sebesar  $P$  digunakan dalam proses asimilasi amoniak oleh alga dengan laju tumbuh sebesar  $\mu$  dan total nitrogen yang ada di dalam alga sebesar  $\alpha$  sehingga kadar amoniak berkurang

$$-\left(\frac{PN_1(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)}\right)\alpha\mu A(t)$$

Dari uraian tersebut didapatkan model perubahan kadar amoniak adalah

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -k_1(t)N_1(t) + \frac{\sigma_2}{d} - \left(\frac{PN_1(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)}\right)\alpha\mu A(t) \quad (3.2)$$

Amoniak dioksidasi menjadi nitrit oleh bakteri *Nitrocomonas* dalam proses nitritasi dengan laju  $k_1$ . Kemudian terjadi juga proses nitrifikasi yaitu peristiwa bakteri *Nitrocobacter* mengubah nitrit menjadi nitrat dengan laju  $k_2$ , sehingga didapatkan model perubahan kadar nitrit adalah sebagai berikut:

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = k_1 N_1(t) - k_2 N_2(t) \quad (3.3)$$

Nitrit yang ada di perairan dioksidasi menjadi nitrat oleh bakteri *Nitrocobacter* dalam proses nitrifikasi dengan laju  $k_2$ , sehingga kadar nitrat adalah

$$k_2 N_2(t)$$

Sama halnya dengan amoniak, kadar nitrat sebesar  $(1 - P)$  digunakan dalam proses asimilasi nitrat oleh alga dengan laju tumbuh sebesar  $\mu$  dan total nitrogen yang ada di dalam alga sebesar  $\alpha$ , sehingga kadar nitrat berkurang

$$-\frac{(1-P)N_3(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)}\alpha\mu A(t)$$

Dari uraian tersebut didapatkan model perubahan kadar nitrat adalah sebagai berikut:

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = k_2 N_2(t) - \frac{(1-P)N_3(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)} \alpha \mu A(t) \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.1) sampai (3.4), dapat diketahui bahwa interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat membentuk sistem persamaan diferensial biasa nonlinier autonomous sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= (PN_1(t) + (1-P)N_3(t))\delta A(t) - \frac{\delta A(t)^2}{K} \\ \frac{dN_1(t)}{dt} &= -k_1 N_1(t) + \frac{\sigma_2}{d} - \left( \frac{PN_1(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)} \right) \alpha \mu A(t) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} &= k_1 N_1(t) - k_2 N_2(t) \\ \frac{dN_3(t)}{dt} &= k_2 N_2(t) - \frac{(1-P)N_3(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)} \alpha \mu A(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

### 3.1.4 Interpretasi Model Matematika

Perubahan pertumbuhan alga bergantung waktu dipengaruhi oleh adanya daya tumbuh alga sebesar  $\delta$  yang dipengaruhi oleh kadar amoniak yang digunakan oleh alga sebesar  $P$  dan nitrat sebesar  $(1-P)$ . Pertumbuhan alga akan dihambat dengan daya tumbuh yang dipengaruhi oleh kapasitas daya tampung, sehingga model pertumbuhan alga bergantung waktu adalah

$$\frac{dA(t)}{dt} = (PN_1(t) + (1-P)N_3(t))\delta A(t) - \frac{\delta A(t)^2}{K} \quad (3.6)$$

Perubahan kadar amoniak bergantung waktu dipengaruhi oleh oksidasi amoniak menjadi nitrit dengan laju  $k_1$  dan kadar amoniak yang diekskresi bentos yang dipengaruhi oleh kedalaman perairan  $\left(\frac{\sigma_2}{d}\right)$ . Kadar amoniak sebesar  $P$  digunakan dalam proses asimilasi amoniak oleh alga dengan laju tumbuh sebesar

$\mu$  dan total nitrogen yang ada di dalam alga sebesar  $\alpha$ , sehingga model perubahan kadar amoniak bergantung waktu adalah

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -k_1N_1(t) + \frac{\sigma_2}{d} - \left( \frac{PN_1(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)} \right) \alpha\mu A(t) \quad (3.7)$$

Perubahan kadar nitrit bergantung waktu dipengaruhi oleh oksidasi amoniak menjadi nitrit dengan laju  $k_1$  dan dilanjutkan dengan oksidasi nitrit dalam proses nitrifikasi dengan laju  $k_2$ , sehingga model perubahan kadar nitrit bergantung waktu adalah

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = k_1N_1(t) - k_2N_2(t) \quad (3.8)$$

Perubahan kadar nitrat bergantung waktu dipengaruhi oleh oksidasi nitrit menjadi nitrat dengan laju  $k_2$  dalam proses nitrifikasi. Kemudian kadar nitrat sebesar  $(1 - P)$  digunakan dalam proses asimilasi nitrat oleh alga dengan laju tumbuh sebesar  $\mu$  dan total nitrogen yang ada di dalam alga sebesar  $\alpha$ , sehingga model perubahan kadar nitrat bergantung waktu adalah sebagai berikut:

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = k_2N_2(t) - \frac{(1-P)N_3(t)}{PN_1(t)+(1-P)N_3(t)} \alpha\mu A(t) \quad (3.9)$$

### 3.2 Analisis Kestabilan

Untuk menganalisis kestabilan maka perlu menentukan titik tetapnya. Titik tetap  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$  dari sistem persamaan (3.5) diperoleh dengan mencari nilai  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$ . Setelah diperoleh titik tetapnya, maka perlu dilakukan linierisasi di sekitar titik tetap sistem sehingga didapatkan matriks Jacobi untuk mengetahui nilai eigen yang dihasilkan. Selanjutnya ditentukan kestabilan dan jenis kestabilan berdasarkan nilai eigen yang dihasilkan.

### 3.2.1 Menentukan Titik Tetap

Misal  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$  merupakan titik tetap dari sistem persamaan (3.5), maka  $A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)$  diperoleh jika:

$$\frac{dA(t)}{dt} = 0, \quad \frac{dN_1(t)}{dt} = 0, \quad \frac{dN_2(t)}{dt} = 0, \quad \frac{dN_3(t)}{dt} = 0$$

sehingga

$$\begin{aligned} 0 &= (PN_1(t) + (1 - P)N_3(t))\delta A(t) - \frac{\delta A(t)^2}{K} \\ 0 &= -k_1N_1(t) + \frac{\sigma_2}{d} - \left( \frac{PN_1(t)}{PN_1(t) + (1 - P)N_3(t)} \right) \alpha\mu A(t) \\ 0 &= k_1N_1(t) - k_2N_2(t) \\ 0 &= k_2N_2(t) - \frac{(1 - P)N_3(t)}{PN_1(t) + (1 - P)N_3(t)} \alpha\mu A(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dari sistem persamaan (3.10) tersebut, dapat ditentukan titik tetap  $A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 0 &= (PN_1(t) + (1 - P)N_3(t))\delta A(t) - \frac{\delta A(t)^2}{K} \\ \frac{\delta A(t)^2}{K} &= (PN_1(t) + (1 - P)N_3(t))\delta A(t) \\ \frac{\delta A(t)^2}{\delta A(t)} &= (PN_1(t) + (1 - P)N_3(t))K \\ A(t) &= (PN_1(t) + (1 - P)N_3(t))K \\ A^*(t) &= (PN_1(t) + (1 - P)N_3(t))K \end{aligned} \quad (3.11)$$

Substitusikan persamaan (3.11) untuk menentukan titik tetap  $N_1^*(t)$

$$\begin{aligned} 0 &= -k_1N_1(t) + \frac{\sigma_2}{d} - \left( \frac{PN_1(t)}{PN_1(t) + (1 - P)N_3(t)} \right) \alpha\mu A(t) \\ k_1N_1(t) &= \frac{\sigma_2}{d} - PN_1(t)\alpha\mu K \\ \frac{\sigma_2}{d} &= k_1N_1(t) + PN_1(t)\alpha\mu K \\ \frac{\sigma_2}{d} &= N_1(t) [k_1 + P\alpha\mu K] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1(t) &= \frac{\frac{\sigma_2}{d}}{[k_1 + P\alpha\mu K]} \\
N_1(t) &= \left(\frac{\sigma_2}{d}\right) \left(\frac{1}{[k_1 + P\alpha\mu K]}\right) \\
N_1^*(t) &= \frac{\sigma_2}{d [k_1 + P\alpha\mu K]} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Substitusikan (3.12) untuk menentukan titik tetap  $N_2^*(t)$

$$\begin{aligned}
0 &= k_1 N_1(t) - k_2 N_2(t) \\
k_1 N_1(t) &= k_2 N_2(t) \\
k_1 \left(\frac{\sigma_2}{d [k_1 + P\alpha\mu K]}\right) &= k_2 N_2(t) \\
\frac{\left(\frac{k_1 \sigma_2}{d [k_1 + P\alpha\mu K]}\right)}{k_2} &= N_2(t) \\
\left(\frac{k_1 \sigma_2}{d [k_1 + P\alpha\mu K]}\right) \left(\frac{1}{k_2}\right) &= N_2(t) \\
N_2^*(t) &= \left(\frac{k_1 \sigma_2}{d k_2 [k_1 + P\alpha\mu K]}\right) \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (3.11), (3.12), dan (3.13) untuk menentukan titik tetap  $N_3^*(t)$ , sehingga

$$\begin{aligned}
0 &= k_2 N_2(t) - \frac{(1-P)N_3(t)}{PN_1(t) + (1-P)N_3(t)} \alpha\mu A(t) \\
k_2 N_2(t) &= \frac{(1-P)N_3(t)}{PN_1(t) + (1-P)N_3(t)} \alpha\mu A(t) \\
k_2 N_2(t) &= (1-P)N_3(t) \alpha\mu K \\
k_2 \left(\frac{k_1 \sigma_2}{d k_2 [k_1 + P\alpha\mu K]}\right) &= (1-P)N_3(t) \alpha\mu K \\
\frac{k_2 \left(\frac{k_1 \sigma_2}{d k_2 [k_1 + P\alpha\mu K]}\right)}{\alpha\mu K} &= (1-P)N_3(t) \\
k_2 \left(\frac{k_1 \sigma_2}{k_2 d [k_1 + P\alpha\mu K]}\right) \left(\frac{1}{\alpha\mu K}\right) &= (1-P)N_3(t) \\
\left(\frac{k_1 \sigma_2}{d [k_1 + P\alpha\mu K]}\right) \left(\frac{1}{\alpha\mu K}\right) &= (1-P)N_3(t)
\end{aligned}$$

$$\left( \frac{k_1 \sigma_2}{\alpha \mu K d [k_1 + P \alpha \mu K]} \right) = (1 - P) N_3(t)$$

$$\frac{\left( \frac{k_1 \sigma_2}{\alpha \mu K d [k_1 + P \alpha \mu K]} \right)}{(1 - P)} = N_3(t)$$

$$\left( \frac{k_1 \sigma_2}{\alpha \mu K d [k_1 + P \alpha \mu K]} \right) \frac{1}{(1 - P)} = N_3(t)$$

$$\frac{k_1 \sigma_2}{\alpha \mu K d (1 - P) [k_1 + \alpha \mu K P]} = N_3(t)$$

$$N_3^*(t) = \frac{k_1 \sigma_2}{\alpha \mu K d [k_1 + P \alpha \mu K - \alpha \mu K P^2 - k_1 P]} \quad (3.14)$$

Setelah itu substitusikan persamaan (3.12) dan (3.14) ke persamaan (3.11)

$$A^*(t) = (P N_1(t) + (1 - P) N_3(t)) K$$

$$A^*(t) = (P N_1^*(t) + (1 - P) N_3^*(t)) K$$

$$A^*(t) = \left( P \left[ \frac{\sigma_2}{d [k_1 + P \alpha \mu K]} \right] + (1 - P) \left[ - \frac{k_1 \sigma_2}{\alpha \mu K d [\alpha \mu K P^2 + k_1 P - P \alpha \mu K - k_1]} \right] \right) K$$

$$A^*(t) = \left( \frac{P \sigma_2}{d [k_1 + P \alpha \mu K]} - \frac{k_1 \sigma_2 + P k_1 \sigma_2}{\alpha \mu K d [\alpha \mu K P^2 + k_1 P - P \alpha \mu K - k_1]} \right) K$$

$$A^*(t) = \left( \frac{P \sigma_2 (\alpha \mu K d [\alpha \mu K P^2 + k_1 P - P \alpha \mu K - k_1])}{(d [k_1 + P \alpha \mu K]) (\alpha \mu K d [\alpha \mu K P^2 + k_1 P - P \alpha \mu K - k_1])} + \right.$$

$$\left. \frac{(-k_1 \sigma_2 + P k_1 \sigma_2) (d [k_1 + P \alpha \mu K])}{(d [k_1 + P \alpha \mu K]) (\alpha \mu K d [\alpha \mu K P^2 + k_1 P - P \alpha \mu K - k_1])} \right) K$$

$$A^*(t) = \left( \frac{P \sigma_2 (\alpha \mu K d [\alpha \mu K P^2 + k_1 P - P \alpha \mu K - k_1])}{(d [k_1 + P \alpha \mu K]) (\alpha \mu K d [\alpha \mu K P^2 + k_1 P - P \alpha \mu K - k_1])} + \right.$$

$$\left. \frac{(P k_1 \sigma_2 - k_1 \sigma_2) (d [k_1 + P \alpha \mu K])}{(d [k_1 + P \alpha \mu K]) (\alpha \mu K d [\alpha \mu K P^2 + k_1 P - P \alpha \mu K - k_1])} \right) K$$

$$A^*(t) = \left( \frac{P \sigma_2 (\alpha^2 \mu^2 K^2 P^2 d + \alpha \mu K P d k_1 - \alpha^2 \mu^2 K^2 P d - \alpha \mu K d k_1)}{(k_1 d + \alpha \mu K P d) (\alpha^2 \mu^2 K^2 P^2 d + \alpha \mu K P d k_1 - \alpha^2 \mu^2 K^2 P d - \alpha \mu K d k_1)} + \right.$$

$$\left. \frac{(\sigma_2 P k_1 - \sigma_2 k_1) (d k_1 + \alpha \mu K P d)}{(k_1 d + \alpha \mu K P d) (\alpha^2 \mu^2 K^2 P^2 d + \alpha \mu K P d k_1 - \alpha^2 \mu^2 K^2 P d - \alpha \mu K d k_1)} \right) K$$

$$A^*(t) = \left( \frac{\sigma_2 (\alpha^2 \mu^2 K^2 P^3 d + \alpha \mu K P^2 d k_1 - \alpha^2 \mu^2 K^2 P^2 d - \alpha \mu K P d k_1)}{(k_1 d + \alpha \mu K P d) (\alpha^2 \mu^2 K^2 P^2 d + \alpha \mu K P d k_1 - \alpha^2 \mu^2 K^2 P d - \alpha \mu K d k_1)} + \right.$$

$$\left. \frac{\sigma_2 P d k_1^2 + \sigma_2 \alpha \mu K P^2 d k_1 - \sigma_2 d k_1^2 - \sigma_2 \alpha \mu K P d k_1}{(k_1 d + \alpha \mu K P d) (\alpha^2 \mu^2 K^2 P^2 d + \alpha \mu K P d k_1 - \alpha^2 \mu^2 K^2 P d - \alpha \mu K d k_1)} \right) K$$

$$A^*(t) = \left( \frac{\sigma_2(\alpha^2\mu^2K^2P^3d + \alpha\mu KP^2dk_1 - \alpha^2\mu^2K^2P^2d - \alpha\mu KPdk_1)}{(k_1d + \alpha\mu KPd)(\alpha^2\mu^2K^2P^2d + \alpha\mu KPdk_1 - \alpha^2\mu^2K^2Pd - \alpha\mu Kdk_1)} + \frac{\sigma_2[Pdk_1^2 + \alpha\mu KP^2dk_1 - dk_1^2 - \alpha\mu KPdk_1]}{(k_1d + \alpha\mu KPd)(\alpha^2\mu^2K^2P^2d + \alpha\mu KPdk_1 - \alpha^2\mu^2K^2Pd - \alpha\mu Kdk_1)} \right) K$$

kemudian dengan memisalkan

$$\begin{aligned} a &= \alpha^2\mu^2K^2P^3d & c &= \alpha^2\mu^2K^2P^2d & h &= Pdk_1^2 \\ b &= \alpha\mu KP^2dk_1 & e &= \alpha\mu KPdk_1 & j &= dk_1^2 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} A^*(t) &= \left( \frac{\sigma_2 a + \sigma_2 b - \sigma_2 c - \sigma_2 e + \sigma_2 h + \sigma_2 j - \sigma_2 e}{(\alpha\mu Kd)(b+h-e-j+a+b-c-e)} \right) K \\ A^*(t) &= \left( \frac{\sigma_2}{(\alpha\mu Kd)} \right) K \\ A^*(t) &= \frac{\sigma_2}{\alpha\mu d} K \\ A^*(t) &= \frac{\sigma_2}{\alpha\mu d} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Berdasarkan uraian tersebut, maka hanya dihasilkan satu titik tetap yaitu

$$(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = \left( \frac{\sigma_2}{\alpha\mu d}, \frac{\sigma_2}{(\alpha\mu KP + k_1)d}, \frac{k_1\sigma_2}{k_2(\alpha\mu KP + k_1)d}, \frac{k_1\sigma_2}{\alpha\mu K d [k_1 + P\alpha\mu K - \alpha\mu K P^2 - k_1 P]} \right)$$

hasil tersebut sudah sesuai dengan titik tetap yang dihasilkan dengan bantuan software Maple. Kemudian jika nilai parameter pada Tabel 3.1 disubstitusikan pada hasil tersebut, maka dihasilkan titik tetapnya adalah  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = (78,6405 \ 14,2292 \ 0,01632173241 \ 0,0042618)$ .

### 3.2.2 Linierisasi dan Analisis Kestabilan di sekitar Titik Tetap

Model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat berbentuk sistem persamaan nonlinier sehingga perlu dicari pendekatan

pada sistem linier di sekitar titik tetap  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$  dengan menggunakan deret Taylor.

Misalnya

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{d(A(t)-A^*(t))}{dt}, \quad \frac{dN_1(t)}{dt} = \frac{d(N_1(t)-N_1^*(t))}{dt}, \quad \frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{d(N_2(t)-N_2^*(t))}{dt}, \quad \frac{dN_3(t)}{dt} = \frac{d(N_3(t)-N_3^*(t))}{dt}$$

maka

$$\begin{aligned} \frac{d(A(t)-A^*(t))}{dt} &= f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) + \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} (A(t) - A^*(t)) \\ &\quad + \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} (N_1(t) - N_1^*(t)) + \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} (N_2(t) - N_2^*(t)) \\ &\quad + \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} (N_3(t) - N_3^*(t)) + \dots \\ \frac{d(N_1(t)-N_1^*(t))}{dt} &= f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) + \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} (A(t) - A^*(t)) + \\ &\quad \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} (N_1(t) - N_1^*(t)) + \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} (N_2(t) - N_2^*(t)) \\ &\quad + \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} (N_3(t) - N_3^*(t)) + \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(N_2(t)-N_2^*(t))}{dt} &= f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) + \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} (A(t) - A^*(t)) + \\ &\quad \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} (N_1(t) - N_1^*(t)) + \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} (N_2(t) - N_2^*(t)) \\ &\quad + \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} (N_3(t) - N_3^*(t)) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d(N_3(t)-N_3^*(t))}{dt} &= f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) + \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} (A(t) - A^*(t)) + \\ &\quad \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} (N_1(t) - N_1^*(t)) + \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} (N_2(t) - N_2^*(t)) \\ &\quad + \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} (N_3(t) - N_3^*(t)) + \dots \end{aligned}$$

jika  $u(t) = A(t) - A^*(t)$ ,  $v(t) = N_1(t) - N_1^*(t)$ ,  $w(t) = N_2(t) - N_2^*(t)$  dan

$$z(t) = N_3(t) - N_3^*(t)$$

maka

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}, \quad \frac{dN_1(t)}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}, \quad \frac{dN_2(t)}{dt} = \frac{dw(t)}{dt}, \quad \frac{dN_3(t)}{dt} = \frac{dz(t)}{dt}$$

pada keadaan setimbang,

$$f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) =$$

$$f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = 0.$$

Kemudian disubstitusikan pada persamaan (3.16) sehingga diperoleh persamaan linier adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{du(t)}{dt} &= \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} A(t) + \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} N_1(t) + \\ &\quad \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} N_2(t) + \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} N_3(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} A(t) + \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} N_1(t) + \\ &\quad \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} N_2(t) + \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} N_3(t) \\ \frac{dw(t)}{dt} &= \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} A(t) + \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} N_1(t) + \\ &\quad \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} N_2(t) + \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} N_3(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} A(t) + \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} N_1(t) + \\ &\quad \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} N_2(t) + \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} N_3(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sistem persamaan (3.17) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} & \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} & \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} & \frac{\partial f_1(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} \\ \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} & \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} & \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} & \frac{\partial f_2(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} \\ \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} & \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} & \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} & \frac{\partial f_3(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} \\ \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial A} & \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_1} & \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_2} & \frac{\partial f_4(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))}{\partial N_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix}$$

Sehingga sistem persamaan diferensial linier pada titik tetap

$(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$  diberikan dalam matriks

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial A} & \frac{\partial f_1}{\partial N_1} & \frac{\partial f_1}{\partial N_2} & \frac{\partial f_1}{\partial N_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial A} & \frac{\partial f_2}{\partial N_1} & \frac{\partial f_2}{\partial N_2} & \frac{\partial f_2}{\partial N_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial A} & \frac{\partial f_3}{\partial N_1} & \frac{\partial f_3}{\partial N_2} & \frac{\partial f_3}{\partial N_3} \\ \frac{\partial f_4}{\partial A} & \frac{\partial f_4}{\partial N_1} & \frac{\partial f_4}{\partial N_2} & \frac{\partial f_4}{\partial N_3} \end{bmatrix}$$

Semua turunan parsial matriks dievaluasi pada  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t))$ .

Maka didapatkan matriks jacobi ( $J$ ), sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(t)}{\partial A(t)} & \frac{\partial f_1(t)}{\partial N_1(t)} & \frac{\partial f_1(t)}{\partial N_2(t)} & \frac{\partial f_1(t)}{\partial N_3(t)} \\ \frac{\partial f_2(t)}{\partial A(t)} & \frac{\partial f_2(t)}{\partial N_1(t)} & \frac{\partial f_2(t)}{\partial N_2(t)} & \frac{\partial f_2(t)}{\partial N_3(t)} \\ \frac{\partial f_3(t)}{\partial A(t)} & \frac{\partial f_3(t)}{\partial N_1(t)} & \frac{\partial f_3(t)}{\partial N_2(t)} & \frac{\partial f_3(t)}{\partial N_3(t)} \\ \frac{\partial f_4(t)}{\partial A(t)} & \frac{\partial f_4(t)}{\partial N_1(t)} & \frac{\partial f_4(t)}{\partial N_2(t)} & \frac{\partial f_4(t)}{\partial N_3(t)} \end{bmatrix}$$

- $\frac{\partial f_1(t)}{\partial A(t)} = P(N_1^*(t) + N_3^*(t))\delta - \frac{2\delta A^*(t)}{K}$

$$\frac{\partial f_1(t)}{\partial N_1(t)} = P\delta A^*(t)$$

$$\frac{\partial f_1(t)}{\partial N_2(t)} = 0$$

$$\frac{\partial f_1(t)}{\partial N_3(t)} = (1 - P)\delta A^*(t)$$

- $\frac{\partial f_2(t)}{\partial A(t)} = -\frac{PN_1^*(t)\alpha\mu}{PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t)}$

$$\frac{\partial f_2(t)}{\partial N_1(t)} = -k_1 - \frac{P\alpha\mu A^*(t)}{PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t)} + \frac{P^2N_1^*(t)\alpha\mu A^*(t)}{(PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t))^2}$$

$$\frac{\partial f_2(t)}{\partial N_2(t)} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(t)}{\partial N_3(t)} = \frac{PN_1^*(t)\alpha\mu A^*(t)(1-P)}{(PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t))^2}$$

- $\frac{\partial f_3(t)}{\partial A(t)} = 0$

$$\frac{\partial f_3(t)}{\partial N_1(t)} = k_1$$

$$\frac{\partial f_3(t)}{\partial N_2(t)} = -k_2$$

$$\frac{\partial f_3(t)}{\partial N_3(t)} = 0$$

$$\bullet \frac{\partial f_4(t)}{\partial A(t)} = -\frac{(1-P)N_3^*(t)\alpha\mu}{PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t)}$$

$$\frac{\partial f_4(t)}{\partial N_1(t)} = \frac{(1-P)N_3^*(t)\alpha\mu A^*(t)P}{(PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t))^2}$$

$$\frac{\partial f_4(t)}{\partial N_2(t)} = k_2$$

$$\frac{\partial f_4(t)}{\partial N_3(t)} = -\frac{(1-P)\alpha\mu A^*(t)}{PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t)} + \frac{(1-P)^2 N_3^*(t)\alpha\mu A^*(t)}{(PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t))^2}$$

Misalkan

$$l^* = P(N_1^*(t) + N_3^*(t))\delta - \frac{2\delta A^*(t)}{K}, m^* = P\delta A^*(t), n^* = (1-P)\delta A^*(t),$$

$$o^* = \frac{PN_1^*(t)\alpha\mu}{PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t)}, q^* = \frac{P\alpha\mu A^*(t)}{PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t)} + \frac{P^2 N_1^*(t)\alpha\mu A^*(t)}{(PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t))^2},$$

$$r^* = \frac{PN_1^*(t)\alpha\mu A^*(t)(1-P)}{(PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t))^2}, s^* = \frac{(1-P)N_3^*(t)\alpha\mu}{PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t)}, u^* = \frac{(1-P)N_3^*(t)\alpha\mu A^*(t)P}{(PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t))^2},$$

$$\text{dan } v^* = \frac{(1-P)\alpha\mu A^*(t)}{PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t)} + \frac{(1-P)^2 N_3^*(t)\alpha\mu A^*(t)}{(PN_1^*(t)+(1-P)N_3^*(t))^2}$$

Maka matriks Jacobian yang dihasilkan adalah

$$J = \begin{bmatrix} l^* & m^* & 0 & n^* \\ -o^* & (-k_1 - q^*) & 0 & r^* \\ 0 & k_1 & -k_2 & 0 \\ -s^* & u^* & k_2 & -v^* \end{bmatrix}$$

Jika nilai-nilai parameter pada Tabel 3.1 disubstitusikan pada matriks Jacobian tersebut, maka menghasilkan

$$J = \begin{pmatrix} 0,049875N_1^*(t) + 0,662625N_3^*(t) & 0,049875A^*(t) & 0 & 0,662625A^*(t) \\ -0,01812054933A^*(t) & & & \\ \frac{0,00588N_1^*(t)}{0,07N_1^*(t) + 0,93N_3^*(t)} & -0,00184 - \frac{0,00588A^*(t)}{0,07N_1^*(t) + 0,93N_3^*(t)} & + 0 & \frac{0,0054684A^*(t)N_1^*(t)}{(0,07N_1^*(t) + 0,93N_3^*(t))^2} \\ \frac{0,0004116A^*(t)N_1^*(t)}{(0,07N_1^*(t) + 0,93N_3^*(t))^2} & & & \\ 0 & 0,00184 & -1,6041 & 0 \\ \frac{0,07812N_3^*(t)}{0,07N_1^*(t) + 0,93N_3^*(t)} & \frac{0,0054684A^*(t)N_1^*(t)}{(0,07N_1^*(t) + 0,93N_3^*(t))^2} & 1,6041 & \frac{0,07812A^*(t)}{0,07N_1^*(t) + 0,93N_3^*(t)} \\ & & & + \frac{0,0726516A^*(t)N_3^*(t)}{(0,07N_1^*(t) + 0,93N_3^*(t))^2} \end{pmatrix}$$

Kemudian jika nilai hasil titik tetap yang diperoleh  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = (78,6405 \ 14,2292 \ 0,01632173241 \ 0,0042618)$  disubstitusikan pada matriks tersebut sehingga

- $a_{11}: 0,049875(14,2292) + 0,662625(0,0042618) - 0,01812054933(78,6405) = -0,7125043140$
- $a_{12}: 0,049875(78,6405) = 3,922193750$
- $a_{13}: 0$
- $a_{14}: 0,0662625(78,6405) = 52,10914554$
- $a_{21}: -\frac{0,00588(14,2292)}{0,07(14,2292)+0,93(0,0042618)} = -0,08366707101$
- $a_{22}: -0,00184 - \frac{0,00588(14,2292)}{0,07(14,2292)+0,93(0,0042618)} + \frac{0,0004116(14,2292)(78,6405)}{(0,07(14,2292)+0,93(0,0042618))^2}$   
 $= -0,0036727073$
- $a_{23}: 0$
- $a_{24}: \frac{0,0054684(14,2292)(78,6405)}{(0,07(14,2292)+0,93(0,0042618))^2} = 6,119007976$
- $a_{31}: 0$
- $a_{32}: k_1 = 0,00184$

$$a_{33}: -k_2 = -1,6041$$

$$a_{34}: 0$$

$$\bullet a_{41}: -\frac{0,07812(0,0042618)}{0,07(14,2292)+0,93(0,0042618)} = -0,0003329289474$$

$$a_{42}: \frac{0,0054684(0,0042618)(78,6405)}{(0,07(14,2292)+0,93(0,0042618))^2} = 0,001832707270$$

$$a_{43}: 1,6041$$

$$a_{44}: -\frac{0,07812(78,6405)}{0,07(14,2292)+0,93(0,0042618)} + \frac{0,0726516(0,0042618)(78,6405)}{(0,07(14,2292)+0,93(0,0042618))^2}$$

$$= -6,119007977$$

maka diperoleh nilai matriks Jacobian di sekitar titik tetapnya adalah

$$J = \begin{bmatrix} -0,7125043140 & 3,922193750 & 0 & 52,10914554 \\ -0,08366707101 & -0,0036727073 & 0 & 6,119007976 \\ 0 & 0,00184 & -1,6041 & 0 \\ -0,0003329289474 & 0,001832707270 & 1,6041 & -6,119007977 \end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk menentukan nilai eigen maka

$$\det|J - \lambda I| = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -0,7125043140 & 3,922193750 & 0 & 52,10914554 \\ -0,08366707101 & -0,0036727073 & 0 & 6,119007976 \\ 0 & 0,00184 & -1,6041 & 0 \\ -0,0003329289474 & 0,001832707270 & 1,6041 & -6,119007977 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -0,7125043140 - \lambda & 3,922193750 & 0 & 52,10914554 \\ -0,08366707101 & -0,0036727073 - \lambda & 0 & 6,119007976 \\ 0 & 0,00184 & -1,6041 - \lambda & 0 \\ -0,0003329289474 & 0,001832707270 & 1,6041 & -6,119007977 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Kemudian dengan bantuan software Maple diperoleh nilai eigen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

sebagaimana berikut:

$$\lambda_1 = -0,3570722241 + 0,4515802517i$$

$$\lambda_3 = -6,117391316$$

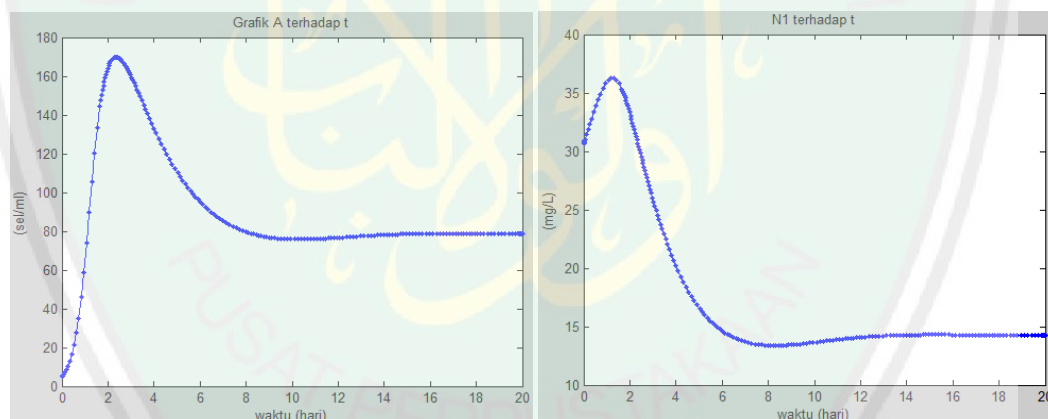
$$\lambda_2 = -0,3570722241 - 0,4515802517i$$

$$\lambda_4 = -1,607749235$$

Karena nilai-nilai eigen  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  yang diperoleh merupakan anggota bilangan kompleks dengan bagian real bernilai negatif maka sistem tersebut adalah stabil asimtotik. Hal ini menunjukkan bahwa dengan titik tetap  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = (78,6405 \ 14,2292 \ 0,01632173241 \ 0,0042618)$  maka pertumbuhan alga dan kadar amoniak, nitrit dan nitrat dapat berdampingan.

### 3.3 Solusi Numerik dan Interpretasi Grafik

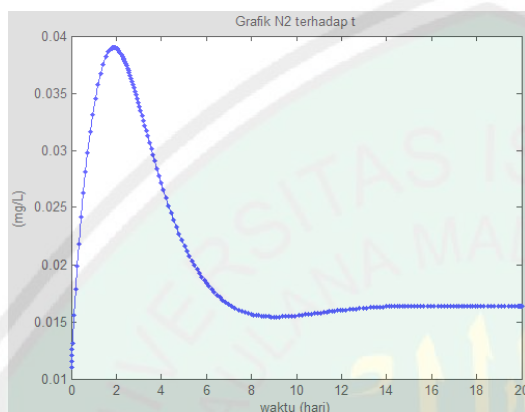
Dengan bantuan software MATLAB 2008 serta dengan menggunakan fungsi ode45 dan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 3.1 dan nilai awal  $A(0), N_1(0), N_2(0), N_3(0)$  pada Tabel 3.2 maka diperoleh hasil grafik dari sistem persamaan (3.5) sebagaimana berikut:



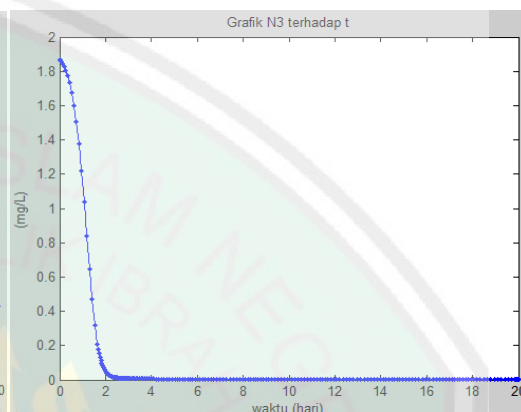
Gambar 3.2 Grafik Perubahan Pertumbuhan Alga      Gambar 3.3 Grafik Perubahan Kadar Amoniak

Gambar 3.2 dan 3.3 merupakan grafik perubahan pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak ( $\text{NH}_3$ ) selama 20 hari. Dengan nilai parameter yang telah diberikan pada Tabel 3.2 dan nilai awal pada Tabel 3.1, dapat diketahui bahwa mula-mula pertumbuhan alga dan kadar amoniak mengalami peningkatan sampai hari ke 2 dengan pertumbuhan alga mencapai sekitar 175 sel/ml dan kadar amoniak mencapai sekitar 37 mg/L. Pada hari berikutnya perlahan pertumbuhan alga dan kadar amoniak mengalami penurunan sampai hari ke 8 yaitu mencapai

sekitar 75 mg/L untuk pertumbuhan alga dan 13 mg/L untuk kadar amoniak. Setelah itu, pertumbuhan alga perlahan cenderung stabil ketika mencapai sekitar 78,64 sel/ml. Sedangkan kadar amoniak cenderung bergerak stabil ketika kadarnya mencapai sekitar 14,2 mg/L.



Gambar 3.4 Grafik Perubahan Kadar Nitrit



Gambar 3.5 Grafik Perubahan Kadar Nitrat

Gambar 3.4 dan 3.5 menunjukkan perubahan kadar nitrit ( $\text{NO}_2$ ) dan nitrat ( $\text{NO}_3$ ) selama 20 hari. Dengan nilai parameter yang telah diberikan pada Tabel 3.1 dan nilai awal pada Tabel 3.2 berdasarkan Gambar 3.4 dapat diketahui bahwa mula-mula kadar nitrit mengalami peningkatan sampai hari ke 2 yaitu mencapai sekitar 0,039 mg/L. Namun setelah itu kadar nitrit perlahan mengalami penurunan sampai hari ke 8 yaitu mencapai sekitar 0,015 mg/L. Kemudian perlahan kadar nitrit cenderung bergerak stabil ketika mencapai sekitar 0,016 mg/L. Berdasarkan Gambar 3.5 dapat diketahui bahwa kadar nitrat terus mengalami penurunan seiring bertambahnya waktu sampai akhirnya cenderung stabil ketika mencapai sekitar 0,004mg/L.

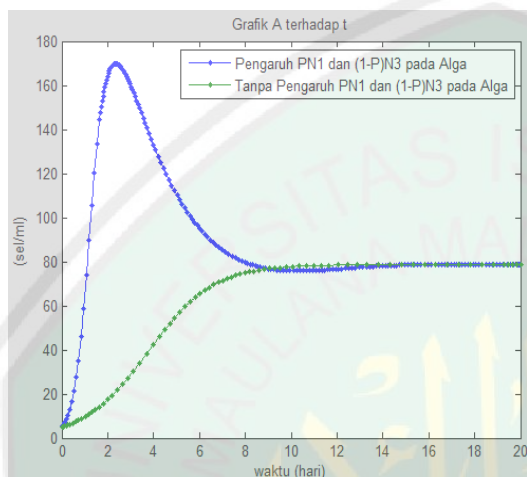
Berdasarkan Gambar 3.2 sampai 3.5 dapat diketahui bahwa ketika pertumbuhan alga mencapai nilai maksimal yaitu sekitar 175 sel/ml pada 2 hari pertama, kadar amoniak dan nitrit juga mencapai nilai maksimal yaitu sekitar 37 mg/L dan 0,039 mg/L. Selanjutnya ketika pertumbuhan alga mulai mengalami

penurunan hingga hari ke 8 yaitu mencapai sekitar 75 sel/ml, kadar amoniak dan nitrit juga mengalami penurunan hingga hari ke 8 yaitu mencapai sekitar 13 mg/L dan 0,015 mg/L. Setelah itu, pada waktu selanjutnya pertumbuhan alga serta kadar amoniak dan nitrit cenderung bergerak stabil. Sedangkan untuk perubahan kadar nitrat, kadar nitrat terus mengalami penurunan seiring bertambahnya waktu sampai akhirnya cenderung bergerak stabil.

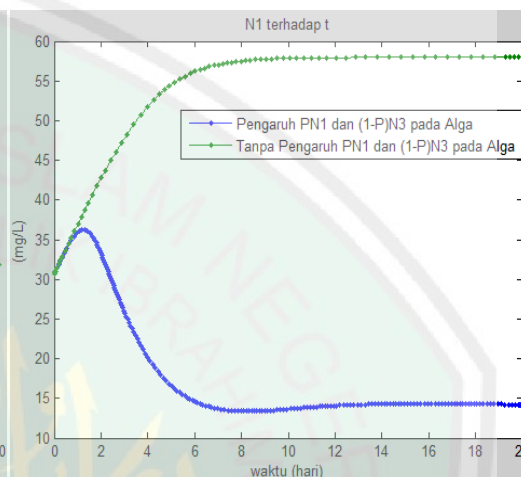
Berdasarkan uraian tersebut dapat disimpulkan bahwa pada 2 hari pertama pertumbuhan alga serta kadar amoniak dan nitrit mengalami peningkatan sampai mencapai nilai maksimal. Selanjutnya ketika pertumbuhan alga mulai mengalami penurunan pada hari berikutnya, kadar amoniak dan nitrit juga menurun. Sedangkan kadar nitrat terus mengalami penurunan seiring bertambahnya waktu. Hal ini terjadi karena pertumbuhan alga yang meningkat sampai mencapai nilai maksimal disebabkan oleh tersedianya amoniak yang pada waktu tersebut juga mengalami peningkatan hingga mencapai nilai maksimal karena adanya hasil ekskresi bentos yang ada di perairan. Selain itu, kadar nitrat yang awalnya berada pada nilai maksimal juga mengakibatkan pertumbuhan alga meningkat sampai mencapai nilai maksimal. Kemudian kadar nitrit mengalami peningkatan dan mencapai nilai maksimal pada waktu yang sama karena meningkatnya kadar amoniak menyebabkan hasil oksidasi amoniak menjadi nitrit juga meningkat dan mencapai nilai maksimal pada waktu tersebut. Sehingga ketika kadar amoniak mengalami penurunan pada hari berikutnya, maka hasil oksidasi amoniak menjadi nitrit juga menurun. Namun pertumbuhan alga serta perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat pada akhirnya cenderung bergerak stabil. Kestabilan pada model

interaksi pada pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat menghasilkan suatu kondisi lingkungan perairan yang seimbang.

Berdasarkan hasil tersebut, terdapat perbedaan antara hasil penelitian terdahulu dengan hasil penelitian penulis, sebagaimana uraian berikut:



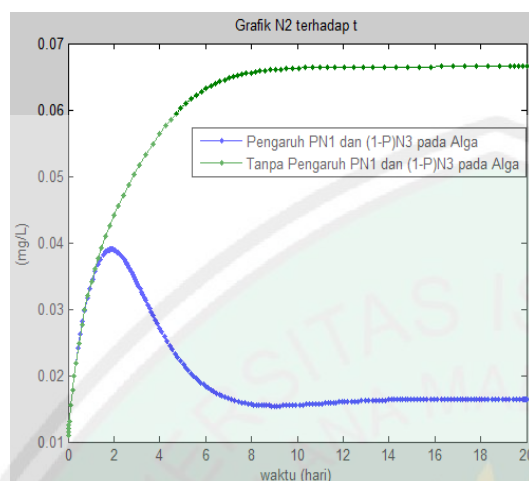
Gambar 3.6 Grafik Perubahan Pertumbuhan Alga dengan Pengaruh dan Tanpa Pengaruh Amoniak Sebesar  $P$  dan Nitrat Sebesar  $(1 - P)$  pada Pertumbuhan Alga



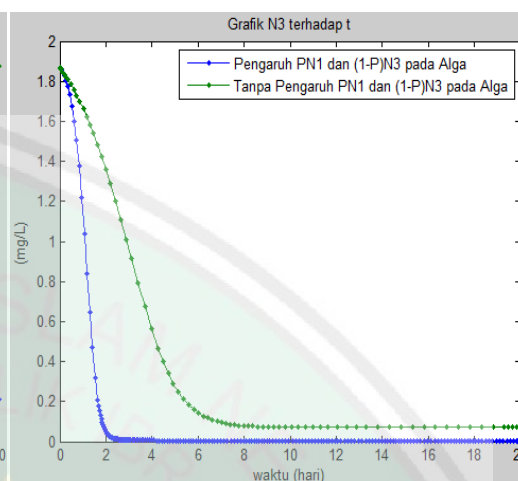
Gambar 3.7 Grafik Perubahan Kadar Amoniak dengan Pengaruh dan Tanpa Pengaruh Amoniak Sebesar  $P$  dan Nitrat Sebesar  $(1 - P)$  pada Pertumbuhan Alga

Gambar 3.6 dan 3.7 merupakan grafik perubahan pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak ( $\text{NH}_3$ ) selama 20 hari. Berdasarkan Gambar 3.6 dan 3.7 tersebut terlihat adanya perbedaan antara perubahan pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak dari penelitian terdahulu yaitu tanpa adanya pengaruh amoniak dan nitrat pada pertumbuhan alga dengan penelitian hasil penulis yaitu dengan adanya pengaruh amoniak dan nitrat pada pertumbuhan alga. Dengan nilai parameter yang telah diberikan pada Tabel 3.1 dan nilai awal pada Tabel 3.2, dapat diketahui bahwa pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Widowati, dkk, (2010:386-394) berdasarkan Gambar 3.6 dapat diketahui bahwa pertumbuhan alga mengalami peningkatan mulai hari pertama hingga hari ke 13 yaitu mencapai sekitar 78,7 sel/ml sampai akhirnya cenderung bergerak stabil. Kemudian berdasarkan Gambar 3.7 dapat diketahui bahwa kadar amoniak

mengalami peningkatan mulai hari pertama sampai hari ke 8 yaitu mencapai sekitar 57 mg/L sampai akhirnya cenderung bergerak stabil.



Gambar 3.8 Grafik Perubahan Kadar Nitrit dengan Pengaruh dan Tanpa Pengaruh Amoniak Sebesar  $P$  dan Nitrat Sebesar  $(1 - P)$  pada Pertumbuhan Alga

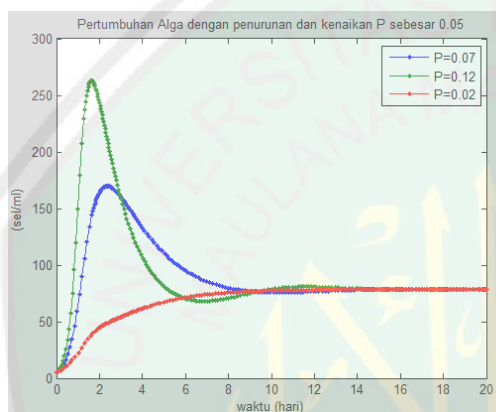


Gambar 3.9 Grafik Perubahan Kadar Nitrit dengan Pengaruh dan Tanpa Pengaruh Amoniak Sebesar  $P$  dan Nitrat Sebesar  $(1 - P)$  pada Pertumbuhan Alga

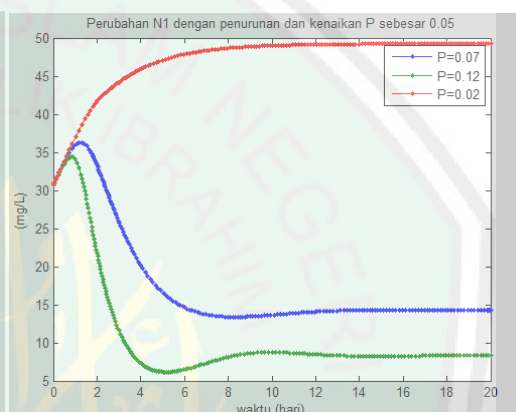
Gambar 3.8 dan 3.9 merupakan grafik perubahan kadar nitri ( $\text{NO}_2$ ) dan nitrat ( $\text{NO}_3$ ) selama 20 hari. Berdasarkan Gambar 3.8 dan 3.9 tersebut terlihat adanya perbedaan antara perubahan kadar nitrit dan nitrat dari penelitian terdahulu yaitu tanpa adanya pengaruh amoniak dan nitrat pada pertumbuhan alga dengan penelitian hasil penulis yaitu dengan adanya pengaruh amoniak dan nitrat pada pertumbuhan alga. Dengan nilai parameter yang telah diberikan pada Tabel 3.1 dan nilai awal pada Tabel 3.2, dapat diketahui bahwa pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Widowati, dkk, (2010:386-394) berdasarkan Gambar 3.8 dapat diketahui bahwa kadar nitrit mengalami peningkatan mulai hari pertama hingga hari ke 8 yaitu mencapai sekitar 0,067 mg/L sampai akhirnya cenderung bergerak stabil. Kemudian berdasarkan Gambar 3.9 dapat diketahui bahwa kadar nitrat mengalami penurunan mulai hari pertama sampai hari ke 8 yaitu mencapai sekitar 0,12 mg/L sampai akhirnya cenderung bergerak stabil.

### 3.4 Simulasi dan Interpretasi Grafik

Simulasi dilakukan untuk mengetahui perilaku setiap variabel ( $A(t), N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ ) dengan nilai preferensi amoniak ( $P$ ) ketika mengalami penurunan dari  $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,02$  dan ketika mengalami kenaikan dari  $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,12$ . Hasil simulasi adalah sebagaimana berikut:



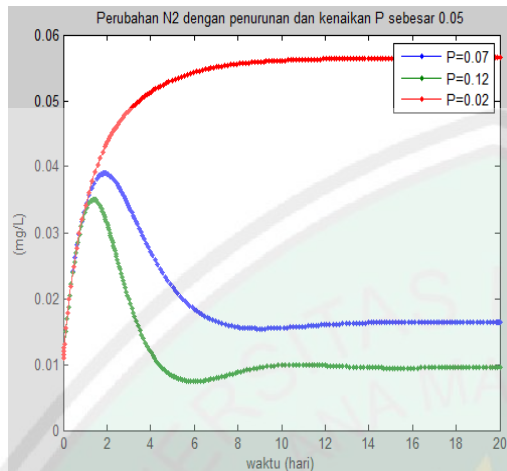
Gambar 3.10 Grafik Simulasi Perubahan Pertumbuhan Alga dengan  $P = 0,02$ ;  $P = 0,07$  dan  $P = 0,12$



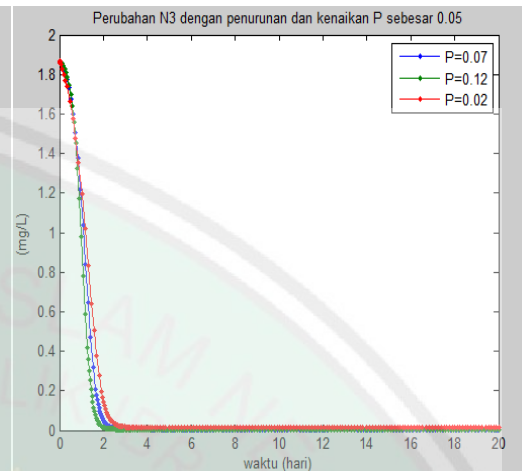
Gambar 3.11 Grafik Simulasi Perubahan Kadar Amoniak dengan  $P = 0,02$ ;  $P = 0,07$ ;  $P = 0,07$  dan  $P = 0,12$

Gambar 3.10 menunjukkan simulasi perubahan pertumbuhan alga dengan nilai parameter  $P$  yang berbeda. Berdasarkan gambar tersebut, dapat diketahui bahwa ketika faktor preferensi amoniak meningkat ( $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,12$ ) maka pertumbuhan alga juga meningkat sampai akhirnya cenderung bergerak stabil. Sedangkan ketika faktor preferensi menurun ( $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,02$ ) maka pertumbuhan alga juga menurun sampai akhirnya cenderung bergerak stabil. Sedangkan Gambar 3.11 menunjukkan simulasi perubahan kadar amoniak dengan nilai parameter  $P$  yang berbeda. Berdasarkan gambar tersebut, dapat diketahui bahwa ketika faktor preferensi amoniak meningkat ( $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,12$ ) dan cenderung bergerak stabil. Sedangkan ketika faktor preferensi menurun

( $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,02$ ) maka kadar amoniak mengalami peningkatan seiring bertambahnya waktu sampai akhirnya cenderung bergerak stabil.



Gambar 3.12 Grafik Simulasi Perubahan Kadar Nitrit dengan  $P = 0,02$ ;  $P = 0,07$  dan  $P = 0,12$



Gambar 3.13 Grafik Simulasi Perubahan Kadar Nitrat dengan  $P = 0,02$ ;  $P = 0,07$  dan  $P = 0,12$

Gambar 3.12 menunjukkan simulasi perubahan kadar nitrit dengan nilai parameter  $P$  yang berbeda. Berdasarkan gambar tersebut, dapat diketahui bahwa ketika faktor preferensi amoniak meningkat ( $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,12$ ) maka kadar nitrit mengalami penurunan hingga akhirnya cenderung bergerak stabil. Sedangkan ketika faktor preferensi menurun ( $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,02$ ) maka kadar nitrit mengalami peningkatan seiring bertambahnya waktu sampai akhirnya cenderung bergerak stabil. Sedangkan Gambar 3.13 menunjukkan simulasi perubahan kadar nitrat dengan nilai parameter  $P$  yang berbeda. Berdasarkan gambar tersebut, dapat diketahui bahwa ketika faktor preferensi amoniak meningkat ( $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,12$ ) maka kadar nitrat mengalami penurunan dan akhirnya cenderung bergerak stabil. Sedangkan ketika faktor preferensi menurun ( $P = 0,07$  menjadi  $P = 0,02$ ) maka kadar nitrat mengalami peningkatan dan akhirnya cenderung bergerak stabil.

Berdasarkan uraian tersebut, dapat diketahui bahwa ketika faktor preferensi amoniak ( $P$ ) meningkat, maka amoniak yang digunakan oleh alga juga meningkat sehingga pertumbuhan alga meningkat. Penggunaan amoniak yang semakin besar menyebabkan kadar amoniak menurun sehingga hasil oksidasi amoniak menjadi nitrit dan nitrat juga menurun. Sedangkan ketika faktor preferensi amoniak ( $P$ ) menurun, maka amoniak yang digunakan oleh alga juga mengecil sehingga pertumbuhan alga mengalami penurunan. Penggunaan amoniak yang semakin kecil menyebabkan kadar amoniak meningkat sehingga hasil oksidasi amoniak menjadi nitrit dan nitrat juga meningkat.

### **3.5 Siklus dan Asimilasi Nitrogen serta Konsep Keseimbangan dalam Perspektif Islam**

Siklus nitrogen merupakan suatu proses perubahan senyawa yang mengandung unsur nitrogen menjadi berbagai macam bentuk kimia yang lain. Siklus nitrogen merupakan salah satu bukti bahwa bumi secara khusus dirancang untuk kehidupan manusia. Siklus ini telah digambarkan Allah Swt. dengan jelas melalui firman-Nya dalam surat al-Baqarah/2:164.

Allah Swt. telah menciptakan berbagai macam makhluk hidup yang beraneka ragam mulai dari yang dapat dilihat oleh mata secara langsung maupun yang berukuran sangat kecil, yang disebut mikroorganisme. Salah satu contoh mikroorganisme yaitu bakteri pengurai, di antaranya adalah *Nitrocomonas* dan *Nitrocobacter*. Nitrogen merupakan suatu senyawa yang dibutuhkan oleh semua makhluk hidup. Tumbuhan dan alga yang dapat membuat makanannya sendiri (mempunyai klorofil) membutuhkan nitrogen dalam bentuk amoniak dan nitrat untuk berfotosintesis. Penggunaan nitrogen ini dikenal dengan sebutan asimilasi

nitrogen. Hewan dan manusia sebagai makhluk hidup yang tidak dapat membuat makanannya sendiri dapat memenuhi kebutuhan nitrogen dengan cara memakan tumbuhan dan alga tersebut. Melalui firman-Nya dalam surat al-An'âm/6:95, Allah Swt. menggambarkan hubungan atau interaksi antar ciptaanNya dalam sebuah siklus sebagaimana berikut:

إِنَّ اللَّهَ فَالِقُ الْحَبِّ وَالنَّوَى يُخْرِجُ الْحَيَّ مِنَ الْمَيِّتِ وَمُخْرِجُ الْمَيِّتِ مِنَ الْحَيِّ ذَلِكُمْ اللَّهُ فَالِقُ  
تُؤْفَكُونَ (٩٥)

Artinya: “*Sesungguhnya Allah menumbuhkan butir tumbuh-tumbuhan dan biji buah-buahan. Dia mengeluarkan yang hidup dari yang mati dan mengeluarkan yang mati dari yang hidup. (Yang memiliki sifat-sifat) demikian ialah Allah, maka mengapa kamu masih berpaling?*” (QS. al-An'âm/6:95).

Dari ayat tersebut, dijelaskan bahwa semua makhluk yang diciptakan Allah Swt. di seluruh jagat raya tidak ada yang sia-sia. Tumbuhan dan alga menggunakan nitrogen dalam bentuk amoniak dan nitrat hasil oksidasi bakteri *Nitrocomonas* dan *Nitrocobacter* untuk berfotosintesis. Manusia dan hewan yang tidak dapat menggunakan nitrogen secara langsung memenuhi kebutuhan nitrogen dengan cara mengkonsumsi tumbuhan dan alga. Tumbuhan dan alga yang telah dikonsumsi oleh manusia dan hewan akan dikeluarkan kembali berupa kotoran. Manusia dan hewan dengan seiring berjalannya waktu juga akan mengalami kematian. Kotoran dan bangkai dari hewan dan manusia akan diproses kembali oleh bakteri pengurai, sehingga menghasilkan senyawa amoniak sebagai sumber utama nitrogen. Bakteri *Nitrocomonas* dan *Nitrocobacter* akan bekerja kembali untuk mengoksidasi amoniak menjadi nitrit dan nitrat. Kemudian amoniak dan nitrat akan digunakan kembali oleh tumbuhan dan alga. Proses ini berjalan terus menerus sepanjang waktu dengan kehendak Allah Swt. untuk menjaga keseimbangan ciptaan-Nya.

Berdasarkan hal tersebut, dapat disimpulkan bahwa sel-sel yang hidup akan mati dan akan lahir sel-sel baru. Setiap makhluk hidup pasti akan mengalami kematian. Akan tetapi, sel yang berubah menjadi atom masuk ke dalam komposisi lain, kemudian masuk ke tubuh yang hidup dan menimbulkan kehidupan. Hal itu merupakan siklus yang terus terjadi sepanjang waktu. Semua itu adalah gerakan yang tidak mungkin dikendalikan oleh manusia atau terjadi secara kebetulan tanpa perencanaan, kecuali dengan kehendak Allah Swt.



## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Model interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat membentuk sebuah sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu autonomous dengan empat variabel terikat yaitu  $A(t), N_1(t), N_2(t)$  dan  $N_3(t)$  yang terdiri atas 4 persamaan. Dalam penyelesaian masalah model interaksi pada pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat dilakukan analisis kestabilan dari model tersebut sehingga didapatkan titik kesetimbangan (titik tetap) dari model tersebut. Berdasarkan pembahasan pada bab III, didapatkan hanya satu titik tetap yaitu  $(A^*(t), N_1^*(t), N_2^*(t), N_3^*(t)) = (78,6405 \ 14,2292 \ 0,01632173241 \ 0,0042618)$ . Pada keadaan ini sistem pada model dinyatakan stabil. Kestabilannya ditunjukkan berdasarkan nilai-nilai eigen yang dihasilkan, yaitu  $\lambda_1 = -0,3570722241 + 0,4515802517i$   $\lambda_2 = -0,3570722241 - 0,4515802517i$   $\lambda_3 = -6,117391316$  dan  $\lambda_4 = -1,607749235$  yang merupakan anggota bilangan kompleks dengan bagian real yang bertanda negatif. Hal ini menunjukkan bahwa interaksi pada pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat membentuk suatu sistem yang stabil.

Dari hasil solusi numerik, didapatkan interaksi dari sistem tersebut. Ketika pertumbuhan alga mengalami peningkatan, maka perubahan kadar amoniak dan nitrit juga ikut meningkat. Kemudian ketika pertumbuhan alga mengalami penurunan, maka perubahan kadar amoniak dan nitrit juga menurun. Sedangkan kadar nitrat terus mengalami penurunan seiring dengan bertambahnya waktu.

Pertumbuhan alga serta perubahan kadar amoniak, nitrit dan nitrat pada akhirnya cenderung bergerak stabil. Pada penelitian sebelumnya, berdasarkan hasil solusi numerik yang didapatkan menunjukkan bahwa pertumbuhan alga dan perubahan kadar amoniak dan nitrat mengalami peningkatan sejak hari pertama sampai akhirnya cenderung bergerak stabil. Perubahan kadar nitrat mengalami penurunan seiring bertambahnya waktu sampai akhirnya cenderung bergerak stabil.

Sedangkan berdasarkan hasil simulasi dapat diketahui bahwa ketika faktor preferensi amoniak ( $P$ ) ditingkatkan, maka amoniak yg digunakan oleh alga juga meningkat sehingga pertumbuhan alga juga meningkat. Penggunaan amoniak yang semakin besar menyebabkan kadar amoniak menurun sehingga hasil oksidasi amoniak menjadi nitrit dan nitrat juga menurun. Sedangkan ketika faktor preferensi amoniak ( $P$ ) menurun, maka amoniak yg digunakan oleh alga juga mengecil sehingga pertumbuhan alga mengalami penurunan. Penggunaan amoniak yang semakin kecil menyebabkan kadar amoniak meningkat sehingga hasil oksidasi amoniak menjadi nitrit dan nitrat juga meningkat.

#### 4.2 Saran

Pembahasan mengenai model matematika pada interaksi pertumbuhan alga dan perubahan kadar nitrogen ini masih terbuka bagi peneliti lain dengan menambahkan faktor-faktor lain yang berpengaruh untuk melanjutkan penelitian ini dan dapat juga mengadakan penelitian yang sejenis.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abadiyah, L.M. 2009. *Analisis Model Matematika pada Pengaruh Sistem Imun terhadap Infeksi Virus HIV*. Skripsi S1 tidak dipublikasikan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang: UIN Maliki Malang.
- Al Quran dan Terjemahannya.1989. Departemen Agama Republik Indonesia. Semarang: C.V.Toha Putra.
- Alam, A.A. 2011. *Kualitas Karaginan Rumput Laut Jenis Eucheuma Spinosum di Perairan Desa Punaga Kabupaten Takalar*. Skripsi S1 tidak dipublikasikan Konsentrasi Eksplorasi Sumberdaya Hayati Laut Jurusan Ilmu Kelautan Fakultas Ilmu Kelautan dan Perikanan. Makassar: Universitas Hasanuddin Makassar
- Ali, M. 2013. *Degradasi Nitrat Limbah Domestik dengan Alga Hijau (Chlorella Sp)*. Surabaya: UPN Veteran Jatim.
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial & Matematika Model*. Malang: Universitas Muhammadiyah Malang Press.
- Boyce, W.E dan DiPrima, R.C. 1999. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- Brown, L.C dan Barnwell, T.O. 1987. *The Enhanced Stream Water Quality Models Qual2E and Qual2E-Uncas: Documentation and User Manual*. Environmental Research Laboratory, (Online) 600 (007): 3-87, (<http://nepis.epa.gov/30000KGT.PDF?Dockey=30000GT.PDF>), diakses tanggal 12 April 2014.
- Claudia, N. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. New Jersey: Pearson Education.
- Conte, S dan de Boor, C. 1980. *Elementary Numerical Analysis an Algorithmic Approach, 3rd Edition*. USA: McGraw Hill-Book Company.
- Darmawansyah, T.T. 2012. *Analisis Model Matematika pada Makrofag yang Terinfeksi Virus HIV*. Skripsi S1 tidak dipublikasikan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Bandung: Universitas Islam Sunan Gunung Djati.
- Febrianty, E. 2011. *Produktivitas Alga Hydrodictyon pada Sistem Perairan Tertutup (Closed System)*. Skripsi S1 tidak dipublikasikan Departemen Manajemen Sumberdaya Perairan Fakultas Perikanan dan Ilmu Kelautan. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

- Finizio, N dan Ladas, G. 1982. *Persamaan Diferensial dengan Penerapan Modern. Terjemahan Widiarti Santosa*. Jakarta: Erlangga.
- Fitria, V.A. 2009. *Analisis Sistem Persamaan Diferensial Model Predator Prey dengan Perlambatan*. Skripsi S1 tidak dipublikasikan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang: UIN Maliki Malang.
- Iswanto, R.J. 2012. *Pemodelan Matematika: Aplikasi dan Terapan*. Yogyakarta: Graha Ilmu
- Pamuntjak. 1990. *Persamaan Deferensial Biasa*. Bandung: Institut Teknologi Bandung
- Tu, P.N.V. 1994. *Dynamical System an Introduction with Application in Economics and Biology*. New York: Springer-verlag.
- Widowati, Hermin dan Sutimin. 2009. Mathematical Modeling and Analysis of Ammonia, Nitrite and Nitrate Concentration: Case Study in The Polder Tawang Semarang, Indonesia. *Proceedings of the IICMA*, (Online) 1 (09): 1-9, (<http://eprints.undip.ac.id>), diakses tanggal 05 Maret 2014.
- Widowati, Sutimin dan Tarita. 2010. Kontruksi Model Dinamik Pertumbuhan Alga dan Pengaruhnya pada Perubahan Kadar Nitrogen. *Prosiding KNM XV*, (Online) 2 (19): 386-394, (<http://eprints.undip.ac.id>), diakses tanggal 03 Maret 2014.
- Zahnur. 2012. *Modul Praktikum Teori Persamaan Diferensial*. Aceh: Universitas Syiah Kuala.

## RIWAYAT HIDUP



Nur Saidah, biasa dipanggil Iid lahir di Pasuruan Jawa Timur pada tanggal 12 April 1991, tinggal di Jl. Banda Utara No. 25 Kalirejo-Kraton Kabupaten Pasuruan. Penulis merupakan putri keenam dari tujuh bersaudara dari pasangan Bapak Abdul Chalim dan Ibu Maidah. Pendidikan dasarnya ditempuh di SDN Gading Rejo II dan lulus pada tahun 2004, setelah itu melanjutkan ke SMP Islam Pasuruan dan lulus pada tahun 2007. Kemudian penulis melanjutkan pendidikan ke SMAN 4 Pasuruan dan lulus pada tahun 2010. Selama menempuh pendidikan pada tingkat SD sampai SMA, penulis berperan aktif dalam beberapa kejuaraan Pramuka dan olah raga serta selalu menjadi salah satu lulusan terbaik di sekolahnya.

Pada tahun 2010 penulis diterima di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang pada Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi. Selama mengikuti perkuliahan penulis pernah mengikuti kegiatan Kompetisi Penelitian Mahasiswa (KPM) dengan karya tulis yang berjudul “Model Matematika pada Makrofag dan Limfosit T tanpa Melibatkan Sitokin Sebagai Respon terhadap Infeksi *Mycobacterium tuberculosis* di Paru-Paru dan Kelenjar Getah Bening”.

## Lampiran 1

**Program MAPLE Menentukan Titik Tetap dan Nilai Eigen Model Interaksi  
Pertumbuhan Alga dan Perubahan Kadar Amoniak, Nitrit dan Nitrat**

```
> restart;
> dw:=(((P*x)+((1-P)*z))*(delta*w))-(delta*w*(w/K));
```

$$dw := (Px + (1 - P)z) \delta w - \frac{\delta w^2}{K}$$

```
> dx:=-k1*x+(sigma2/d)-(((P*x)/((P*x)+((1-P)*z)))*alpha*mu*w);
```

$$dx := -k1 x + \frac{\sigma 2}{d} - \frac{Px \alpha \mu w}{Px + (1 - P)z}$$

```
> dy:=k1*x-k2*y;
```

$$dy := k1 x - k2 y$$

```
> dz:=k2*y-(((1-P)*z)/((P*x)+((1-P)*z)))*alpha*mu*w;
```

$$dz := k2 y - \frac{(1 - P)z \alpha \mu w}{Px + (1 - P)z}$$

```
> fixedpoint:=solve({dw,dx,dy,dz},{w,x,y,z});
```

$$\text{fixedpoint} := \left\{ w = \frac{\sigma 2}{\alpha \mu d}, x = \frac{\sigma 2}{d(\alpha \mu KP + k1)}, y = \frac{k1 \sigma 2}{d(\alpha \mu KP + k1) k2}, z = \frac{k1 \sigma 2}{\alpha \mu d K(\alpha \mu KP^2 + k1 P - \alpha \mu KP - k1)} \right\}$$

```
> fix1:=fixedpoint;
```

$$\text{fix1} := \left\{ w = \frac{\sigma 2}{\alpha \mu d}, x = \frac{\sigma 2}{d(\alpha \mu KP + k1)}, y = \frac{k1 \sigma 2}{d(\alpha \mu KP + k1) k2}, z = \frac{k1 \sigma 2}{\alpha \mu d K(\alpha \mu KP^2 + k1 P - \alpha \mu KP - k1)} \right\}$$

```
> with(plots):with(linalg):
```

```
jac:=jacobian([dw,dx,dy,dz],[w,x,y,z]);
```

$$\text{jac} := \left[ \left[ (Px + (1 - P)z) \delta - \frac{2 \delta w}{K}, P \delta w, 0, (1 - P) \delta w \right], \left[ -\frac{Px \alpha \mu}{Px + (1 - P)z}, -k1 - \frac{Px \alpha \mu w}{Px + (1 - P)z} + \frac{P^2 x \alpha \mu w}{(Px + (1 - P)z)^2}, 0, \frac{Px \alpha \mu w (1 - P)}{(Px + (1 - P)z)^2} \right], \left[ 0, k1, -k2, 0 \right], \left[ -\frac{(1 - P)z \alpha \mu}{Px + (1 - P)z}, \frac{(1 - P)z \alpha \mu w P}{(Px + (1 - P)z)^2}, k2, -\frac{(1 - P) \alpha \mu w}{Px + (1 - P)z} + \frac{(1 - P)^2 z \alpha \mu w}{(Px + (1 - P)z)^2} \right] \right]$$

```

>restart:with(linalg):with(plots):
>dw:=((0.07*x)+(0.93*z))*(0.7125*w)-(0.7125*w*(w/78.64));
      dw := 0.7125(0.07x + 0.93z)w - 0.009060274666w2
> dx:=(-0.00184*x)+6.6058-
      ((0.07*x)/((0.07*x)+(0.93*z)))*0.084*w;
      dx := -0.00184x + 6.6058 -  $\frac{0.00588xw}{0.07x + 0.93z}$ 
>dy:=0.00184*x-1.6041*y;
      dy := 0.00184x - 1.6041y
>dz:=1.6041*y-((0.93*z)/((0.07*x)+(0.93*z)))*0.084*w;
      dz := 1.6041y -  $\frac{0.07812zw}{0.07x + 0.93z}$ 
>fixedpoint:=solve({dw,dx,dy,dz},{w,x,y,z});
      fixedpoint := {w = 78.64047619, x = 14.22917987, y = 0.0163217324, z
      = 0.00426178908}
> fix1:=fixedpoint;
      fix1 := {w = 78.64047619, x = 14.22917987, y = 0.0163217324, z
      = 0.00426178908}
> with(plots):with(linalg):
>jac:=jacobian([dw,dx,dy,dz],[w,x,y,z]);
      jac :=  $\begin{bmatrix} 0.049875x + 0.662625z - 0.01812054933w, & 0.049875w, & 0, \\ & 0.662625w, & \\ -\frac{0.00588x}{0.07x + 0.93z}, & -0.00184 - \frac{0.00588w}{0.07x + 0.93z} \\ + \frac{0.0004116xw}{(0.07x + 0.93z)^2}, & 0, & \frac{0.0054684xw}{(0.07x + 0.93z)^2} \\ [0, 0.00184 - 1.6041, 0], \\ -\frac{0.07812z}{0.07x + 0.93z}, & \frac{0.0054684zw}{(0.07x + 0.93z)^2}, & 1.6041, \\ -\frac{0.07812w}{0.07x + 0.93z} + \frac{0.0726516zw}{(0.07x + 0.93z)^2} \end{bmatrix}$ 
> jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);
      jac1 :=

$$\begin{bmatrix} -0.7125043140 & 3.922193750 & 0 & 52.10914554 \\ -0.08366707101 & -0.0036727073 & 0 & 6.119007976 \\ 0 & 0.00184 & -1.6041 & 0 \\ -0.00033292894740 & 0.001832707270 & 1.6041 & -6.119007977 \\ -0.3570722241 + 0.4515802517i, & -0.3570722241 - 0.4515802517i, & -6.117391316 - 1.607749235 \end{bmatrix}$$

>restart:with(linalg):with(plots):

```

```

> dw:=(0.02*x)+(0.98*z))*(0.7125*w)-
(0.7125*w*(w/78.64));
      dw := 0.7125(0.02x + 0.98z)w - 0.009060274666w2
> dx:=(-0.00184*x)+6.6058-
((0.02*x)/((0.02*x)+(0.98*z)))*0.084*w;
      dx := -0.00184x + 6.6058 -  $\frac{0.00168xw}{0.02x + 0.98z}$ 
> dy:=0.00184*x-1.6041*y;
      dy := 0.00184x - 1.6041y
> dz:=1.6041*y-((0.98*z)/((0.02*x)+(0.98*z)))*0.084*w;
      dz := 1.6041y -  $\frac{0.08232zw}{0.02x + 0.98z}$ 
> fixedpoint:=solve({dw,dx,dy,dz},{w,x,y,z});
      fixedpoint := {w = 78.64047619, x = 49.31350181, y = 0.05656557779z
= 0.01401634568}
> fix1:=fixedpoint;
      fix1 := {w = 78.64047619, x = 49.31350181, y = 0.05656557779z
= 0.01401634568}
> with(plots):with(linalg):
> jac:=jacobian([dw,dx,dy,dz],[w,x,y,z]);
      jac :=  $\begin{bmatrix} 0.014250x + 0.698250z - 0.01812054933w, 0.014250w, 0, \\ 0.698250w, \\ \left[ -\frac{0.00168x}{0.02x + 0.98z}, -0.00184 - \frac{0.00168w}{0.02x + 0.98z} \right. \\ \left. + \frac{0.0000336xw}{(0.02x + 0.98z)^2}, 0, \frac{0.0016464xw}{(0.02x + 0.98z)^2} \right], \\ \left[ 0, 0.00184 - 1.6041, 0 \right], \\ \left[ -\frac{0.08232z}{0.02x + 0.98z}, \frac{0.0016464zw}{(0.02x + 0.98z)^2}, 1.6041, \right. \\ \left. -\frac{0.08232w}{0.02x + 0.98z} + \frac{0.0806736zw}{(0.02x + 0.98z)^2} \right] \end{bmatrix}$ 
> jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);
      jac1 :=  $\begin{bmatrix} -0.7125043138 & 1.120626786 & 0 & 54.91071250 \\ -0.08284618141 & -0.0036547259 & 0 & 6.384723233 \\ 0 & 0.00184 & -1.6041 & 0 \\ -0.0011538185900.001814725878 & 1.6041 & -6.384723234 \\ -6.375137487 & -0.5437928611 & -0.1777624854 & -1.60828944 \end{bmatrix}$ 
>restart:with(linalg):with(plots):

```

```

> dw:=(0.12*x)+(0.88*z))*0.7125*w)-
(0.7125*w*(w/78.64));
      dw :=0.7125(0.12x + 0.88z) w - 0.009060274666w2
> dx:=(-0.00184*x)+6.6058-
((0.12*x)/((0.12*x)+(0.88*z)))*0.084*w;
      dx := -0.00184x + 6.6058 -  $\frac{0.01008xw}{0.12x + 0.88z}$ 
> dy:=0.00184*x-1.6041*y;
      dy :=0.00184x - 1.6041y
>dz:=1.6041*y-((0.88*z)/((0.12*x)+(0.88*z)))*0.084*w;
      dz :=1.6041y -  $\frac{0.07392zw}{0.12x + 0.88z}$ 
> fixedpoint:=solve({dw,dx,dy,dz},{w,x,y,z});
      fixedpoint := {w = 78.64047619x = 8.314085083y = 0.009536759898z
= 0.002631642093}
> fix1:=fixedpoint;
      fix1 := {w = 78.64047619x = 8.314085083y = 0.009536759898z
= 0.002631642093}
> with(plots):with(linalg):
> jac:=jacobian([dw,dx,dy,dz],[w,x,y,z]);
      jac :=  $\begin{bmatrix} 0.085500x + 0.627000z - 0.01812054933w, 0.085500w, 0, \\ 0.627000w, \\ -\frac{0.01008x}{0.12x + 0.88z}, -0.00184 - \frac{0.01008w}{0.12x + 0.88z} \\ + \frac{0.0012096xw}{(0.12x + 0.88z)^2}, 0, \frac{0.0088704xw}{(0.12x + 0.88z)^2}, \\ [0, 0.00184 - 1.6041, 0], \\ -\frac{0.07392z}{0.12x + 0.88z}, \frac{0.0088704zw}{(0.12x + 0.88z)^2}, 1.6041, \\ -\frac{0.07392w}{0.12x + 0.88z} + \frac{0.0650496zw}{(0.12x + 0.88z)^2} \end{bmatrix}$ 
> jac1:=subs(fix1,evalm(jac));eigenvals(jac1);
      jac1 :=

$$\begin{bmatrix} -0.7125043138 & 6.723760714 & 0 & 49.30757857 \\ -0.08380547020 & -0.0036757388 & 0 & 5.799606717 \\ 0 & 0.00184 & -1.6041 & 0 \\ -0.00019452980570.001835738871 & 1.6041 & -5.799606716 \\ -0.3566150572+ 0.6626620122I, -0.3566150572- 0.6626620122I, \\ -5.799276365 - 1.607380290 \end{bmatrix}$$


```

## Lampiran 2

### Program MATLAB Solusi Numerik Model Interaksi Pertumbuhan Alga dan Perubahan Kadar Amoniak, Nitrit dan Nitrat

```
Function semlass = semlass(t,y)
delta=0.7125;
K=78.64;
k1=0.00184;
k2=1.6041;
%iid=sig2/d=6.6058
iid=6.6058;
P=0.07;
alpha=0.08;
mu=1.05;
semlass(1)=(((P*y(2))+((1-P)*y(4)))*(delta*y(1)))-
((delta*y(1))*(y(1)/K));
semlass(2)=-k1*y(2)+iid-(((P*y(2))/((P*y(2))+((1-
P)*y(4))))*(alpha*mu*y(1)));
semlass(3)=k1*y(2)-k2*y(3);
semlass(4)=k2*y(3)-(((1-P)*y(4))/((P*y(2))+((1-
P)*y(4))))*(alpha*mu*y(1));
semlass=[semlass(1) semlass(2) semlass(3) semlass(4)];
clc;clearall;formatlong;
[t y]=ode45('semlass',0,20,[5 30.68 0.011 1.87]')

figure (1);
plot(t,y(:,1),'.-');
title('Grafik A terhadap t')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel(' (sel/ml) ');
holdon

figure (2);
plot(t,y(:,2),'.-');
title('N1 terhadap t')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel(' (mg/L) ');
holdon

figure (3);
plot(t,y(:,3),'.-');
title('Grafik N2 terhadap t')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel(' (mg/L) ');
holdon

figure (4);
plot(t,y(:,4),'.-');
```

```

title('Grafik N3 terhadap t')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel(' (mg/L) ');
holdon

function semlas = semlas(t,y)
delta=0.7125;
K=78.64;
k1=0.00184;
k2=1.6041;
%iid=sig2/d=6.6058
iid=6.6058;
P=0.07;
alpha=0.08;
mu=1.05;
semlas(1)=(delta*y(1))-(((delta*y(1))*y(1))/K);
semlas(2)=-k1*y(2)+iid-((P*y(2))/((P*y(2))+((1-
P)*y(4))))*(alpha*mu*y(1));
semlas(3)=k1*y(2)-k2*y(3);
semlas(4)=k2*y(3)-(((1-P)*y(4))/((P*y(2))+((1-
P)*y(4))))*(alpha*mu*y(1));
semlas = [semlas(1) semlas(2) semlas(3) semlas(4)]';

clc;clear all;format long;

[t y]=ode45('semlas',0,20,[5 30.68 0.011 1.87]')
[t0 y0]=ode45('semlas',0,20,[5 30.68 0.011 1.87]')

figure (1);
plot(t,y(:,1),'.-',t0,y0(:,1),'.-');
title('Grafik A terhadap t')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel(' (sel/ml) ');
legend ('Pengaruh PN1 dan (1-P)N3 pada Alga','Tanpa
Pengaruh PN1 dan (1-P)N3 pada Alga')
holdon

figure (2);
plot(t,y(:,2),'.-',t0,y0(:,2),'.-');
title('N1 terhadap t')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel(' (mg/L) ');
legend ('Pengaruh PN1 dan (1-P)N3 pada Alga','Tanpa
Pengaruh PN1 dan (1-P)N3 pada Alga')
holdon

figure (3);
plot(t,y(:,3),'.-',t0,y0(:,3),'.-');
title('Grafik N2 terhadap t')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel(' (mg/L) ');

```

```
legend ('Pengaruh PN1 dan (1-P)N3 pada Alga', 'Tanpa  
Pengaruh PN1 dan (1-P)N3 pada Alga')  
holdon  
  
figure (4);  
plot(t,y(:,4), '-.', t0,y0(:,4), '-.');
```

Grafik N3 terhadap t

```
xlabel('waktu (hari)');  
ylabel(' (mg/L) ');  
legend ('Pengaruh PN1 dan (1-P)N3 pada Alga', 'Tanpa  
Pengaruh PN1 dan (1-P)N3 pada Alga')  
holdon
```



### Lampiran 3

#### Program MATLAB Simulasi Model Interaksi Pertumbuhan Alga dan Perubahan Kadar Amoniak, Nitrit dan Nitrat dengan $P = 0,02$ ; $P = 0,07$ dan $P = 0,12$

```
function semlassturun = semlassturun(t,y)
delta=0.7125;
K=78.64;
k1=0.00184;
k2=1.6041;
iid=6.6058;
P=0.02;
alpha=0.08;
mu=1.05;
semlassturun(1)=((P*y(2))+((1-P)*y(4)))*(delta*y(1))-
((delta*y(1))*(y(1)/K));
semlassturun(2)=-k1*y(2)+iid-((P*y(2))/((P*y(2))+((1-
P)*y(4))))*(alpha*mu*y(1));
semlassturun(3)=k1*y(2)-k2*y(3);
semlassturun(4)=k2*y(3)-(((1-P)*y(4))/((P*y(2))+((1-
P)*y(4))))*(alpha*mu*y(1));
semlassturun = [semlassturun(1) semlassturun(2)
semlassturun(3) semlassturun(4)]';

function semlassnaik = semlassnaik(t,y)
delta=0.7125;
K=78.64;
k1=0.00184;
k2=1.6041;
iid=6.6058;
P=0.12;
alpha=0.08;
mu=1.05;
semlassnaik(1)=((P*y(2))+((1-P)*y(4)))*(delta*y(1))-
((delta*y(1))*(y(1)/K));
semlassnaik(2)=-k1*y(2)+iid-((P*y(2))/((P*y(2))+((1-
P)*y(4))))*(alpha*mu*y(1));
semlassnaik(3)=k1*y(2)-k2*y(3);
semlassnaik(4)=k2*y(3)-(((1-P)*y(4))/((P*y(2))+((1-
P)*y(4))))*(alpha*mu*y(1));
semlassnaik = [semlassnaik(1) semlassnaik(2)
semlassnaik(3) semlassnaik(4)]';

clc;clear all;format long;

[t y]=ode45('semlas',0,20,[5 30.68 0.011 1.87]')
[t0 y0]=ode45('semlassnaik',0,20,[5 30.68 0.011 1.87]')
[t1 y1]=ode45('semlassturun',0,20,[5 30.68 0.011 1.87]')
```

```

figure (1);
plot(t,y(:,1),'.-',t0,y0(:,1),'.-',t1,y1(:,1),'.-');
title('Pertumbuhan Alga dengan penurunan dan kenaikan P
sebesar 0.05')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel('(sel/ml)');
legend ('P=0.07','P=0.12','P=0.02')
holdon

```

```

figure (2);
plot(t,y(:,2),'.-',t0,y0(:,2),'.-',t1,y1(:,2),'.-');
title('Perubahan N1 dengan penurunan dan kenaikan P
sebesar 0.05')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel('(mg/L)');
legend ('P=0.07','P=0.12','P=0.02')
holdon

```

```

figure (3);
plot(t,y(:,3),'.-',t0,y0(:,3),'.-',t1,y1(:,3),'.-');
title('Perubahan N2 dengan penurunan dan kenaikan P
sebesar 0.05')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel('(mg/L)');
legend ('P=0.07','P=0.12','P=0.02')
holdon

```

```

figure (4);
plot(t,y(:,4),'.-',t0,y0(:,4),'.-',t1,y1(:,4),'.-');
title('Perubahan N3 dengan penurunan dan kenaikan P
sebesar 0.05')
xlabel('waktu (hari)');
ylabel('(mg/L)');
legend ('P=0.07','P=0.12','P=0.02')
holdon

```