

SIFAT-SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM-2

SKRIPSI

**OLEH
LINAWATI
NIM. 10610092**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

SIFAT-SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM-2

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Linawati
NIM. 10610092**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

SIFAT-SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM-2

SKRIPSI

Oleh
Linawati
NIM. 10610092

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 08 Juni 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SIFAT-SIFAT RUANG HASIL KALI DALAM-2

SKRIPSI

Oleh
Linawati
NIM. 10610092

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama : Drs. H. Turmudi, M.Si

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Sekretaris Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Anggota Penguji : Fachrur Rozi, M.Si

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Linawati
NIM : 10610092
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul : Sifat-Sifat Ruang Hasil Kali Dalam-2

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 08 Juni 2015
Yang membuat pernyataan,

Linawati
NIM. 10610092

MOTO

Musuh yang paling berbahaya di atas dunia ini

adalah

penakut dan bimbang.

Teman yang paling setia,

hanyalah keberanian dan keyakinan yang teguh.

(Andrew Jackson)



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Orang tua tercinta (Bapak Suratman dan Ibu Lanjar)

Saudara tersayang (Kakak Sarno dan Adik Tri Nuryanto)

Orang yang selalu memberikan semangat, motivasi dan
inspirasi dalam menyelesaikan skripsi ini

Rhendra Hanung Fhebrianto, S.Kom

dan

Ibu Siti Khotijah dan Ayah Yudianto



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur ke hadirat Allah Swt. yang telah memberikan rahmat, karunia dan ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Sifat-Sifat Ruang Hasil Kali Dalam-2”** untuk memenuhi salah satu syarat dalam menempuh program Sarjana.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan berkat jasa-jasa, motivasi, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan penuh ketulusan dari lubuk hati yang paling dalam penulis sampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku dosen pembimbing I, yang telah banyak meluangkan waktu dan memberikan bimbingan, bantuan serta arahan kepada penulis sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II, yang bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan arahan bidang integrasi Sains dan al-Quran.

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
7. Kedua orang tua penulis yang selalu membimbing, mendidik, mengarahkan, dan mendoakan sehingga sampai terselesainya penulisan skripsi ini.
8. Saudara-saudara penulis kakak Sarno dan adik Tri Nuryanto, *syukron katsiron* atas bantuan, keceriaan, do'a dan motivasinya.
9. Rhendra Hanung Fhebrianto, S.Kom, yang selalu memberi motivasi kepada penulis dalam proses penulisan skripsi.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2010, terimakasih atas pengalaman serta kebersamaan yang diberikan selama ini.
11. Keluarga Besar Unit Kegiatan Mahasiswa Tae Kwon Do Indonesia Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terima kasih atas tempat persinggahannya yang nyaman, suka duka, pengalaman, semangat, dukungan serta kebersamaannya selama ini.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu dalam penulisan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat, tambahan ilmu dan dapat menjadi inspirasi kepada para pembaca *Amin Ya Rabbal Alamin*.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xi
ABSTRAK	xii
ABSTRACT	xiii
ملخص.....	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah.....	6
1.6 Metode Penelitian.....	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Vektor.....	8
2.2 Ruang Vektor.....	9
2.3 Norma (Panjang) Suatu Vektor.....	14
2.4 Ruang Hasil Kali Dalam.....	16
2.5 Norma pada Ruang Hasil Dalam.....	18
2.6 Norma-2.....	23
2.7 Kajian Vektor dalam Al-Quran.....	24
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Ruang Hasil Kali Dalam-2.....	26
3.2 Contoh-Contoh Ruang Hasil Kali Dalam-2.....	33
3.3 Perubahan Ruang Hasil Kali Dalam menjadi Ruang Hasil Kali Dalam-2.....	40
3.4 Kajian Keislaman tentang Ruang Hasil Kali Dalam-2.....	4

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 52
4.2 Saran 53

DARTAR PUSTAKA 54

RIWAYAT HIDUP



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Vektor \overrightarrow{AB}	9
Gambar 2.2 Vektor Terikat	10
Gambar 2.3 Vektor Bebas	10



ABSTRAK

Linawati. 2015. **Sifat-Sifat Ruang Hasil Kali Dalam-2**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata kunci : vektor, ruang hasil kali dalam, ruang hasil kali dalam-2

Dalam aljabar linier, suatu vektor x dan y pada ruang vektor K riil yang yang ditulis sebagai (x, y) disebut hasil kali dalam jika memenuhi (1) aksioma kesimetrisan, (2) aksioma penjumlahan, (3) aksioma kehomogenan, dan (4) aksioma kepositifan. Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam. Seperti halnya pada pembahasan ruang vektor, norma atau yang lainnya, ruang hasil kali dalam juga mempunyai bagian dari hasil kali dalam yang disebut ruang hasil kali dalam-2.

Penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk mendeskripsikan sifat atau aksioma yang menjadi perbedaan antara ruang hasil kali dalam dan ruang hasil kali dalam-2 yaitu dengan memaparkan dan menjelaskan definisi, membuktikan kebenaran teorema-teorema yang berlaku pada ruang hasil kali dalam-2.

Berdasarkan hasil pembahasan skripsi ini, hasil kali dalam-2 adalah fungsi $(\cdot, \cdot | \cdot): X \times X \times X \rightarrow K$ pada ruang vektor riil yang memenuhi lima aksioma, yaitu:

1. $(x, x | z) \geq 0$ dan $(x, x | z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier.
2. $(x, x | z) = (z, z | x)$.
3. $(y, x | z) = (x, y | z)$.
4. $(\alpha x, y | z) = \alpha(x, y | z)$ untuk semua skalar $\alpha \in K$.
5. $(x + x', y | z) = (x, y | z) + (x', y | z)$.

Dengan perkalian titik (x, y) adalah hasil kali dalam-2, maka vektor x dan y pada ruang vektor K riil tersebut juga memenuhi aksioma hasil kali dalam tetapi pada suatu ruang vektor dengan dimensi paling kecil 2. Jadi ruang hasil kali dalam-2 merupakan penjabaran dari ruang hasil kali dalam.

ABSTRACT

Linawati. 2015. **Characteristics of Inner Product Spaces-2**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Supervisor: (I) Hairur Rahman, M.Si. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

Keywords: vector, inner product space, inner product spaces-2

In linear algebra, a vector x and y in a real vector space K which are written as (x, y) is called the inner product if it satisfies (1) symmetry axiom, (2) the sum axiom, (3) homogeneity axiom and (4) positivity axiom. The vector space equipped with inner product is called an inner product space. As in the discussion of vector space, the norm or the other, inner product spaces also have part of the inner product namely an inner product spaces-2.

This study was conducted to describe the properties or axioms is the difference between the inner product spaces and inner product spaces-2 is to describe and explain the definition, prove the theorems that applied on the inner product spaces-2.

Based on the results of the discussion of this thesis, inner product spaces-2 is a function of $(\cdot, \cdot, \cdot): X \times X \times X \rightarrow K$ on a real vector space V that satisfies the following five axioms:

1. $(x, x|z) \geq 0$ and $(x, x|z) = 0$ iff x and z are linearly dependent.
2. $(x, x|z) = (z, z|x)$.
3. $(y, x|z) = (x, y|z)$.
4. $(\alpha x, y|z) = \alpha(x, y|z)$, for all scalars $\alpha \in K$.
5. $(x + \acute{x}, y|z) = (x, y|z) + (\acute{x}, y|z)$.

With the dot product (x, y) is the 2-inner product, then the vectors x and y in the real vector space K also satisfies of axioms inner product but in a vector space with the smallest dimension 2. So the inner product spaces-2 is a translation of an inner product space.

ملخص

ليناواني. ٢٠١٥. خصائص المنتج الداخلية ممنوع-٢. البحث الجامعي. الشعبة الرياضيات. كلية العلوم و التكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف:
(١) خيرارحمي، الماجستير (٢) فخرالرازي، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: ناقل، المساحة الداخلية المنتج، المنتج الداخلية ممنوع-٢

في الجبر الخطي، متجه x و y في فضاء ك ناقلات حقيقي التي يشا كتابتها (x, y) يسمى الجراء الداخلية إذا تظت : (١) بديهيات التماثل (٢) بديهيات البديهية (٣) بديهيات التجانس و (٤) بديهية الإيجابية، ثم يسمى مكافحة ناقلات الفضاء مزودة بالمنتج الداخلية مساحة منتج الداخلية. كما هو الحال في مناقشة مكافحة ناقلات الفضاء أو القاعدة أو غيرها، يكون الناتج الداخلي ممنوع أيضا جزءا من الناتج الداخلي هي منتجات الداخلية ممنوع-٢.

أجريت هذه الدراسة لوصف الخصائص أو البديهيات هو الفرق بين المساحات الداخلية المنتج والمنتج الداخلية ممنوع-٢ وصف وشرح التعريف، وإثبات النظريات التي تنطبق على المنتج الداخلية ممنوع-٢. استناداً إلى نتائج مناقشة هذه الأطروحة، المنتج الداخلية ممنوع-٢ هو دالة من (\cdot, \cdot) :
 $K \rightarrow X \times X \times X$ على مسافة المتجهات حقيقية الخامس يرضي البديهيات الخمسة التالية:

$$1. (x, x|z) = 0 \text{ و } (x, x|z) \geq 0 \text{ و } z \text{ تعتمد خطيا.}$$

$$2. (z, z|x) = (x, x|z).$$

$$3. (y, x|z) = (x, y|z).$$

$$4. \alpha (x, y|z) = (\alpha x, y|z) \text{ لجميع العددية } \alpha \in K.$$

$$5. (x, y|z) + (x', y|z) = (x, x', y|z).$$

مع المنتج دوت (x, y) هو منتج الداخلية-٢، ثم الناقلات x و y في مكافحة ناقلات الفضاء الحقيقية K يفى أيضا من البديهيات الداخلية المنتج ولكن في مكافحة ناقلات الفضاء مع البعد أصغر ٢. حتى المنتج الداخلية ممنوع-٢ ترجمة لمساحة المنتج الداخلية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta yang diciptakan oleh Allah ini penuh dengan keindahan dan keajaiban, karena memiliki kekayaan yang berlimpah. Semua yang ada di alam ini sudah tersusun dan terpola dengan rapi, sehingga tidak sulit bagi para Ilmuan terdahulu mempelajari pola dan susunan tersebut sehingga melahirkan rumusan matematis. Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang setimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79-80).

Aplikasi matematika dapat diamati dalam proses penyelesaian suatu permasalahan yang dimodelkan dalam konsep matematika. Dengan memperhatikan semesta pembicaranya, konsep tersebut akan lebih mudah diselesaikan dan dapat diambil suatu perkiraan yang mendekati suatu kesimpulan. Jika suatu permasalahan itu kompleks, maka dapat dibentuk sistem matematika. Sehingga aplikasi-aplikasi matematika seperti perkembangan pesat di bidang teknologi informasi dan komunikasi dewasa ini dilandasi oleh perkembangan matematika yang menitikberatkan pada perbedaan aspek-aspek teori. Dari sudut pandang adanya macam-macam aspek teori tersebut, ilmu matematika memperlebar cakupan pemahamannya pada beberapa cabang, seperti matematika analisis, statistik, dan pemrograman (Parzynski dan Zipse, 1982:149).

Analisis fungsional merupakan cabang dari analisis yang membahas ruang-ruang vektor berdimensi tak hingga dan pemetaan di antara ruang-ruang tersebut. Studi vektor di dalam analisis fungsional melibatkan topologi sehingga konsep kekontinuan dan kekonvergenan dapat dibicarakan. Ini yang membedakan dengan aljabar linier. Jadi dapat dirumuskan secara sederhana: aljabar linier dan topologi = analisis fungsional. Kata fungsional itu sendiri berarti pemetaan dari sebuah ruang vektor ke lapangannya. Objek-objek bahasan yang dikenal di dalam analisis fungsional meliputi ruang banach, ruang hilbert, dan operator-operator linier kontinu pada ruang-ruang tersebut. Salah satu bagian dari analisis fungsional adalah bagaimana memperluas teori ukuran, integral dan peluang ke ruang berdimensi tak hingga. Cabang matematika ini dikenal sebagai dimensi tak hingga.

Notasi vektor ternyata juga mempunyai kegunaan besar dalam bidang Fisika dan Matematika. Salah satu keuntungan vektor ialah memungkinkan penelitian masalah dalam ruang tanpa memakai sumbu-sumbu koordinat. Vektor dinyatakan oleh tanda panah di atas huruf atau huruf dicetak tebal.

Dalam Analisis Fungsional juga membahas tentang hasil kali dalam (*inner product*). Sebuah hasil kali dalam (*inner product*) pada ruang vektor riil V adalah fungsi yang mengasosiasikan bilangan riil (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dengan masing-masing pasangan vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} pada V sedemikian rupa sehingga aksioma-aksioma hasil kali dalam dipenuhi untuk semua skalar vektor $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ di V dan juga untuk semua skalar k . Ruang vektor riil dengan sebuah hasil kali dalam dinamakan ruang hasil kali dalam riil (*real product space*) (Anton, 1997:175).

Al-Quran dan al-Hadits yang merupakan tuntunan umat Islam dalam menjalankan roda kehidupan di dunia, dan sebagai maha sumber ilmu pengetahuan. Pada surat Alam Nasyrh/94: 5-8:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾ فَإِذَا فَرَغْتَ فَانصَبْ ﴿٧﴾ وَإِلَىٰ رَبِّكَ فَارْغَبْ ﴿٨﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain. Dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap” (QS. Alam Nasyrh/94:5-8).

Ayat lima dan enam dalam bahasa arab kata '*yusra*' yang artinya mudah (tanpa *alif laam*) maknanya kemudahan yang tiada terhingga, sementara kata '*al-usri*' yang artinya sulit (dengan *alif laam*) menunjukkan kesulitannya spesifik ke satu objek. Dan kata ini diulang sampai dua kali, yang dapat diambil makna bahwa Allah ingin memberi penekanan atau penegasan tentang janji-Nya ini, bahwa setiap ada kesulitan Allah memberikan kemudahan setelahnya, dan kemudahan yang tiada terhingga, satu, dua, sepuluh, 100,1000, dst...

Ayat tujuh kata '*faraghta*' berasal dari kata '*faragha*' yang artinya kosong. tapi kosong di sini ibarat kosongnya gelas yang sebelumnya terisi penuh. maknanya adalah kehidupan seorang mukmin adalah sebuah ritme perputaran waktu yang tak pernah putus akan aktivitas yang selalu membawa manfaat, dan aktivitas itu berlangsung secara simultan, terus-menerus tanpa putus, sehingga ketika selesai sebuah pekerjaan, tiada jeda untuk waktu yang terbuang sia-sia kecuali kembali melanjutkan pekerjaan lain.

Luar biasa tuntunan Allah terhadap produktivitas waktu seorang mukmin, sehingga tidak dibiarkan waktu yang terbuang sia-sia karena kata sebuah hadits “kemubadziran adalah temannya dengan syetan”. Kemudian Allah

menyandingkan janji akan ada kemudahan yang diberikan ketika kesulitan datang dengan anjuran untuk bekerja terus menerus (supaya manusia mau berusaha atau bekerja sungguh-sungguh tanpa putus dengan keyakinan bahwa Allah selalu memberi kemudahan).

Ayat delapan ketika manusia sudah mengerahkan segala ikhtiar, maka tawakal adalah puncak di atas segala ikhtiar. Hasilnya dikembalikan pada Allah, karena tugas seorang manusia hanyalah berusaha semampunya (Arnamer, 2012).

Hadits Nabi Muhammad Saw. menganjurkan kepada umatnya agar jangan berhenti untuk mencari ilmu, baik ilmu duniawi maupun ilmu akhirat yaitu (Azzam, 2010):

أَطْلُبِ الْعِلْمَ مِنَ الْمَهْدِ إِلَى اللَّحْدِ

”Carilah ilmu sejak dari buaian hingga ke liang lahat”.

Kewajiban mencari ilmu itu tidak memandang batasan usia, melainkan seumur hidup. Ada sebuah kata bijak mengatakan, ilmu tanpa agama buta, dan agama tanpa ilmu adalah lumpuh. Sama juga artinya bahwa kehidupan kognitif tanpa pendidikan karakter adalah buta. Hasilnya, karena buta tidak bisa berjalan. Berjalan pun dengan **asal nabrak**. Kalaupun berjalan dengan menggunakan tongkat akan berjalan dengan lambat. Sebaliknya, pengetahuan karakter tanpa pengetahuan kognitif, maka akan lumpuh sehingga mudah disetir, dimanfaatkan dan dikendalikan orang lain. Karena itu manusia dituntut untuk mencari ilmu sampai ke liang lahat.

Seperti halnya pada pembahasan ilmu aljabar ini berdasar penelitian P. K. Harikrishnan, P. Riyas, K. T. Ravindran (2011) dengan judul *Riesz Theorema In 2-Inner Product Spaces* dan H. Mazaheri1, R. Kazemi (2007) dengan judul *Some*

Results On 2-Inner Product Spaces. Dari penelitian yang sudah ada tersebut penulis ingin mengkaji lebih dalam sehingga dapat menemukan ilmu yang baru, dalam hal ini mengkaji lebih dalam tentang hasil kali dalam. Dan penulis memberi judul pada penelitian ini dengan judul *Sifat-Sifat Ruang Hasil Kali Dalam-2*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, penulis merumuskan masalah dalam penelitian skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat-sifat ruang hasil kali dalam-2?
2. Bagaimana perubahan sifat-sifat ruang hasil kali dalam menjadi ruang hasil kali dalam-2?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan sifat-sifat ruang hasil kali dalam-2.
2. Mendeskripsikan ruang hasil kali dalam menjadi ruang hasil kali dalam-2 dengan konsep yang menghubungkan antara keduanya.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari pembahasan masalah ini adalah sebagai berikut:

1. Manfaat bagi Penulis

Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari tentang ilmu aljabar terutama tentang ruang hasil kali dalam-2.

2. Manfaat bagi Instansi

Untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan Matematika untuk mata kuliah Analisis Fungsional dan Teori Operator tentang ruang hasil kali dalam-2.

3. Manfaat bagi Pembaca

Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang ruang hasil kali dalam-2.

1.5 Batasan Masalah

Agar kajian ini tidak terlalu luas pembahasannya, maka penulis membatasi masalah kajian ini adalah ruang hasil kali dalam-2 pada bilangan riil.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang penulis pakai untuk menyelesaikan masalah di atas adalah metode kepustakaan. Kegiatan penelitian hampir semuanya selalu bertolak dari ilmu pengetahuan yang sudah ada sebelumnya. Pada semua ilmu pengetahuan, ilmuwan selalu memulai penelitiannya dengan cara mengutip apa-apa yang sudah dikemukakan ahli lain. Peneliti memanfaatkan teori-teori yang ada di buku atau hasil penelitian untuk kepentingan penelitiannya (Hasan, 2002:45).

Adapun langkah-langkah yang ditempuh oleh penulis untuk menyelesaikan penelitian ini adalah:

1. Mendefinisikan ruang hasil kali dalam.
2. Pembuktian sifat-sifat ruang hasil kali dalam-2.
3. Menunjukkan perubahan sifat-sifat ruang hasil kali dalam menjadi ruang hasil kali dalam-2 dengan konsep yang menghubungkan antara keduanya.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan hasil penelitian ini dibagi menjadi empat bab dan setiap bab dibagi menjadi beberapa subbab. Materi pokok dari setiap bab adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Kajian pustaka

Kajian pustaka berisi tentang definisi dan teorema vektor, ruang vektor, norma, hasil kali dalam, norma pada ruang hasil kali dalam, norma-2 dan kajian vektor dalam al-Quran.

BAB III Pembahasan.

Pembahasan berisi tentang sifat-sifat ruang hasil kali dalam-2 dan pembuktiannya, contoh-contoh ruang hasil kali dalam-2, perubahan sifat-sifat ruang hasil kali dalam menjadi ruang hasil kali dalam-2, serta kajian keislaman tentang ruang hasil kali dalam-2.

BAB IV Penutup.

Penutup berisi tentang kesimpulan dari pembahasan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Vektor

Vektor dapat disajikan secara geometris sebagai ruas garis berarah atau panah dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi-3. Arah panah menentukan arah vektor, dan panjang panah menentukan besarnya. Ekor dari panah tersebut disebut titik pangkal vektor, dan ujung panah disebut titik ujung vektor. Vektor ditulis dengan huruf kecil tebal (misalnya, **a**, **k**, **v**, **w** dan **x**). Ketika berbicara vektor maka juga akan menyebut bilangan sebagai skalar. Semua skalar adalah bilangan riil dan dinyatakan dengan huruf kecil miring (misalnya, *a*, *k*, *v*, *w* dan *x*). Misalnya didefinisikan vektor **v** yang mempunyai titik pangkal **A** dan titik ujung **B**, maka dituliskan \overrightarrow{AB} (Anton, 2000:153-154).



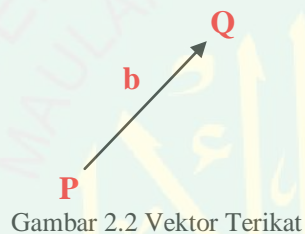
Gambar 2.1 Vektor \overrightarrow{AB}

Dua vektor dikatakan sama jika besar dan arahnya sama. Suatu vektor nol didefinisikan sebagai vektor yang mempunyai besaran 0. Vektor ini dinyatakan oleh **0**, dan dapat dilukiskan oleh segmen garis terurai **PP**, yaitu suatu titik tunggal. Arahnya tak menentu dan dapat dipikirkan bahwa **0** memiliki semua arah, sehingga **0** sejajar dan tegak lurus pula pada suatu vektor **a** (Soemartojo, 1988:2).

Vektor **a** yang dilukiskan oleh **PQ** tidak berubah jika **PQ** bergerak ke posisi baru yang sejajar dengan arah semula dan tetap searah. Vektor **a** dapat dinyatakan oleh tak terhingga banyak garis segmen garis yang sama panjang dan

searah tanpa mempunyai letak tertentu. Maka \mathbf{a} disebut vektor bebas (Soemartojo, 1988:2).

Dalam mekanika dan geometri diperlukan notasi khusus untuk vektor terikat dan vektor bebas. Suatu vektor terikat terdiri atas suatu vektor dan sebuah titik, dan dilukiskan oleh sebuah penggal garis tertentu \mathbf{PQ} dengan titik \mathbf{P} sebagai titik di mana vektor tersebut dimulai. Suatu vektor bebas terdiri atas vektor dan sebuah garis yang sejajar atau berimpit dengan vektor tersebut dan merupakan garis paduan (*line of action*) (Soemartojo, 1988:2).



2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1 Ruang Vektor (Suminto, 2000a:268)

Diberikan V sebarang himpunan tak-kosong dari objek dimana dua operasi didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Yang dimaksud dengan penjumlahan adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap pasangan objek \mathbf{u} dan \mathbf{v} dalam V dengan suatu objek (x, y) yang disebut sebagai jumlah \mathbf{u} dan \mathbf{v} , yang dimaksud dengan perkalian skalar adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap skalar k dan setiap objek \mathbf{u} dalam V dengan objek $k\mathbf{u}$, yang disebut perkalian skalar dari \mathbf{u} dengan k . Jika aksioma berikut ini dipenuhi oleh semua objek \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} dalam V dan semua skalar k dan l , maka V disebut sebagai ruang vektor dan objek dalam V disebut sebagai vektor.

1. Untuk setiap \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah objek-objek dalam V , maka $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ benda dalam V
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ {komutatif}
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ {asosiatif penjumlahan}
4. Ada suatu objek $\mathbf{0}$ dalam V , yang disebut suatu vektor nol untuk V , sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$, untuk semua \mathbf{u} dalam V .
5. Untuk setiap \mathbf{u} dalam V , ada suatu objek $-\mathbf{u}$ dalam V , yang disebut negatif dari \mathbf{u} sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. Jika k adalah sebarang skalar dan \mathbf{u} adalah sebarang objek dalam V , maka $k\mathbf{u}$ adalah objek dalam V .
7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ {distributif kiri}
8. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ {distributif kanan}
9. $(kl)\mathbf{u} = k(l\mathbf{u})$ {asosiatif perkalian}
10. $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

Contoh 2.2.2

Tunjukkan bahwa himpunan V dari semua matriks 2×2 dengan anggota bilangan riil merupakan suatu ruang vektor jika penjumlahan vektor didefinisikan sebagai penjumlahan matriks dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar dengan matriks.

Misalkan $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ adalah

elemen objek V .

Solusi:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah suatu objek dalam V , yaitu harus ditunjukkan bahwa $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah suatu matriks 2×2 . Itu terbukti dari definisi penjumlahan matriks, karena

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{11} + u_{11} & v_{12} + u_{12} \\ v_{21} + u_{21} & v_{22} + u_{22} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Jadi terbukti $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ adalah suatu objek dalam V .

$$\begin{aligned}2. \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{11} + u_{11} & v_{12} + u_{12} \\ v_{21} + u_{21} & v_{22} + u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}\end{aligned}$$

Jadi terbukti $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ {komutatif}

$$\begin{aligned}3. \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} + w_{11} & v_{12} + w_{12} \\ v_{21} + w_{21} & v_{22} + w_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} + w_{11} & u_{12} + v_{12} + w_{12} \\ u_{21} + v_{21} + w_{21} & u_{22} + v_{22} + w_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}\end{aligned}$$

Jadi terbukti $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$ {assosiatif penjumlahan}

4. Didefinisikan objek $\mathbf{0}$ dalam V

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\mathbf{0} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Demikian pula $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$

Jadi terbukti suatu objek $\mathbf{0}$ dalam V , sedemikian sehingga $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} +$

$\mathbf{0} = \mathbf{u}$ untuk setiap \mathbf{u} dalam V .

5. Didefinisikan objek $-\mathbf{u}$ dalam V

$$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_{11} - u_{11} & u_{12} - u_{12} \\ u_{21} - u_{21} & u_{22} - u_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Jadi terbukti untuk setiap objek \mathbf{u} dalam V , ada suatu objek $-\mathbf{u}$ dalam

V , yang disebut negatif dari \mathbf{u} sedemikian sehingga $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u}$

$= \mathbf{0}$

6. Untuk sebarang skalar k , akan dibuktikan $k\mathbf{u}$ adalah matriks 2×2

$$k\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

karena $k\mathbf{u}$ adalah matriks 2×2 maka $k\mathbf{u}$ adalah objek dalam V

7. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= k \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} k(u_{11} + v_{11}) & (u_{12} + v_{12}) \\ k(u_{21} + v_{21}) & (u_{22} + v_{22}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ku_{11} + kv_{11} & ku_{12} + kv_{12} \\ ku_{21} + kv_{21} & ku_{22} + kv_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix} \\
&= k\mathbf{u} + k\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$ {distributif kiri}.

$$\begin{aligned}
8. \quad (k + l)\mathbf{u} &= (k + l) \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (k + l)u_{11} & (k + l)u_{12} \\ (k + l)u_{21} & (k + l)u_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ku_{11} + lu_{11} & ku_{12} + lu_{12} \\ ku_{21} + lu_{21} & ku_{22} + lu_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & lu_{22} \end{bmatrix} \\
&= k\mathbf{u} + l\mathbf{u}
\end{aligned}$$

Jadi terbukti $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$ {distributif kanan}

$$\begin{aligned}
9. \quad k(l\mathbf{u}) &= k \begin{bmatrix} lu_{11} & lu_{12} \\ lu_{21} & lu_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} klu_{11} & klu_{12} \\ klu_{21} & klu_{22} \end{bmatrix} \\
&= kl \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \\
&= (kl)(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

Jadi terbukti $k(l\mathbf{u}) = (kl)(\mathbf{u})$ {asosiatif perkalian}.

$$10. \mathbf{1u} = \mathbf{1} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Jadi terbukti terdapat skalar 1 sehingga $\mathbf{1u} = \mathbf{u}$

Karena memenuhi kesepuluh aksioma ruang vektor, maka himpunan V dari semua matriks 2×2 dengan anggota bilangan riil merupakan suatu ruang vektor.

Contoh 2.2.3 (Himpunan Vektor Nol) ('Imrona, 2009:69)

Buktikanlah bahwa $0 = \{\mathbf{0}\}$ yang dilengkapi dengan penjumlahan dan perkalian skalar biasa termasuk ruang vektor.

Solusi:

Akan dibuktikan $0 = \{\mathbf{0}\}$ termasuk ruang vektor karena memenuhi kesepuluh ruang vektor berikut:

1. $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in 0$ {tertutup terhadap penjumlahan}
2. $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ {komutatif}
3. $(\mathbf{0} + \mathbf{0}) + \mathbf{0} = \mathbf{0} + (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ {asosiatif}
4. Ada $\mathbf{0} \in 0$ yang bersifat $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ {elemen nol}
5. jika $\mathbf{0} \in 0$, maka selalu ada $-\mathbf{0} = \mathbf{0}$, sehingga $\mathbf{0} + (-\mathbf{0}) = -\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ {invers}
6. $k\mathbf{0} = \mathbf{0} \in 0$ {tertutup perkalian skalar}
7. $k(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = k\mathbf{0} + k\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ {distributif}
8. $(k + l)\mathbf{0} = k\mathbf{0} + l\mathbf{0}$ {distributif}
9. $(kl)\mathbf{0} = k(l\mathbf{0})$ {asosiatif}
10. $1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ {perkalian dengan satu}

2.3 Norma (Panjang) Suatu Vektor

Definisi 2.3.1 (Suminto, 2000a:165-167)

Norma atau panjang suatu vektor \mathbf{u} pada R^n , dilambangkan dengan $\|\mathbf{u}\|$, didefinisikan sebagai akar kuadrat yang bukan-negatif dari $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Khususnya jika

$\mathbf{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, maka

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Dengan kata lain, $\|\mathbf{u}\|$ adalah akar kuadrat dari jumlah kuadrat-kuadrat komponen \mathbf{u} . Jadi $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, dan $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Suatu vektor \mathbf{u} disebut vektor satuan jika $\|\mathbf{u}\| = 1$ atau, secara ekuivalen, jika $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$. Untuk sembarang vektor bukan nol \mathbf{v} pada R^n , vektor

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

adalah vektor satuan yang unik dengan arah yang sama dengan \mathbf{v} , proses perhitungan $\hat{\mathbf{v}}$ dari \mathbf{v} disebut normalisasi \mathbf{v} .

Contoh 2.3.2

Anggaplah $\mathbf{u} = (1, -2, -4, 5, 3)$. Untuk memperoleh $\|\mathbf{u}\|$, dihitung terlebih dahulu $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ dengan cara mengkuadratkan setiap komponen \mathbf{u} dan menjumlahkannya, sebagai berikut:

$$\|\mathbf{u}\|^2 = 1^2 + (-2)^2 + (-4)^2 + 5^2 + 3^2 = 1 + 4 + 16 + 25 + 9 = 55$$

$$\text{maka } \|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$$

Misalkan $\mathbf{v} = (1, -3, 4, 2)$ dan $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)\right)$, maka

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1 + 9 + 16 + 4} = \sqrt{30}$$

$$\text{dan } \|\mathbf{w}\| = \sqrt{\frac{9}{36} + \frac{1}{36} + \frac{25}{36} + \frac{1}{36}} = \sqrt{\frac{36}{36}} = \sqrt{1} = 1$$

Jadi \mathbf{w} adalah vektor satuan, tetapi \mathbf{v} bukanlah vektor satuan. Namun demikian, dapat menormalisasi \mathbf{v} sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-3}{\sqrt{30}}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}} \right)$$

Ini adalah vektor satuan unik dengan arah yang sama dengan \mathbf{v} .

2.4 Ruang Hasil Kali Dalam

Teorema 2.4.1 (Kusumawati, 2009:153)

Hasil kali dalam adalah pemetaan suatu bilangan riil (\mathbf{u}, \mathbf{v}) pada setiap pasangan vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} di ruang \mathbf{V} yang memenuhi keempat aksioma berikut:

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$ {kesimetrian}
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) + (\mathbf{w}, \mathbf{v})$ {penjumlahan}
3. $(k\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ {kehomogenan}
4. $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ dan $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ {kepositifan}

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam (memenuhi 4 aksioma) disebut ruang hasil kali dalam.

Contoh 2.4.2

Misalkan $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dan $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ di ruang vektor \mathbf{V} . Apakah $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ mendefinisikan suatu ruang hasil kali dalam?

Solusi:

1. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 = 3v_1u_1 + 2v_2u_2 = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$

$$\begin{aligned}
 2. \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= 3(u_1 + v_1)w_1 + 2(u_2 + v_2)w_2 \\
 &= 3u_1w_1 + 2u_2w_2 + 3v_1w_1 + 2v_2w_2 \\
 &= (\mathbf{v}, \mathbf{u}) + (\mathbf{w}, \mathbf{v})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad (k\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 3(ku_1v_1) + 2(ku_2v_2) \\
 &= k(3u_1v_1) + k(2u_2v_2) \\
 &= k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) \\
 &= k(\mathbf{u}, \mathbf{v})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad (\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= 3v_1v_1 + 2v_2v_2 \\
 &= 3(v_1)^2 + 2(v_2)^2 \geq 0 \\
 &= 3(v_1)^2 + 2(v_2)^2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2 = 0 \\
 &= 3(v_1)^2 + 2(v_2)^2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2 = 0 \\
 &\text{atau } \mathbf{v} = (v_1, v_2) = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Keempat aksioma di atas terpenuhi, sehingga merupakan ruang hasil kali dalam.

Contoh 2.4.3

Jika $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$ sebarang matriks berukuran 2×2 .

Untuk $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M_{2 \times 2}$ didefinisikan operasi bernilai riil $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$

$$\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} \right) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4. \text{ Apakah operasi ini}$$

merupakan hasil kali dalam?

Solusi:

1. Ambil $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M_{2 \times 2}$ misalkan $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, maka

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 \text{ \{komutatif perkalian bilangan riil\}}$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + b_4 a_4 \text{ {definisi operasi } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \}}$$

2. Ambil $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M_{2 \times 2}$ misalkan $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \text{ maka}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 + (a_4 + b_4)c_4$$

{distributif bilangan riil}

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4) + (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4) \text{ {definisi operasi } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \}}$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$$

3. Ambil $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M_{2 \times 2}$ misalkan $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$, ambil $k \in$

\mathbb{R} maka

$$(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (ka_1)b_1 + (ka_2)b_2 + (ka_3)b_3 + (ka_4)b_4 \text{ {distributif bilangan riil}}$$

$$(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = k(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4) \text{ {definisi operasi } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \}}$$

$$(k\mathbf{a}, \mathbf{b}) = k(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

4. Ambil $\mathbf{a} \in M_{2 \times 2}$ misalkan $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, maka

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + a_4 a_4 \geq 0 \text{ {sifat kuadrat bilangan riil}}$$

$$\text{dan } (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0, \text{ jika } a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, \text{ atau } \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Jadi, operasi bernilai riil di atas merupakan hasil kali dalam.

2.5 Norma pada Hasil Kali Dalam

Definisi 2.5.1 (Suminto, 2000b:20-21)

Jika V adalah suatu ruang hasil kali dalam, maka norma atau panjang suatu

vektor \mathbf{u} dalam V dinyatakan dengan $\|\mathbf{u}\|$ dan didefinisikan sebagai

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{\frac{1}{2}}$$

Jarak antara dua titik vektor \mathbf{u} dan \mathbf{v} dinyatakan dengan $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ dan didefinisikan sebagai

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

Contoh 2.5.2

Jika $\mathbf{u} = (3, -5, 2)$ dan $\mathbf{v} = (4, 2, -1)$ adalah vektor-vektor R^3 dengan hasil kali dalam, maka

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{((3, -5, 2) \cdot (3, -5, 2))} \\ &= \sqrt{3 \cdot 3 + (-5) \cdot (-5) + 2 \cdot 2} \\ &= \sqrt{9 + 25 + 4} \\ &= \sqrt{38} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(3 - 4)^2 + ((-5) - 2)^2 + (2 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{1 + 49 + 9} \\ &= \sqrt{59} \end{aligned}$$

Teorema 2.5.3 Ketaksamaan Cauchy-Schwarz (Suminto, 2000b:32)

Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor-vektor dalam suatu ruang hasil kali dalam V , maka

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Bukti

Jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, maka $|\mathbf{u}, \mathbf{v}| = 0 = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$

Jika $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

Anggap $a = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$, $b = 2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $c = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$ dan anggap t adalah sebarang bilang riil.

Dengan menggunakan teorema kepositifan, hasil kali dalam sebarang vektor dengan dirinya sendiri selalu tak-negatif. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} 0 \leq ((t\mathbf{u} + \mathbf{v}), (t\mathbf{u} + \mathbf{v})) &= (\mathbf{u}, \mathbf{u})t^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v})t + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= at^2 + bt + c \end{aligned}$$

Ketaksamaan ini dinyatakan bahwa polinom kuadratik $at^2 + bt + c$ dapat tidak mempunyai akar riil atau dua akar riil yang sama. Dengan demikian diskriminasinya pasti memenuhi ketaksamaan

$$b^2 - 4ac \leq 0$$

$$(2(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2 - 4(\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0 \quad \text{Substitusi } a, b, c \text{ ke bentuk } \mathbf{u} \text{ dan } \mathbf{v}$$

$$4(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 - 4(\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0 \quad \text{Dibagi 4}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 - (\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0$$

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} \quad \text{Diakarkan}$$

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \text{Karena } \| \mathbf{u} \| = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{\frac{1}{2}}$$

Contoh 2.5.4

Jika $\mathbf{u} = (4, 6)$ dan $\mathbf{v} = (3, -2)$ vektor-vektor dalam suatu ruang hasil kali dalam V apakah memenuhi teorema (2.5.3)?

Solusi:

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= |((\mathbf{u}, \mathbf{u}), (\mathbf{v}, \mathbf{v}))| \\ &= |((4, 3) + (6, (-2)))| \end{aligned}$$

$$= |12 + (-12)|$$

$$= 0$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| &= (\mathbf{u}, \mathbf{u})^{\frac{1}{2}} (\mathbf{v}, \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{(4.4 + 6.6)} \cdot \sqrt{(3.3 + (-2).(-2))} \\ &= \sqrt{(16 + 36)} \cdot \sqrt{(9 + 4)} \\ &= \sqrt{52} \cdot \sqrt{13} \\ &= \sqrt{676} \end{aligned}$$

Karena $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ dan $\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| = \sqrt{676}$

Maka $\mathbf{u} = (4, 6)$ dan $\mathbf{v} = (3, -2)$ memenuhi teorema (2.5.3)

Teorema 2.5.5 (Suminto, 2000b:34)

Jika \mathbf{u} dan \mathbf{v} adalah vektor-vektor dalam suatu ruang hasil kali dalam V , dan jika k adalah sebarang skalar, maka

- 1) $\|\mathbf{u}\| \geq 0$
- 2) $\|\mathbf{u}\| = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
- 3) $\|k\mathbf{u}\| = |k| \|\mathbf{u}\|$
- 4) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (Ketaksamaan Segitiga)

Bukti

$$1) \|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \geq 0$$

$$2) (\Rightarrow) \|\mathbf{u}\| = 0$$

$$\sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = 0, \text{ maka } \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$(\Leftarrow) \text{ jika } \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \sqrt{(0,0)}$$

$$= 0$$

$$\|\mathbf{u}\| = 0$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \|\mathbf{k}\mathbf{u}\| &= \sqrt{(\mathbf{k}\mathbf{u}, \mathbf{k}\mathbf{u})} \\ &= \sqrt{k^2(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \\ &= \sqrt{k^2} \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \\ &= |k| \|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

4) Berdasarkan definisi (2.5.1)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| &= \sqrt{(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v})} \\ \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \text{teorema 2.5.3} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2 \end{aligned}$$

Dengan mengakarkannya akan didapatkan

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Teorema 2.5.6 (Suminto, 2000b:34)

Jika \mathbf{u} , \mathbf{v} dan \mathbf{w} adalah vektor-vektor dalam suatu ruang hasil kali dalam V , maka:

- 1) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
- 2) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ jika dan hanya jika $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
- 3) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
- 4) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (Ketaksamaan Segitiga)

Bukti

$$1) \quad d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})} \geq 0$$

$$2) (\Rightarrow) d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 0$$

$$\sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})} = 0 \text{ dan } \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\text{Maka } \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$(\Leftarrow) \text{ jika } \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\text{Maka } d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

$$= \|\mathbf{u} - \mathbf{u}\|$$

$$= \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{u}, \mathbf{u} - \mathbf{u})}$$

$$= \sqrt{(0,0)}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

$$3) d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

$$= \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})}$$

$$= \sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u})}$$

$$= \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

$$4) d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

$$= \|\mathbf{u} - \mathbf{w} + \mathbf{w} - \mathbf{v}\|$$

$$\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$$

2.6 Norma-2

Teorema 2.6.1 (Rafflesia, 2008)

Misalkan X adalah ruang vektor riil dimensi ≥ 2 . Suatu fungsi

bernilai riil $\|\cdot, \cdot\|: X \times X \rightarrow R$ disebut norma-2 di X jika memenuhi:

1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x, y bergantung linier.
2. $\|x, y\| = \|x, y\|$ untuk semua $x, y \in X$.
3. $\|\alpha x, y\| = \alpha \|x, y\|$ untuk semua $\alpha \in R, x, y \in X$.
4. $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk semua $x, y, z \in X$.

Pasangan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ disebut norma-2.

Dan secara geometris, norma-2 ini merupakan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh x dan y . Jika X suatu ruang hasil kali dalam dengan dimensi paling kecil 2, maka dapat didefinisikan norma-2 sebagai berikut:

$$\|x, y\| = \left| \begin{matrix} (x, x) & (x, y) \\ (y, x) & (y, y) \end{matrix} \right|^{\frac{1}{2}}$$

2.7 Kajian Vektor dalam Al-Quran

Secara tidak langsung vektor sudah diungkapkan oleh al-Quran. Menurut definisinya vektor adalah besaran yang mempunyai besaran dan arah. Besaran dapat diartikan sebagai nilai yang terkandung, istilah lain yang mempunyai bobot. Dalam al-Quran terdapat beberapa ayat yang tersirat makna tentang vektor. Yaitu pada surat al-Baqarah/2:142:

﴿ سَيَقُولُ السُّفَهَاءُ مِنَ النَّاسِ مَا وَلَّيْنَاهُمْ عَن قِبَلَتِهِمُ الَّتِي كَانُوا عَلَيْهَا قُلْ لِلَّهِ الْمَشْرِقُ وَالْمَغْرِبُ يَهْدِي

مَنْ يَشَاءُ إِلَى صِرَاطٍ مُسْتَقِيمٍ ﴿١٤٢﴾

"Orang-orang yang kurang akalnya[93] diantara manusia akan berkata: "Apakah yang memalingkan mereka (umat Islam) dari kiblatnya (Baitul Maqdis)

yang dahulu mereka telah berkiblat kepadanya?" Katakanlah: "Kepunyaan Allah-lah timur dan barat; Dia memberi petunjuk kepada siapa yang dikehendaki-Nya ke jalan yang lurus"[94]" (QS. al-Baqarah/2:142).

[93] Maksudnya: ialah orang-orang yang kurang pikirannya sehingga tidak dapat memahami maksud pemindahan kiblat.

[94] Di waktu Nabi Muhammad Saw. berada di Mekah di tengah-tengah kaum musyirikin beliau berkiblat ke Baitul Maqdis. Tetapi setelah 16 atau 17 bulan Nabi berada di Madinah di tengah-tengah orang Yahudi dan Nasrani beliau disuruh oleh Tuhan untuk mengambil ka'bah menjadi kiblat, terutama sekali untuk memberi pengertian bahwa dalam ibadah shalat itu bukanlah arah Baitul Maqdis dan ka'bah itu menjadi tujuan, tetapi menghadapkan diri kepada Tuhan. Allah menjadikan ka'bah sebagai kiblat untuk persatuan umat Islam (Dwiputriana, 2013).

Sebagaimana yang terdapat pada surat al-Baqarah/2:150:

وَمِنْ حَيْثُ خَرَجْتَ فَوَلِّ وَجْهَكَ شَطْرَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ ۚ وَحَيْثُ مَا كُنْتُمْ فَوَلُّوا وُجُوهَكُمْ شَطْرَهُ ۚ
لَعَلَّ الْبَنِيَّانَ يَكُونُوا لِلنَّاسِ عَلَيكُمْ حُجَّةً إِلَّا الَّذِينَ ظَلَمُوا مِنْهُمْ فَلَا تَحْشَوْهُمْ وَاَحْسَبُونِي لَا اَتَمَّ نِعْمَتِي عَلَيْكُمْ
وَلَعَلَّكُمْ تَهْتَدُونَ ﴿١٥٠﴾

“Dan dari mana saja kamu (keluar), maka palingkanlah wajahmu ke arah Masjidil Haram. Dan di mana saja kamu (sekalian) berada, maka palingkanlah wajahmu ke arahnya, agar tidak ada hujjah bagi manusia atas kamu, kecuali orang-orang yang zalim di antara mereka. Maka janganlah kamu takut kepada mereka dan takutlah kepada-Ku (saja). Dan agar Ku-sempurnakan nikmat-Ku atasmu, dan supaya kamu mendapat petunjuk” (QS. al-Baqarah/2:150).

Semua benda yang ada di alam ini baik itu bumi, bulan, planet, matahari, bintang, bahkan galaksi dan malaikat pun bersujud dan berputar mengelilingi zat yang satu bagaikan sebuah medan magnet yang selalu mempunyai berputar mengelilingi arus listriknya. Orang yang sedang haji pun melakukan hal yang

sama saat melakukan *thawaf*, yaitu bergerak mengelilingi ka'bah. Hal tersebut merupakan simbol bahwa semua yang ada di alam semesta ini berputar dan bersujud ke *dzat* Yang Esa, yaitu Allah Swt. (Tazi, 2008:92).



BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas tentang sifat-sifat ruang hasil kali dalam-2 dan pembuktiannya, contoh-contoh ruang hasil kali dalam-2 serta kajian keislaman tentang ruang hasil kali dalam-2.

3.1 Ruang Hasil Kali Dalam-2

Misalkan X adalah ruang linier dimensi lebih besar dari 1 untuk semua K (baik R atau C). Fungsi $(\cdot, \cdot | \cdot): X \times X \times X \rightarrow K$ disebut hasil kali dalam-2 jika kondisi berikut berlaku:

1. $(x, x|z) \geq 0$ dan $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier
2. $(x, x|z) = (z, z|x)$
3. $(y, x|z) = (x, y|z)$
4. $(\alpha x, y|z) = \alpha(x, y|z)$ untuk setiap $\alpha \in K$
5. $(x + \acute{x}, y|z) = (x, y|z) + (\acute{x}, y|z)$

$(\cdot, \cdot | \cdot)$ disebut hasil kali dalam-2 dan $(X, (\cdot, \cdot | \cdot))$ disebut dengan ruang hasil kali dalam-2.

Ruang linier disebut ruang vektor, yaitu suatu ruang yang ditentukan oleh himpunan tak kosong dengan dua operasi yang berlaku padanya. Suatu himpunan dikatakan ruang linier jika memenuhi dua operasi aljabar, yaitu penjumlahan dan perkalian skalar dan memenuhi sifat-sifat yang sudah dijelaskan di bab II. Ruang linier mempunyai dua kemungkinan yaitu bebas linier dan tak bebas linier, contohnya himpunan vektor-vektor (x_1, x_2, \dots, x_n) dikatakan bebas linier (*linierly*

independent) jika persamaan $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = 0$ mengakibatkan $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, sedangkan himpunan vektor-vektor (x_1, x_2, \dots, x_n) dikatakan tak bebas linier atau bergantung linier (*linierly dependent*) jika terdapat skalar $x_i \neq 0, i=1, 2, \dots, n$, sehingga $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = \mathbf{0}$, nol disini adalah vektor nol, bukan bilangan nol. Dalam pembahasan ini x, y dan z adalah 3 vektor yang terletak di dalam objek X atau ruang vektor atau ruang linier.

Definisi 3.1.1

Misalkan $(X, (\cdot, \cdot))$ ruang hasil kali dalam dengan dimensi $d \geq 2$,

didefinisikan $(x, y|z) = \begin{vmatrix} (x, y) & (x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix}$ dengan $\|\cdot\|$ determinan.

Contoh 3.1.2

Apabila ruang hasil kali dalam didefinisikan $(x, y) = (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n), x, y \in R^n$. Buktikan apakah $(\cdot, \cdot | \cdot): X \times X \times X \rightarrow K$ memenuhi definisi ruang hasil kali dalam-2!

Solusi:

1. $(x, x|z) \geq 0$ dan $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier

a. Akan dibuktikan $(x, x|z) \geq 0$

$$\begin{aligned} (x, x|z) &= \begin{vmatrix} (x, x) & (x, z) \\ (z, x) & (z, z) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (x_1x_1 + x_2x_2 + \dots + x_nx_n) & (x_1z_1 + x_2z_2 + \dots + x_nz_n) \\ (z_1x_1 + z_2x_2 + \dots + z_nx_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \dots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\ &= (x_1x_1 + x_2x_2 + \dots + x_nx_n)(z_1z_1 + z_2z_2 + \dots + z_nz_n) \\ &\quad - (x_1z_1 + x_2z_2 + \dots + x_nz_n)(z_1x_1 + z_2x_2 + \dots + z_nx_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2) \\
&\quad - (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n)(z_1x_1 + z_2x_2 + \cdots \\
&\quad + z_nx_n) \\
&= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2) \\
&\quad - (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n)^2 \\
&= x_1^2z_1^2 + x_1^2z_2^2 + \cdots + x_1^2z_n^2 + x_2^2z_1^2 + x_2^2z_2^2 \\
&\quad + \cdots + x_2^2z_n^2 + x_n^2z_1^2 + x_n^2z_2^2 + \cdots + x_n^2z_n^2 \\
&\quad - (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n)^2 \\
&= (x_1z_1)^2 + (x_1z_2)^2 + \cdots + (x_1z_n)^2 + (x_2z_1)^2 + (x_2z_2)^2 \\
&\quad + \cdots + (x_2z_n)^2 + \cdots + (x_nz_1)^2 + (x_nz_2)^2 + \cdots \\
&\quad + (x_nz_n)^2 - ((x_1z_1)^2 + x_1z_1 \cdot x_2z_2 + \cdots + x_1z_1 \cdot x_nz_n \\
&\quad + x_2z_2 \cdot x_1z_1 + (x_2z_2)^2 + \cdots + x_2z_2 \cdot x_nz_n + \cdots \\
&\quad + x_nz_n \cdot x_1z_1 + x_nz_n \cdot x_2z_2 + \cdots + (x_nz_n)^2) \\
&= (x_1z_2)^2 + \cdots + (x_1z_n)^2 + (x_2z_1)^2 + \cdots + (x_2z_n)^2 + \cdots \\
&\quad + (x_nz_1)^2 + (x_nz_2)^2 + \cdots - (x_1z_1 \cdot x_2z_2 + \cdots \\
&\quad + x_1z_1 \cdot x_nz_n + x_2z_2 \cdot x_1z_1 + \cdots + x_2z_2 \cdot x_nz_n + \cdots \\
&\quad + x_nz_n \cdot x_1z_1 + x_nz_n \cdot x_2z_2 + \cdots + x_nz_n \cdot x_{n-1}z_{n-1}) \\
&= ((x_1z_2)^2 + (x_2z_1)^2 - 2(x_1z_1 \cdot x_2z_2)) + ((x_1z_n)^2 \\
&\quad + (x_nz_1)^2 - 2(x_1z_1 \cdot x_nz_n)) + ((x_2z_n)^2 + (x_nz_2)^2 \\
&\quad - 2(x_2z_2 \cdot x_nz_n)) + \cdots + ((x_nz_{n-1})^2 + (x_{n-1}z_n)^2 \\
&\quad - 2(x_nz_n \cdot x_{n-1}z_{n-1})) \\
&= (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1z_n - x_nz_1)^2 + (x_2z_n - x_nz_2)^2 \\
&\quad + \cdots + (x_nz_{n-1} - x_{n-1}z_n)^2 \tag{3.1}
\end{aligned}$$

Karena persamaan (3.1) bersifat kuadrat bilangan riil maka terbukti bahwa $(x, x|z) \geq 0$

b. Akan dibuktikan $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier

i. (\Rightarrow) Misalkan $(x, x|z) = 0$, dengan $x \neq 0$ dan $z \neq 0$

Berdasarkan persamaan (3.1)

$$\begin{aligned} (x, x|z) &= (x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1z_n - x_nz_1)^2 + (x_2z_n - x_nz_2)^2 \\ &\quad + \dots + (x_nz_{n-1} - x_{n-1}z_n)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dengan kata lain

$$\begin{aligned} (x_1z_2 - x_2z_1)^2 &= 0, (x_1z_n - x_nz_1)^2 = 0, (x_2z_n - x_nz_2)^2 = 0, \dots, \\ (x_nz_{n-1} - x_{n-1}z_n)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Maka } x_1z_2 = x_2z_1, x_1z_n = x_nz_1, x_2z_n = x_nz_2, x_nz_{n-1} = x_{n-1}z_n$$

Akan benar jika $z = cx$, untuk setiap z dan $x \in R^n$

Jadi x dan z bergantung linier

ii. (\Leftarrow) Misalkan x dan z bergantung linier

Menurut persamaan (3.1) maka ada c sehingga

$$z = cx$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}$$

$$z_1 = cx_1, z_2 = cx_2, \text{ dan } z_n = cx_n$$

Maka

$$x_1z_2 - x_2z_1)^2 + (x_1z_n - x_nz_1)^2 + (x_2z_n - x_nz_2)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
&+(x_n z_{n-1} - x_{n-1} z_n)^2 = 0 \\
&x_1(cx_2) - x_2(cx_1))^2 + (x_1(cx_n) - x_n(cx_1))^2 + \\
&(x_2(cx_n) - x_n(cx_2))^2 + \cdots + (x_n(cx_{n-1}) - x_{n-1}(cx_n))^2 = 0 \\
&(cx_1x_2 - cx_2x_1)^2 + (cx_1x_n - cx_nx_1)^2 + \\
&(cx_2x_n - cx_nx_2)^2 + \cdots + (cx_nx_{n-1} - cx_{n-1}x_n)^2 = 0
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.1) maka $(x, x|z) = 0$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier

Berdasarkan a dan b maka terbukti bahwa $(x, x|z) \geq 0$ dan $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier

2. Akan dibuktikan $(x, x|z) = (z, z|x)$

Misalkan untuk sebarang $z \in R^n$

$$\begin{aligned}
(x, x|z) &= \begin{vmatrix} (x, x) & (x, z) \\ (z, x) & (z, z) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_nx_n) & (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) \\ (z_1x_1 + z_2x_2 + \cdots + z_nx_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1x_1 + x_2x_2 + \cdots + x_nx_n) & (z_1x_1 + z_2x_2 + \cdots + z_nx_n) \\ (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x, x) & (z, x) \\ (x, z) & (z, z) \end{vmatrix} \\
&= (x, x)(z, z) - (z, x)(x, z) \\
&= (z, z)(x, x) - (z, x)(x, z) \\
&= \begin{vmatrix} (z, z) & (z, x) \\ (x, z) & (x, x) \end{vmatrix} \\
&= (z, z|x)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(x, x|z) = (z, z|x)$

3. Akan dibuktikan $(x, y|z) = (y, x|z)$

Misalkan untuk sebarang $z \in R^n$

$$\begin{aligned}
 (x, y|z) &= \begin{vmatrix} (x, y) & (x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) & (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) \\ (z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} (y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n) & (z_1x_1 + z_2x_2 + \cdots + z_nx_n) \\ (y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots + y_nz_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} (y, x) & (z, x) \\ (y, z) & (z, z) \end{vmatrix} \\
 &= (y, x)(z, z) - (z, x)(y, z) \\
 &= (y, x)(z, z) - (y, z)(z, x) \\
 &= \begin{vmatrix} (y, x) & (y, z) \\ (z, x) & (z, z) \end{vmatrix} \\
 &= (y, x|z)
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(x, y|z) = (y, x|z)$

4. Akan dibuktikan $(\alpha x, y|z) = \alpha(x, y|z)$

Misalkan untuk sebarang $z \in R^n$

$$\begin{aligned}
 (\alpha x, y|z) &= \begin{vmatrix} (\alpha x, y) & (\alpha x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \alpha(x, y) & \alpha(x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) & \alpha(x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) \\ (z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\
 &= \alpha((x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)(z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \\
 &\quad - \alpha((x_1y_1 + z_2x_2 + \cdots + z_nx_n)(z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + \\
 &\quad z_ny_n))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha((x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)(z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \\
&\quad - (x_1y_1 + z_2x_2 + \cdots + z_nx_n)(z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n)) \\
&= \alpha \begin{vmatrix} (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) & (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) \\ (z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\
&= \alpha \begin{vmatrix} (x, y) & (x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \\
&= \alpha(x, y | z)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\alpha x, y | z) = \alpha(x, y | z)$

5. Akan dibuktikan $(x + x', y | z) = (x, y | z) + (x', y | z)$

Misalkan untuk sebarang $z \in R^n$

$$\begin{aligned}
(x + x', y | z) &= \begin{vmatrix} (x + x', y) & (x + x', z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x, y) + (x', y) & (x, z) + (x', z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (\acute{x}_1y_1 + \acute{x}_2y_2 + \cdots + \acute{x}_ny_n) & (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) + (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2 + \cdots + \acute{x}_nz_n) \\ (z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\
&= ((x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) + (\acute{x}_1y_1 + \acute{x}_2y_2 + \cdots + \acute{x}_ny_n) \\
&\quad (z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n)) - ((x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) \\
&\quad + (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2 + \cdots + \acute{x}_nz_n)(z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n)) \\
&= ((x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)(z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \\
&\quad + (\acute{x}_1y_1 + \acute{x}_2y_2 + \cdots + \acute{x}_ny_n)(z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n)) \\
&\quad - ((x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n)(z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n) \\
&\quad + (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2 + \cdots + \acute{x}_nz_n)(z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n)) \\
&= ((x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n)(z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \\
&\quad - (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n)(z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n)) \\
&\quad + ((\acute{x}_1y_1 + \acute{x}_2y_2 + \cdots + \acute{x}_ny_n)(z_1z_1 + z_2z_2 + \cdots + z_nz_n) \\
&\quad - (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2 + \cdots + \acute{x}_nz_n)(z_1y_1 + z_2y_2 + \cdots + z_ny_n))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} (x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) & (x_1z_1 + x_2z_2 + \dots + x_nz_n) \\ (z_1y_1 + z_2y_2 + \dots + z_ny_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \dots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} (\acute{x}_1y_1 + \acute{x}_2y_2 + \dots + \acute{x}_ny_n) & (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2 + \dots + \acute{x}_nz_n) \\ (z_1y_1 + z_2y_2 + \dots + z_ny_n) & (z_1z_1 + z_2z_2 + \dots + z_nz_n) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x, y) & (x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\acute{x}, y) & (\acute{x}, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \\
&= (x, y|z) + (\acute{x}, y|z)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(x + \acute{x}, y|z) = (x, y|z) + (\acute{x}, y|z)$

Karena memenuhi kelima sifat ruang hasil kali dalam-2, maka $(\cdot, \cdot | \cdot)$:

$X \times X \times X \rightarrow K$ memenuhi definisi ruang hasil kali dalam-2.

3.2 Contoh-Contoh Ruang Hasil Kali Dalam-2

Jika $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ dan $y = y_1, y_2, y_3, y_4$. Untuk $x, y \in R$ didefinisikan operasi bernilai riil $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Apakah operasi ini merupakan ruang hasil kali dalam-2?

Solusi:

1. Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in R$ misalkan $\mathbf{u} = u_1, u_2, u_3, u_4$, dan $\mathbf{w} = w_1, w_2, w_3, w_4$, maka

$$(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4$$

- a. Akan dibuktikan $(u, u|w) \geq 0$

$$\begin{aligned}
(u, u|w) &= \begin{vmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 + u_4u_4) & (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) \\ (w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3 + w_4u_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{vmatrix} \\
&= (u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 + u_4u_4)(w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 \\
&\quad + w_4w_4) - (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4)(w_1u_1 + w_2u_2 \\
&\quad + w_3u_3 + w_4u_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) \\
&\quad - (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4)(w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3 \\
&\quad + w_4u_4) \\
&= (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2) \\
&\quad - (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4)^2 \\
&= u_1^2w_1^2 + u_1^2w_2^2 + u_1^2w_3^2 + u_1^2w_4^2 + u_2^2w_1^2 + u_2^2w_2^2 \\
&\quad + u_2^2w_3^2 + u_2^2w_4^2 + u_3^2w_1^2 + u_3^2w_2^2 + u_3^2w_3^2 + u_3^2w_4^2 \\
&\quad + u_4^2w_1^2 + u_4^2w_2^2 + u_4^2w_3^2 + u_4^2w_4^2 \\
&\quad - (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4)^2 \\
&= (u_1w_1)^2 + (u_1w_2)^2 + (u_1w_3)^2 + (u_1w_4)^2 + (u_2w_1)^2 \\
&\quad + (u_2w_2)^2 + (u_2w_3)^2 + (u_2w_4)^2 + (u_3w_1)^2 + (u_3w_2)^2 + (u_3w_3)^2 \\
&\quad + (u_3w_4)^2 + (u_4w_1)^2 + (u_4w_2)^2 + (u_4w_3)^2 + (u_4w_4)^2 \\
&\quad - ((u_1w_1)^2 + u_1w_1 \cdot u_2w_2 + u_1w_1 \cdot u_3w_3 + u_1w_1 \cdot u_4w_4 \\
&\quad + u_2w_2 \cdot u_1w_1 + (u_2w_2)^2 + u_2w_2 \cdot u_3w_3 + u_2w_2 \cdot u_4w_4 \\
&\quad + u_3w_3 \cdot u_1w_1 + u_3w_3 \cdot u_2w_2 + (u_3w_3)^2 + u_3w_3 \cdot u_4w_4 \\
&\quad + u_4w_4 \cdot u_1w_1 + u_4w_4 \cdot u_2w_2 + u_4w_4 \cdot u_3w_3 + (u_4w_4)^2) \\
&= (u_1w_2)^2 + (u_1w_3)^2 + (u_1w_4)^2 + (u_2w_1)^2 + (u_2w_3)^2 \\
&\quad + (u_2w_4)^2 + (u_3w_1)^2 + (u_3w_2)^2 + (u_3w_4)^2 + (u_4w_1)^2 \\
&\quad + (u_4w_2)^2 + (u_4w_3)^2 - (u_1w_1 \cdot u_2w_2 + u_1w_1 \cdot u_3w_3 \\
&\quad + u_1w_1 \cdot u_4w_4 + u_2w_2 \cdot u_1w_1 + u_2w_2 \cdot u_3w_3 + u_2w_2 \cdot u_4w_4 \\
&\quad + u_3w_3 \cdot u_1w_1 + u_3w_3 \cdot u_2w_2 + u_3w_3 \cdot u_4w_4 + u_4w_4 \cdot u_1w_1 \\
&\quad + u_4w_4 \cdot u_2w_2 + u_4w_4 \cdot u_3w_3) \\
&= ((u_1w_2)^2 + (u_2w_1)^2 - 2(u_1w_1 \cdot u_2w_2)) + ((u_1w_3)^2 \\
&\quad + (u_3w_1)^2 - 2(u_1w_1 \cdot u_3w_3)) + ((u_1w_4)^2 + (u_4w_1)^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2(u_1w_1 \cdot u_4w_4)) + ((u_2w_3)^2 + (u_3w_2)^2 - 2(u_2w_2 \cdot u_3w_3)) \\
& + ((u_2w_4)^2 + (u_4w_2)^2 - 2(u_2w_2 \cdot u_4w_4)) + ((u_3w_4)^2 \\
& + (u_4w_3)^2 - 2(u_3w_3 \cdot u_4w_4)) \\
& = (u_1w_2 - u_2w_1)^2 + (u_1w_3 - u_3w_1)^2 + (u_1w_4 - u_4w_1)^2 \\
& + (u_2w_3 - u_3w_2)^2 + (u_2w_4 - u_4w_2)^2 + (u_3w_4 - u_4w_3)^2 \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Karena hasil akhir berbentuk kuadrat dan terletak pada ruas kanan maka

$$(u, u|w) > 0$$

Maka terbukti bahwa $(u, u|w) \geq 0$

b. Akan dibuktikan $(u, u|w) = 0$ jika dan hanya jika u dan w bergantung linier

i. (\Rightarrow) Misalkan $(u, u|w) = 0$, dengan $u \neq 0$ dan $w \neq 0$

berdasarkan persamaan (3.2)

$$\begin{aligned}
(u, u|w) & = ((u_1w_2 - u_2w_1)^2 + ((u_1w_3 - u_3w_1)^2 \\
& + ((u_1w_4 - u_4w_1)^2 + ((u_2w_3 - u_3w_2)^2 \\
& + ((u_2w_4 - u_4w_2)^2 + ((u_3w_4 - u_4w_3)^2 \\
& = 0
\end{aligned}$$

dengan kata lain

$$(u_1w_2 - u_2w_1)^2 = 0, (u_1w_3 - u_3w_1)^2 = 0, (u_1w_4 - u_4w_1)^2 = 0,$$

$$(u_2w_3 - u_3w_2)^2 = 0, (u_2w_4 - u_4w_2)^2 = 0, (u_3w_4 - u_4w_3)^2 = 0$$

maka

$$u_1w_2 = u_2w_1, u_1w_3 = u_3w_1, u_1w_4 = u_4w_1, u_2w_3 = u_3w_2,$$

$$u_2w_4 = u_4w_2, u_3w_4 = u_4w_3$$

akan benar jika $w = cu$, untuk setiap w dan $u \in R$.

Jadi u dan w bergantung linier

ii. (\Leftrightarrow) Misalkan u dan w bergantung linier

menurut persamaan (3.2) maka ada c sehingga

$$w = cu$$

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cu_1 & cu_2 \\ cu_3 & cu_4 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = cu_1, w_2 = cu_2, w_3 = cu_3 \text{ dan } w_4 = cu_4$$

maka

$$(u_1w_2 - u_2w_1)^2 + (u_1w_3 - u_3w_1)^2 + (u_1w_4 - u_4w_1)^2 \\ + (u_2w_3 - u_3w_2)^2 + (u_2w_4 - u_4w_2)^2 + (u_3w_4 - u_4w_3)^2 = 0$$

$$(u_1(cu_2) - u_2(cu_1))^2 + (u_1(cu_3) - u_3(cu_1))^2$$

$$+ (u_1(cu_4) - u_4(cu_1))^2 + (u_2(cu_3) - u_3(cu_2))^2$$

$$+ (u_2(cu_4) - u_4(cu_2))^2 + (u_3(cu_4) - u_4(cu_3))^2 = 0$$

$$(cu_1u_2 - cu_2u_1)^2 + (cu_1u_3 - cu_3u_1)^2$$

$$+ (cu_1u_4 - cu_4u_1)^2 + (cu_2u_3 - cu_3u_2)^2$$

$$+ (cu_2u_4 - cu_4u_2)^2 + (cu_3u_4 - cu_4u_3)^2 = 0$$

berdasarkan persamaan (3.2) maka terbukti $(u, u|w) = 0$

Berdasarkan (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $(u, u|w) = 0$ jika dan hanya jika u dan w bergantung linier

Berdasarkan a dan b maka terbukti bahwa $(u, u|w) \geq 0$ dan $(u, u|w) = 0$

jika dan hanya jika u dan w bergantung linier

2. Akan dibuktikan $(u, u|w) = (w, w|u)$

Ambil $u, w \in R$ misalkan $u = u_1, u_2, u_3, u_4$ dan $w = w_1, w_2, w_3, w_4$, maka

$$(u, u|w) = \begin{vmatrix} (u, u) & (u, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} (u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 + u_4u_4) & (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) \\ (w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3 + w_4u_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 + u_4u_4) & (w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3 + w_4u_4) \\ (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (u, u) & (w, u) \\ (u, w) & (w, w) \end{vmatrix} \\
&= (u, u)(w, w) - (w, u)(u, w) \\
&= (w, w)(u, u) - (w, u)(u, w) \\
&= \begin{vmatrix} (w, w) & (w, u) \\ (u, w) & (u, u) \end{vmatrix} \\
&= (w, w|u)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(u, u|w) = (w, w|u)$

3. Akan dibuktikan $(u, v|w) = (v, u|w)$

Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in R$ misalkan $\mathbf{u} = u_1, u_2, u_3, u_4$; $\mathbf{v} = v_1, v_2, v_3, v_4$ dan

$\mathbf{w} = w_1, w_2, w_3, w_4$, maka

$$\begin{aligned}
(u, v|w) &= \begin{vmatrix} (u, v) & (u, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4) & (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) \\ (w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 + v_4u_4) & (w_1u_1 + w_2u_2 + w_3u_3 + w_4u_4) \\ (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 + v_4w_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (v, u) & (w, u) \\ (v, w) & (w, w) \end{vmatrix} \\
&= (v, u)(w, w) - (w, u)(v, w) \\
&= (v, u)(w, w) - (v, w)(w, u) \\
&= \begin{vmatrix} (v, u) & (v, w) \\ (w, u) & (w, w) \end{vmatrix} \\
&= (v, u|w)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(u, v|z) = (v, u|z)$

4. Akan dibuktikan $(\alpha u, v|w) = \alpha(u, v|w)$

Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in M_{2 \times 2}$ misalkan $\mathbf{u} = u_1, u_2, u_3, u_4$; $\mathbf{v} = v_1, v_2, v_3, v_4$;

$\mathbf{w} = w_1, w_2, w_3, w_4$, dan $\alpha \in R$, maka

$$\begin{aligned}
 (\alpha u, v|z) &= \begin{vmatrix} (\alpha u, v) & (\alpha u, w) \\ (z, v) & (w, w) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \alpha(u, v) & \alpha(u, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4) & \alpha(u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) \\ (w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{vmatrix} \\
 &= (\alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4)(w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 \\
 &\quad + w_4w_4)) - (\alpha(u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4)(w_1v_1 + w_2v_2 \\
 &\quad + w_3v_3 + w_4v_4)) \\
 &= \alpha((u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4)(w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 \\
 &\quad + w_4w_4)) - ((u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4)(w_1v_1 + w_2v_2 \\
 &\quad + w_3v_3 + w_4v_4)) \\
 &= \alpha \begin{vmatrix} (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4) & (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) \\ (w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{vmatrix} \\
 &= \alpha \begin{vmatrix} (u, v) & (u, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{vmatrix} \\
 &= \alpha(u, v|w)
 \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(\alpha u, v|w) = \alpha(u, v|w)$

5. Akan dibuktikan $(u + u', v|w) = (u, v|w) + (u', v|w)$

Ambil $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in R$ misalkan $\mathbf{u} = u_1, u_2, u_3, u_4$; $\mathbf{v} = v_1, v_2, v_3, v_4$ dan

$\mathbf{w} = w_1, w_2, w_3, w_4$, , maka

$$(u + u', v|w) = \begin{vmatrix} (u + u', v) & (u + u', w) \\ (w, v) & (w, w) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{cc} (u, v) + (u', v) & (u, w) + (u', w) \\ (w, y) & (w, w) \end{array} \right| \\
&= \left| \begin{array}{cc} (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4) + (\acute{u}_1v_1 + \acute{u}_2v_2 + \acute{u}_3v_3 + \acute{u}_4v_4) & (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) + (\acute{u}_1w_1 + \acute{u}_2w_2 + \acute{u}_3w_3 + \acute{u}_4w_4) \\ (w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{array} \right| \\
&= ((u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4) + (\acute{u}_1v_1 + \acute{u}_2v_2 + \acute{u}_3v_3 + \acute{u}_4v_4) \\
&\quad (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4)) - ((u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) \\
&\quad + (\acute{u}_1w_1 + \acute{u}_2w_2 + \acute{u}_3w_3 + \acute{u}_4w_4)(w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4)) \\
&= ((u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4)(w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \\
&\quad + (u_1v_1 + \acute{u}_2v_2 + \acute{u}_3v_3 + \acute{u}_4v_4)(w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4)) \\
&\quad - ((u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4)(w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4) \\
&\quad + (\acute{u}_1w_1 + \acute{u}_2w_2 + \acute{u}_3w_3 + \acute{u}_4w_4)(w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4)) \\
&= ((u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4)(w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \\
&\quad - (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4)(w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4)) \\
&\quad + ((\acute{u}_1v_1 + \acute{u}_2v_2 + \acute{u}_3v_3 + \acute{u}_4v_4)(w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \\
&\quad - (\acute{u}_1w_1 + \acute{u}_2w_2 + \acute{u}_3w_3 + \acute{u}_4w_4)(w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4)) \\
&= \left| \begin{array}{cc} (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4) & (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3 + u_4w_4) \\ (w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{array} \right| \\
&\quad + \left| \begin{array}{cc} (\acute{u}_1v_1 + \acute{u}_2v_2 + \acute{u}_3v_3 + \acute{u}_4v_4) & (\acute{u}_1w_1 + \acute{u}_2w_2 + \acute{u}_3w_3 + \acute{u}_4w_4) \\ (w_1v_1 + w_2v_2 + w_3v_3 + w_4v_4) & (w_1w_1 + w_2w_2 + w_3w_3 + w_4w_4) \end{array} \right| \\
&= \left| \begin{array}{cc} (u, v) & (u, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} (\acute{u}, v) & (\acute{u}, w) \\ (w, v) & (w, w) \end{array} \right| \\
&= (u, v|w) + (\acute{u}, v|w)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(u + u', v|w) = (u, v|w) + (u', v|w)$

Karena memenuhi kelima definisi ruang hasil kali dalam-2, maka operasi $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ merupakan ruang hasil kali dalam-2.

3.3 Perubahan Sifat-Sifat Ruang Hasil Kali Dalam menjadi Ruang Hasil Kali Dalam-2

Berdasarkan bab II hasil kali dalam adalah pemetaan suatu bilangan riil (x,y) pada setiap pasangan vektor x dan y di ruang K yang memenuhi keempat definisi berikut:

1. $(x, y) = (y, x)$ {kesimetrian}
2. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$ {penjumlahan}
3. $(kx, y) = k(x, y)$ {kehomogenan}
4. $(y, y) \geq 0$ dan $(y, y) = 0$ jika dan hanya jika $y = 0$ {kepositifan}

Ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam (memenuhi 4 definisi) disebut ruang hasil kali dalam.

Sedangkan pada ruang hasil kali dalam-2, Misalkan X adalah ruang linier dimensi lebih besar dari 1 untuk semua K (baik R atau C). Fungsi $(\cdot, \cdot | \cdot): X \times X \times X \rightarrow K$ disebut hasil kali dalam-2 jika kondisi berikut berlaku:

1. $(x, x|z) \geq 0$ dan $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier
2. $(x, x|z) = (z, z|x)$
3. $(y, x|z) = (x, y|z)$
4. $(\alpha x, y|z) = \alpha(x, y|z)$ untuk setiap $\alpha \in K$
5. $(x + \acute{x}, y|z) = (x, y|z) + (\acute{x}, y|z)$

$(\cdot, \cdot | \cdot)$ disebut hasil kali dalam-2 dan $(X, (\cdot, \cdot | \cdot))$ disebut dengan ruang hasil kali dalam-2.

Misalkan pada ruang hasil kali dalam didefinisikan $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ di ruang vektor K sedangkan pada ruang hasil kali dalam-2 didefinisikan $(x, y) = (x_1y_1 + x_2y_2), x, y \in R^2$ dengan menggunakan definisi

$$\begin{aligned}(x, y|z) &= \begin{vmatrix} (x, y) & (x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (x_1y_1 + x_2y_2) & (x_1z_1 + x_2z_2) \\ (z_1y_1 + z_2y_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Maka interpretasi ruang hasil kali dalam menjadi ruang hasil kali dalam-2 adalah

1. Akan dibuktikan bahwa pada ruang hasil kali $(x, y) = (y, x)$ menjadi

$(y, x|z) = (x, y | z)$ pada ruang hasil kali dalam-2 dengan sifat kesimetrian.

a. Ruang hasil kali dalam

$$\begin{aligned}(x, y) &= x_1y_1 + x_2y_2 \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 \\ &= (y, x) \text{ \{sifat kesimetrian\}}\end{aligned}$$

b. Ruang hasil kali dalam -2

Misalkan untuk sebarang $z \in R^2$

$$\begin{aligned}(x, y|z) &= \begin{vmatrix} (x, y) & (x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \text{ \{definisi ruang hasil kali dalam\}} \\ &= \begin{vmatrix} (x_1y_1 + x_2y_2) & (x_1z_1 + x_2z_2) \\ (z_1y_1 + z_2y_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix} \text{ \{penjabaran ruang hasil kali} \\ &\quad \text{dalam\}} \\ &= \begin{vmatrix} (y_1x_1 + y_2x_2) & (z_1x_1 + z_2x_2) \\ (y_1z_1 + y_2z_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix} \text{ \{penjabaran hasil kali} \\ &\quad \text{dalam, sifat kesimetrian berdasarkan ruang hasil kali dalam\}} \\ &= \begin{vmatrix} (y, x) & (z, x) \\ (y, z) & (z, z) \end{vmatrix} \text{ \{definisi pada hasil kali dalam-2\}} \\ &= (y, x)(z, z) - (z, x)(y, z) \text{ \{perkalian determinan\}} \\ &= (y, x)(z, z) - (y, z)(z, x) \text{ \{perkalian determinan, sifat} \\ &\quad \text{kesimetrian berdasarkan ruang hasil kali dalam\}}\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} (y, x) & (y, z) \\ (z, x) & (z, z) \end{vmatrix} \{ \text{definisi pada ruang hasil kali dalam-2} \}$$

$$= (y, x|z) \{ \text{kesimetrian pada ruang hasil kali dalam-2} \}$$

Terbukti bahwa $(x, y|z) = (y, x|z)$

Karena sifat kesimetrian berlaku pada ruang hasil kali dalam dan ruang hasil kali dalam-2 maka terbukti bahwa $(x, y) = (y, x)$ menjadi $(y, x|z) = (x, y|z)$.

2. Akan dibuktikan bahwa pada ruang hasil kali dalam $(x, y) = (y, x)$ menjadi $(x, x|z) = (z, z|x)$ pada ruang hasil kali dalam-2 dengan sifat kesimetrian.

a. Ruang hasil kali dalam

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$$

$$= y_1x_1 + y_2x_2$$

$$= (y, x) \{ \text{sifat kesimetrian} \}$$

b. Ruang hasil kali dalam-2

Misalkan untuk sebarang $z \in R^2$

$$(x, x|z) = \begin{vmatrix} (x, x) & (x, z) \\ (z, x) & (z, z) \end{vmatrix} \{ \text{definisi ruang hasil kali dalam-2} \}$$

$$= \begin{vmatrix} (x_1x_1 + x_2x_2) & (x_1z_1 + x_2z_2) \\ (z_1x_1 + z_2x_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix} \{ \text{perjabaran ruang hasil kali dalam} \}$$

$$= \begin{vmatrix} (x_1x_1 + x_2x_2) & (z_1x_1 + z_2x_2) \\ (x_1z_1 + x_2z_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix} \{ \text{sifat kesimetrian} \}$$

berdasarkan ruang hasil kali dalam}

$$= \begin{vmatrix} (x, x) & (z, x) \\ (x, z) & (z, z) \end{vmatrix} \{ \text{definisi pada ruang hasil kali dalam-2} \}$$

$$= (x, x)(z, z) - (z, x)(x, z) \{ \text{perkalian determinan} \}$$

$$\begin{aligned}
&= (z, z)(x, x) - (z, x)(x, z) \text{ {perkalian determinan, sifat}} \\
&\quad \text{kesimetrian berdasarkan ruang hasil kali dalam}} \\
&= \begin{vmatrix} (z, z) & (z, x) \\ (x, z) & (x, x) \end{vmatrix} \text{ {definisi ruang hasil kali dalam-2}} \\
&= (z, z|x) \text{ {kesimetrian pada ruang hasil kali dalam-2}}
\end{aligned}$$

Karena sifat kesimetrian berlaku pada ruang hasil kali dalam dan ruang hasil kali dalam-2 maka terbukti bahwa $(x, y) = (y, x)$ menjadi $(x, x|z) = (z, z|x)$.

3. Akan dibuktikan bahwa pada ruang hasil kali dalam $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$ menjadi $(x + x', y|z) = (x, y|z) + (x', y|z)$ pada ruang hasil kali dalam-2 dengan sifat penjumlahan.

- a. Ruang hasil kali dalam

$$\begin{aligned}
(x + z, y) &= (x_1 + z_1)y_1 + (x_2 + z_2)y_2 \\
&= x_1y_1 + z_1y_1 + x_2y_2 + z_2y_2 \\
&= x_1y_1 + x_2y_2 + z_1y_1 + z_2y_2 \\
&= (y, x) + (z, y) \text{ {sifat penjumlahan}}
\end{aligned}$$

- b. Ruang hasil kali dalam-2

$$(x + x', y|z) = (x, y|z) + (x', y|z)$$

Misalkan untuk sebarang $z \in R^2$

$$\begin{aligned}
(x + x', y|z) &= \begin{vmatrix} (x + x', y) & (x + x', z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \text{ {definisi ruang hasil kali dalam-2}} \\
&= \begin{vmatrix} (x, y) + (x', y) & (x, z) + (x', z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \text{ {sifat penjumlahan}} \\
&\quad \text{berdasarkan ruang hasil kali dalam}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} (x_1y_1 + x_2y_2) & (x_1z_1 + x_2z_2) + (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2) \\ (z_1y_1 + z_2y_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix} \\
&\quad \{\text{penjabaran ruang hasil kali dalam}\} \\
&= ((x_1y_1 + x_2y_2) + (\acute{x}_1y_1 + \acute{x}_2y_2))(z_1z_1 + z_2z_2) - \\
&\quad ((x_1z_1 + x_2z_2) + (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2))(z_1y_1 + z_2y_2) \{\text{perkalian} \\
&\quad \text{determinan}\} \\
&= ((x_1y_1 + x_2y_2)(z_1z_1 + z_2z_2) + (\acute{x}_1y_1 + \acute{x}_2y_2) \\
&\quad (z_1z_1 + z_2z_2)) - ((x_1z_1 + x_2z_2)(z_1y_1 + z_2y_2) + \\
&\quad (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2)(z_1y_1 + z_2y_2)) \{\text{perkalian determinan,} \\
&\quad \text{sifat penjumlahan berdasarkan ruang hasil kali dalam}\} \\
&= ((x_1y_1 + x_2y_2)(z_1z_1 + z_2z_2) - (x_1z_1 + x_2z_2) \\
&\quad (z_1y_1 + z_2y_2)) + ((\acute{x}_1y_1 + \acute{x}_2y_2)(z_1z_1 + z_2z_2) - \\
&\quad (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2)(z_1y_1 + z_2y_2)) \{\text{perkalian determinan}\} \\
&= \begin{vmatrix} (x_1y_1 + x_2y_2) & (x_1z_1 + x_2z_2) \\ (z_1y_1 + z_2y_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} (\acute{x}_1y_1 + \acute{x}_2y_2) & (\acute{x}_1z_1 + \acute{x}_2z_2) \\ (z_1y_1 + z_2y_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (x, y) & (x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\acute{x}, y) & (\acute{x}, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \{\text{definisi ruang hasil kali} \\
&\quad \text{dalam-2}\} \\
&= (x, y|z) + (\acute{x}, y|z) \{\{\text{sifat penjumlahan pada ruang hasil} \\
&\quad \text{kali dalam-2}\}
\end{aligned}$$

Karena sifat penjumlahan berlaku pada ruang hasil kali dalam dan ruang hasil kali dalam-2 maka terbukti $(x + z, y) = (y, x) + (z, y)$ menjadi $(x + \acute{x}, y|z) = (x, y|z) + (\acute{x}, y|z)$.

4. Akan dibuktikan bahwa pada ruang hasil kali dalam $(kx, y) = k(x, y)$ menjadi $(\alpha x, y|z) = \alpha (x, y|z)$ untuk setiap $\alpha \in K$ pada ruang hasil kali dalam-2 dengan sifat kehomogenan.

a. Ruang hasil kali dalam

$$\begin{aligned}(kx, y) &= (kx_1y_1) + (kx_2y_2) \\ &= k(x_1y_1) + k(x_2y_2) \\ &= k(x_1y_1 + x_2y_2) \\ &= k(x, y) \text{ \{sifat kehomogenan\}}\end{aligned}$$

b. Ruang hasil kali dalam-2

Misalkan untuk sebarang $z \in R^2$

$$\begin{aligned}(\alpha x, y|z) &= \begin{vmatrix} (\alpha x, y) & (\alpha x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \text{ \{definisi ruang hasil kali dalam-2\}} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha(x, y) & \alpha(x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \text{ \{kehomogenan berdasarkan ruang hasil kali} \\ &\quad \text{dalam\}} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha(x_1y_1 + x_2y_2) & \alpha(x_1z_1 + x_2z_2) \\ (z_1y_1 + z_2y_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix} \text{ \{penjabaran ruang hasil} \\ &\quad \text{kali dalam\}} \\ &= \alpha((x_1y_1 + x_2y_2)(z_1z_1 + z_2z_2)) - \alpha((z_1y_1 + z_2y_2)(z_1z_1 + z_2z_2)) \text{ \{perkalian determinan\}} \\ &= \alpha((x_1y_1 + x_2y_2)(z_1z_1 + z_2z_2) - (z_1y_1 + z_2y_2)(z_1z_1 + z_2z_2)) \text{ \{perkalian determinan, sifat kehomogenan} \\ &\quad \text{berdasarkan ruang hasil kali dalam\}} \\ &= \alpha \begin{vmatrix} (x_1y_1 + x_2y_2) & (x_1z_1 + x_2z_2) \\ (z_1y_1 + z_2y_2) & (z_1z_1 + z_2z_2) \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$= \alpha \begin{vmatrix} (x, y) & (x, z) \\ (z, y) & (z, z) \end{vmatrix} \{\text{definisi ruang hasil kali dalam-2}\}$$

$$= \alpha(x, y | z) \{\text{kehomogenan}\}$$

Karena sifat kehomogenan berlaku pada ruang hasil kali dalam dan ruang hasil kali dalam-2 maka terbukti bahwa $(kx, y) = k(x, y)$ menjadi $(\alpha x, y | z) = \alpha(x, y | z)$ untuk setiap $\alpha \in K$.

5. Akan dibuktikan bahwa pada ruang hasil kali dalam $(y, y) \geq 0$ dan $(y, y) = 0$ jika dan hanya jika $y = 0$ menjadi $(x, x | z) \geq 0$ dan $(x, x | z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier pada ruang hasil kali dalam-2 dengan sifat kepositifan.

- a. Ruang hasil kali dalam

$$\begin{aligned} (y, y) &= y_1 y_1 + y_2 y_2 \\ &= (y_1)^2 + (y_2)^2 \geq 0 \\ &= (y_1)^2 + (y_2)^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = y_2 = 0 \\ &\text{atau } y = (y_1, y_2) = 0 \{\text{sifat kepositifan}\} \end{aligned}$$

- b. Ruang hasil kali dalam-2

- i) Akan dibuktikan $(x, x | z) \geq 0$

$$\begin{aligned} (x, x | z) &= \begin{vmatrix} (x, x) & (x, z) \\ (z, x) & (z, z) \end{vmatrix} \{\text{definisi ruang hasil kali dalam-2}\} \\ &= \begin{vmatrix} (x_1 x_1 + x_2 x_2) & (x_1 z_1 + x_2 z_2) \\ (z_1 x_1 + z_2 x_2) & (z_1 z_1 + z_2 z_2) \end{vmatrix} \{\text{perjabaran hasil kali dalam,} \\ &\quad \text{komutatif perkalian bilangan riil}\} \\ &= (x_1 x_1 + x_2 x_2)(z_1 z_1 + z_2 z_2) - (x_1 z_1 + x_2 z_2) \\ &\quad (z_1 x_1 + z_2 x_2) \{\text{perkalian determinan}\} \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(z_1^2 + z_2^2) - (x_1 z_1 + x_2 z_2)(z_1 x_1 + z_2 x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1^2 z_1^2 + x_1^2 z_2^2 + x_2^2 z_1^2 + x_2^2 z_2^2) \\
&\quad - (x_1 z_1)^2 + x_1 z_1 \cdot x_2 z_2 + x_2 z_2 \cdot x_1 z_1 + (x_2 z_2)^2 \\
&= (x_1^2 z_1^2 + x_1^2 z_2^2 + x_2^2 z_1^2 + x_2^2 z_2^2) \\
&\quad - ((x_1 z_1)^2 + 2(x_1 z_1 \cdot x_2 z_2) + (x_2 z_2)^2) \\
&= (x_1 z_1)^2 + (x_1 z_2)^2 + (x_2 z_1)^2 + (x_2 z_2)^2 - 2(x_1 z_1 + x_2 z_2) \\
&= (x_1 z_2)^2 + (x_2 z_1)^2 - 2(x_1 z_1 + x_2 z_2) \\
&= (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Karena persamaan (3.3) bersifat kuadrat bilangan riil maka terbukti

bahwa $(x, x|z) \geq 0$

ii) Akan dibuktikan $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier

(\Rightarrow) Misalkan $(x, x|z) = 0$, dengan $x \neq 0$ dan $z \neq 0$

berdasarkan persamaan (3.3) $(x_1 z_2 - x_2 z_1)^2$

dengan kata lain $(x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 = 0$

maka $x_1 z_2 = x_2 z_1$

akan benar jika $z = cx$, untuk setiap z dan $x \in R^2$

Jadi x dan z bergantung linier

(\Leftarrow) Misalkan x dan z bergantung linier

berdasarkan persamaan (3.3) maka ada c sehingga

$$z = cx$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = cx_1 \text{ dan } z_2 = cx_2$$

maka

$$(x_1z_2 - x_2z_1)^2 = 0$$

$$(x_1(cx_2) - x_2(cx_1))^2 = 0$$

$$(cx_1x_2 - cx_2x_1)^2 = 0$$

Jadi berdasarkan persamaan (3.3) terbukti $(x, x|z) = 0$

Maka terbukti bahwa $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier

Berdasarkan a dan b maka terbukti bahwa $(x, x|z) \geq 0$ dan $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier {kepositifan}

Karena sifat kepositifan berlaku pada ruang hasil kali dalam dan ruang hasil kali dalam-2 maka terbukti bahwa $(y, y) \geq 0$ dan $(y, y) = 0$ jika dan hanya jika $y = 0$ menjadi $(x, x|z) \geq 0$ dan $(x, x|z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier.

Jadi terbukti bahwa keempat definisi pada ruang hasil kali dalam bila dijabarkan memenuhi kelima definisi pada ruang hasil kali dalam-2.

3.4 Kajian Keislaman tentang Ruang Hasil Kali Dalam-2

Benar kiranya jika al-Quran disebut sebagai mukjizat. Bagaimana tidak, ternyata ayat-ayat al-Quran yang diturunkan di abad ke 7 Masehi di mana ilmu pengetahuan belum berkembang (saat itu orang mengira bumi itu rata dan matahari mengelilingi bumi), sesuai dengan ilmu pengetahuan modern yang baru-baru ini ditemukan oleh manusia.

أَوَلَمْ يَرِ الَّذِينَ كَفَرُوا أَنَّ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضَ كَانَتَا رَتْقًا فَفَتَقْنَاهُمَا^ط وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ^ط

”Dan apakah orang-orang yang kafir tidak mengetahui bahwasannya langit dan bumi itu keduanya dahulu adalah suatu yang padu, kemudian Kami pisahkan antara keduanya [1]. Dan dari air Kami jadikan segala sesuatu yang hidup [2]. Maka mengapakah mereka tiada juga beriman![3]” (QS. al- Anbiyaa’/21: 30)

[1] Ada pula yang mengartikan dengan “melihat,” yakni apakah orang-orang kafir tidak melihat bahwa langit dan bumi keduanya sama-sama rekat (tidak terbelah), kemudian Kami belah langit sehingga menurunkan hujan, dan Kami belah bumi sehingga menumbuhkan tumbuh-tumbuhan...dst.” Bukankah yang mengadakan awan di langit yang sebelumnya bersih tanpa gumpalan dan menyimpan di dalamnya air yang banyak, lalu diarahkan ke negeri yang mati yang sebelumnya kering dan berhamburan debu, kemudian diturunkan hujan sehingga tumbuh berbagai tanaman dengan beraneka macam menunjukkan bahwa Allah adalah yang haq dan selain-Nya *bathil*, dan bahwa Dia mampu menghidupkan orang yang telah mati, dan bahwa Dia Maha Pengasih lagi Maha Penyayang!

[2] Yakni lalu Kami jadikan langit berjumlah tujuh, dan bumi pun tujuh. Atau maksudnya, dibelah langit yang sebelumnya tidak menurunkan hujan menjadi dapat menurunkan hujan, dan dibelahnya bumi yang sebelumnya tidak dapat menumbuhkan menjadi dapat menumbuhkan.

[3] Dengan iman yang benar tanpa ada keraguan dan kemusyrikan di dalamnya.

Saat itu orang tidak ada yang tahu bahwa langit dan bumi itu awalnya satu. Ternyata ilmu pengetahuan modern seperti teori Big Bang menyatakan bahwa alam semesta (bumi dan langit) itu dulunya satu. Kemudian akhirnya pecah

menjadi sekarang ini. Kemudian ternyata benar segala yang bernyawa, termasuk tumbuhan bersel satu pasti mengandung air dan juga membutuhkan air. Keberadaan air adalah satu indikasi adanya kehidupan di suatu planet. Tanpa air, mustahil ada kehidupan. Inilah satu kebenaran ayat al-Quran (Feed Burner, 2013). Tatkala merujuk kepada matahari dan bulan di dalam al-Quran, ditegaskan bahwa masing-masing bergerak dalam orbit atau garis edar tertentu.

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ ﴿٣٣﴾

“Dan Dialah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. Masing-masing dari keduanya itu beredar di dalam garis edarnya” (QS. al-Anbiyaa’/21: 33)

Disebutkan pula dalam ayat yang lain bahwa matahari tidaklah diam, tetapi bergerak dalam garis edar tertentu:

وَالشَّمْسُ تَجْرِي لِمُسْتَقَرٍّ لَهَا ۚ ذَلِكَ تَقْدِيرُ الْعَزِيزِ الْعَلِيمِ ﴿٣٨﴾

“Dan matahari berjalan di tempat peredarannya. Demikianlah ketetapan Yang Maha Perkasa lagi Maha Mengetahui.” (QS. Yaasin/36:38)

Dalam al-Quran, yang diturunkan 14 abad silam di saat ilmu astronomi masih terbelakang, mengembangkannya alam semesta digambarkan sebagaimana berikut:

وَالسَّمَاءَ بَنَيْنَاهَا بِأَيْدٍ وَإِنَّا لَمُوسِعُونَ ﴿٤٧﴾

“Dan langit itu Kami bangun dengan kekuasaan (Kami) dan sesungguhnya Kami benar-benar meluaskannya.” (QS. Azd Dzariyaat/51: 47)

Penjelasan dari surat di atas tentang terjadinya malam dan siang, matahari dan bulan tersebut menginspirasi penulis untuk menginterpretasi ruang hasil kali dalam menjadi ruang hasil kali dalam-2. Yaitu dengan menguraikan sifat-sifat ruang hasil kali dan ruang hasil kali dalam-2 beserta contoh-contohnya, seperti halnya Allah Swt. yang menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan yang saat itu orang tidak ada yang tahu bahwa langit dan bumi itu awalnya satu.

Ternyata ilmu pengetahuan modern seperti teori Big Bang menyatakan bahwa alam semesta (bumi dan langit) itu dulunya satu. Kemudian akhirnya pecah menjadi sekarang ini. Sejak terjadinya peristiwa Big Bang, alam semesta telah mengembang secara terus-menerus dengan kecepatan maha dahsyat. Para ilmuwan menyamakan peristiwa mengembangnya alam semesta dengan permukaan balon yang sedang ditiup.

Hingga awal abad ke-20, satu-satunya pandangan yang umumnya diyakini di dunia ilmu pengetahuan adalah bahwa alam semesta bersifat tetap dan telah ada sejak dahulu kala tanpa permulaan. Namun, penelitian, pengamatan, dan perhitungan yang dilakukan dengan teknologi modern, mengungkapkan bahwa alam semesta sesungguhnya memiliki permulaan, dan ia terus-menerus mengembang. Contohnya seorang ilmuwan Jerman bernama Alferd Wegener mengemukakan bahwa benua-benua pada permukaan bumi menyatu pada masa-masa awal bumi, namun kemudian bergeser ke arah yang berbeda-beda sehingga terpisah ketika mereka bergerak saling menjauhi. Sebuah alam semesta, di mana segala sesuatunya terus bergerak menjauhi satu sama lain dan pengamatan yang dilakukan di tahun-tahun berikutnya memperkokoh fakta bahwa alam semesta terus mengembang. Seperti halnya dulu orang hanya mengenal sifat-sifat ruang hasil kali dalam dengan ilmu pengetahuan yang terus berkembang maka orang juga akan mengenal tentang ruang hasil kali dalam-2.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa:

Dalam aljabar linier, suatu vektor u dan v pada ruang vektor V riil yang yang ditulis sebagai (u, v) disebut hasil kali dalam jika memenuhi (1) aksioma kesimetrisan, (2) aksioma penjumlahan, (3) aksioma kehomogenan dan (4) aksioma kepositifan, maka ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam disebut ruang hasil kali dalam.

Misalkan X adalah ruang linier dimensi lebih besar dari 1 untuk semua K (baik R atau C). Fungsi $(\cdot, \cdot | \cdot): X \times X \times X \rightarrow K$ disebut hasil kali dalam-2 jika kondisi berikut berlaku:

1. $(x, x | z) \geq 0$ dan $(x, x | z) = 0$ jika dan hanya jika x dan z bergantung linier
2. $(x, x | z) = (z, z | x)$
3. $(y, x | z) = (x, y | z)$
4. $(\alpha x, y | z) = \alpha(x, y | z)$ untuk setiap $\alpha \in K$
5. $(x + \acute{x}, y | z) = (x, y | z) + (\acute{x}, y | z)$

maka ruang vektor dengan dimensi paling kecil 2 dengan memenuhi kelima aksioma di atas disebut ruang hasil kali dalam-2.

Jika x dan y adalah vektor-vektor yang memenuhi aksioma ruang hasil kali dalam-2 (x, y) pada K , maka x dan y juga memenuhi aksioma hasil kali dalam (x, y)

pada K karena ruang hasil kali dalam-2 merupakan penjabaran dari ruang hasil kali dalam. Sedangkan Jika x dan y adalah vektor-vektor yang memenuhi aksioma hasil kali dalam (x,y) pada K , maka x dan y belum tentu memenuhi aksioma hasil kali dalam (x,y) pada K . Karena ruang hasil kali dalam-2 X pada suatu ruang vektor dengan dimensi paling kecil-2. Maka keempat aksioma pada ruang hasil kali dalam berlaku pada ruang hasil kali dalam-2.

4.2 Saran

Pada pembahasan skripsi ini, ruang hasil kali dalam-2 dalam ini ruang lingkungannya hanya pada bilangan riil. Dan teorema-teorema yang dipilih hanya teorema yang terbatas pada hasil kali dalam. Oleh karena itu, dalam pembahasan skripsi yang berkaitan dengan ruang hasil kali dalam-2 lainnya diharapkan ruang lingkungannya lebih luas.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN PRESS.
- Anton, H. 1997. *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H. 2000a. *Aljabar Linier Elementer*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H. 2000b. *Dasar-Dasar Aljabar Linier Jilid 1*. Batam: Interaksara.
- Arnamer, F. 2012. *Surah Al-Insyirah*, (Online), (<http://filyarnmaer-uir-pbi6a.blogspot.com/2012/03/surah-al-insyirah.html>), diakses 16 Maret 2012.
- Azzam, A. 2010. *Hadis: Tuntutlah Ilmu Sejak dalam Buaian Hingga Liang Lahat*, (<https://syukrillah.wordpress.com/2010/08/29/ternyata-bukan-hadis-shohih/>), (Online), diakses 29 Agustus 2010.
- Cullen, C.G. 1993. *Aljabar Linear Dengan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia.
- Dwiputriana, R. 2013. *Emera, surat: Al-Baqarah Ayat: 141-145*, (Online), (<http://emera06.blogspot.com/2011/12/surat-al-baqarah-ayat-141-145-21.html>), diakses 21 Desember 2011.
- FeedBurner. 2013. *Tafsir Al Quran Al Karim, Tafsir Al Anbiya Ayat 21-35*, (Online), (<http://www.tafsir.web.id/2013/03/tafsir-al-anbiya-ayat-21-35.html>), diakses 25 Maret 2013.
- Hasan, I. 2002. *Metodologi Penelitian dan Aplikasinya*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- Imrona, M. 2009. *Aljabar Linear Dasar*. Jakarta: Erlangga.
- Kusumawati, R. 2009. *Aljabar Linear & Matriks*. Malang: UIN-Press.
- Pamuntjak. 1987. *Aljabar Linear II*. Jakarta: Karunika.
- Parzynski, W.R dan Zipse, P.W., dkk. 1982. *Introduction to Mathematical Analysis*. Tokyo: McGraw-Hill, Inc.
- Rafflesia, U. 2008. *Kekonvergenan Suatu Barisan pada Ruang Norm-2*, 4 (1): 333-336.
- Soemartojo, N. 1988. *Analisa Vektor*. Jakarta: Erlangga.
- Suminto, H. 2000a. *Dasar-Dasar Aljabar Linier Edisi 7 jilid 1*. Batam: Interaksara.

Suminto, H. 2000b. *Dasar-Dasar Aljabar Linier Edisi 7 jilid 2*. Batam: Interaksara.

Tazi, I. 2008. *Matematika Untuk Sains dan Teknik*. Malang: UIN-Press.

