

**KARAKTERISTIK FUNGSI *SET-VALUED* YANG MONOTON
MAKSIMAL DI RUANG DUAL**

SKRIPSI

Oleh:
CHOIRUN NIKMAH
NIM. 06510003



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**KARAKTERISTIK FUNGSI *SET-VALUED* YANG MONOTON
MAKSIMAL DI RUANG DUAL**

SKRIPSI

Oleh:
CHOIRUN NIKMAH
NIM. 06510003



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**KARAKTERISTIK FUNGSI *SET-VALUED* YANG MONOTON
MAKSIMAL DI RUANG DUAL**

SKRIPSI

Diajukan Kepada :

**Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh :
CHOIRUN NIKMAH
NIM. 06510003**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**KARAKTERISTIK FUNGSI *SET-VALUED* YANG MONOTON
MAKSIMAL DI RUANG DUAL**

SKRIPSI

Oleh:
CHOIRUN NIKMAH
NIM. 06510003

Telah disetujui oleh:

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Tanggal 13 Januari 2011

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**KARAKTERISTIK FUNGSI *SET-VALUED* YANG MONOTON
MAKSIMAL DI RUANG DUAL**

SKRIPSI

Oleh:
CHOIRUN NIKMAH
NIM : 06510003

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
22 Januari 2011

Susunan Dewan Penguji:

Tanda Tangan

- | | |
|------------------|---|
| 1. Penguji Utama | : <u>Hairur Rahman, S.Pd, M.Si</u> ()
NIP.19800429 200604 1 003 |
| 2. Ketua | : <u>Abdussakir, M.Pd</u> ()
NIP. 19751006 200312 1 001 |
| 3. Sekretaris | : <u>Usman Pagalay, M.Si</u> ()
NIP. 19650414 200312 1 001 |
| 4. Anggota | : <u>Fachrur Rozi, M.Si</u> ()
NIP. 19800527 200801 1 012 |

**Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**SURAT PERNYATAAN
KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Choirun Nikmah

NIM : 06510003

Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika

Judul Penelitian : Karakteristik Fungsi *Set-Valued* yang Monoton Maksimal di Ruang Dual

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 2 Februari 2011

Yang Membuat Pernyataan,

Choirun Nikmah
NIM. 06510003

MOTTO

أَقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ

**Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang
Menciptakan.
(QS. Al-Alaq: [96] 1)**

Barang siapa yang belajar ilmu Al-Qur'an, harganya amat agung. Barang siapa yang mempelajari ilmu Fiqih, ukurannya luhur. Barang siapa yang belajar Hadist, akan kuat hujahnya. Barang siapa yang belajar ilmu Hitung, maka akan tinggi pendapatannya. Barang siapa yang mempelajari ilmu Pendekatan, akan lembut tabiatnya. Dan barang siapa yang tidak memuliakan dirinya, maka ilmunya tidak bermanfaat.

Salaman Persembahkan

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat-Nyalah penulis dapat menyelesaikan karya ilmiah ini, untuk itu ku persembahkan karyaku ini untuk orang-orang yang penulis sayang dan menyayangi penulis.

Bapak dan ibu tercinta.....

Sebagai ungkapan terima kasih karena telah membesarkan dan mendidiku dengan penuh cinta kasih, atas kesabaran hati dan do'a yang selalu menyertai setiap langkah ku, serta dengan sepenuh hati memberikan apapun demi keberhasilan penulis tanpa mengharap kembali, "penulis bangga jadi putrimu dan semoga Allah selalu memberikan rahmat dan melindungi kalian berdua".

Keluarga dan saudara.....

Untuk mbah putri, kakak ku mbak nasifah, mbak liannah yang selalu memberiku semangat selama menyelesaikan studyku dan karena curahan kasih sayangmulah kebahagiaan selalu menyertai ku Adik ku rizky serta keponakan ku yang lucu sasa, dika, dan zaki aku sayang kalian semua.

Guru dan dosen..

Terima kasih atas ilmu yang telah diberikan untuk masa depanku. Semoga menjadi bekal yang berguna bagi nusa dan bangsaku.

Teman-teman kos seruni....

Maksih atas support dan kebersamaannya

Temen-temen angkatan 2006.....

Thanks atas semua bantuan dan dukungannya
Kebersamaan kita tak akan pernah aku lupakan

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrahmanirrahim

Dengan ketulusan hati yang paling dalam, penulis panjatkan rasa syukur Alhamdulillah kehadiran Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, taufik serta hidayah dan inayah-Nya sehingga, skripsi dengan judul “Karakteristik Fungsi *Set-Valued* yang Monoton Maksimal di Ruang Dual” ini dapat diselesaikan dengan baik. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca terutama dalam pengembangan ilmu matematika. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada junjungan nabi kita Muhammad SAW yang mana beliau telah sukses mengantarkan manusia kepada jaman yang terang benderang yaitu jaman yang kaya akan ilmu pengetahuan.

Dalam keadaan yang penuh perjuangan dan suka cita, penulis juga menyampaikan ucapan terimakasih teriring do’a “Jazakumullahu Khairajaza”. Penulisan skripsi ini disusun dengan keterbatasan yang penulis miliki, tiada kata sempurna yang melekat tanpa bimbingan, pengarahan, dan bantuan dari berbagai pihak baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun do’a dan restu. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih yang tiada terhingga kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika yang telah memberikan izin dan kemudahan kepada penulis untuk menyusun skripsi.
4. Usman Pagalay M.Si, selaku Dosen Pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktu demi memberikan bimbingan dan pengarahannya, serta petunjuknya sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.
5. Fachrur Rozi M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini.

6. Drs. Turmudi M.Si selaku wali dosen Matematika yang telah memberikan motivasi dan bimbingan dengan benar dari awal masuk kuliah sampai selesainya penulisan skripsi ini.
7. Segenap dosen jurusan Matematika yang telah berjasa memberikan ilmunya, membimbing dan memberikan motivasi dalam menuntut ilmu di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
8. Kedua orang tua penulis yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang do'a dan dorongan semangat kepada penulis saat ini. Semoga penulis dapat menjadi kebanggaan bagi bapak dan ibu.
9. Sahabat-sahabat Matematika angkatan 2006. Terimakasih atas semua pengalaman dan motivasinya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
10. Teman-teman kos Seruni. Terima kasih atas keceriaan yang telah diberikan selama kebersamaan kita.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu penyelesaian skripsi ini.

Kiranya skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya

Alhamdulillahirabbil'alamiin.

Malang, 22 Januari 2011

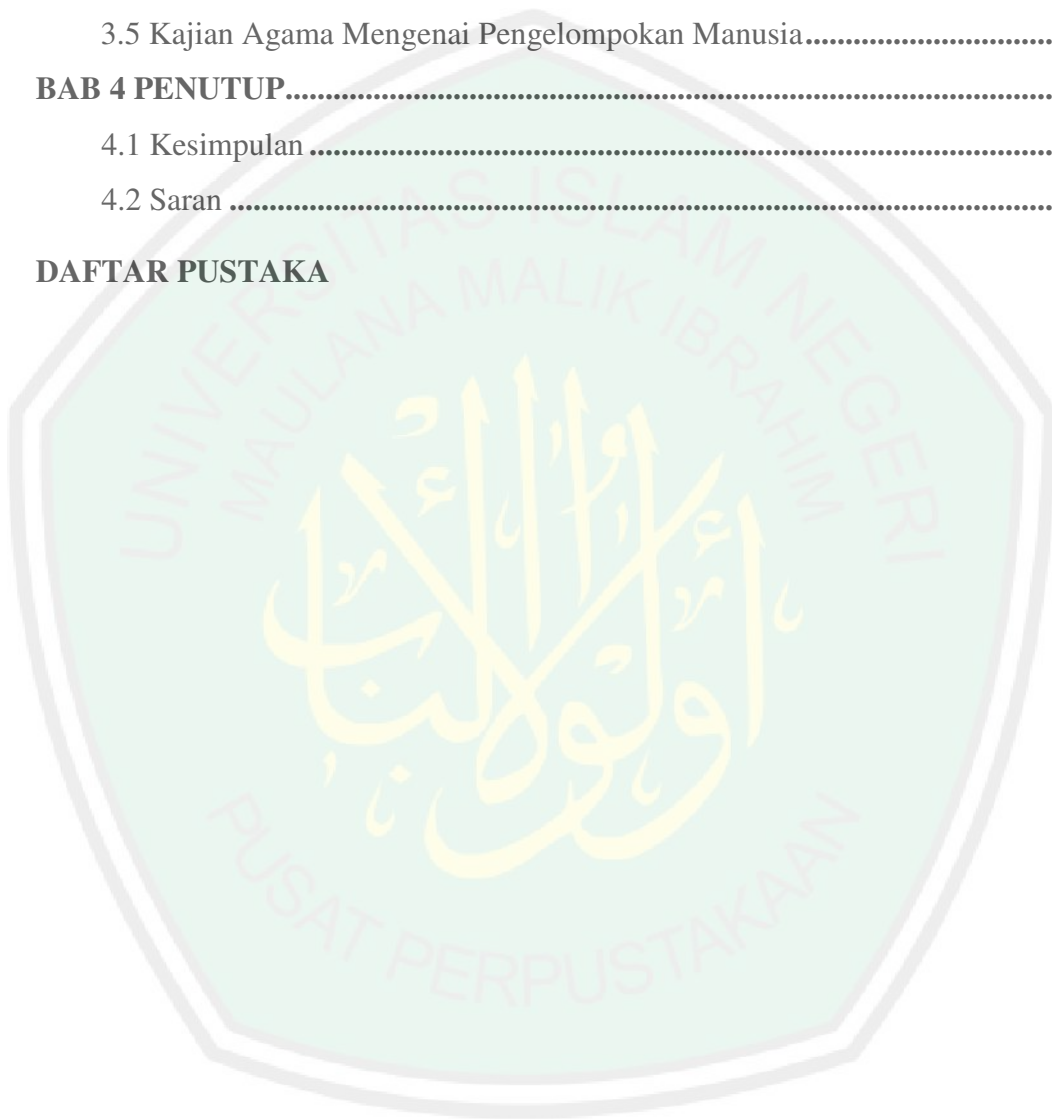
Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
SURAT KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR SIMBOL	v
ABSTRAK	vi
BAB 1 PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Batasan Masalah	5
1.4 Tujuan	5
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	8
BAB 2 KAJIAN PUSTAKA	9
2.1 Ruang Metrik	9
2.2 Ruang Vektor	16
2.3 Ruang Bernorma dan Ruang Banach.....	20
2.4 Ruang Dual	24
2.5 Himpunan Persekitaran, Tertutup, Terbatas dan Kompak.....	28
2.6 Himpunan Konveks	39
2.7 Fungsi <i>Set-Valued</i>	45
2.8 Kajian Himpunan dalam Al-Qur'an	57
BAB 3 PEMBAHASAN	62

3.1 Teorema Fungsi yang Monoton	62
3.3 Karakteristik Fungsi yang Monoton Maksimal	98
3.4 Contoh.....	98
3.5 Kajian Agama Mengenai Pengelompokan Manusia.....	100
BAB 4 PENUTUP.....	107
4.1 Kesimpulan	107
4.2 Saran	107

DAFTAR PUSTAKA



DAFTAR SIMBOL

\mathbb{R}	= Bilangan real
$\text{int}(A)$	= Himpunan semua titik interior dari A
$\ x\ $	= Ruang bernorma
Sup	= Suprimum (batas atas terkecil)
\bar{A}	= Closure dari A
A'	= Himpunan semua titik limit dari A
$\text{conv}(A)$	= Konveks Hull A
$\text{conv } S$	= Konveks Hull S
$B_r(x)$	= Bola terbuka, dimana x = pusat bola dan r = jari-jari
F^c	= Komplemen dari F
X^*	= Ruang Dual dari X
$D(T)$	= Domain / daerah asal fungsi T
$R(T)$	= Range / daerah hasil fungsi T
$T^+(B)$	= Invers atas fungsi T
$T^-(B)$	= Invers bawah fungsi T
$T : X \rightarrow X^*$	= Fungsi <i>set-valued</i> T
$\text{Gr}(T)$	= Grafik dari fungsi T
V	= Persekitaran

ABSTRAK

Nikmah, Choirun. 2011. *Karakteristik Fungsi Set-Valued yang Monoton Maksimal di Ruang Dual*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang:
Pembimbing 1. Usman Pagalay, M.Si.
2. Fachrur Rozi, M.Si.

Kata kunci: kompak, konveks, fungsi *set-valued*, monoton maksimal, ruang Dual.

Fungsi *set valued* adalah fungsi yang untuk setiap titik pada daerah range dipasangkan tepat satu atau lebih dari satu pada daerah asalnya. Peranan fungsi *set-valued* yang monoton maksimal dalam ilmu analisis dan ilmu aplikasi diantaranya adalah sebagai konsep dasar untuk masalah pertidaksamaan variasi dan masalah equilibrium yang merupakan teori dasar dari teknik optimasi, linier programming, transportasi dan ekonomi. Disamping itu, fungsi *set valued* yang monoton maksimal juga mempunyai peranan penting dalam analisis solusi persamaan differensial nonlinier. Karena peranannya yang sangat banyak, maka karakteristik dari fungsi ini sangat penting untuk dibahas.

Berdasarkan teorema-teorema yang mendukung kajian ini, didapatkan beberapa karakteristik dari fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang Dual, yaitu: jika *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal, himpunan $S \subset D(T)$ konveks, sedemikian sehingga $\text{int}(\overline{S}) \neq \emptyset$, dan himpunan $A \subset X^*$ terbatas, sehingga untuk setiap $x \in S$, $T(x) \cap A \neq \emptyset$, maka

1. *Set-valued* T monoton.
2. Himpunan $\text{int}(D(T))$ dan $\overline{D(T)}$ konveks.
3. *Set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam $\text{int}(D(T))$ tetapi tidak terbatas lokal di batas $D(T)$.
4. Untuk setiap $x \in D(T)$, himpunan $T(x)$ tertutup dan konveks. Dengan kata lain, *set-valued* T tertutup dalam X^* , sehingga grafik $Gr(T)$ tertutup dalam $X \times X^*$.
5. Untuk setiap $x \in \text{int}(D(T))$, himpunan $T(x)$ kompak. Tetapi himpunan $T(x)$ tidak kompak di batas $D(T)$.

ABSTRAK

Nikmah, Choirun. 2011. *The Characteristic of Maximal Monoton Set-Valued Function at Dual Space*. Thesis, Mathematics Department of Sains and Technology Faculty, The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang:

Advisor : 1. Usman Pagalay, M.Si.
2. Fachrur Rozi, M.Si

Key Words: Compact, Convex, *Set-Valued* Function, Maximal Monoton, Dual Space.

Set valued function is a function that for each point on the range area matched exactly one or more in its domain. Some roles of maximal monoton *set-valued* function in analysis and application are as a basic concept for the problem of inequality variations and equilibrium problems, which are the basic theory of optimization techniques, linear programming, transportation and economic. Besides that, maximal monoton *set valued* function also have important role in solution analysis of nonlinear differential equation. Because of its roles, then the characteristics of this function is very important to discuss.

Base on contributing theorems in this study, we had the following characteristics of maximal monoton set-valued function at *dual space*: if *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ maximal monoton, the set $S \subset D(T)$ is convex, that $\text{int}(\overline{S}) \neq \emptyset$, and the set $A \subset X^*$ bounded, such that for every $x \in S, T(x) \cap A \neq \emptyset$, then

6. *Set-valued* T is monoton.
7. The set $\text{int}(D(T))$ and $\overline{D(T)}$ are convex.
8. *Set-valued* T local bounded at every point in $\text{int}(D(T))$ but local unbounded in $D(T)$.
9. For every $x \in D(T)$, the set $T(x)$ is closed and convex. In other word, *set-valued* T is closed in X^* , such that the graph $Gr(T)$ is closed in $X \times X^*$.
10. For every $x \in \text{int}(D(T))$, the set $T(x)$ is compact. But the set $T(x)$ is not compact in $D(T)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Setiap komponen yang terdapat di alam semesta ini tersusun atas vektor-vektor dan skalar-skalarnya yang membentuk suatu ruang vektor yang disimbolkan dengan V dan suatu field yang disimbolkan dengan F . Vektor-vektor dan skalar-skalarnya yang terdapat di dalam ruang vektor akan membentuk suatu kombinasi linear. Dari kombinasi linear ini dapat diketahui apakah vektor-vektor tersebut merupakan vektor-vektor yang bebas linear atau bergantung linear (Kusumo, 1997).

Karena Allah mempunyai sifat Maha, maka kebesaran dan keagungan-Nya lebih dari segala yang ada pada ciptaan-Nya. Demikian pula halnya dengan dimensi Allah, Allah menempati dan menguasai suatu ruang vektor dengan dimensi yang Maha Besar pula. Sehingga dapat dikatakan Allah menempati dan menguasai suatu Maha ruang vektor, dimana seluruh ruang vektor yang ada di alam semesta ini termuat di dalam Maha ruang vektor tersebut. Sehingga jarak antara ciptaan Allah yang merupakan komponen dari suatu ruang vektor dengan Allah adalah sama dengan nol. Oleh sebab itu Allah menyatakan bahwa Allah adalah dekat (Kusumo, 1997).

Hal ini dikuatkan oleh firman Allah yang lain di dalam Al Qur'an surat Qaaf ayat 16:

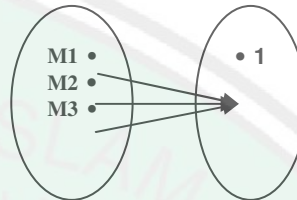
وَلَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ وَنَعَلْمُ مَا تُوسَّوْسُ بِهِ نَفْسُهُ ۗ وَخَنُّ أَقْرَبُ إِلَيْهِ مِنْ حَبْلِ الْوَرِيدِ ﴿١٦﴾

Artinya: Dan Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dan mengetahui apa yang dibisikkan oleh hatinya, dan Kami lebih dekat kepadanya daripada urat lehernya.

Dari uraian ayat di atas dapat disimpulkan bahwa bunyi ayat tersebut merupakan suatu himbauan kepada umat manusia untuk selalu beramal ma'ruf nahi munkar. Karena sekecil apapun manusia menyembunyikan kejelekan, pasti Allah SWT mengetahuinya. Oleh sebab itu, janganlah sesekali berpaling dari Allah dan menjadi golongan orang kafir yang niscaya akan diberi azab oleh Allah. Di sisi lain, Allah menciptakan manusia untuk menyembah kepada-Nya bukan untuk mempersekutukan-Nya, dan juga untuk menghuni alam semesta yang telah Dia ciptakan dengan cara melestarikannya bukan untuk dirusak. Sebab apapun yang terkandung di dalam alam semesta sangat bermanfaat bagi kelangsungan kehidupan manusia. Oleh karenanya, hubungan timbal balik antara Allah dengan makhluknya, makhluk dengan lingkungannya sangat erat sekali.

Dalam ilmu matematika hubungan antara makhluk dengan Allah, hubungan antara makhluk dengan makhluk lainnya dapat diilustrasikan sebagai fungsi. Fungsi yaitu suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua (Purcell dan Varberg, 1992). Ditinjau dari perkawanannya, fungsi dibedakan menjadi 3, yaitu: fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif. Fungsi dari A ke B dikatakan fungsi surjektif jika $f(A) = B$ artinya jika setiap unsur B muncul sebagai bayangan dari sekurang-

kurangnya satu unsur dalam A . Misalnya suatu fungsi didefinisikan dengan $f(x) = x^0$, dimana $x \in \mathbb{N}, x \neq 0$ dan x dimisalkan adalah manusia, maka diperoleh



Dari pengertian fungsi $f(x) = x^0$ bisa juga diambil suatu perumpamaan bahwa nilai dari suatu bilangan apapun jika dipangkatkan dengan angka 0, maka nilainya adalah 1. Dengan kata lain manusia yang memiliki pangkat apapun, misalnya: presiden, jenderal, konglomerat, dosen, pengemis, dan sebagainya semua akan berada dalam kekuasaan Allah SWT dan akan kembali pada Allah SWT. Ini dijelaskan dalam Al-Quran, surat Al-Qashash ayat 70:

وَهُوَ اللَّهُ لَا إِلَهَ إِلَّا هُوَ لَهُ الْحَمْدُ فِي الْأُولَىٰ وَالْآخِرَةِ ۗ وَلَهُ الْحُكْمُ وَإِلَيْهِ تُرْجَعُونَ

Artinya: Dan dialah Allah, tidak ada Tuhan (yang berhak disembah) melainkan Dia, bagi-Nyalah segala puji di dunia dan di akhirat, dan bagi-Nyalah segala penentuan dan Hanya kepada-Nyalah kamu dikembalikan.

Maksud dari ayat di atas adalah Allah sendirilah yang menentukan segala sesuatu di permukaan bumi dan ketentuan-ketentuan yang telah dirancang oleh Allah itu pasti berlaku, lalu Dia pulalah yang mempunyai kekuasaan yang mutlak. Dan apabila manusia sudah diberi hidayah oleh Allah SWT, maka hubungan antara manusia dengan manusia lainnya akan tercipta suasana yang damai dan tentram. Dan juga hubungan antara manusia dengan

mahluk lain seperti hewan dan tumbuhan akan mendatangkan ketenangan dan kenyamanan.

Sedangkan secara umum fungsi dikelompokkan menjadi dua kelompok yaitu fungsi bernilai tunggal (*single-valued function*) dan fungsi bernilai himpunan (*set-valued function*). Fungsi bernilai tunggal adalah fungsi yang memiliki satu nilai untuk setiap titik pada daerah asalnya. Sedangkan fungsi *set-valued* adalah fungsi yang untuk setiap nilai dalam rangenya dipasangkan tepat satu atau lebih dari satu nilai pada daerah asalnya. Dengan demikian fungsi *set-valued* merupakan perumuman dari fungsi *single-valued*.

Peranan fungsi *set-valued* yang monoton maksimal dalam ilmu analisis dan ilmu aplikasi di antaranya sebagai konsep dasar untuk masalah pertidaksamaan variasi dan masalah equilibrium yang merupakan teori dasar dari teknik optimasi, linear programming, transportasi dan ekonomi. Di samping itu, fungsi *set-valued* yang monoton maksimal juga mempunyai peranan penting dalam analisis solusi persamaan differensial nonlinier.

Berdasarkan uraian di atas fungsi *set-valued* yang monoton maksimal sangat penting untuk dibahas. Untuk mengetahui lebih detail tentang fungsi *set-valued* yang monoton maksimal akan dibahas karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal pada ruang dual.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang dual.

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini hanya dibahas karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal pada ruang dual.

1.4 Tujuan

Tujuan yang akan dicapai dalam penulisan skripsi ini adalah memperoleh karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang dual.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulis memfokuskan permasalahan pada fungsi *set-valued* yang monoton maksimal, sehingga didapatkan karakteristik dari fungsi tersebut pada ruang dual. Hasil penelitian ini diharapkan agar dapat bermanfaat bagi :

a. Bagi penulis

Sebagai pelajaran yang sangat berharga dalam mengaktualisasi diri sebagai insan akademik dengan menerapkan pengalaman serta teori-teori ilmu pengetahuan yang telah diperoleh selama menjalani perkuliahan, salah satunya adalah analisis fungsional khususnya analisis fungsi *set-valued* yang monoton maksimal pada ruang dual.

b. Bagi pembaca

1. Sebagai titik awal pembahasan yang dapat dilanjutkan.
2. Wahana dalam menambah khazanah keilmuan.
3. Sebagai pembanding untuk penelitian yang akan datang.

c. Lembaga

1. Sebagai tambahan bahan pustaka.
2. Sebagai tambahan rujukan untuk peneliti yang akan datang.
3. Sebagai tambahan rujukan materi kuliah.

1.6 Metode Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah deskriptif kualitatif dengan metode kepustakaan. Metode penelitian kepustakaan yaitu usaha mendalami, mencermati, menelaah dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan (sumber bacaan, buku-buku referensi atau hasil penelitian orang lain) sebagai literatur untuk mengumpulkan data-data dan informasi (Hasan, 2002:45).

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Merumuskan masalah

Sebelum melakukan penelitian, penulis merumuskan masalah yang akan dijawab dalam penelitian ini, yaitu bagaimana karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang dual.

b. Mencari sejumlah data pendukung yang diperoleh dengan menggunakan data sekunder, yang didapat dengan cara membaca dan mempelajari buku-buku teks, catatan kuliah, makalah-makalah, jurnal-jurnal dan lain sebagainya.

Data yang dimaksud dalam penelitian ini adalah hasil pengamatan yang dikumpulkan berupa pernyataan yang menunjukkan nilai karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal.

c. Menganalisa Data

Langkah-langkah analisis data sebagai berikut:

1. Meninjau beberapa definisi pada ruang metrik, ruang vektor, dan kemudian dilanjutkan pada ruang bernorma dan ruang banach.
2. Mengartikan ruang dual dan menunjukkan sifat khusus yang dimiliki ruang dual.
3. Meninjau beberapa definisi, lemma dan teorema tentang himpunan tertutup, terbatas, dan kompak kemudian dilanjutkan pada himpunan konveks.
4. Menggunakan teorema mengenai sifat fungsi *set-valued* yang monoton maksimal pada ruang dual.
5. Menyelidiki karakteristik dari *set-valued* T menggunakan teorema-teorema.
6. Membuat Kesimpulan
7. Melaporkan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar dalam pembahasan penelitian ini memperoleh gambaran yang dapat dimengerti dan menyeluruh mengenai rancangan isi dalam penulisan skripsi secara global, maka penulis menyusun sistematika pembahasan yang dapat dilihat di bawah ini:

BAB I: PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Kajian pustaka menjelaskan tentang teori-teori yang mendukung pada bab pembahasan. Adapun teori pendukungnya adalah definisi, teorema, serta contoh pada ruang metrik, ruang vektor, ruang bernorma dan ruang banach, ruang dual, himpunan tertutup, terbatas, dan kompak, himpunan konveks, dan fungsi *set-valued*.

BAB III: PEMBAHASAN

Pembahasan berisi kajian tentang karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang dual.

BAB IV: PENUTUP

Penutup berisi kesimpulan dan saran-saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Sebagai konsep dasar untuk bab pembahasan nantinya diberikan beberapa definisi sebagai berikut:

2.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1.1

Misalkan X adalah himpunan objek-objek. Fungsi $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ disebut metrik atau fungsi jarak jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- ii. $d(x, y) \geq 0$,
- iii. $d(x, y) = d(y, x)$,
- iv. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

(Goffman dan Pedrick, 1974).

Definisi 2.1.2.

Himpunan objek-objek yang dilengkapi dengan metrik disebut ruang metrik. Ruang X yang dilengkapi dengan metrik d dinotasikan dengan (X, d) (Heil, 2006).

Contoh 2.1.3

Misalkan X himpunan semua fungsi kontinu pada $(-\infty, \infty)$, yang dilengkapi dengan metrik $\rho(x, y) = \max [|x(t) - y(t)|; -\infty < t < \infty]$.

Tunjukkan bahwa (X, ρ) merupakan ruang metrik

Penyelesaian:

$$1. \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\rho(x, x) = \max [|x(t) - x(t)|; -\infty < t < \infty]$$

$$= \max [0]$$

$$= 0$$

Sehingga terbukti bahwa $\rho(x, y) = 0$

$$2. \rho(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X, x \neq y$$

$$\rho(x, y) = \max [|x(t) - y(t)|; -\infty < t < \infty]$$

$$\text{Karena } \rho(x, y) = \max [|x(t) - y(t)|; -\infty < t < \infty] \geq 0$$

$$\forall x(t) \geq y(t)$$

$$\text{maka } \max [|x(t) - y(t)|; -\infty < t < \infty] = \rho(x, y) \geq 0$$

$$3. \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X$$

$$\rho(x, y) = \max [|x(t) - y(t)|; -\infty < t < \infty] > 0$$

$$= \max [-(y(t) - x(t)); -\infty < t < \infty]$$

$$= \max [|y(t) - x(t)|; -\infty < t < \infty]$$

$$= \rho(y, x)$$

$$4. \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(x, y); x, y, z \in X$$

$$\begin{aligned}
\rho(x, z) &= \max [|x(t) - z(t)|; -\infty < t < \infty] \\
&= \max [|x(t) + y(t) - y(t) - z(t)|; -\infty < t < \infty] \\
&= \max [|x(t) - y(t) + y(t) - z(t)|; -\infty < t < \infty] \\
&\leq \max [|x(t) - y(t)|; -\infty < t < \infty] \\
&\quad + \max [|y(t) - z(t)|; -\infty < t < \infty]
\end{aligned}$$

Sehingga $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Karena syarat (i), (ii), (iii), (iv) terpenuhi maka, (X, ρ) dengan $\rho(x, y) = \max [|x(t) - y(t)|; -\infty < t < \infty]$ merupakan ruang metrik. ■

Definisi 2.1.4

Barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dalam ruang metrik (X, d) disebut konvergen ke $x \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$, berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$ (Van, 2006).

Contoh 2.1.5

Misalkan (\mathbb{R}, d) adalah ruang metrik dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$.

Barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $x_n = \left(\frac{3n+2}{n+1}\right)$ adalah

barisan yang berada di ruang metrik. Tunjukkan bahwa barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

tersebut konvergen ke 3.

Penyelesaian:

Ambil $\varepsilon > 0$ akan ditunjukkan terdapat $N \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga

$$\text{untuk setiap } n \geq N \text{ berlaku } \left| \frac{3n+2}{n+1} \right| < \varepsilon$$

Dari pernyataan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\left| \frac{3n+2}{n+1} - 3 \right| = \left| \frac{3n+2-3n-3}{n+1} \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

Sekarang jika ketaksamaan $\frac{1}{n} < \varepsilon$ terpenuhi, maka persamaan di atas

juga terpenuhi. Jika $K(\varepsilon)$ adalah bilangan asli dengan $K(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, maka

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ didefinisikan $n \geq K(\varepsilon)$, sehingga $n \geq K(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$,

maka $n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$. Terbukti bahwa $x_n = \left(\frac{3n+2}{n+1} \right)$ konvergen ke 3

$$\text{atau } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{n+1} \right) = 3.$$

■

Definisi 2.1.6

Barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dalam ruang metrik (X, d) disebut barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq N$, berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ (Goffman dan Pedrick, 1974).

Contoh 2.1.7

Misalkan (\mathbb{R}, d) adalah ruang metrik, dengan metrik $d(x, y) = |x - y|$.

Barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $x_n = a + \frac{(b-a)}{n}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $b > a$ dan setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan Cauchy (Goffman dan George, 1974).

Penyelesaian:

Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $b > a$ dan $N \in \mathbb{N}$

sedemikian sehingga $\varepsilon = \frac{b-a}{N}$, maka untuk setiap $m, n \geq N$, sehingga

berlaku $d(x_m - x_n) = |x_m - x_n|$

$$|x_m - x_n| = \left| a + \frac{(b-a)}{m} - \left(a + \frac{(b-a)}{n} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{(b-a)}{m} - \frac{(b-a)}{n} \right| \leq \left| \frac{(b-a)}{m} \right| + \left| \frac{(b-a)}{n} \right| < 2 \frac{(b-a)}{N} = 2\varepsilon$$

$$d(x_m - x_n) < \varepsilon$$

Karena nilai ε sembarang, maka untuk setiap $m, n \geq N$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Akibatnya, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a + \frac{(b-a)}{n}$ adalah barisan Cauchy.

Setiap barisan yang konvergen adalah barisan Cauchy. Hal tersebut tercermin dalam Teorema 2.1.8. Tetapi barisan Cauchy belum tentu barisan konvergen. Hal tersebut ditunjukkan pada Contoh 2.1.9.

Teorema 2.1.8.

Jika barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dalam ruang metrik (X, d) konvergen maka barisan tersebut adalah barisan Cauchy (Goffman dan Pedrick, 1974).

Bukti:

Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adalah barisan yang konvergen ke $x \in X$. Akan ditunjukkan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy. Karena $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adalah barisan yang konvergen ke $x \in X$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$, karena ε sembarang maka untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku:

$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ dan } d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena (X, d) adalah ruang metrik maka,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) = d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Maka setiap barisan yang konvergen adalah barisan Cauchy. ■

Contoh 2.1.9

Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a + \frac{(b-a)}{n}$, dimana $a, b \in \mathbb{R}$

sedemikian sehingga $b > a$ adalah barisan yang termuat dalam ruang metrik $(a, b]$. Barisan tersebut adalah barisan Cauchy tetapi tidak konvergen, karena tidak ada $a \in (a, b]$, sedemikian sehingga x_n konvergen ke a .

Definisi 2.1.10

Ruang metrik (X, d) disebut ruang metrik lengkap (*complete metric space*), jika untuk setiap barisan Cauchy dalam X konvergen (Bartle dan Sherbert, 1992).

Contoh 2.1.11

Tunjukkan bahwa ruang metrik $C[a, b]$ merupakan ruang metrik yang lengkap (Goffman dan Pedrick, 1974).

Jawab:

Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan adalah barisan Cauchy di $C[a, b]$. Berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan N sedemikian sehingga $m, n > N$, berakibat

$$d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon. \quad (i)$$

Untuk semua $x \in [a, b]$ dan $m, n \geq N$. Jadi untuk setiap x , barisan x_n adalah barisan Cauchy di \mathbb{R} dan konvergen di \mathbb{R} . Didefinisikan x adalah titik limit dari barisan, maka $x = \lim x_n$ untuk setiap $x \in [a, b]$ dari persamaan (i) diperoleh untuk setiap $x \in [a, b]$ dan $n > N$, maka $|x_n - x| \leq \varepsilon$. Akibatnya barisan $\{x_n\}$ konvergen ke $x \in [a, b]$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa ruang metrik $C[a, b]$ adalah ruang metrik yang lengkap.

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1

Misalkan X adalah himpunan. X disebut ruang vektor atau ruang linier jika untuk setiap $\bar{x}, \bar{y} \in X$ dan skalar α, β memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- i. $\bar{x} + \bar{y} \in X$
- ii. $\alpha\bar{x} \in X$
- iii. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$
- iv. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$
- v. Terdapat vektor $\bar{0}$, sedemikian sehingga $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$
- vi. Terdapat $-\bar{x} \in X$, sedemikian sehingga $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$
- vii. $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$
- viii. $1\bar{x} = \bar{x}$
- ix. $(\alpha + \beta)\bar{x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$ dan
- x. $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$ (Anton, 2004).

Contoh 2.2.2

Tunjukkan bahwa himpunan F dari semua matriks 2×2 dengan anggota bilangan riil merupakan suatu ruang vektor jika penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks.

Penyelesaian:

Diberikan $\bar{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$, dan $\bar{w} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ adalah

objek dalam F .

- i. Akan ditunjukkan bahwa $\bar{u} + \bar{v}$ adalah suatu objek dalam F , atau dengan kata lain, harus ditunjukkan bahwa $\bar{u} + \bar{v}$ adalah suatu matriks 2×2 . Hal ini dapat diperoleh dari definisi penjumlahan matriks karena

$$\bar{u} + \bar{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \in X$$

- ii. Dengan cara serupa pada i berlaku juga bagi ii. Karena untuk bilangan riil sebarang a , kita memperoleh

$$a\bar{u} = a \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} au_{11} & au_{12} \\ au_{21} & au_{22} \end{bmatrix}$$

Sehingga $a\bar{u}$ adalah matriks 2×2 dan sebagai konsekuensinya merupakan objek pada F .

$$\begin{aligned} \text{iii. } \bar{u} + \bar{v} &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{11} + u_{11} & v_{12} + u_{12} \\ v_{21} + u_{21} & v_{22} + u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \bar{v} + \bar{u} \end{aligned}$$

Jadi terbukti komutatif.

$$\begin{aligned} \text{iv. } \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} + w_{11} & v_{12} + w_{12} \\ v_{21} + w_{21} & v_{22} + w_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$=(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$$

v. Untuk membuktikan aksioma v, kita harus menentukan objek

$\bar{0}$ pada F sedemikian rupa sehingga $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$ untuk semua \bar{u} pada F . Ini dapat dilakukan dengan mendefinisikan

$$\bar{0} \text{ sebagai } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari definisi ini

$$\bar{0} + \bar{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \bar{u}$$

Dapat diperoleh kesimpulan bahwa $\bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$

vi. Ditunjukkan untuk setiap objek \bar{u} pada F memiliki bentuk

negatif $-\bar{u}$ sedemikian rupa sehingga $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$ dan

$(-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$. Ini dapat dilakukan dengan mendefinisikan

$$\text{negatif dari } \bar{u} \text{ sebagai } -\bar{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}.$$

Dengan definisi ini

$$\bar{u} + (-\bar{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Maka $(-\bar{u}) + \bar{u} = \bar{0}$.

$$\text{vii. } \alpha(\beta\bar{u}) = \alpha\left(\beta \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}\right) = \alpha\left(\begin{bmatrix} \beta u_{11} & \beta u_{12} \\ \beta u_{21} & \beta u_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} \alpha\beta u_{11} & \alpha\beta u_{12} \\ \alpha\beta u_{21} & \alpha\beta u_{22} \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} \alpha\beta u_{11} & \alpha\beta u_{12} \\ \alpha\beta u_{21} & \alpha\beta u_{22} \end{bmatrix}\right)$$

$$= (\alpha\beta) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = (\alpha\beta)\bar{u}$$

viii. Aksioma ini merupakan perhitungan yang sederhana:

$$1\bar{u} = 1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \bar{u}$$

$$\begin{aligned} \text{ix. } (\alpha + \beta)\bar{u} &= (\alpha + \beta) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha u_{11} & \alpha u_{12} \\ \alpha u_{21} & \alpha u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta u_{11} & \beta u_{12} \\ \beta u_{21} & \beta u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \alpha\bar{u} + \beta\bar{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{x. } \alpha(\bar{u} + \bar{v}) &= \alpha \left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \right) \\ &= \alpha \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \alpha\bar{u} + \alpha\bar{v} \end{aligned}$$

Jadi F merupakan ruang vektor untuk operasi-operasi tersebut.

2.3 Ruang Bernorma dan Ruang Banach

Definisi 2.3.1

Misalkan F *field* yang merupakan salah satu dari \mathbb{R} atau \mathbb{C} . Ruang vektor bernorma dari F adalah $(\|\cdot\|, X)$, dimana X adalah ruang

vektor dari F dan $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ adalah fungsi jika untuk setiap

$\bar{x}, \bar{y} \in X$ dan skalar α memenuhi aksioma-aksioma berikut:

- i. $\|\bar{x}\| \geq 0$
- ii. $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$
- iii. $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\|\bar{x}\|$ dan
- iv. $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$

Maka fungsi $\|\cdot\|$ adalah norm dari X (Goffman dan Pedrick, 1974).

Definisi 2.3.2

Ruang vektor yang dilengkapi dengan norm disebut dengan ruang bernorma (*normed space*) (Goffman dan Pedrick, 1974).

Contoh 2.3.3

Diberikan $X = C[0, 1]$ ruang vektor yang dilengkapi dengan norm

$\|\bar{x}\| = \text{maks} [|x(t)| : t \in [0, 1]]$ adalah ruang bernorma.

Penyelesaian:

Ambil sembarang $\bar{x}, \bar{y} \in C[0, 1]$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan aksioma (i)–(iv) pada Definisi 2.3.1 terpenuhi.

- i. Akan ditunjukkan $\|\bar{x}\| \geq 0$

$$\|\bar{x}\| = \text{maks} [|x(t)| : t \in [0, 1]]$$

Karena $\|\bar{x}\| \geq 0$, maka $\text{maks} [|x(t)| : t \in [0, 1]] \geq 0$

- ii. $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

(\Rightarrow) Misalkan $\|\bar{x}\| = 0$. Akan ditunjukkan $\bar{x} = \bar{0}$. Karena

$\|\bar{x}\| = 0$, maka $\text{maks}\left[|x(t)| : t \in [0,1]\right] = 0$. Dari (i)

$$0 \leq \text{maks}\left[|x(t)| : t \in [0,1]\right] = 0$$

berakibat $x(t) = 0$. Jadi $\|\bar{x}\| = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$.

(\Leftarrow) Misalkan $\bar{x} = \bar{0}$. Akan ditunjukkan $\|\bar{x}\| = 0$. Karena $\bar{x} = \bar{0}$,

maka $\text{maks}\left[|x(t)| : t \in [0,1]\right] = 0$ berakibat

$$\text{maks}\left[|x(t)| : t \in [0,1]\right] = \|\bar{x}\| = 0$$

Jadi $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0}$

iii. $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\|\bar{x}\|$

$$\|\alpha\bar{x}\| = \text{maks}\left[|\alpha x(t)| : t \in [0,1]\right]$$

$$= |\alpha| \text{maks}\left[|x(t)| : t \in [0,1]\right]$$

$$= |\alpha|\|\bar{x}\|$$

iv. $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$,

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| = \text{maks}\left[|(x+y)(t)| : t \in [0,1]\right]$$

$$= \text{maks}\left[|x(t) + y(t)| : t \in [0,1]\right]$$

$$\leq \text{maks}\left[|x(t)| : t \in [0,1]\right] + \text{maks}\left[|y(t)| : t \in [0,1]\right]$$

$$= \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$$

■

Definisi 2.3.4

Ruang bernorma X disebut ruang Banach, jika untuk setiap barisan Cauchy dalam X konvergen (Goffman dan Pedrick, 1974).

Contoh 2.3.5 (Goffman dan Pedrick, 1974).

Ruang bernorma $\|\bar{x}\| = \text{maks} [|x(t)| : t \in [0,1]]$ pada Contoh 2.3.3 adalah ruang Banach, karena setiap barisan Cauchy dalam \mathbb{R}^k konvergen

Penyelesaian:

Misal $\{x_n\}$ adalah barisan dari $\text{maks} [|x(t)| : t \in [0,1]]$ dan merupakan barisan Cauchy. Maka $\forall \varepsilon > 0 \exists N \ni m, n > N$ dan $\forall t \in [0,1]$ berakibat,

$$\text{maks} [|x_n(t) - x_m(t)| : t \in [0,1]] < \varepsilon \quad (1)$$

dengan kata lain untuk setiap t , maka $x_n(t)$ merupakan barisan Cauchy pada bilangan riil dan konvergen di bilangan riil. Misalkan didefinisikan x adalah titik limit dari barisan

$x(t) = \lim x_n(t), \forall t \in [0,1]$. Dari persamaan (1) diperoleh $t \in [0,1]$ dan $n \geq N$, maka

$$\text{maks} [|x(t) - x_n(t)| : t \in [0,1]] \leq \varepsilon$$

Akibatnya $\{x_n\}$ konvergen ke x di $C[0,1]$. Sehingga ruang $C[0,1]$

dengan norm $\|\bar{x}\| = \text{maks} [|x(t)| : t \in [0,1]]$ adalah ruang Banach

2.4 Ruang Dual

Definisi 2.4.1 (Kreyszig, 1978)

Operator linier T adalah suatu operator sedemikian hingga

- i. Domain dari T (ditulis $D(T)$) adalah ruang linier dan range $R(T)$ merentang dalam ruang linier atas *field* yang sama.
- ii. Untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan skalar $\alpha \in R$ berlaku
 - a. $T(x + y) = T(x) + T(y)$
 - b. $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

Contoh 2.4.2

Operator identitas $I : X \rightarrow X$ pada ruang X yang didefinisikan

$$I(x) = x, \quad \forall x \in X$$

merupakan operator linier.

Penyelesaian:

X adalah ruang vektor dengan $x_1, x_2 \in X$, maka $x_1 + x_2 \in X$. Dari

definisi a. $I(x) = x \quad \forall x \in X$, maka $I(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)$

$$\begin{aligned} \text{b. } I(\alpha x) &= \alpha x \\ &= \alpha I(x) \end{aligned}$$

Jadi I adalah operator linier

Definisi 2.4.3

Suatu fungsional linier f adalah operator linier dengan domain berada di ruang linier X dan range berada di skalar field F . Jadi

$$f : D(f) \rightarrow F$$

Dimana F bergantung dari X , jika X riil maka F juga harus riil, dan jika X kompleks maka F juga kompleks (Kreyszig, 1978).

Contoh 2.4.4

Didefinisikan fungsi $f : R^3 \rightarrow R$

$$f(x) = x \cdot \alpha = \xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \xi_3 \alpha_3$$

Dengan $\alpha = (\alpha_j) \in R^3$. Fungsi ini merupakan fungsional linier, sebab

untuk sebarang $x_1, x_2 \in R^3$ dengan $x_1 = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}, x_2 = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$

dan $\beta \in R$ didapatkan

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= (\xi_1 + \eta_1)\alpha_1 + (\xi_2 + \eta_2)\alpha_2 + (\xi_3 + \eta_3)\alpha_3 \\ &= \xi_1\alpha_1 + \eta_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \eta_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3 + \eta_3\alpha_3 \\ &= \xi_1\alpha_1 + \xi_2\alpha_2 + \xi_3\alpha_3 + \eta_1\alpha_1 + \eta_2\alpha_2 + \eta_3\alpha_3 \\ &= f(x_1) + f(x_2) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(\beta x_1) &= \beta \xi_1 \alpha_1 + \beta \xi_2 \alpha_2 + \beta \xi_3 \alpha_3 \\ &= \beta (\xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2 + \xi_3 \alpha_3) \\ &= \beta f(x_1) \end{aligned}$$

Definisi 2.4.5

Diberikan ruang linier X dan fungsional linier $f : D(f) \rightarrow F$ dengan

$D(f) \subset X$. Fungsi f disebut terbatas jika terdapat bilangan riil c

sedemikian hingga untuk semua $x \in D(f)$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq c$$

(Kreyszig, 1978).

Hal ini menunjukkan bahwa nilai terkecil dari c adalah $\sup \frac{|f(x)|}{\|x\|}$.

Nilai terkecil dari c biasa disebut norma dan dinotasikan dengan $\|f\|$

Jadi

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad (2.1)$$

atau

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

Dari uraian di atas, maka bentuk (2.1) dapat ditulis

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad (2.2)$$

Definisi 2.4.6

Misalkan X adalah ruang bernorma. Maka himpunan dari semua fungsional linier yang terbatas pada X dinotasikan dengan $B(X, R)$ atau X^* , merupakan ruang bernorma dengan norma

$$\|f\|_1 = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_1} = \|f\| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \|x\|=1}} |f(x)|, \forall f \in B(X, R)$$

dengan $\|\cdot\|_1$ adalah norma pada X (Kreyszig, 1978).

$B(X, R)$ disebut ruang dual dari X dan biasa dinotasikan dengan X^* . Untuk menunjukkan ruang dual dari ruang bernorma X digunakan konsep

dari isomorfisme. Namun terlebih dahulu akan didefinisikan mengenai pemetaan bijektif.

Definisi 2.4.8

Pemetaan $T : D(T) \rightarrow Y$ disebut pemetaan bijektif jika T merupakan pemetaan injektif dan surjektif. Pemetaan T disebut injektif (satu-satu), jika setiap $x_1, x_2 \in D(T)$ dengan $x_1 \neq x_2$ maka $T(x_1) \neq T(x_2)$. T dikatakan pemetaan surjektif jika $\forall y \in Y \exists x \in D(T)$ sedemikian hingga $y = T(x)$ (Kreyszig, 1978).

Contoh 2.4.9 Pemetaan identitas $I : X \rightarrow X$ yang didefinisikan oleh

$$I(x) = x, \quad \forall x \in X$$

merupakan pemetaan bijektif.

Definisi 2.4.10

Isomorfisma dari ruang bernorma X ke ruang bernorma Y adalah operator linier bijektif $T : X \rightarrow Y$ yang mempertahankan norma

$$\|Tx\| = \|x\| \quad (\text{Kreyszig, 1978}).$$

X isomorfis dengan Y , sehingga X dan Y disebut ruang bernorma yang isomorfis. Dua ruang yang isomorfis dianggap identik. Berdasarkan definisi di atas, jika X^* (ruang dual dari X) isomorfis dengan Y , maka ruang dual dari X adalah Y .

2.5 Himpunan Persekitaran, Tertutup, Terbatas dan Kompak

Definisi 2.5.1

Misalkan X adalah ruang bernorma.

- i. Bola terbuka (*open ball*) pada X dengan pusat x dan jari-jari $r > 0$ adalah himpunan

$$B_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$$

- ii. Himpunan $A \subseteq X$ disebut terbuka jika untuk setiap $x \in A$, terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq A$.
- iii. Himpunan $F \subseteq X$ disebut tertutup jika F^c terbuka.

(Heil, 2006).

Definisi 2.5.2

Misalkan X adalah ruang linear bernorma dan misalkan $A \subseteq X$

- i. Titik $x \in A$ dikatakan titik interior dari himpunan A jika x anggota dari himpunan terbuka G yang termuat di dalam A yaitu $x \in G \subset A$. Atau bisa didefinisikan titik $x \in A$ disebut titik interior dari $A \subseteq X$, jika terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq A$. Himpunan semua titik interior dari A dinotasikan dengan $\text{int}(A)$.

- ii. Diberikan G_x himpunan terbuka pada ruang topologi yang memuat titik x dan A sebarang himpunan bagian dari X . Titik x dikatakan titik limit dari himpunan $A \subseteq X$ jika dan hanya jika setiap himpunan terbuka G_x memuat suatu titik dari A yang berlainan dengan x . Dengan kata lain jika G_x terbuka, $x \in G_x$ maka $G_x \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Atau bisa didefinisikan titik x disebut

titik limit dari $A \subseteq X$, jika untuk setiap $r > 0$, $A \cap (B_r(x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Himpunan semua titik limit dari A dinotasikan dengan A' .

iii. Closure dari suatu himpunan A , yang dinotasikan dengan \bar{A} adalah union dari A dan titik limitnya, atau $\bar{A} = A \cup A'$.

iv. Himpunan A disebut *dense* jika $\bar{A} = X$

Lemma 2.5.3

Himpunan A terbuka jika dan hanya jika untuk setiap titik dalam A adalah titik interior.

Bukti:

(\Rightarrow) Misalkan himpunan A terbuka. Akan ditunjukkan setiap titik dalam A adalah titik interior. Ambil sembarang $x \in A$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq A$. Karena himpunan A terbuka, maka terdapat $r > 0$ sehingga $B_r(x) \subseteq A$. Dengan demikian x adalah titik interior dari A . Karena x adalah sembarang titik dalam A , maka setiap titik dalam A adalah titik interior.

(\Leftarrow) Misalkan semua titik pada A adalah titik interior. Akan ditunjukkan himpunan A terbuka, yaitu $\text{int}(A) = A$. Karena $\text{int}(A) = \{x \in A : x \text{ titik int}\}$, maka $\text{int}(A) \subset A$. Langkah selanjutnya akan ditunjukkan $\text{int}(A) \supset A$. Karena untuk setiap $x \in A$ adalah titik

interior dari A maka $A \subset \text{int}(A) = \{x \in A : x \text{ titik int}\}$. Dengan demikian $\text{int}(A) = A$ terbukti bahwa himpunan A terbuka. ■

Lemma 2.5.4

\bar{A} adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A . Dengan kata lain $\bar{A} = \bigcap \{F \subset X : F \supseteq A \text{ dan } F \text{ tertutup}\}$.

Bukti:

Langkah pertama akan ditunjukkan bahwa himpunan \bar{A} tertutup. Menurut definisi, himpunan \bar{A} tertutup jika himpunan \bar{A}^c terbuka. Selanjutnya akan ditunjukkan \bar{A}^c terbuka. Jika $x \in \bar{A}^c$, maka $x \notin \bar{A}$. Karena \bar{A} memuat semua titik limit dari A dan $x \notin \bar{A}$ maka x bukan titik limit untuk A . Sehingga terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq \bar{A}^c$ dan $B_r(x) \cap A = \emptyset$ karena $B_r(x)$ tidak memuat titik limit A , maka $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Dengan demikian himpunan \bar{A}^c terbuka.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\bar{A} = \bigcap \{F \subset X : F \supseteq A \text{ dan } F \text{ tertutup}\}$. Misalkan F adalah himpunan tertutup dan $F \supseteq A$. Karena himpunan F tertutup maka menurut definisi himpunan F^c terbuka. Misalkan $x \in F^c$, maka menurut definisi terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq F^c$. Karena himpunan F^c terbuka dan $x \in F^c$, maka $x \notin \bar{A}$ dan $B_r(x) \cap \bar{A} = \emptyset$. Sehingga x bukan titik limit dari A . Karena $A \subseteq F$ maka $F^c \subseteq A^c$ dan $F^c \subseteq \bar{A}^c$,

sehingga $\bar{A} \subseteq F$. Terbukti bahwa

$$\bar{A} = \bigcap \{F \subset X : F \supseteq A \text{ dan } F \text{ tertutup}\}.$$

■

Lemma 2.5.5

Misalkan X adalah ruang bernorma dan $F \subseteq X$. Himpunan F tertutup jika dan hanya jika F memuat semua titik limitnya (Goffman dan Pedrick, 1974).

Bukti:

(\Rightarrow) Jika himpunan F tertutup, maka himpunan F memuat semua titik limitnya. Misalkan himpunan F tertutup. Andaikan ada titik limit dari F yang tidak termuat dalam F , yaitu terdapat barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ sedemikian sehingga x_n konvergen ke x dan $x \in F^c$. Akan ditunjukkan kontradiksi dengan pernyataan. Karena himpunan F tertutup maka himpunan F^c terbuka, sehingga terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq F^c$. Karena barisan x_n konvergen ke x , maka $x_n \in B_r(x)$, sehingga $x_n \in F^c$. Karena barisan $x_n \in F^c$ dan $x \in F^c$, maka himpunan F^c tertutup. Hal tersebut kontradiksi dengan pernyataan. Sehingga pengandaian harus diingkari.

(\Leftarrow) Jika himpunan F memuat semua titik limitnya. Maka himpunan F tertutup. Jika $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ sedemikian barisan x_n konvergen ke x maka $x \in F$. Misalkan $y \in F^c$ sehingga untuk suatu $r > 0$,

$B_r(y) \cap \{x\} = \emptyset$. Karena y bukan titik limit F maka untuk setiap $y \in F^c$, terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq F^c$. Dengan demikian, himpunan F^c terbuka. Sehingga himpunan F tertutup. ■

Contoh 2.5.6

Misalkan X adalah ruang bernorma dan $x \in X$. Setiap $B_r(x) \subset X$, dengan $r > 0$ adalah himpunan terbuka. Di samping itu $\overline{B_r(x)} = \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$ adalah himpunan tertutup.

Definisi 2.5.7

Diberikan (X, τ) ruang topologi pada X . Suatu himpunan $V \subset X$ persekitaran dari x , jika terdapat suatu himpunan $U \in \tau$ sedemikian sehingga $x \in U \subset V$. Dengan demikian $V \subset X$ persekitaran dari $x \in X$ jika dan hanya jika V memuat suatu himpunan terbuka yang memuat x (Hairur, 2008).

Sehingga jelas bahwa suatu himpunan terbuka yang memuat x pasti merupakan persekitaran dari x , tetapi persekitaran tidak harus terbuka.

Definisi 2.5.8

Misalkan X adalah ruang bernorma dan $C \subseteq X$.

- i. \mathcal{A} disebut selimut terbuka (*open cover*) untuk C , jika untuk setiap $x \in C$ ada suatu $A \in \mathcal{A}$, sehingga $x \in A$, himpunan A terbuka dan $C \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.

- ii. Misalkan \mathcal{A} adalah selimut terbuka untuk C . $\beta \subset \mathcal{A}$ disebut subselimut (*subcover*) dari \mathcal{A} untuk C , jika untuk setiap $x \in C$ ada suatu $B \in \beta$, sehingga $x \in B$ himpunan B terbuka dan $C \subseteq \bigcup_{B \in \beta} B$.
- (Nachbar, 2007 dan Hutahaean, 1994).

Definisi 2.5.9

Misalkan X adalah ruang bernorma $C \subseteq X$.

- i. Himpunan C disebut kompak (*compact*), jika untuk setiap selimut \mathcal{A} senantiasa dapat direduksi menjadi berhingga. Ini berarti misalkan \mathcal{A} selimut bagi C , dan misalkan $A \in \mathcal{A} = \alpha$ maka ada α_j dimana $j = 1, 2, 3, \dots, n$, sehingga

$$C \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

Dengan kata lain Himpunan C disebut kompak (*compact*), jika untuk setiap selimut terbuka untuk C memuat subselimut berhingga.

- ii. Himpunan C disebut terbatas (*bounded*), jika terdapat $M < \infty$ dan terdapat $p \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$,

$$\|x - p\| < M \quad (\text{Johan, 2010 dan Heil, 2006}).$$

Teorema 2.5.10

Misalkan X adalah ruang bernorma dan himpunan C kompak. Jika himpunan F tertutup dan $F \subseteq C$, maka himpunan F kompak (Goffman dan Pedrick, 1974).

Bukti:

Misalkan \mathfrak{A} adalah selimut terbuka untuk F . Berdasarkan definisi,

$$F \subseteq \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A$$

Akan ditunjukkan selimut terbuka \mathfrak{A} memuat subselimut berhingga.

Karena himpunan F tertutup, maka himpunan F^c terbuka. Sehingga

$\{F^c\} \cup \mathfrak{A}$ adalah selimut terbuka untuk C .

Dengan demikian berlaku

$$C \subseteq F^c \cup \left(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A \right).$$

Karena himpunan C kompak, maka himpunan C memuat subselimut

berhingga. Jika $\beta \subseteq \mathfrak{A}$ merupakan subselimut berhingga dari \mathfrak{A} untuk

C , maka $C \subseteq F^c \cup \left(\bigcup_{B \in \beta} B \right)$.

Dengan demikian $F \subseteq \bigcup_{B \in \beta} B$ atau selimut terbuka \mathfrak{A} memuat

subselimut berhingga yang menyelimuti F .

■

Teorema 2.5.11

Misalkan X adalah ruang bernorma dan $C \subseteq X$. Pernyataan berikut ekuivalen:

- i. C kompak
- ii. C terbatas dan tertutup (Goffman dan Pedrick, 1974).

Bukti:

(i) \Rightarrow (ii) Misalkan himpunan C kompak. Akan ditunjukkan C adalah himpunan yang terbatas dan tertutup. Karena himpunan C kompak maka setiap selimut terbuka untuk C yang memuat selimut berhingga.

Misalkan $\mathfrak{A} = \{B_r(x) : x \in C, r > 0\}$ adalah sembarang selimut terbuka untuk C . Akan ditunjukkan terdapat $M < \infty$ dan terdapat $p \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C, \|x - p\| < M$. Karena himpunan kompak, maka terdapat subselimut berhingga dari \mathfrak{A} untuk C . Misalkan $\beta = \{B_{r_i}(x_i) : x_i \in C, i = 1, 2, \dots, n\}$. Karena β adalah subselimut berhingga dari \mathfrak{A} untuk C , maka dapat dipilih x_i dan r_i sedemikian sehingga

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i)$$

Berdasarkan Definisi 2.5.1 (i), untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$

$B_{r_i}(x_i) = \{y \in X : \|x_i - y\| < r_i\}$. Dengan demikian, dapat dipilih

$p \in C$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C, \|x - p\| < \sum_{i=1}^n r_i$.

Karena i berhingga, maka terdapat $M < \infty$ sedemikian sehingga

$\sum_{i=1}^n r_i = M$. Akibatnya, untuk sembarang $x \in C, \|x - p\| < M$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa C tertutup. Untuk menunjukkan bahwa himpunan C tertutup, cukup ditunjukkan bahwa C^c adalah himpunan terbuka. Karena himpunan C kompak maka untuk setiap selimut terbuka untuk C memuat subselimut berhingga. Misalkan untuk setiap selimut terbuka \mathfrak{A} , $\beta = \{B_{r_i}(x_i) : x_i \in C, i = 1, 2, \dots, n\}$ adalah subselimut berhingga dari \mathfrak{A} untuk C . Misalkan untuk sembarang titik $y \in C^c$, dipilih $S > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap

$x \in C$, x tidak termuat dalam $B_S(y)$. Karena β adalah subselimut berhingga dari \mathfrak{A} untuk C maka $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i)$ dari dimana $i = 1, 2, \dots, n$. Selanjutnya $\beta \cup (B_S(y))$ adalah subselimut berhingga dari C sedemikian sehingga $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i) \cup B_S(y)$. Dengan demikian, y adalah titik interior dari C^c . Karena y sembarang, maka semua titik pada C^c adalah titik interior. Sehingga C^c adalah himpunan terbuka.

(ii) \Rightarrow (i) Misalkan himpunan C terbatas dan tertutup. Akan ditunjukkan himpunan C kompak. Karena himpunan C terbatas, maka terdapat $M < \infty$ dan terdapat $p \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$, $\|x - p\| < M$. Tentukan sembarang selimut terbuka \mathfrak{A} , yaitu $\lambda = \{B_r(x) : x \in C, r > 0\}$ sedemikian sehingga $C \subseteq \bigcup_{B_r(x) \in \mathfrak{A}} B_r(x)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan selimut terbuka \mathfrak{A} memuat subselimut berhingga. Karena himpunan C tertutup, maka himpunan C^c terbuka sehingga $C \subseteq \bigcup_{B_r(x) \in \mathfrak{A}} B_r(x) \cup C^c$. Akibatnya $\mathfrak{A} \cup \{C^c\}$ adalah selimut terbuka untuk C . Berdasarkan Lemma 2.5.5, himpunan C memuat semua titik limitnya. Karena himpunan C terbatas dan memuat semua titik limitnya, maka dapat dipilih titik berhingga dalam C sedemikian sehingga $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{r_i}(x_i)$, dimana $i = 1, 2, \dots, n$.

Dengan demikian $\beta = \{B_{r_i}(x_i) : x_i \in C, i = 1, 2, \dots, n\}$ adalah subselimut berhingga dari \mathfrak{A} untuk C .

Akibat 2.5.12

Misalkan X adalah ruang bernorma dan C kompak. Jika F tertutup maka $F \cap C$ kompak.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.5.11, jika himpunan C kompak, maka himpunan C tertutup dan terbatas. Karena himpunan F tertutup dan irisan antar himpunan tertutup adalah tertutup maka $F \cap C$ adalah himpunan tertutup. Karena $F \cap C$ subset C , maka menurut Teorema 2.5.11, $F \cap C$ adalah himpunan kompak.

Contoh 2.5.13

Misalkan X adalah ruang bernorma. Himpunan $B_r(0) \subset X$, dimana $r < \infty$ adalah himpunan terbatas. Selanjutnya himpunan $\overline{B_r(0)} = \{y \in X : \|y\| \leq r\}$ adalah himpunan kompak.

Contoh 2.5.14

Misalkan $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ himpunan hingga dari X , jika $g = \{G_a\}$ selimut terbuka dari A . Karena setiap titik di A termuat dalam salah satu anggota selimut:

x_1 anggota dari G_{a_1}

x_2 anggota dari G_{a_2}

...

x_n anggota dari G_{a_n}

Maka gabungan dari himpunan koleksi $\{G_{a_1}, G_{a_2}, \dots, G_{a_n}\}$ yang memuat A , merupakan subselimut berhingga dari g . Sehingga A adalah himpunan kompak.

2.6 Himpunan Konveks

Definisi 2.6.1

Misalkan X adalah ruang bernorma. Himpunan $A \subseteq X$ disebut konveks (*convex*) jika untuk setiap $p, q \in A$ dan setiap $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku $\lambda p + (1 - \lambda)q \in A$ (Goffman, dan Pedrick, 1974).

Bukti:

(\Rightarrow) Misalkan himpunan A konveks. Akan ditunjukkan untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n, \lambda_i \geq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ dan $p_i \in A$ berlaku $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \in A$. Jika $n = 1$ dan $p_1 \in A$, maka $\lambda_1 = 1$ dan $p_1 \lambda_1 = p_1 \in A$. Misalkan untuk $n = k$, pernyataan tersebut benar, yaitu untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k, \lambda_i \geq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ dan $p_i \in A$ berlaku $\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \in A$. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap

$i = 1, 2, \dots, k, k+1, \lambda_i \geq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i p_i \in A$ adalah pernyataan yang benar. Dengan demikian, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i p_i + \lambda_{i+1} p_{i+1}$.

Karena $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, maka $\lambda_{i+1} = 1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i$ sehingga

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i + (1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i) p_{i+1}$$

Karena $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, maka $1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$. Karena $\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i \in A$, maka $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i p_i \in A$.

(\Leftarrow) Misalkan untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n, \lambda_i \geq 0$ sedemikian sehingga

$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ dan $p_i \in A$ berlaku $\sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \in A$ terpenuhi. Akan

ditunjukkan himpunan A konveks. Tentukan sembarang $0 \leq \lambda \leq 1$.

Pilih $\lambda_1 = \lambda$ dan $\lambda_2 = (1 - \lambda)$, sehingga $\sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1$ terpenuhi.

Selanjutnya tentukan sembarang $p_1, p_2 \in A$ sehingga $\sum_{i=1}^2 \lambda_i p_i \in A$.

Karena λ sembarang, maka terbukti bahwa himpunan A konveks. ■

Contoh 2.6.2

Misalkan X adalah ruang bernorma. Untuk setiap $r < 0$ dan setiap

$x \in X$, himpunan $B_r(\alpha)$ adalah himpunan konveks. Disamping itu,

himpunan $\overline{B_r(\alpha)}$ adalah himpunan tertutup. Dengan demikian,

himpunan konveks tidak harus himpunan terbuka atau tertutup. Untuk

suatu $u, u_0 \in X$, himpunan $\{\alpha u + u_0 \in X : \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ adalah himpunan

konveks dan tidak terbatas. Dengan demikian, himpunan konveks tidak

harus himpunan yang terbatas. Sehingga himpunan konveks tidak harus himpunan kompak.

Contoh 2.6.3

Tunjukkan bahwa himpunan $A = [0, 3]$ adalah himpunan konveks.

Untuk menunjukkan himpunan $A = [0, 3]$ konveks adalah dengan syarat untuk setiap $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ dimana $x, y \in A$.

Misalkan $x = y = 1$ dan $\lambda = \frac{1}{2}$, maka $\frac{1}{2} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 1 = 1 \in A$

$x = 1, y = 3$ dan $\lambda = \frac{1}{3}$, maka $\frac{1}{3} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot 3 = 2\frac{1}{3} \in A$

Jadi himpunan A adalah himpunan konveks.

Definisi 2.6.4

Misalkan X adalah ruang bernorma.

- i. Separuh garis (*half-line*) atau ray adalah himpunan $\{x \in X : x = \alpha u, \alpha \geq 0\}$, untuk suatu $u \neq 0 \in X$. Jika x_0 adalah titik yang dilalui separuh garis, maka separuh garis yang melalui x_0 dengan arah u adalah himpunan

$$\{x \in X : x = \alpha u + x_0, \alpha \geq 0\}, \text{ untuk suatu } u \neq 0 \in X.$$

- ii. *Hyperplane* adalah himpunan $\{x \in X : \langle u, x \rangle = 0\}$, untuk suatu $u \neq 0 \in X$. Jika x_0 merupakan titik dalam *Hyperplane*, maka *Hyperplane* yang melalui x_0 dengan arah u adalah himpunan

$$\{x \in X : \langle u, x - x_0 \rangle = 0\} \text{ untuk suatu } u \neq 0 \in X \text{ (Schutt, 2006).}$$

Teorema 2.6.5

Jika himpunan C tidak kosong dan konveks serta \bar{x} adalah titik batas C , maka terdapat *supporting hyperplane* pada C di \bar{x} , yaitu terdapat $u \neq 0 \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$ berlaku $\langle u, x \rangle \leq \langle u, \bar{x} \rangle$ (Kazimierz, 2003).

Bukti:

Misalkan \bar{x} adalah titik batas C dan barisan $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^c$, sedemikian sehingga y_n konvergen ke \bar{x} . Karena himpunan C konveks, maka \bar{C} konveks dan tertutup. Karena himpunan \bar{C} konveks maka terdapat $u_n \neq 0 \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$, $\langle u_n, x \rangle \leq 0$ dan $\langle u_n, y_n \rangle > 0$. Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Jika barisan y_n konvergen ke \bar{x} dan dipilih subbarisan dalam $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sedemikian sehingga subbarisan tersebut konvergen ke suatu titik $\bar{u} \in X$. Maka untuk setiap $x \in C$, $\langle u_n, x \rangle \leq 0 < \langle u_n, y_n \rangle$ atau $\langle u_n, x \rangle \leq \langle u_n, y_n \rangle$. Selanjutnya jika n menuju ∞ , maka untuk setiap $x \in C$, $\langle \bar{u}, x \rangle \leq \langle \bar{u}, \bar{x} \rangle$.

■

Definisi 2.6.6

Misalkan X ruang bernorma dan $A \subseteq X$. Konveks Hull A adalah himpunan konveks terkecil yang memuat A . Konveks Hull A dinotasikan dengan $co(A)$ (schutt, 2006).

Lemma 2.6.7

Misalkan X ruang bernorma. Irisan semua himpunan konveks subset X adalah himpunan konveks.

Bukti:

Misalkan $\mathcal{I} = \{A_i \subset X : \text{untuk } i \in \mathbb{N}, A_i \text{ himpunan konveks}\}$. Akan ditunjukkan $I = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ adalah himpunan konveks. Ambil sembarang $p, q \in I$ dan sembarang $0 \leq \lambda \leq 1$. Akan ditunjukkan $\lambda p + (1-\lambda)q \in I$. Karena $p, q \in I$ dan untuk setiap $i \in \mathbb{N}, I \subset A_i$, maka setiap $i \in \mathbb{N}, p, q \in A_i$. Karena untuk setiap $i \in \mathbb{N}, A_i$ konveks, maka untuk sembarang $0 \leq \lambda \leq 1$, berlaku $\lambda p + (1-\lambda)q \in A_i$. Karena untuk setiap $i \in \mathbb{N}, \lambda p + (1-\lambda)q \in A_i$, maka $\lambda p + (1-\lambda)q \in I$.

■

Lemma 2.6.8

Misalkan $A \subset X$. Himpunan $\text{conv}(A)$ adalah irisan semua himpunan konveks subset X yang memuat A .

Bukti:

Misalkan $\text{conv}(A)$ adalah konveks Hull A . Didefinisikan koleksi semua himpunan konveks subset X yang memuat A , yaitu himpunan

$$\mathcal{C} = \{C_A \subset X : C_A \text{ adalah himpunan konveks yang memuat } A\}$$

Misalkan $I = \bigcap_{C_A \in \mathcal{C}} C_A$. Akan ditunjukkan bahwa $I = \text{conv}(A)$, yaitu $I \subset \text{conv}(A)$ dan $\text{conv}(A) \subset I$. Karena himpunan $\text{conv}(A)$ adalah himpunan konveks yang memuat A , maka $I \subset \text{conv}(A)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $\text{conv}(A) \subset I$. Karena himpunan $\text{conv}(A)$ adalah himpunan konveks terkecil yang memuat A , maka untuk setiap $C_A \in \mathcal{C}$, $\text{conv}(A) \subset C_A$. Karena untuk setiap $C_A \in \mathcal{C}$, himpunan C_A konveks, maka menurut Lemma 2.6.7, himpunan I konveks. Karena untuk setiap $C_A \in \mathcal{C}$, $\text{conv}(A) \subset C_A$ maka $\text{conv}(A) \subset I$. Terbukti bahwa $I = \text{conv}(A)$ ■

Contoh 2.6.9

Jika $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$, maka $\text{conv}(A) = (0, 1]$. Selanjutnya, jika

$A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$, maka $\text{conv}(A) = [0, 1]$.

1.7 Fungsi Set-valued

Definisi 2.7.1

Misalkan X ruang Banach dan X^* adalah ruang Dual dari X . $T: X \rightarrow X^*$ disebut *set-valued* (fungsi bernilai himpunan) apabila anggota X^* , misalkan a, b, c dipasangkan tepat satu atau lebih pada anggota di X (Rockafellar, 1968).

Misalkan $T: X \rightarrow X^*$ adalah *set-valued*. Domain *set-valued* T adalah himpunan $D(T) = \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}$ dan jangkauan (*range*) *set-valued* T adalah himpunan

$$R(T) = \bigcup \{T(x) : x \in X\}$$

dimana $T(x) \in X^*$

Contoh 2.7.2

Misalkan $X = D(T) = [-1, 3]$. Fungsi $T: X \rightarrow X^*$ yang didefinisikan

$$\text{oleh } T(x) = \begin{cases} \{0\}, & x = -1 \text{ dan } x = 3 \\ [0, 2 - |x|], & -1 < x < 3 \end{cases}$$

adalah fungsi *set-valued*

Penyelesaian:

Ambil $(x = -1 \text{ dan } x = 3) \in X$ sedemikian sehingga nilai $T(x) = \emptyset$.

Dan untuk interval $-1 < x < 3$ nilai $T(x)$ adalah

$$T(x) = [0, 2 - |x|]$$

untuk $x = 0$, maka $T(x) = [0, 2 - |0|] = [0, 2]$

untuk $x = 1$, maka $T(x) = [0, 2 - |1|] = [0, 1]$

untuk $x = 2$, maka $T(x) = [0, 2 - |2|] = [0, 0]$

karena ada $T(x) = A \in X^*$ dan $A \neq \emptyset$, yaitu $T(x) = \{0\}$, $T(x) = [0, 2]$,

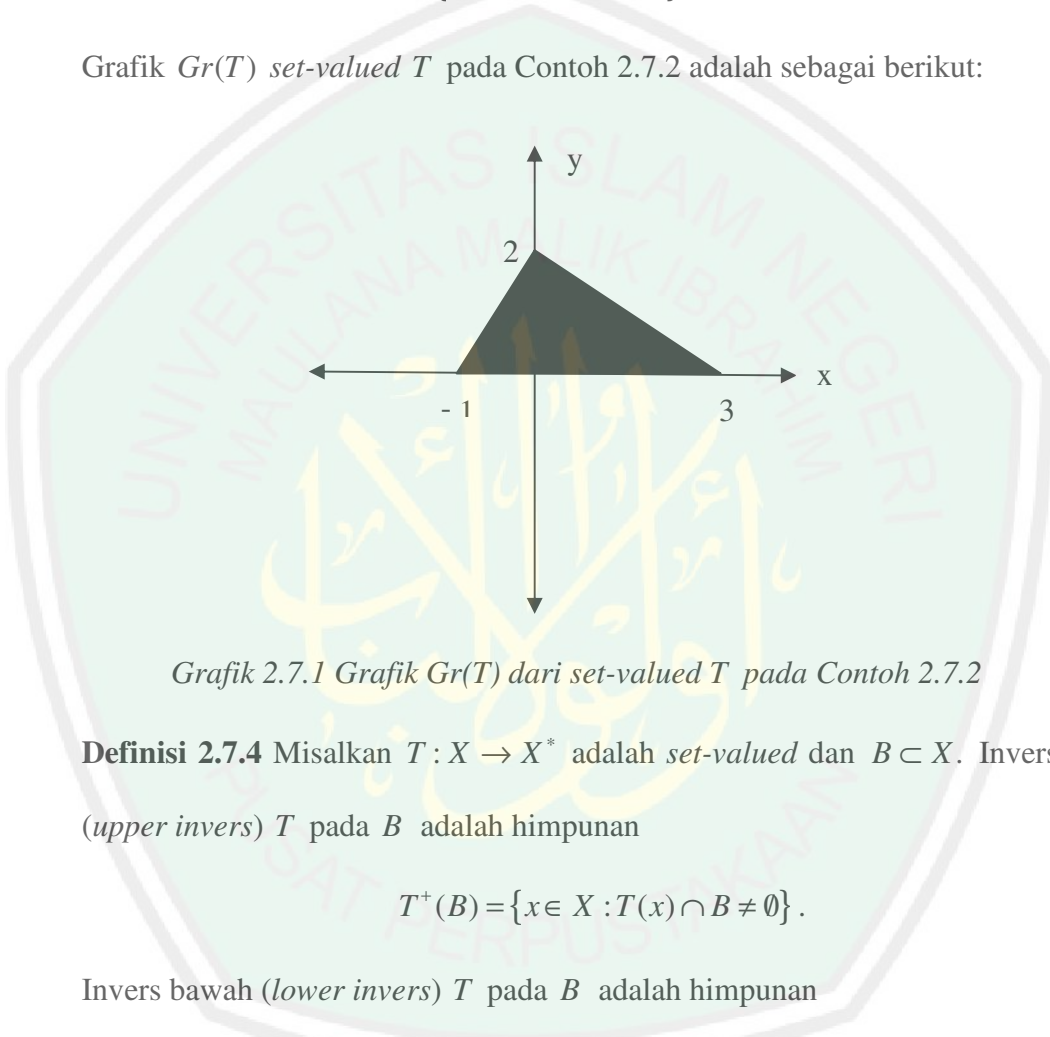
$T(x) = [0, 1]$, $T(x) = [0, 0]$, maka $T(x)$ yang didefinisikan di atas

adalah fungsi *set-valued*.

Definisi 2.7.3

Misalkan $T : X \rightarrow X^*$ fungsi *set-valued*. Grafik *set-valued* T adalah himpunan $Gr(T) = \{(x, x^*) : x^* \in T(x)\} \subset X \times X^*$ (Rockafellar, 1968).

Grafik $Gr(T)$ *set-valued* T pada Contoh 2.7.2 adalah sebagai berikut:



Grafik 2.7.1 Grafik $Gr(T)$ dari *set-valued* T pada Contoh 2.7.2

Definisi 2.7.4 Misalkan $T : X \rightarrow X^*$ adalah *set-valued* dan $B \subset X$. Invers atas (*upper invers*) T pada B adalah himpunan

$$T^+(B) = \{x \in X : T(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Invers bawah (*lower invers*) T pada B adalah himpunan

$$T^-(B) = \{x \in X : B \subset T(x)\} \text{ (Borges, 1976).}$$

Definisi 2.7.5

Set-valued $T : X \rightarrow X^*$ disebut tertutup dalam X , jika untuk setiap $x \in D(T)$, himpunan $T(x)$ tertutup.

Lemma 2.7.6

Set-valued $T : X \rightarrow X^*$ disebut tertutup dalam X , jika dan hanya jika $Gr(T)$ tertutup dalam $X \times X^*$.

Bukti:

(\Rightarrow) Misalkan $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T(x)$ sedemikian sehingga y_n konvergen ke y . Karena *set-valued* T tertutup dalam X maka $y \in T(x)$. Ambil sembarang barisan $\{(x, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Gr(T)$ sedemikian sehingga (x, y_n) konvergen ke (x, y) . Karena $y \in T(x)$ dan (x, y_n) konvergen ke (x, y) maka konvergen ke $(x, y) \in Gr(T)$. Terbukti bahwa grafik $Gr(T)$ tertutup.

(\Leftarrow) Misalkan $\{(x, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Gr(T)$ sedemikian sehingga (x, y_n) konvergen ke (x, y) . $Gr(T)$ tertutup, maka $(x, y) \in Gr(T)$. Dengan demikian $y \in T(x)$. Terbukti bahwa *set-valued* T tertutup. ■

Misalkan X^* adalah ruang dual dengan *inner-product* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan $D(T) \in X$. Didefinisikan *set-valued* yang monoton sebagai berikut.

Definisi 2.7.7

Set-valued $T : X \rightarrow X^*$ disebut monoton jika untuk setiap $x, y \in D(T)$

dan setiap $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ berlaku

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \text{ (Rockafellar, 1968 dan Borwein, 2005).}$$

Contoh 2.7.8

Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $D(T) = \mathbb{R}$. *Inner product* pada \mathbb{R} didefinisikan oleh $\langle x, y \rangle = xy$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. *Set-valued* $T: \mathbb{R} \rightarrow X^*$ yang didefinisikan oleh

$$T(x) = \begin{cases} \{-2\}, & x < 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \\ \{2\}, & x > 0 \end{cases}$$

adalah *set-valued* yang monoton.

Penyelesaian:

Ambil sembarang $x \in (-\infty, 0)$, $y \in (0, \infty)$ dan sembarang $x^* \in T(x)$, $y^* \in T(y)$. Akan ditunjukkan $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$.

Berdasarkan definisi, $T(x) = -2$ dan $T(y) = 2$, sehingga $x^* = -2 \in T(x)$ dan $y^* = 2 \in T(y)$. Dengan demikian

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle = \langle -2 - 2, x - y \rangle = \langle -4, x - y \rangle$$

Karena $x < y$ maka $(x - y) < 0$ sehingga berakibat $\langle -4, x - y \rangle > 0$.

Misalkan $x = 0$ dan $y \in (0, \infty)$. Akan ditunjukkan $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$.

Berdasarkan definisi, $F(x) = [-1, 1]$ dan $F(y) = \{2\}$. Ambil sembarang $x^* \in [-1, 1] \in T(x)$ dan $y^* = \{2\} \in T(y)$.

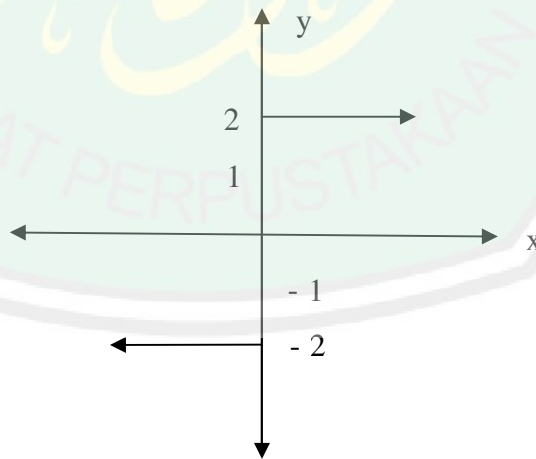
Karena $x^* < y^*$, maka $(x^* - y^*) < 0$ dan $x < y$, maka $(x - y) < 0$ dan berakibat $\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$.

Misalkan $x = 0$ dan $y \in (-\infty, 0)$. Berdasarkan definisi, $T(x) = [-1, 1]$ dan $T(y) = \{-2\}$. Ambil sembarang $x^* = [-1, 1] \in T(x)$ dan $y^* = \{-2\} \in T(y)$.

Karena $y^* < x^*$, maka $(x^* - y^*) > 0$ dan $y < x$, maka $(x - y) > 0$ dan berakibat $\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$

Misalkan x, y pada $(-\infty, 0)$ atau $(0, \infty)$. Karena *set-valued* T bernilai konstan pada $(-\infty, 0)$ atau $(0, \infty)$, maka $\langle x - y, x^* - y^* \rangle = 0$. Terbukti bahwa *set-valued* T monoton. ■

Grafik $Gr(T)$ dari *set-valued* T pada Contoh 2.7.8 ditunjukkan oleh grafik berikut.



Grafik 2.7.2 Grafik $Gr(T)$ dari *set-valued* T pada Contoh 2.7.8

Contoh 2.7.9

Misalkan $X = D(T) = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. *Inner product* pada \mathbb{R} didefinisikan oleh $\langle x, y \rangle = xy$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. *Set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ yang didefinisikan oleh

$$T(x) = \begin{cases} \{0\}, & x = -1 \text{ dan } x = 1 \\ [-2 + |x|, 2 - |x|], & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

adalah *set-valued* yang tidak monoton.

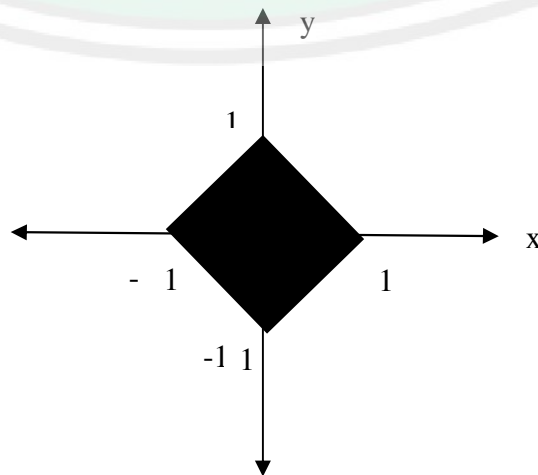
Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa *set-valued* T tidak monoton cukup dibuktikan terdapat $x, y \in D(T)$ dan $x^* \in T(x)$, $y^* \in T(y)$ sedemikian sehingga $\langle x - y, x^* - y^* \rangle < 0$. Pilih $x = -1$ dan $y = 1$. Sehingga $T(-1) = T(1) = [-1, 1]$. Pilih $x^* = 1 \in T(-1)$ dan $y^* = -1 \in T(1)$ sehingga

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle = \langle -1 - (1), 1 - (-1) \rangle = \langle -2, 2 \rangle = -4 < 0$$

Terbukti bahwa *set-valued* T tidak monoton.

Grafik $Gr(T)$ dari *set-valued* T pada Contoh 2.7.9 adalah sebagai berikut



Grafik 2.7.3 Grafik Gr(T) dari set-valued T pada Contoh 2.7.9

Jika $D(T) = X = \mathbb{R}$ dan *Set-valued* $T : D(T) \rightarrow X^*$ monoton maka T adalah fungsi yang monoton naik, karena untuk setiap $x, y \in D(T)$ sedemikian sehingga $x \leq y$ dan untuk setiap $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ berlaku $x^* \leq y^*$. Selanjutnya, *set-valued* $T : D(T) \rightarrow X^*$ adalah fungsi yang monoton turun, jika untuk setiap $x, y \in D(T)$ sedemikian sehingga $x \leq y$, dan setiap $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ berlaku $x^* \geq y^*$. Dengan kata lain, *set-valued* $T : D(T) \rightarrow X^*$ monoton turun jika untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan setiap $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ berlaku:

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \leq 0$$

Misalkan fungsi *single-valued* $t : K \rightarrow K^*$ konveks, yaitu untuk setiap $x, y \in K$ dan setiap $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku:

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq (\geq) \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y).$$

Fungsi tersebut adalah fungsi yang tidak monoton. Karena terdapat $x, y \in D(T)$ dan terdapat $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ sedemikian sehingga $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ tidak dipenuhi. Selanjutnya, *set-valued* $T : D(T) \rightarrow X^*$ disebut konveks jika untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan setiap $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku:

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) \supseteq \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$$

Adalah *set-valued* yang tidak monoton.

Definisi 2.7.10

Misalkan $T : X \rightarrow X^*$ fungsi *set-valued*. Grafik $Gr(T)$ monoton jika *set-valued* T monoton (Borwein, 2005).

Definisi 2.7.11

Misalkan $D \subset C$ dan $T, G : D \rightarrow X^*$ fungsi *set-valued*. *Set-valued* T disebut relatif sama dengan *set-valued* G (*set-valued* G disebut relatif sama dengan *set-valued* T) pada D , jika

$$Gr(T) \subset Gr(G) \text{ atau } Gr(T) \supset Gr(G).$$

Misalkan $E = \{ G : G \text{ set-valued yang monoton dan relatif sama pada } D \}$. *Set-valued* T disebut monoton maksimal, jika untuk setiap $G \in E$, $Gr(G) \subset Gr(T)$.

Definisi 2.7.13

Misalkan $T : D(T) \rightarrow X^*$ adalah *set-valued*. Grafik $Gr(T)$ disebut monoton maksimal, jika

$$Gr(T) = \bigcup_{G \in E} Gr(G) \text{ (Phelps, 1993)}.$$

Berdasarkan Definisi 2.7.10, grafik $Gr(T)$ monoton maksimal, jika *set-valued* T monoton maksimal.

Contoh 2.7.14

Misalkan *inner product* pada \mathbb{R} didefinisikan oleh $\langle x, y \rangle = xy$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. *Set-valued* $T : D(T) \rightarrow X^*$ dengan $D(T) = [-1, 1]$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$T(x) = \begin{cases} [1, \infty), & x = 1 \\ \{x^3\}, & -1 < x < 1 \\ (-\infty, -1], & x = -1 \end{cases}$$

adalah *set-valued* yang monoton maksimal.

Penyelesaian:

Langkah pertama akan ditunjukkan *set-valued* T monoton. Ambil sembarang $y \in (-1, 1)$, $x = 1$ dan sembarang $x^* \in T(x)$, $y^* \in T(y)$. Akan ditunjukkan $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$. Berdasarkan definisi, $T(x) = [1, \infty)$ dan $T(y) = \{y^3\}$. Maka $x^* = [1, \infty) \in T(x)$ dan $y^* = \{y^3\} \in T(y)$. Karena $y^* < x^*$, maka $(x^* - y^*) > 0$ dan $y < x$, maka $(x - y) > 0$ sehingga berakibat $\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$.

Misalkan $x = 1$ dan $y = -1$. Akan ditunjukkan $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$. Berdasarkan definisi, $T(x) = [1, \infty)$ dan $T(y) = (-\infty, -1]$. Ambil sembarang $x^* = [1, \infty) \in T(x)$ dan $y^* = (-\infty, -1] \in T(y)$. Karena $y^* < x^*$, maka $(x^* - y^*) > 0$ dan $y < x$, maka $(x - y) > 0$ sehingga berakibat $\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$.

Jika $x = (-1, 1)$ dan $y = 1$ akan ditunjukkan $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$. Berdasarkan definisi $T(x) = x^3$ dan $T(y) = [1, \infty)$. Ambil sembarang $x^* = (x^3) \in T(x)$ dan $y^* = [1, \infty) \in T(y)$. Karena $y^* < x^*$, maka

$(x^* - y^*) > 0$ dan $y < x$, maka $(x - y) > 0$ sehingga berakibat $\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$.

Misalkan $x = -1$ dan $y \in (-1, 1)$. Berdasarkan definisi, $T(x) = [1, \infty)$ dan $T(y) = (-\infty, -1)$. Ambil sembarang $x^* \in T(x) = (-\infty, -1]$ dan $y^* \in T(y) = \{y^3\}$. Karena $x^* < y^*$, maka $(x^* - y^*) < 0$ dan $x < y$, maka $(x - y) < 0$ sehingga berakibat $\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$.

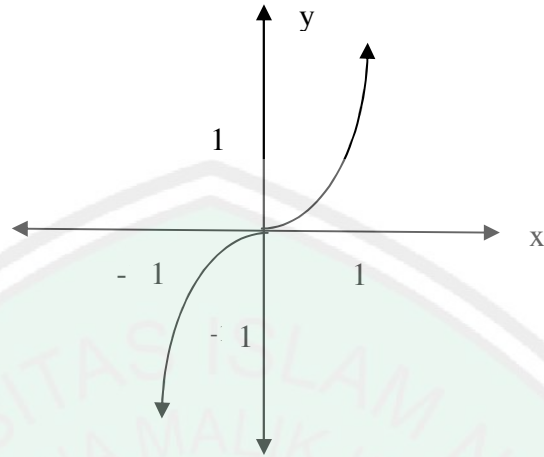
Jika $x = y = 1$ atau $x = y = -1$ maka $\langle x - y, x^* - y^* \rangle = 0$.

Misalkan $x, y \in (-1, 1)$. Jika $x < y$ maka $x^* < y^*$, sehingga $\langle x - y, x^* - y^* \rangle > 0$. Terbukti bahwa *set-valued* T monoton.

Langkah selanjutnya akan ditunjukkan *set-valued* T monoton maksimal.

Misalkan $T = \{G : G \text{ set-valued monoton dan relatif sama pada interval } [-1, 1]\}$. Tentukan sembarang $G \subset T$ dengan $D(G) \subset [-1, 1]$. Akan ditunjukkan $Gr(G) \subset Gr(T)$. Karena *set-valued* T yang monoton, grafik $Gr(T)$ tertutup dan $R(T) = \mathbb{R}$, maka untuk setiap $G \subset T$ berlaku $Gr(G) \subset Gr(T)$. Karena *set-valued* G sembarang, maka untuk setiap *set-valued* $G \in T$ berlaku $Gr(G) \subset Gr(T)$. Terbukti bahwa *set-valued* T monoton maksimal.

Grafik $Gr(T)$ dari *set-valued* T pada Contoh 2.7.14 ditunjukkan oleh grafik berikut.



Grafik 2.7.4 grafik $Gr(T)$ dari set-valued T pada Contoh 2.7.14

Contoh 2.7.15

Set-valued T pada Contoh 2.7.8 tidak monoton maksimal.

Penyelesaian:

Set-valued T pada Contoh 2.7.8 telah dibuktikan monoton. Selanjutnya akan dibuktikan tidak maksimal. Pilih set-valued $G : (-\infty, 0] \rightarrow X^*$ yang monoton dan relatif sama dengan set-valued T pada \mathbb{R} yaitu

$$G(x) = \begin{cases} \{-2\}, & x < 0 \\ [-2, 1], & x = 0 \end{cases}$$

Akan ditunjukkan $Gr(G) \not\subset Gr(T)$. Karena untuk setiap $x^* \in [-2, 1]$,

$\{(0, x^*)\} \subset Gr(G)$ dan $\{(0, x^*)\} \not\subset Gr(T)$, maka $Gr(G) \not\subset Gr(T)$.

Terbukti bahwa Set-valued T tidak monoton maksimal.

2.8 Kajian Himpunan dalam Al-Qur'an

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an salah satunya adalah matematika. Menurut Dedeng (dalam bukunya

Afzalur Rahman (2007: 111)), sumber kajian-kajian matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan lainnya dalam Islam adalah konsep tauhid yaitu keesaan Allah.

Dalam mengkaji keagamaan tentang karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang Dual, terlebih dahulu yang perlu dikaji adalah konsep himpunan dalam Al-qur'an meskipun tidak eksplisit.

Di antara sekian banyaknya pilihan yang Allah SWT berikan kepada makhluk-Nya adalah sikap dan perilaku mereka di alam semesta ini. Sebagaimana telah Allah jelaskan di awal surat *Al-Baqarah*. Di mana dalam ayat tersebut Allah menjelaskan tipologi manusia ke dalam tiga kategori besar yaitu: *Al-Mu'min* yang terkandung dalam Surat *Al-Baqarah* ayat 1-5.

الْم ﴿١﴾ ذَٰلِكَ الْكِتَٰبُ لَا رَيْبَ ۚ فِيهِ ۚ هُدًى لِّلْمُتَّقِينَ ﴿٢﴾ الَّذِيْنَ يُؤْمِنُونَ بِالْغَيْبِ وَيُقِيمُونَ
الصَّلَاةَ وَمِمَّا رَزَقْنَاهُمْ يُنْفِقُونَ ﴿٣﴾ وَالَّذِيْنَ يُؤْمِنُونَ بِمَا أُنزِلَ إِلَيْكَ وَمَا أُنزِلَ مِن قَبْلِكَ
وَبِالْآخِرَةِ هُمْ يُوقِنُونَ ﴿٤﴾ أُولَٰئِكَ عَلَىٰ هُدًى مِّن رَّبِّهِمْ ۗ وَأُولَٰئِكَ هُمُ الْمُفْلِحُونَ ﴿٥﴾

Artinya: Alif laam miin. Kitab (Al Quran) Ini tidak ada keraguan padanya; petunjuk bagi mereka yang bertaqwa. (yaitu) mereka yang beriman kepada yang ghaib, yang mendirikan shalat, dan menafkahkan sebahagian rezki yang kami anugerahkan kepada mereka. Dan mereka yang beriman kepada Kitab (Al Quran) yang Telah diturunkan kepadamu dan kitab-kitab yang Telah diturunkan sebelumnya, serta mereka yakin akan adanya (kehidupan) akhirat. Mereka Itulah yang tetap mendapat petunjuk dari Tuhan mereka, dan merekalah orang-orang yang beruntung.

Di situ dijelaskan bahwa golongan orang mukmin adalah golongan yang bertaqwa kepada Allah, senantiasa ikhlas beribadah karena Allah semata, yang sesuai antara dhaahir dan batinnya. Dengan pengertian bahwa apapun yang

dikatakan akan sesuai dengan perbuatannya. Kemudian *Al-Kafir* yang terdapat dalam Surat Al-Baqarah ayat 6-7

إِنَّ الَّذِينَ كَفَرُوا سَوَاءٌ عَلَيْهِمْ ءَأَنْذَرْتَهُمْ أَمْ لَمْ تُنذِرْهُمْ لَا يُؤْمِنُونَ ﴿٦﴾ خَتَمَ اللَّهُ عَلَى قُلُوبِهِمْ وَعَلَى سَمْعِهِمْ وَعَلَى أَبْصَارِهِمْ غِشْوَةً وَلَهُمْ عَذَابٌ عَظِيمٌ ﴿٧﴾

Artinya: Sesungguhnya orang-orang kafir, sama saja bagi mereka, kamu beri peringatan atau tidak kamu beri peringatan, mereka tidak juga akan beriman. Allah Telah mengunci-mati hati dan pendengaran mereka, dan penglihatan mereka ditutup dan bagi mereka siksa yang amat berat.

Golongan ini adalah golongan yang mencintai kekufuran secara dhahir dan batinnya. Mereka tidak bisa menerima petunjuk dari siapapun dan segala macam nasehat tidak akan berbekas di hatinya. Orang-orang seperti ini juga tidak dapat memperhatikan dan memahami ayat-ayat Al Quran yang mereka dengar dan tidak dapat mengambil pelajaran dari tanda-tanda kebesaran Allah yang mereka lihat di permukaan bumi dan pada diri mereka sendiri.

Selanjutnya golongan *Al-Munafiq* yang dijelaskan dalam surat Al-Baqarah ayat 8-20

وَمِنَ النَّاسِ مَنْ يَقُولُ ءَامَنَّا بِاللَّهِ وَبِالْيَوْمِ الْآخِرِ وَمَا هُمْ بِمُؤْمِنِينَ ﴿٨﴾ تَخَذِعُونَ لِلَّهِ وَالَّذِينَ ءَامَنُوا وَمَا تَخْذِعُونَ إِلَّا أَنفُسَهُمْ وَمَا يَشْعُرُونَ ﴿٩﴾ فِي قُلُوبِهِمْ مَرَضٌ فَزَادَهُمُ اللَّهُ مَرَضًا وَلَهُمْ عَذَابٌ أَلِيمٌ بِمَا كَانُوا يَكْذِبُونَ ﴿١٠﴾ وَإِذَا قِيلَ لَهُمْ لَا تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ قَالُوا إِنَّمَا نَحْنُ مُصْلِحُونَ ﴿١١﴾ أَلَا إِنَّهُمْ هُمُ الْمُفْسِدُونَ وَلَكِن لَّا يَشْعُرُونَ ﴿١٢﴾ وَإِذَا قِيلَ لَهُمْ ءَامِنُوا كَمَا ءَامَنَ النَّاسُ قَالُوا أَنُؤْمِنُ كَمَا ءَامَنَ السُّفَهَاءُ أَلَا إِنَّهُمْ هُمُ السُّفَهَاءُ وَلَكِن لَّا

يَعْلَمُونَ ﴿١٧﴾ وَإِذَا لَقُوا الَّذِينَ ءَامَنُوا قَالُوا ءَامَنَّا وَإِذَا خَلَوْا إِلَىٰ شَيَاطِينِهِمْ قَالُوا إِنَّا مَعَكُمْ إِنَّمَا
 نَحْنُ مُسْتَهْزِءُونَ ﴿١٨﴾ اللَّهُ يَسْتَهْزِئُ بِهِمْ وَيَمُدُّهُمْ فِي طُغْيَانِهِمْ يَعْمَهُونَ ﴿١٩﴾

Artinya: Di antara manusia ada yang mengatakan: "Kami beriman kepada Allah dan hari kemudian," pada hal mereka itu Sesungguhnya bukan orang-orang yang beriman. Mereka hendak menipu Allah dan orang-orang yang beriman, padahal mereka Hanya menipu dirinya sendiri sedang mereka tidak sadar. Dalam hati mereka ada penyakit, lalu ditambah Allah penyakitnya; dan bagi mereka siksa yang pedih, disebabkan mereka berdusta. Dan bila dikatakan kepada mereka: "Janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi". mereka menjawab: "Sesungguhnya kami orang-orang yang mengadakan perbaikan." Ingatlah, Sesungguhnya mereka Itulah orang-orang yang membuat kerusakan, tetapi mereka tidak sadar. Apabila dikatakan kepada mereka: "Berimanlah kamu sebagaimana orang-orang lain Telah beriman." mereka menjawab: "Akan berimankah kami sebagaimana orang-orang yang bodoh itu Telah beriman?" Ingatlah, Sesungguhnya merekalah orang-orang yang bodoh; tetapi mereka tidak tahu. Dan bila mereka berjumpa dengan orang-orang yang beriman, mereka mengatakan: "Kami Telah beriman". dan bila mereka kembali kepada syaitan-syaitan mereka, mereka mengatakan: "Sesungguhnya kami sependirian dengan kamu, kami hanyalah berolok-olok." Allah akan (membalas) olok-olokan mereka dan membiarkan mereka terombang-ambing dalam kesesatan mereka.

Golongan ini merupakan golongan yang menyatakan iman secara dhahir dengan lidahnya sedangkan hatinya tidak iman (kafir). Kelompok ini adalah kelompok yang paling buruk dari kedua kelompok diatas, mereka kufur dengan kekafiran dan yang lebih buruknya lagi mereka menyembunyikan kekafirannya.

Dari penjelasan surat Al-Baqarah di atas dapat difahami bahwa kedudukan orang mukmin di mata Allah sangatlah tinggi, sedangkan yang paling rendah di mata Allah adalah golongan orang munafik. Ini terbukti dari

penyebutan orang mukmin di awal surat tersebut, lalu diikuti dengan orang kafir selanjutnya orang munafik

Sebagai seorang muslim dan sekaligus cendekiawan muslim seharusnya mampu memahami, menghayati, dan mengaktualisasikan diri ke dalam ketiga kelompok manusia di atas. Jika kelompok manusia tersebut sesuai dengan ajaran agama Islam, maka seharusnya diamalkan, karena dengan begitu hidup manusia akan terasa nyaman. Dan jika tidak sesuai dengan ajaran Islam, maka seharusnya ditinggalkan, karena akan merusak kepribadian seseorang.

Selanjutnya jika pembicaraan dikaitkan dengan konsep relasi dan operasi himpunan himpunan, maka kelompok yang diberi nikmat (orang mukmin) saling lepas (*disjoint*) dengan kelompok yang dimurkai dan sesat (orang kafir). Kelompok yang dimurkai saling beririsan atau bahkan sama dengan kelompok yang sesat. Dalam kasus yang sangat sederhana, dapat dikatakan bahwa golongan munafiq merupakan irisan antara golongan mu'min dengan kafir (Abdusysyahir, 2007: 110)

BAB III

PEMBAHASAN

Set-valued yang akan dibahas pada bab ini adalah *set-valued* yang monoton maksimal dari X ke X^* , dimana X^* adalah ruang dual riil. *Set-valued* selalu dinotasikan dengan $T : D(T) \rightarrow X^*$, dimana $D(T) \subset X$. Sedangkan $B_r(x)$ adalah bola terbuka dengan pusat x dan jari-jari r .

Pembahasan selanjutnya lebih spesifik pada karakteristik *set-valued* yang monoton maksimal di ruang dual real. Adapun karakteristik tersebut dinyatakan dalam Lemma, Teorema dan Akibat berikut.

Lemma 3.1

Jika himpunan $C^* \subseteq X^*$ kompak dan konveks serta himpunan $S \subseteq X \times C^*$ monoton, maka terdapat $x \in X$ dan $x^* \in C^*$ sedemikian sehingga himpunan $\{(x, x^*)\} \cup S$ monoton (Zagrodny, 2008).

Bukti:

Andaikan kesimpulan dari lemma tersebut salah, yaitu tidak ada $x^* \in C^*$ dan $x \in X$ sedemikian sehingga himpunan $\{(x, x^*)\} \cup S$ monoton.

Andaikan untuk setiap $(y, y^*) \in S$ dan setiap $x \in X$, didefinisikan himpunan

$$U(y, y^*) = \{x^* \in C^*; \langle x^* - y^*, x - y \rangle < 0\} \quad (3.1)$$

Akan ditunjukkan kontradiksi dengan pernyataan yaitu terdapat $x^* \in C^*$ dan $x \in X$ sedemikian sehingga himpunan $\{(x, x^*)\} \cup S$ monoton..

Karena himpunan C^* terbatas dan untuk setiap $(y, y^*) \in S$, himpunan $U(y, y^*)$ memenuhi (3.1), maka himpunan $U(y, y^*)$ terbatas dan terbuka subset C^* . Berdasarkan (3.1) diperoleh

$$X^* = \bigcup \{U(y, y^*) : (y, y^*) \in S\} \quad (3.2)$$

Dengan demikian koleksi $\{U(y, y^*) : (y, y^*) \in S\}$ adalah selimut terbuka untuk C^* . Karena himpunan C^* kompak, maka terdapat $(y_1, y_1^*), (y_2, y_2^*), \dots, (y_m, y_m^*)$ dalam S sedemikian sehingga

$$C^* = \bigcup_{i=1}^m \{U(y_i, y_i^*)\}.$$

Dengan kata lain, himpunan $\{U(y_i, y_i^*) : (y_i, y_i^*) \in S\}$ adalah subselimut berhingga untuk C^* . Misalkan $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ adalah partisi untuk C^* sedemikian sehingga berkorespondensi satu-satu dengan subselimut berhingga untuk C^* . Sehingga himpunan $\{\varphi_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ adalah selimut terbuka untuk C^* . Misalkan $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ adalah fungsi-fungsi riil yang kontinu pada $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sedemikian sehingga untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dan setiap $x^* \in \varphi_i, 0 \leq \beta_i(x^*) \leq 1, \sum_{i=1}^n \beta_i(x^*) = 1$ dan $\{x^* \in C^* : \beta_i(x^*) > 0\} \subset U(y_i, y_i^*)$.

Misalkan $K = \text{conv}(\{y_i^*\}) \subset C^*$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Karena himpunan K memuat semua titik limitnya, maka himpunan K tertutup. Karena himpunan C^* kompak dan K adalah himpunan tertutup subset C^* , maka menurut Teorema 2.5.11, himpunan K kompak. Sehingga himpunan K kompak dan konveks. Karena himpunan K konveks, maka dapat didefinisikan fungsi kontinu $p : K \rightarrow K$ sedemikian sehingga untuk setiap $x^* \in K$,

$$p(x^*) = \sum_{i=1}^n \beta_i(x^*) y_i^* \quad (3.3)$$

Selanjutnya, digunakan teorema eksistensi titik tetap pada K , yaitu terdapat $w^* \in K$ sedemikian sehingga $p(w^*) = w^*$. Teorema tersebut akan dibuktikan terlebih dahulu. Pilih $w^* \in K$ sedemikian sehingga $\beta_1(w^*) = 1$, untuk $i = 1$ dan $\beta_i(w^*) = 0$, untuk $i \neq 1$. Jika $y_1^* = w^*$, dan untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ tentukan sembarang $y_i^* \in K$. Maka dari persamaan (3.3) diperoleh

$$p(w^*) = \sum_{i=1}^n \beta_i(w^*) y_i^* = w^*.$$

Jika $p(w^*) = w^*$, maka

$$\langle p(w^*) - w^*, \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i(w^*) (y_i - w) \rangle = 0.$$

Dari persamaan (3.3) dan $p(w^*) = w^*$ diperoleh

$$\left\langle \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i(w^*) (y_i^* - w^*), \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j(w^*) (y_j - w) \right\rangle$$

$$= \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \beta_i(w^*) \beta_j(w^*) (y_i^* - w^*, y_j - w) = 0 \quad (3.4)$$

Selanjutnya, *inner product* pada persamaan (3.4) akan diselesaikan terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} & (y_i^* - w^*, y_j - w) + (y_j^* - w^*, y_i - w) \\ &= (y_i^* - w^*, y_i - w) + (y_i^* - y_j^*, y_j - y_i) + (y_j^* - w^*, y_j - w) \end{aligned}$$

Karena himpunan M monoton, maka untuk setiap $i, j = 1, 2, \dots, n$,

$$\langle y_i^* - y_j^*, y_i - y_j \rangle \geq 0. \text{ Sehingga } \langle y_i^* - y_j^*, y_j - y_i \rangle \leq 0.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned} & \langle y_i^* - w^*, y_j - w \rangle + \langle y_j^* - w^*, y_i - w \rangle \\ & \leq \langle y_i^* - w^*, y_i - w \rangle + \langle y_j^* - w^*, y_j - w \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

Untuk penyederhanaan penulisan didefinisikan

$$a_{i,j} = \langle y_i^* - w^*, y_j - w \rangle$$

Sehingga pertidaksamaan (3.5) menjadi

$$a_{i,j} + a_{j,i} = a_{i,i} + \langle y_i^* - y_j^*, y_j - y_i \rangle + a_{j,j} \leq a_{i,i} + a_{j,j}$$

Karena untuk setiap $i, j = 1, 2, \dots, n$, $\beta_i(w^*) \beta_j(w^*) = \beta_j(w^*) \beta_i(w^*)$ maka

$$\begin{aligned} & \beta_i(w^*) \beta_j(w^*) a_{i,j} + \beta_i(w^*) \beta_j(w^*) a_{j,i} \\ &= \beta_i(w^*) \beta_j(w^*) \left(\frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2} \right) + \beta_i(w^*) \beta_j(w^*) \left(\frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2} \right) \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (3.4) menjadi

$$\sum_{i,j=1}^n \beta_i(w^*) \beta_j(w^*) a_{i,j} = \sum_{i,j=1}^n \beta_i(w^*) \beta_j(w^*) \left(\frac{a_{i,j} + a_{j,i}}{2} \right) = 0,$$

dan

$$\sum_{i,j=1}^n \beta_i(w^*) \beta_j(w^*) \left(\frac{a_{i,i} + a_{j,j}}{2} \right) \geq 0 \quad (3.6)$$

Karena untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$, $\beta_i(w^*) > 0$ dan $\beta_j(w^*) > 0$ maka

$\beta_i(w^*) \beta_j(w^*) > 0$, sehingga

$$w \in U(y_i, y_i^*) \cap U(y_j, y_j^*)$$

Dari persamaan (3.1) diperoleh $a_{i,i} < 0$ dan $a_{j,j} < 0$, sehingga

$$\sum_{i,j=1}^n \beta_i(w^*) \beta_j(w^*) \left(\frac{a_{i,i} + a_{j,j}}{2} \right) \leq 0 \quad (3.7)$$

Dari pertidaksamaan (3.6) dan (3.7) diperoleh bahwa untuk setiap

$i, j = 1, 2, \dots, n$, $\beta_i(w^*) \beta_j(w^*) = 0$. Hal tersebut kontradiksi dengan

kekonvekan pada C^* . Sehingga tidak mungkin untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$,

$\beta_i(w^*) = 0$. Haruslah $\sum_{i,j=1}^n \beta_i(w^*) = 1$. Dengan demikian, pernyataan

(3.1) harus diingkari, sehingga himpunan $\{(x, x^*)\} \cup S$ monoton. ■

Lemma 3.2

Diberikan *set-valued* $T : D(T) \rightarrow X^*$ dan himpunan $B \subset X^*$ sedemikian

sehingga $R(T) \cap B \neq \emptyset$. Misalkan $T^-(B) = \{x \in X : B \subset T(x)\}$ dan

$T^+(B) = \{x \in X : B \cap T(x) \neq \emptyset\}$. Jika *set-valued* T monoton, maka *set-*

valued T^+ dan T^- monoton (Borges, 1976).

Bukti:

Misalkan *set-valued* $T : D(T) \rightarrow X^*$ monoton, karena *set-valued* T monoton maka untuk setiap $x, y \in D(T)$ dan setiap $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$ berlaku

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

Diberikan $B \subset X^*$ sedemikian sehingga $T(x) \subset B$ dan $T(y) \subset B$, serta untuk setiap $x^* \in T(x)$ dan setiap $y^* \in T(y)$ berlaku $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$, maka *set-valued* T^- monoton pada B . Karena untuk setiap $x, y \in D(T)$ sedemikian sehingga $T(x) \cap B \neq \emptyset$ dan $T(y) \cap B \neq \emptyset$, serta untuk setiap $x^* \in T(x) \cap B$ dan setiap $y^* \in T(y) \cap B$ berlaku $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$, maka *set-valued* T^+ monoton pada $R(T) \cap B$.

■

Contoh 3.3

Misalkan *set-valued* $T : D(T) \rightarrow X^*$ dengan $D(T) = (-\infty, \infty)$ monoton. Fungsi T didefinisikan dengan

$$T(x) \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ \{0\}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$X = D(T)$	-2	-1	0	1	2
$X^* = R(T)$	0	0	0	1	4

Karena *set-valued* T monoton, maka untuk setiap $x = (-\infty, \infty) \in D(T)$

dan setiap $x^* = [0, \infty) \in T(x)$ berlaku

$$\langle x_1 - x_2, x_1^* - x_2^* \rangle \geq 0$$

Diberikan $B \subset X^*$, maka ambil sembarang $x_1 = 1, x_2 = 2 \in D(T)$

sedemikian sehingga $T(1) = 1, T(2) = 4 \subset B$, maka *set-valued* T^-

monoton pada B . Karena untuk setiap $x_1 = 1, x_2 = 2 \in D(T)$ sedemikian

sehingga $T(x_1) \cap B \neq \emptyset$ dan $T(x_2) \cap B \neq \emptyset$, serta untuk setiap

$1 \in T(x) \cap B$ dan setiap $4 \in T(y) \cap B$ berlaku $\langle x_1 - x_2, x_1^* - x_2^* \rangle \geq 0$,

maka *set-valued* T^+ monoton pada $R(T) \cap B$.

Definisi 3.4

Set-valued $T : D(T) \rightarrow X^*$ disebut terbatas lokal (*locally bounded*) di

$x \in D(T)$, jika terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga himpunan $T(B_r(x))$

terbatas (Borges, 1976).

Lemma 3.5

Jika *Set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton dan himpunan $B \subset X$ terbatas

sedemikian sehingga untuk setiap $y \in D(T), T(y) \cap B \neq \emptyset$. Maka untuk

setiap $x \in X$, terdapat $x^* \in X^*$ sedemikian sehingga untuk setiap

$y \in D(T)$ dan setiap $y^* \in T(y) \cap B$ berlaku

$$\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0 \text{ (Borges, 1976).}$$

Bukti:

Misalkan himpunan $B \subset X^*$ terbatas sedemikian sehingga untuk setiap $y \in D(T), T(y) \cap B \neq \emptyset$.

Selanjutnya didefinisikan fungsi invers atas (*upper inverse*) T pada B , yaitu himpunan

$$T^+(B) = \{y \in X : T(y) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Menurut Lemma 3.2, T^+ adalah *set-valued* yang monoton dari $R(T) \cap B$ ke X^* dengan $D(T^+) \subset B$. Karena *set-valued* T^+ monoton, maka menurut Definisi 2.7.10 grafik $Gr(T^+)$ adalah himpunan monoton subset $X \times B$. Karena himpunan B terbatas maka himpunan $\overline{conv(B)}$ kompak dan konveks, sehingga $B \subset \overline{conv(B)}$. Jika B adalah sembarang himpunan terbatas subset X sedemikian sehingga untuk setiap $y \in D(T), T(y) \cap B \neq \emptyset$, maka berdasarkan Lemma 3.1 terdapat $x^* \in \overline{conv(B)}$ dan $x \in X$ sedemikian sehingga himpunan $\{(x, x^*)\} \cup Gr(T^+)$ monoton. Karena himpunan $\{(x, x^*)\} \cup Gr(T^+)$ monoton maka teknik pembuktian di atas dapat dikonstruksi himpunan monoton $\{(x_i, x_i^*)\} \cup Gr(T^+)$, untuk setiap $X \in \mathbb{N}$. Akibatnya, untuk setiap $x \in X$, terdapat $x^* \in X^*$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in D(T)$ dan setiap $y^* \in T(y) \cap B$ berlaku

$$\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0$$

■

Akibat 3.6

Jika *set-valued* $T : D(T) \rightarrow X^*$ monoton dan himpunan $B \subset X^*$ terbatas.

Maka untuk setiap $x \in X$ terdapat $x^* \in X^*$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in T^+(B)$ dan setiap $y^* \in T(y) \cap B$ berlaku $\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0$

(Rockafellar, 1968 dan borwein, 2005).

Bukti:

Misalkan himpunan $B \subset X^*$ terbatas . Jika $R(T) \cap B \neq \emptyset$, maka

$T^+(B) \neq \emptyset$. Karena himpunan $T^+(B) \neq \emptyset$, maka kesimpulan Akibat 3.6 terpenuhi. Selanjutnya jika $R(T) \cap B = \emptyset$ maka menurut Lemma 3.2 T^+ adalah *set-valued* yang monoton pada $R(T) \cap B$. Di samping itu untuk setiap $y \in T^+(B)$, $T(y) \cap B \neq \emptyset$. Berdasarkan Lemma 3.5, kesimpulan Akibat 3.6 terpenuhi. ■

Contoh 3.7

Misalkan $T : X \rightarrow X^*$ dimana $D(T) = X = (-\infty, \infty)$ merupakan *set-valued* monoton yang didefinisikan dengan

$$T(x) \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ \{0\}, & x \leq 0 \end{cases}$$

$X = D(T)$	-2	-1	0	1	2
$X^* = R(T)$	0	0	0	1	4

Misalkan himpunan $B \subset X^*$ terbatas. Maka untuk setiap $x = (-\infty, \infty) \in X$,

terdapat $x^* = [0, \infty) \in X^*$ sedemikian sehingga ambil sembarang

$2 \in D(T)$ maka $4 \in T(2) \cap B$ dan berlaku

$$\langle 2 - x, 4 - x^* \rangle \geq 0$$

Teorema 3.8

Jika $T : D(T) \rightarrow X^*$ monoton maksimal sedemikian sehingga untuk setiap

$x, y \in D(T)$ dan setiap $x^* \in T(x)$ berlaku

$$\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0,$$

maka $y^* \in T(y)$ (Rockafellar, 1968).

Bukti:

Misalkan $F = \{G : G \text{ set-valued yang monoton dan relatif sama pada}$

$D(T)\}$. Tentukan sembarang $x, y \in D(T)$ dan sembarang $x^* \in T(x)$

sedemikian sehingga $\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0$. Akan ditunjukkan $y^* \in T(y)$.

Misalkan $F_y = \{G : G \subset F \text{ terdefinisi pada } y\}$. Karena untuk setiap *set-*

valued $G \subset F_y$ monoton, maka untuk setiap $y^* \in G(y)$ berlaku

$$\langle y - x, y^* - x^* \rangle \geq 0.$$

Karena *set-valued* T monoton maksimal maka $G(y) \subset T(y)$. Karena

$y^* \in G(y)$ dan $G(y) \subset T(y)$, maka $y^* \in T(y)$.

■

Contoh 3.9

Jika $T : X \rightarrow X^*$ dimana $X = D(T) = [-2, 2]$ monoton maksimal dengan definisi sebagai berikut

$$T(x) = 1 \text{ dengan } -2 \leq x \leq 2$$

$X = D(T)$	-2	-1	0	1	2
$X^* = R(T)$	1	1	1	1	1

Misalkan $F = \{G : G \text{ set-valued yang monoton dan relatif sama pada } D(T)\}$. Ditentukan sembarang $x = [-2, 2] \in D(T)$ dan sembarang $x^* = [1] \in T(x)$ sedemikian sehingga $\langle x_2 - x_1, x_2^* - x_1^* \rangle \geq 0$. Misalkan $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$, karena untuk setiap $1 \in T(x_1)$ akan ditunjukkan $1 \in T(x_2)$. Misalkan $F_{x_2} = \{G : G \subset F \text{ terdefinisi pada } x_2\}$. Karena untuk setiap set-valued $G \subset F_{x_2}$ monoton, maka untuk setiap $1 \in G(x_2)$ berlaku

$$\langle 1 - 2, 1 - 1 \rangle \geq 0.$$

Karena set-valued T monoton maksimal maka $G(x_2) \subset T(x_2)$. Karena $1 \in G(x_2)$ dan $G(x_2) \subset T(x_2)$, maka $1 \in T(x_2)$.

Lemma 3.10

Jika set-valued $T : D(T) \rightarrow X^*$ monoton maksimal, maka untuk setiap himpunan B yang tertutup dan terbatas subset X^* , himpunan

$$T^+(B) = \{x \in X : B \cap T(x) \neq \emptyset\}$$

tertutup dalam X (Rockafellar, 1968).

Bukti:

Misalkan himpunan $B \subset X^*$ terbatas dan tertutup (kompak) sedemikian sehingga $R(T) \cap B \neq \emptyset$. Akan ditunjukkan $y \in \overline{T^+(B)}$. Jika untuk setiap persekitaran U pada y , maka $T(U) \cap B \neq \emptyset$. Karena himpunan $B \subset X^*$ tertutup dan terbatas (kompak), maka berdasarkan Akibat 2.5.13,

himpunan $T(U) \cap B$ kompak. Misalkan B_U adalah koleksi himpunan $\overline{T(U)} \cap B$ dengan U adalah persekitaran pada y , yaitu himpunan

$$B_U = \{ \overline{T(U)} \cap B \subset X^* : \forall U \text{ persekitaran pada } y \}.$$

Karena untuk semua U persekitaran pada y , $T(U) \cap B \neq \emptyset$. Maka irisan himpunan-himpunan kompak elemen subkoleksi berhingga subset B_U adalah himpunan yang tidak kosong. Selanjutnya, irisan himpunan-himpunan kompak elemen koleksi B_U adalah himpunan yang tidak kosong. Sehingga terdapat beberapa $y^* \in B$ sedemikian sehingga y^* termuat dalam $\overline{T(U)}$, untuk setiap U persekitaran pada y . Selanjutnya akan ditunjukkan $y^* \in T(y)$.

Misalkan $u \in X$ dan $u^* \in T(u)$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat persekitaran U pada y dan persekitaran U^* pada y^* sedemikian sehingga

$$\left| \langle x - y, u^* \rangle \right| \leq \varepsilon \quad (3.8)$$

$$(\forall x \in U)$$

$$\left| \langle u - y, x^* - y^* \rangle \right| \leq \varepsilon \quad (3.9)$$

$$(\forall x^* \in U^*)$$

Karena himpunan B terbatas maka

$$\left| \langle x - y, x^* \rangle \right| \leq \varepsilon \quad (3.10)$$

$$(\forall x \in U, x^* \in B)$$

Misalkan $x^* \in T(U) \cap U^* \cap B$ sedemikian sehingga dengan pemilihan

$y^* \in T(U) \cap U^* \cap B \neq \emptyset$ karena *set-valued* T monoton, maka untuk

$x \in U$ sedemikian sehingga $x^* \in T(x)$ berlaku

$$\langle u - x, u^* - x^* \rangle \geq 0 \quad (3.11)$$

Dengan pertidaksamaan (3.8), (3.9), (3.10) dan (3.11) diperoleh

$$\begin{aligned} \langle u - y, u^* - y^* \rangle &= \langle u - x, u^* - x^* \rangle + \langle x - y, u^* \rangle + \langle u - y, u^* - y^* \rangle - \langle x - y, x^* \rangle \\ &\geq 0 - \varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = -3\varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sembarang maka untuk setiap $u \in D(T)$ dan setiap

$u^* \in T(u)$,

$$\langle u - y, u^* - y^* \rangle \geq 0.$$

Karena *set-valued* T monoton maksimal, maka menurut Teorema 3.8, $y^* \in T(y)$. Karena $T(y) \neq \emptyset$ maka $y \in \overline{T^+(B)}$. Dengan demikian, himpunan $T^+(B)$ tertutup dalam X .

Lemma 3.11

Misalkan *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal dan himpunan $D(T)$ konveks. Jika $\text{int}(\overline{\text{conv}D(T)}) \neq \emptyset$ dan $x \notin \text{int}(D(T))$, maka himpunan $T(x)$ memuat paling sedikit satu separuh garis (Rockafellar, 1968).

Bukti:

Karena $\text{int}(\overline{\text{conv}D(T)}) \neq \emptyset$, maka $D(T)$ memuat titik interior. Karena $x \notin \text{int}(D(T))$ maka x adalah titik batas $D(T)$. Berdasarkan Teorema 2.6.5, terdapat *supporting hyperplane* pada $\overline{\text{conv}D(T)}$ di x , yaitu terdapat $y^* \neq 0 \in X^*$ sedemikian sehingga untuk setiap $u \in D(T)$, berlaku $\langle u, y^* \rangle \leq \langle x, y^* \rangle$ atau

$$\langle x - u, y^* \rangle \geq 0 \quad (3.12)$$

Misalkan $x^* \in T(x)$. Dengan menggunakan kemonotonan pada T dan pertidaksamaan (3.12), maka untuk setiap $\lambda \geq 0$, $x^* + \lambda y^*$ berlaku

$$\begin{aligned} \langle u - x, u^* - (x^* + \lambda y^*) \rangle &= \langle u - x, u^* - x^* \rangle + \langle u - x, -\lambda y^* \rangle \\ &= \langle u - x, u^* - x^* \rangle - \lambda \langle x - u, y^* \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle u - x, u^* - x^* \rangle + \lambda \langle u - x, y^* \rangle \quad (3.13)$$

Untuk setiap $u \in D(T)$ dan $u^* \in T(u)$. Karena *set-valued* T monoton maksimal dan memenuhi (3.13), maka menurut Terorema 3.8, $x^* + \lambda y^* \in T(x)$. Akibatnya himpunan $T(x)$ memuat separuh garis yaitu himpunan

$$\{x^* + \lambda y^* : \lambda \geq 0\}.$$

■

Contoh 3.12

Misalkan *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$, dimana $D(T) = X = (-\infty, 3]$ adalah monoton maksimal yang didefinisikan dengan

$$T(x) \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 3 \\ \{0\}, & x \leq 0 \end{cases}$$

Karena $\text{int}(\overline{\text{conv}D(T)}) \neq \emptyset$, yaitu $\text{int}(\overline{\text{conv}D(T)}) = \text{int}\{(-\infty, 3]\} = (-\infty, 3)$

berarti $D(T)$ memuat titik interior. Karena $x = 4 \notin \text{int}(D(T))$ maka

$x = 4$ adalah titik batas $D(T)$. Berdasarkan Teorema 2.6.5, terdapat

supporting hyperplane pada $(\overline{\text{conv}D(T)})$ di $x = 4$, yaitu terdapat

$c^* \neq 0 \in X^*$. Misal $x_1 = 1$ sedemikian sehingga untuk setiap $x_1 = 1 \in D(T)$,

berlaku

$$\langle x-1, c^* \rangle \geq 0$$

Misalkan $x^* \in T(x)$. Dengan menggunakan kemonotonan pada T , maka untuk setiap $\lambda \geq 0, x^* + \lambda c^*$ berlaku

$$\begin{aligned} \langle u-x, 1-(x^* + \lambda c^*) \rangle &= \langle 1-x, 1-x^* \rangle + \langle 1-x, -\lambda c^* \rangle \\ &= \langle 1-x, 1-x^* \rangle - \lambda \langle x-1, c^* \rangle \\ &= \langle 1-x, 1-x^* \rangle + \lambda \langle 1-x, c^* \rangle \end{aligned}$$

Untuk setiap $x_1 \in D(T)$ dan $u^* \in T(u)$. Karena *set-valued* T monoton maksimal, maka menurut Teorema 3.8, $x^* + \lambda c^* \in T(x)$. Akibatnya himpunan $T(x)$ memuat separuh garis yaitu himpunan

$$\{x^* + \lambda c^* : \lambda \geq 0\}.$$

■

Teorema 3.13

Misalkan *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal. Andaikan ada subset $S \subset D(T)$ dan subset $A \subset X^*$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$,

$T(x) \cap A \neq \emptyset$ dan salah satu dari kedua kondisi tersebut terpenuhi:

- (i) $\text{int}(\bar{S}) \neq \emptyset$,
- (ii) $\text{int}(\overline{\text{conv } S}) \neq \emptyset$ dan $\sup_{x \in S} \sup_{x^* \in A} |\langle x, x^* \rangle| < \infty$

Maka

- (i) Himpunan $\text{int}(D(T))$ tidak kosong, terbuka, dan konveks

(ii) Himpunan $\overline{D(T)}$ tidak kosong, tertutup, dan konveks

(iii) *Set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam $\text{int}(D(T))$ dan tidak terbatas lokal di batas $D(T)$ (Rockafellar, 1968).

Bukti:

Pilih himpunan $S \subset D(T)$ dan himpunan terbatas $A \subset X^*$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$, $T(x) \cap A \neq \emptyset$ dan kondisi (i) terpenuhi. Jika $\text{int}(\overline{S}) \neq \emptyset$, maka $\text{int}(\overline{\text{conv} S}) \neq \emptyset$. jika himpunan A dan S terbatas maka

$$\sup_{x \in S} \sup_{x^* \in A} |\langle x, x^* \rangle| < \infty$$

Sehingga kondisi (ii) terpenuhi. Pembuktian selanjutnya diasumsikan kondisi (ii) terpenuhi. Karena $\text{int}(\overline{\text{conv} S}) \neq \emptyset$ maka himpunan $\text{int}(D(T)) \neq \emptyset$ dan $\text{int}(\overline{\text{conv} S}) \neq \emptyset$.

Menurut Lemma 2.5.3, himpunan $\text{int}(D(T))$ terbuka. Selanjutnya akan ditunjukkan himpunan $\text{int}(D(T))$ konveks. Untuk menunjukkan $\text{int}(D(T))$ adalah himpunan konveks, cukup ditunjukkan bahwa

$$\text{int}(D(T)) = \text{int}(\overline{\text{conv} D(T)}) \neq \emptyset,$$

$$\text{yaitu } \text{int}(D(T)) \subset \text{int}(\overline{\text{conv} D(T)}) \neq \emptyset \text{ dan } \text{int}(D(T)) \supset \text{int}(\overline{\text{conv} D(T)}).$$

Pertama akan ditunjukkan bahwa $\text{int}(D(T)) \subset \text{int}(\overline{\text{conv} D(T)})$. Tentukan

sembarang $x \in \text{int}(\overline{\text{conv} D(T)})$. Karena himpunan $(\overline{\text{conv} D(T)})$ adalah

himpunan konveks terkecil yang memuat $D(T)$ maka

$x \in \text{int}(\overline{\text{conv}D(T)})$. Karena x adalah sembarang elemen dalam

$\text{int}(D(T))$, maka setiap elemen dalam $\text{int}(D(T))$ merupakan elemen

dari $\text{int}(\overline{\text{conv}D(T)})$, akibatnya

$$\text{int}(D(T)) \subset \text{int}(\overline{\text{conv}D(T)}).$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\text{int}(D(T)) \supset \text{int}(\overline{\text{conv}D(T)})$.

Dalam hal ini akan ditunjukkan juga bahwa *set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam $\text{int}(D(T))$. Misalkan \hat{x} adalah titik $\text{int}(\overline{\text{conv}D(T)})$.

Akan ditunjukkan *set-valued* T terbatas lokal di \hat{x} dan $\hat{x} \in D(T)$, tetapi *set-valued* T tidak terbatas lokal di batas $D(T)$.

Jika kondisi (ii) terpenuhi yaitu $\text{int}(\overline{\text{conv}S}) \neq \emptyset$, maka himpunan $\text{int}(\overline{\text{conv}S})$ memuat suatu elemen. Tentukan sembarang

$$\hat{x} \in \text{int}(\overline{\text{conv}S}) \quad (3.14)$$

Akan ditunjukkan *set-valued* T terbatas lokal di \hat{x} dan $\hat{x} \in D(T)$.

Misalkan B adalah himpunan terbatas subset X^* sedemikian sehingga untuk setiap $u \in X$, $T(u) \cap B \neq \emptyset$ dan untuk setiap $x^* \in X^*$ didefinisikan himpunan

$$T_B(x) = \{ \langle u - x, u^* - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall u \in X, \forall u^* \in T(u) \cap B \} \quad (3.15)$$

Selanjutnya, dengan Lemma 3.5 dan kemonotonan pada T , diperoleh bahwa untuk setiap $x \in D(F)$ berlaku

$$T(x) \subset T_B(x) \neq \emptyset \quad (3.16)$$

Dari persamaan 3.15 diperoleh $T_B(x)$ adalah himpunan tertutup dalam X^* .

Untuk menunjukkan *set-valued* T terbatas lokal di \hat{x} , didefinisikan fungsi $T_B : x \rightarrow T_B(x)$ pada kasus dimana $B = A$. Pilih persekitaran V yang konveks pada X sedemikian sehingga

$$\hat{x} + 2V \subset \overline{\text{conv}S} \quad (3.17)$$

Karena untuk setiap pemilihan persekitaran V adalah himpunan konveks.

Sehingga $\hat{x} + 2V$ adalah himpunan konveks. Misalkan

$$\mu = \sup_{x \in S} \sup_{u^* \in A} |\langle x, u^* \rangle| < \infty \quad (3.18)$$

Dan untuk setiap $u^* \in A$, didefinisikan

$$\wp = \{x \in X : |x, u^*| \leq \mu\}$$

\wp adalah himpunan tertutup, konveks dan memuat S . Sehingga

himpunan \wp memuat $\overline{\text{conv}S}$. Selanjutnya dari (3.18) diperoleh bahwa

untuk setiap $x \in \overline{\text{conv}S}$ dan setiap $u^* \in A$ berlaku:

$$|\langle x, u^* \rangle| \leq \mu \quad (3.19)$$

Pilih $x \in (\hat{x} + V)$ dan $x^* \in T_A(x)$. Dari (3.17) dan (3.19) diperoleh bahwa

untuk setiap $u \in S$ dan $u^* \in T(u) \cap A$ berlaku:

$$\langle u-x, x^* \rangle \leq \langle u-x, u^* \rangle \leq |(u, u^*)| + |(x, x^*)| \leq 2\mu$$

Selanjutnya

$$S \subset \{u \in X : \langle u-x, x^* \rangle \leq 2\mu\} \quad (3.20)$$

Sehingga dari (3.17) dan (3.20) diperoleh

$$\hat{x}+V \subset \hat{x}+2V \subset cl(conv S) \subset \{u \in X : \langle u-x, x^* \rangle \leq 2\mu\}$$

Oleh karena itu untuk setiap $v \in V$ berlaku $\langle v, x^* \rangle \leq 2\mu$ sedemikian

sehingga

$$x^* \in (2\mu+1)V^0$$

Dimana V^0 adalah kutub persekitaran di X yang merupakan himpunan terbatas subset X^* . Sehingga $(2\mu+1)V^0$ adalah himpunan terbatas subset X^* . Karena $x \in \hat{x}+V$ dan $x^* \in T_A(x)$, maka dari (3.16) diperoleh

$$\begin{aligned} T(\hat{x}+V) &= \cup \{T(x) : x \in (\hat{x}+V)\} \\ &\subset \cup \{T_A(x) : x \in (\hat{x}+V)\} \\ &\subset (2\mu+1)V^0 \end{aligned}$$

Karena himpunan $(2\mu+1)V^0$ terbatas, maka himpunan $T(\hat{x}+V)$ terbatas.

Sehingga *set-valued* T terbatas lokal di \hat{x} .

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\hat{x} \in D(T)$. Misalkan T_B adalah

koleksi semua himpunan $T_B(\hat{x})$, dimana B adalah himpunan terbatas

subset X^* yang memuat A . Untuk setiap himpunan B , himpunan $T_B(\hat{x})$

tidak kosong dan tertutup. Sehingga irisan (*interseksi*) himpunan-

himpunan dalam subkoleksi berhingga T_B adalah himpunan yang tidak kosong. Selanjutnya akan ditunjukkan irisan semua himpunan dalam koleksi T_B adalah himpunan yang tidak kosong. Karena B adalah himpunan terbatas subset X^* yang memuat A , maka untuk setiap himpunan B , himpunan $T_B(\hat{x})$ kompak (terbatas dan tertutup) dan termuat dalam $T_A(\hat{x})$. Sehingga irisan semua himpunan dalam koleksi T_B tidak kosong.

Misalkan \hat{x}^* adalah sembarang elemen dari irisan semua himpunan dalam koleksi T_B . Dari (3.15) diperoleh bahwa untuk setiap $u \in X$ dan setiap $u^* \in T(u)$ berlaku:

$$\langle u - \hat{x}, u^* - \hat{x}^* \rangle \geq 0$$

Karena *set-valued* T monoton maksimal, maka menurut Teorema 3.7

$\hat{x}^* \in T(\hat{x})$. Karena $T(\hat{x}) \neq \emptyset$ dan $\hat{x}^* \in T(\hat{x})$ maka $\hat{x} \in D(T)$. Karena \hat{x} adalah sembarang elemen dalam $\text{int}(\overline{\text{conv}S})$, maka $\text{int}(\overline{\text{conv}S}) \subset D(T)$.

Karena \hat{x} adalah titik interior $(\overline{\text{conv}S})$, maka $\text{int}(\overline{\text{conv}S}) \subset \text{int} D(T)$.

Dengan memanfaatkan pembuktian di atas, ditentukan sembarang $\hat{x} \in \text{int}(\overline{\text{conv}D(T)})$. Akan ditunjukkan *set-valued* T terbatas lokal di \hat{x} dan

$\hat{x} \in \text{int}(D(T))$. Jika $\hat{x} \in \text{int}(\overline{\text{conv}S}) \subset \text{int}(\overline{\text{conv}D(T)})$, maka menurut

(3.14) telah dibuktikan. Selanjutnya jika $\hat{x} \in \text{int}(\overline{\text{conv}D(T)})$, untuk

$(\overline{\text{conv}S})$, akan dikonstruksi himpunan himpunan $S' \in D(T)$ dan

himpunan terbatas $A' \subset X^*$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S'$

berlaku $T(x) \cap A' \neq \emptyset$ dan kondisi (ii) terpenuhi. Sehingga dapat

ditentukan sembarang

$$\hat{x} \in \text{int}(\overline{\text{conv}S'}) \quad (3.21)$$

Dari bukti sebelumnya, himpunan $D(T)$ memuat $\text{int}(\overline{\text{conv}S})$, yaitu

himpunan tidak kosong, terbuka dan konveks serta *set-valued* T terbatas

lokal di setiap titik dalam $\text{int}(\overline{\text{conv}S})$.

Dari hal tersebut dapat ditarik suatu perumuman, yaitu terdapat himpunan

yang tidak kosong, terbuka dan konveks $W \subset D(T)$ sedemikian sehingga

himpunan $T(W)$ terbatas.

Misalkan F adalah koleksi semua subset berhingga dari $D(T)$.

Didefinisikan himpunan

$$E = \bigcup_F \text{int}(\overline{\text{conv}(W \cup F)})$$

Maka himpunan E tidak kosong, terbuka, dan konveks serta himpunan \bar{E}

memuat $D(T)$, sehingga

$$\text{int}(\overline{\text{conv}D(T)}) \subset \text{int}(\bar{E}) = E$$

Dengan demikian $\hat{x} \in E$. Selanjutnya terdapat elemen-elemen x_1, x_2, \dots, x_n

dalam $D(T)$ sedemikian sehingga

$$\hat{x} \in \text{int}(\text{conv}(W \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\})) \quad (3.22)$$

Jika untuk $i = 1, 2, \dots, n$, dipilih sembarang $x_i^* \in T(x_i)$ sedemikian

sehingga

$$A' = T(W) \cup \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

Maka himpunan A' terbatas. Karena himpunan W konveks dan memenuhi (3.22) maka terdapat $x_0 \in W$ sedemikian sehingga untuk setiap persekitaran U pada x_0

$$\hat{x} \in \text{int}(\text{conv}(U \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}))$$

Diberikan persekitaran U pada x_0 sedemikian U termuat dalam himpunan W sedemikian sehingga

$$S' = U \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset D(T).$$

Maka (3.21) terpenuhi dan untuk setiap $x \in S'$, $T(x) \cap A' \neq \emptyset$. Karena

$S' \subset D(T)$ dan A' adalah himpunan terbatas subset X^* , sedemikian

sehingga untuk setiap $x \in S'$, $T(x) \cap A' \neq \emptyset$ serta $\text{int}(\overline{\text{conv} S'}) \neq \emptyset$, maka

dengan teknik pembuktian sebelumnya *set-valued* T terbatas lokal di \hat{x}

dan $\hat{x} \in \text{int}(\overline{\text{conv} D(T)})$. Karena \hat{x} adalah sembarang elemen dalam

$\text{int}(\overline{\text{conv} D(T)})$ dan \hat{x} juga elemen dalam $\text{int} D(T)$ maka

$$\text{int} D(T) \supset \text{int}(\overline{\text{conv} D(T)}).$$

Dengan demikian himpunan $\text{int } D(T)$ konveks dan *set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam $\text{int } D(T)$. Selanjutnya karena himpunan $\text{int } D(T)$ konveks, maka himpunan

$$\overline{D(T)} = \overline{\text{int}(D(T))} = \overline{\text{int}(\text{conv}D(T))}$$

Adalah himpunan tidak kosong, tertutup dan konveks.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *set-valued* T tidak terbatas lokal di batas $D(T)$. Misalkan y titik pada batas $D(T)$. Andaikan *set-valued* T terbatas lokal di y , yaitu terdapat U adalah persekitaran pada y sedemikian sehingga himpunan $T(U)$ terbatas. Selanjutnya akan ditunjukkan kontradiksi dengan pernyataan. Jika $B = \overline{T(U)}$, maka himpunan B kompak (terbatas dan tertutup). Berdasarkan Lemma 3.10 himpunan $T^+(B)$ tertutup sehingga

$$D(T) \cap U \subset T^+(B) \subset D(T)$$

Dan $y \in D(T)$. Karena y adalah titik batas $D(T)$ maka $y \notin \text{int}(D(T))$.

Berdasarkan pembuktian sebelumnya,

$$\text{int}(D(T)) = \text{int}(\text{conv}D(T)) \neq \emptyset$$

Karena himpunan $\text{int}(D(T))$ dan $\overline{D(T)}$ konveks, maka himpunan $D(T)$ konveks. Berdasarkan Lemma 3.11 himpunan $T(y)$ memuat paling sedikit satu separuh garis. Akibatnya, himpunan $T(y)$ tidak terbatas. Di lain sisi, karena $T(y) \subset T(U)$ dan himpunan $T(U)$ terbatas, maka

haruslah himpunan $T(y)$ terbatas. Sehingga y bukan titik batas $D(T)$.

Karena $y \in D(T)$ dan bukan titik batas maka $y \in \text{int}(D(T))$. Hal tersebut kontradiksi dengan y adalah titik batas $D(T)$. Dengan demikian, pengandaian harus diingkari. ■

Akibat 3.14

Misalkan $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal. Jika terdapat $x \in \text{int}(\overline{D(T)})$ sedemikian sehingga *set-valued* T terbatas lokal di x , maka kesimpulan dari Teorema 3.15 terpenuhi (Rockafellar, 1968).

Bukti:

Misalkan $x \in \text{int}(\overline{D(T)})$ dan U persekitaran di x sedemikian sehingga $U \subset D(T)$ dan himpunan $T(U)$ terbatas subset X^* . Jika $S = U \cap D(T)$ dan $A = T(U)$, maka kesimpulan Teorema 3.15 terpenuhi. ■

Contoh 3.15

Misalkan $T : X \rightarrow X^*$ dimana $X = D(T) = [0, 5]$ monoton maksimal didefinisikan dengan

$$T(x) = x^2 + 1 \text{ dengan } 0 \leq x \leq 5$$

$X = D(T)$	0	1	2	3	4	5
------------	---	---	---	---	---	---

$X^* = R(T)$	1	2	5	10	17	26
--------------	---	---	---	----	----	----

Misalkan $x = (0, 5) \in \text{int}(\overline{D(T)})$ dan $U = [0, 5]$ persekitaran di x

sedemikian sehingga $U \subset D(T)$ dan himpunan $T(U)$ terbatas subset X^* .

Jika $S = U \cap D(T)$ dan $A = T(U)$, maka kesimpulan Teorema 3.13 terpenuhi.

Akibat 3.16

Misalkan *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton (tidak harus maksimal) dan himpunan $C \subset \overline{D(T)}$ terbuka. Jika *set-valued* T terbatas lokal di beberapa titik dalam C , maka *set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam C (Rockafellar, 1968).

Bukti:

Misalkan *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton dan himpunan $B \subset X^*$ terbatas sedemikian sehingga untuk setiap $x \in D(T)$, $T(x) \cap B \neq \emptyset$. Berdasarkan

Lemma 3.1, dapat dikonstruksi fungsi *set-valued* \hat{T} dari *set-valued* T

sedemikian sehingga $Gr(\hat{T}) \supset Gr(T)$. Dengan demikian, grafik $Gr(\hat{T})$

dapat dikonstruksi menjadi grafik yang monoton maksimal, yaitu

$$Gr(\hat{T}) = \{(x, x^*) \in X \times X^* : \langle u - x, u^* - x^* \rangle \geq 0\}.$$

Jika grafik $Gr(\hat{T})$ monoton maksimal, maka *set-valued* \hat{T} monoton maksimal. Misalkan U adalah himpunan yang tidak kosong dan terbuka subset dari C sedemikian sehingga himpunan $T(U)$ terbatas subset X^* .

Jika *set-valued* \hat{T} monoton maksimal $S = U \cap D(T)$ dan $A = T(U)$.

Maka syarat cukup Teorema 3.13 dipenuhi. Dengan demikian, *set-valued* \hat{T} terbatas lokal di setiap titik dalam $\text{int}(\overline{D(\hat{T})})$, karena $C \subset \text{int}(\overline{D(T)})$, maka *set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam C . ■

Teorema 3.17

Jika *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal dan himpunan $\text{int}(\text{conv}D(T)) \neq \emptyset$

Maka kesimpulan Teorema 3.13 terpenuhi (Rockafellar, 1968).

Bukti:

Misalkan $C = \text{int}(\text{conv}D(T)) \neq \emptyset$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan

$$S_n = \{x \in D(T) : \|x\| \leq n \text{ dan } x^* \in T(x) \text{ sehingga } \|x^*\| \leq n\}.$$

Jika

$$D(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

Maka

$$C \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{conv}(S_n) \quad (3.23)$$

Karena himpunan C memenuhi (3.23), maka himpunan C tidak kosong, terbuka dan konveks subset ruang Banach. Sehingga untuk beberapa $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{int}(\overline{\text{conv}S_n}) \neq \emptyset$$

Jika $S = S_n$ dan $A = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq n\}$, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\text{int}(\overline{\text{conv}S_n}) \neq \emptyset$, maka syarat cukup Teorema 3.13 terpenuhi. Sehingga kesimpulan Teorema 3.13 terpenuhi. ■

Akibat 3.18

Misalkan *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal dan himpunan $D(T)$ konveks. Jika $x \in D(T)$ dan *set-valued* T terbatas lokal di x , maka $x \in \text{int}(D(T))$ (Rockafellar, 1968).

Bukti:

Misalkan *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal dan himpunan $D(T)$ konveks. Karena himpunan $D(T)$ konveks dan

$$\text{int}(D(T)) \subset D(T) = \text{int}(\overline{\text{conv}(D(T))}).$$

Maka himpunan $\text{int}(D(T))$ konveks. Jika $x \in D(T)$ dan *set-valued* T terbatas lokal di x , maka

terdapat persekitaran U pada x sehingga himpunan $T(U)$ terbatas. Pilih

himpunan terbuka $W \subset U$, maka himpunan $T(W)$ terbatas. Karena

$W \neq \emptyset$ dan $W \subset \text{int}(D(T))$, maka $\text{int}(D(T)) \neq \emptyset$. Sehingga syarat cukup

Teorema 3.17 terpenuhi. Menurut Teorema 3.17, *set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam $\text{int}(D(T))$ dan tidak terbatas lokal di batas $D(T)$. Di samping itu menurut bukti Teorema 3.13 $x \in \text{int}(D(T))$.

Akibatnya jika *set-valued* T terbatas lokal di $x \in D(T)$, maka $x \in \text{int}(D(T))$. ■

Akibat 3.19

Misalkan *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal dan himpunan

$$\text{int}(\text{conv}(D(T))) \neq \emptyset$$

$x \in \text{int}(D(T))$ jika dan hanya jika $x \in D(T)$ dan terdapat $L < \infty$, sedemikian sehingga untuk setiap $x^* \in T(x)$, $\|x^*\| \leq L$ (Rockafellar, 1968).

Bukti:

$\Rightarrow x \in \text{int}(D(T))$, maka $x \in D(T)$. Berdasarkan Teorema 3.17, untuk setiap $x \in \text{int}(D(T))$, terdapat persekitaran U pada x sedemikian sehingga himpunan $T(U)$ terbatas. karena $T(x) \subset T(U)$ dan himpunan $T(U)$ terbatas, maka himpunan $T(x)$, maka himpunan $T(x)$ terbatas.

Sehingga terdapat $L < \infty$ sedemikian sehingga untuk setiap

$$x^* \in T(x), \|x^*\| \leq L.$$

\Rightarrow Misalkan $x \in D(T)$ dan terdapat $L < \infty$ sedemikian sehingga untuk setiap $x^* \in T(x), \|x^*\| \leq L$. Dengan demikian, *set-valued* T terbatas lokal di x . Berdasarkan Teorema 3.17 dan Akibat 3.19, $x \in \text{int}(D(T))$.

Teorema 3.20

Jika *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal, maka untuk setiap $x \in D(T)$, himpunan $T(x)$ tertutup dan konveks. Dengan kata lain *set-valued* T tertutup dalam X , sehingga grafik $Gr(T)$ tertutup dalam $X \times X^*$ (Borges, 1976).

Bukti:

Tentukan sembarang $x \in D(T)$. Misalkan $F = \{G : G \text{ set-valued yang monoton dan relatif sama pada } D(T)\}$, dan $F_x = \{G : G \subset F \text{ terdefinisi pada } x\}$. Misalkan barisan $\{x_n^*\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T(x)$ sedemikian sehingga x_n^* konvergen ke x^* . Akan ditunjukkan $x^* \in T(x)$. Karena koleksi F_x memuat semua *set-valued* yang monoton dan terdefinisi pada x , maka terdapat $G \in F_x$ sedemikian sehingga $x^* \in G(x)$. Karena *set-valued* T monoton maksimal, maka $G(x) \subset T(x)$. Karena $x^* \in G(x)$ dan $G(x) \subset T(x)$, maka $x^* \in T(x)$. Menurut Lemma 2.5.5, himpunan $T(x)$ tertutup.

Karena untuk setiap $x \in D(T)$, *set-valued* $T(x)$ tertutup, maka menurut Definisi 2.7.5 *set-valued* T tertutup dalam X^* . Karena *set-valued* T tertutup dalam X^* , maka menurut Lemma 2.7.6 grafik $Gr(T)$ tertutup dalam $X \times X^*$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x \in D(T)$, himpunan $T(x)$ konveks. Tentukan sembarang $x \in D(T)$ dan sembarang $x^*, z^* \in T(x)$. Misalkan $0 \leq \lambda \leq 1$. Akan ditunjukkan

$\lambda x^* + (1-\lambda)z^* \in T(x)$ tentukan sembarang $y \in D(T)$ dan sembarang $y^* \in T(x)$. Jika $\lambda = 0$ dan $\lambda = 1$, maka $z^* \in T(x)$ atau $x^* \in T(x)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan untuk $\lambda \neq 0$ dan $\lambda \neq 1$. Karena *set-valued* T monoton maka

$$\langle x-y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \text{ dan } \langle x-y, z^* - y^* \rangle \geq 0$$

Karena $\lambda \geq 0$ dan $0 < \lambda < 1$, maka

$$\lambda \langle x-y, x^* - y^* \rangle \geq 0 \text{ dan } (1-\lambda) \langle x-y, z^* - y^* \rangle \geq 0$$

atau

$$\langle x-y, \lambda x^* - \lambda y^* \rangle \geq 0 \text{ dan } \langle x-y, (1-\lambda)z^* - (1-\lambda)y^* \rangle \geq 0$$

sehingga

$$\langle x-y, \lambda x^* - \lambda y^* \rangle + \langle x-y, (1-\lambda)z^* - (1-\lambda)y^* \rangle \geq 0$$

Berdasarkan sifat dari *inner product* diperoleh

$$\langle x-y, \lambda x^* - \lambda y^* + (1-\lambda)z^* - (1-\lambda)y^* \rangle \geq 0$$

Dengan demikian diperoleh

$$\langle x - y, \lambda x^* - \lambda y^* + (1 - \lambda) z^* - y^* \rangle \geq 0$$

Karena *set-valued* T monoton maksimal, maka menurut Teorema 3.10,

$$\lambda x^* + (1 - \lambda) z^* \in T(x).$$

■

Teorema 3.21

Jika *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal dan $\text{int}(\text{conv}(D(T))) \neq \emptyset$, maka untuk setiap $x \in \text{int}(D(T))$. Himpunan $T(x)$ kompak. Jika x titik batas $D(T)$, maka himpunan $T(x)$ tidak kompak (Rockafellar, 1968).

Bukti:

Menurut Teorema 3.13 dan 3.17, untuk setiap $x \in \text{int}(D(T))$ terdapat persekitaran U pada x sedemikian sehingga himpunan $T(U)$ terbatas.

Karena $x \in U$ dan $T(x) \subset T(U)$, maka himpunan $T(x)$ terbatas.

Selanjutnya dengan Teorema 3.20, untuk setiap $x \in D(T)$, himpunan

$T(x)$ tertutup. Akibatnya, untuk setiap $x \in \text{int}(D(T))$, himpunan $T(x)$

tertutup. Karena himpunan $T(x)$ tertutup dan terbatas, maka menurut

Teorema 2.5.10, himpunan $T(x)$ kompak. Misalkan x titik batas $D(T)$.

Menurut Lemma 3.19 himpunan $T(x)$ memuat paling sedikit satu separuh

garis, sehingga menurut Teorema 3.15, himpunan $T(x)$ tidak terbatas.

Karena himpunan $T(x)$ tertutup tapi tidak terbatas maka himpunan $T(x)$ tidak kompak.

Berdasarkan teorema-teorema di atas, jika *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal, himpunan $S \subset D(T)$ konveks, sedemikian sehingga $\text{int}(\overline{S}) \neq \emptyset$, dan himpunan $A \subset X^*$ terbatas sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S, T(x) \cap A \neq \emptyset$, maka

1. *Set-valued* T monoton.
2. Himpunan $\text{int}(D(T))$ dan $\overline{D(T)}$ konveks.
3. *Set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam $\text{int}(D(T))$ tetapi tidak terbatas lokal di batas $D(T)$.
4. Untuk setiap $x \in D(T)$, himpunan $T(x)$ tertutup dan konveks. Dengan kata lain, *set-valued* T tertutup dalam X^* , sehingga grafik $Gr(T)$ tertutup dalam $X \times X^*$.
5. Untuk setiap $x \in \text{int}(D(T))$, himpunan $T(x)$ kompak. Tetapi himpunan $T(x)$ tidak kompak di batas $D(T)$.

Contoh 3.22

Diberikan *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ dengan $D(T) = [-1, 1]$ sebagai berikut

$$T(x) = \begin{cases} [1, \infty), & x = 1 \\ x^3, & -1 < x < 1 \\ (-\infty, -1], & x = -1 \end{cases}$$

Berdasarkan Contoh 2.7.14, *set-valued* T monoton maksimal.

Selanjutnya, *set-valued* T akan diselidiki karakteristiknya dengan

menggunakan teorema-teorema di atas. Karena himpunan

$\text{int}(\text{conv}(D(T))) \neq \emptyset$, maka menurut Teorema 3.15 dan 3.19, himpunan

$$\text{int}(D(T)) = \text{int}(\text{conv}(D(T))) = \text{int}\{[-1,1]\} = (-1,1)$$

Tidak kosong, terbuka dan konveks serta himpunan

$\overline{D(T)} = \overline{\text{int}(D(T))} = \overline{\text{int}(\text{conv}(D(T)))} = [-1,1]$ tidak kosong, tertutup dan

konveks. Di samping itu, *set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam

$(-1,1)$ dan tidak terbatas lokal di $x = -1$ dan $x = 1$. Menurut Teorema

3.17, untuk setiap $x \in [-1,1]$, himpunan $T(x)$ tertutup dan konveks.

Sehingga *set-valued* T dan grafik $G(T)$ tertutup. Berdasarkan Teorema

3.25, untuk setiap $x \in (-1,1)$, himpunan $T(x)$ kompak, tetapi untuk

$x = -1$ dan $x = 1$, himpunan $T(x)$ tertutup. Tetapi tidak terbatas,

sehingga $T(x)$ tidak kompak.

3.23 Kajian Agama Mengenai Karakteristik Golongan Manusia

Dari uraian pembahasan di atas mengenai karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang dual. Dalam subbab ini akan diulas sedikit mengenai integrasinya dalam bidang keagamaan. Sebagaimana yang telah dijelaskan pada Bab 2 tentang penggolongan manusia ke dalam tiga

kelompok, yaitu: mu'min, kafir, dan munafiq. Pada subbab ini penulis akan menguraikan tentang karakteristik dari ketiga kelompok tersebut.

1. Karakteristik orang mu'min

Setiap orang yang beriman kepada Allah dan rasul-Nya, tentulah memiliki karakteristik yang harus dimiliki. Dalam hal ini Allah berfirman dalam surat At-Taubah ayat 71.

Dalam ayat tersebut menerangkan sekaligus mengungkapkan ciri-ciri (karakteristik) orang beriman. Setiap manusia yang mengaku beriman, hendaknya merenungkan ayat di atas dan mengamalkannya. Dari ayat di atas terdapat lima kriteria mengenai karakteristik orang mukmin, yaitu:

a. Orang yang beriman adalah sebagai penolong bagi yang lainnya.

Artinya saling tolong-menolong dalam rangka menjalankan ibadah kepada Allah. Dengan adanya rasa tolong-menolong antara orang yang beriman maka akan mewujudkan suatu kebersamaan dalam menyelesaikan problematika kehidupan. Sehingga apapun kesulitan yang dihadapi umat, akan terasa mudah untuk diatasi.

Pada surat Al-Maidah ayat 2.

b. Orang beriman harus senantiasa mewujudkan amar ma'ruf dan nahi munkar dimanapun dan dalam kondisi apapun.

Karena sebenarnya perbuatan ini merupakan kekuatan yang efektif untuk memberantas kejahatan di muka bumi ini. Pada surat Ali-Imran ayat 110.

c. Orang beriman harus senantiasa mendirikan shalat.

Shalat adalah tiang agama dan merupakan amal perbuatan pertama yang akan dihisab di akhirat nanti. Baik buruknya orang beriman dapat diukur dengan kualitas shalatnya. Seperti dalam surat An-Nisa` ayat 103.

Shalat juga memiliki fungsi dalam kehidupan sehari-hari, yaitu: supaya kita senantiasa ingat kepada Allah dan shalat juga dapat mencegah diri dari perbuatan keji.

d. Orang beriman hendaklah senantiasa menunaikan zakat bagi keluarga dekat dan orang-orang yang tidak mampu

Kewajiban ini diperuntukkan bagi orang beriman yang mampu dalam artian orang memiliki harta yang lebih atau nishab. Pada surat Al-Ma`arij ayat 24-25.

e. Orang beriman harus senantiasa taat kepada Allah dan rasul-Nya.

Taat kepada Allah berarti percaya akan kebenaran Al-Qur`an dan mau mengamalkannya. Sedangkan taat kepada Rasul berarti percaya akan kebenaran berita yang dibawa Nabi Muhammad SAW dan mau mengamalkannya. Pada surat An-Nisa` ayat 59.

2.

arakteristik orang kafir

Di bawah ini ada beberapa ciri-ciri orang kafir, yaitu:

- a. **Kelompok yang paling benci kepada nabi Muhammad dan umatnya.** Pada surat Al-Baqarah ayat 105 dijelaskan bahwa disebut orang kafir karena tidak mempunyai sikap sopan santun kepada nabi Muhammad. Mereka mengatakan bahwa nabi itu orang jahat, padahal beliau adalah orang yang dipilih oleh Allah untuk menjadi Rosul dan di beri wahyu pula.
- b. **Kelompok yang pertama kali menyatakan bahwa Allah berputra.** Dalam surat Al-Baqarah ayat 116. Ayat di atas menerangkan bahwa bahwa Uzair adalah anak Allah. Kepercayaan semacam ini adalah kepercayaan yang tumbuh di kalangan penyembah berhala. Mereka berkeyakinan bahwa malaikat adalah putri Tuhan.
- c. **Senang mengejek dan mempermainkan agama islam.** Kriteria di atas dijelaskan dalam surat Al-Maidah ayat 58 bahwa seruan adzan dijadikan sasaran ejekan. Ejekan yang mereka lakukan ini menunjukkan kebodohan mereka didalam memahami esensi dari agama Allah. Karena kalimat-kalimat adzan merupakan pujian kepada Allah, Dzat yang berhak menerima pujian.
- d. **Karena kedzalimannya mempersulit hati mereka menerima kebenaran.** Dalam firman Allah surat Ali-Imran ayat 86-87

menerangkan bahwa sebenarnya orang kafir mengakui serta bersaksi bahwa beliau adalah Rasul yang benar. Tetapi ketika Rasul ini bangkit dari luar golongan mereka, mereka menjadi dengki atas kejadian ini. Karena itu mereka mengingkarinya dan kafir kepadanya, padahal dulu mereka mengakuinya.

e. Kelompok yang menjadikan agama sebagai alat kebohongan.

Dalam firman Allah surat Ali-Imran ayat 23-24 menerangkan bahwa golongan orang kafir sering berhakim kepada Nabi Shallallahu 'Alaihi wa Sallam dengan niat untuk memalukan keputusan-keputusan yang ditetapkan beliau kepada mereka. Tetapi kalau putusan itu di luar yang mereka inginkan, lalu mereka menolaknya dan pergi meninggalkan Nabi

3.

Karakteristik Manusia Munafik

Di bawah ini, dijumpai beberapa karakteristik manusia munafiq, antara lain:

a.

akut hatinya dan memandang orang mu'min tertipu agamanya

Orang munafiq yang menampakan keimanan dan menyembunyikan kekafiran karena lemah akidahnya, menyangka bahwa orang mu'min tertipu agamanya, mereka masuk agama Islam yang hakekatnya mereka tidak mampu.

b.

akut terbongkar nifaqnya dan memperolokkan Allah dan Rasul-Nya

Orang munafiq merasa ketakutan akan diturunkannya kepada orang mu'min suatu ayat yang mengungkap kemunafikan dalam hatinya, dan mereka memperolok-olokkan Allah dan Rasulnya, padahal Allah akan membukakan kemunafikan mereka.

c.

enyuruh munkar melarang ma'ruf, kikir, tidak tha'at, dan fasiq

Kemunafikan bagi laki-laki dan wanita sama saja dalam kenifakannya, mereka menyuruh orang lain kufur dan maksiat, melarang iman dan taat, menggenggamkan tangannya untuk infaq, mereka itu sempurna dalam keragu-raguan.

d.

emandang Allah dan Rasulnya penipu

Orang yang ada di dalam hatinya sifat nifaq, berkata bahwa Allah dan Rasulnya tidak menjanjikan kepada kami kecuali kebathilan dan tipu daya.

e. Ingkar janji dan dusta

Sebagian orang munafiq berjanji kepada Allah dan Rasulnya, jika diberi harta banyak akan sadaqah dan menjadi orang shalih. Tapi ketika Allah memberinya, mereka menjadi kikir dan

berpaling. Maka Allah menimbulkan kemunafiqkan pada hatinya, disebabkan mereka ingkar janji dan berdusta.

Dari beberapa karakteristik penggolongan umat manusia. Sebagai seorang muslim seharusnya memikirkan bahwa jika di kehidupan dunia mereka memiliki karakteristik seperti tersebut di atas, maka di akhirat seseorang akan mendapat balasan yang setimpal. Sesungguhnya hikmah adanya kebangkitan setelah mati adalah agar diberikan balasan kepada setiap jiwa manusia sesuai perbuatannya, dan jika bukan hal itu, niscaya penciptaan manusia menjadi sia-sia, tidak ada nilai, tidak ada hikmah, dan tidak ada perbedaan di dalam kehidupan ini di antara manusia dan binatang.

Oleh karenanya, kelak di akhirat manusia akan dipisahkan menurut golongannya. Orang beriman akan dibangkitkan dalam keadaan berjalan tegak di jalan yang lurus. Ia akan menuju surga yang penuh kebahagiaan. Sedangkan orang kafir akan dibangkitkan dengan berjalan di atas wajah mereka di neraka Jahannam dan untuk orang munafik mereka akan digiring ke neraka jahanam yang paling dasar. Seperti yang tertera dalam surat Ash-Shoffaat: 22-26.

Dalam surat Ali-Imron: 190-191 dijelaskan tentang konsep *Ulul Albab*. Seorang yang sudah dalam tingkatan *Ulul Albab* akan selalu memikirkan semua yang diciptakan oleh Allah SWT. Dalam keadaan bagaimanapun dan dimanapun. Ketika seorang mempelajari tentang matematika, kemampuan intelektual semata tidak cukup, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual.

Seorang yang memahami matematika dengan konsep *Ulul Albab* akan selalu memikirkan setiap perbuatan yang mereka lakukan dengan teliti.

Layaknya ilmu matematika yang disebut ilmu pasti, maka dia akan melakukan sesuatu dengan penuh kejujuran dan ketaatan.



BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Misalkan X^* adalah ruang Dual. Jika *set-valued* $T : X \rightarrow X^*$ monoton maksimal, maka karakteristik *set-valued* tersebut adalah sebagai berikut:

1. *Set-valued* T monoton
2. Himpunan $\text{int}(D(T)) = \overline{D(T)}$ konveks
3. *Set-valued* T terbatas lokal di setiap titik dalam $\text{int}(D(T))$, tetapi tidak terbatas lokal di batas $D(T)$.
4. Untuk setiap $x \in D(T)$, himpunan $T(x)$ tertutup dan konveks. Dengan kata lain *Set-valued* T tertutup dalam X^* sehingga grafik $Gr(T)$ tertutup dalam $X \times X^*$.
5. Untuk setiap $x \in \text{int}(D(T))$, himpunan $T(x)$ kompak. Tetapi himpunan $T(x)$ tidak kompak di batas $D(T)$.

4.2 Saran

Berdasarkan uraian di atas, disarankan untuk diadakan analisis lanjutan tentang karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang Banach.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysyahir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. UIN-Malang Press: Malang.
- Ahmad, Imtiaz. 2005. *Nasehat Untuk Akal Yang Dahaga*. Al-Rasheed Printer: Madinah.
- Al-Maraghi, Mustafa. 1989. *76 Karakter Yahudi Dalam Al-Qur'an*. CV Pustaka Mantiq: Solo
- Bartle, Robert G dan Donald R. Sherbert. 1994. *Introduction To Real Analisis*. Eastern Michigan University: New York.
- Borges, C. J. R. 1967. *A Study of Multivalued Function*. Pacific Journal Of Mathematics, vol. 23, no.3: 451-461.
- Bot, Radu Ioan, Csetnek, Erno Robert. *A New Condition For Maximal Monotonicity Via representative Functions*.
- Borwein, J.M dan J.D Vanderwerff. 2010. *Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples*. Chambridge University Press
- Giuseppe dan Ljubisa. 2008. *Boundedness In Topological Space*. 137-148
- Goffman, Casper dan George Pedrick. 1974. *First Course in Functional Analisis*. Department of Mathematics Purdue University: New Delhi.
- Heil, C. 2006. *Functional Analysis Lecture Note Chapter 3 Banach Space*. Diakses pada tanggal 23 November 2008
- Hutahaean, E. 1994. *Fungsi Riil*. Bandung: ITB
- Kartatos, A.G. 1997. *An Invariance Of Domain Result For Multi-valued Maximal Monotone Operators Whose Domains Do Not Necessarily Contain Any Open Set*. American Mathematical Society, vol. 125, no 5:1469-1478.
- Kreyszig, Erwin. 1978. *Introductory Functional Analysis With Applications*. Republic of Singapore: Canada.
- Kusumo, Adi Fajar. *Dimanakah Allah? (Dalam Tinjauan Secara Matematis)*. Tanggal 18 Oktober 1997
- Nachbar, J. *Compactness*. Diakses pada tanggal 23 Desember 2008.

- Pierre Aubin, J dan Roger. 1986. *Stabel Approximations of Set-Valued Maps*.
Lexenbug, Austria
- Phelp, R. R. 1993. *Lecture on Maximal Monotone Operator*. arXiv: 9302209v1: 1-30.
- Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. UIN-Malang Press: Malang.
- Rianto, Zaki. 2008. *Pengantar Analisis Real I*. Math.Web. ID
- Rockafellar, R. T. 1968. *Local Boundedness Of Nonlinier Monotone Operators*.
University of Washington. Seattle, Washington: 397-407
- Rosidin, Dedeng. 2006. *Karakteristik Manusia Munafik*. Uin Sunan Gunung Jati.
- Schutt, Carlsen. 2006. *Convex Geometry*.
- Van, Rene Hessel. 2006. *Dual spaces*.
- Zagrodny, Dariusz. 2008. *On Maximal Monotone Operators With Relatively Compact Range*. Czechoslovak Mathematical Journal: 105-116.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Choirun Nikmah
NIM : 06510003
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : “Karakteristik Fungsi *Set-Valued* Yang Monoton Maksimal
Di Ruang Dual”.
Pembimbing I : Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	27 Agustus 2010	Konsultasi Bab I & II	1.	
2	28 Agustus 2010	Konsultasi Keagamaan Bab I		2.
3	03 september 2010	Seminar proposal	3.	
4	09 November 2010	Konsultasi Bab II		4.
5	18 November 2010	Konsultasi Bab II	5.	
6	29 November 2010	Konsultasi Bab II & III		6.
7	10 Desember 2010	Konsultasi Bab III	7.	
8	16 Desember 2010	Konsultasi Bab II & III		8.
9	06 Januari 2011	Konsultasi Bab II, III	9.	
10	06 Januari 2011	Konsultasi keagamaan Bab I, II		10.
11	08 Januari 2011	Konsultasi Bab III	11.	
12	08 Januari 2011	Konsultasi keagamaan Bab I, II, III		12.
13	11 Januari 2011	Konsultasi bab II, III	13.	

14	11 Januari 2011	Konsultasi keagamaan Bab I, II, III	14.	
15	12 Januari 2011	Konsultasi Bab II		15.
16	13 Januari 2011	ACC Keseluruhan	16.	
17	13 Januari 2011	ACC Keagamaan		17.

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir M.Pd
NIP. 1975006 200312 1 001

