

**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREY-PREDATOR* DENGAN  
PEMANENAN KONSTAN PADA IKAN *PREY***

**SKRIPSI**

**OLEH  
LULUK IANATUL AFIFAH  
NIM. 10610091**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREY-PREDATOR* DENGAN  
PEMANENAN KONSTAN PADA IKAN *PREY***

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh**

**Luluk Ianatul Afifah**

**NIM. 10610091**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREY-PREDATOR* DENGAN  
PEMANENAN KONSTAN PADA IKAN *PREY***

**SKRIPSI**

Oleh  
**Luluk Ianatul Afifah**  
**NIM. 10610091**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 11 Desember 2014

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Usman Pagalay, M.Si  
NIP. 19650414 200312 1 001

Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**ANALISIS KESTABILAN MODEL *PREYDATOR-PREY* DAN MODEL  
PEMANENAN PADA IKAN *PREY***

**SKRIPSI**

Oleh  
**Luluk Ianatul Afifah**  
**NIM. 10610091**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 07 Januari 2015

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si .....

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd .....

Sekretaris Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si .....

Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si .....

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001



## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda di bawah ini:

Nama : Luluk Ianatul Afifah

NIM : 10610099

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Model *Prey-predator* dengan  
Pemanenan Konstan pada Ikan *prey*.

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Januari 2015

Yang membuat pernyataan,

Luluk Ianatul Afifah

NIM. 10610091

## MOTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾ فَإِذَا فَرَغْتَ فَانصَبْ ﴿٧﴾

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain”.

(QS. al-Insyrah /94:5-7)



## PERSEMBAHAN

الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

Dengan segenap rasa cinta kasih skripsi ini penulis persembahkan kepada keluarga besar penulis terutama ayah tercinta Nur Hamid dan ibunda tercinta Siti Maysaroh dengan rajutan kasih sayang dan alunan doa yang selalu mengiringi penulis tanpa lelah, serta kakak Izzu Farida, S.Fam, Apt., adik penulis Ahmad Abid dan Nasrul Ibad yang selalu memberi semangat serta turut mendoakan penulis, terima kasih untuk semuanya.

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarokatuh*

Puji syukur kepada Allah Swt. berkat rahmat dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi membimbing, mengarahkan, menasehati serta memberi motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah membimbing dan berbagi ilmu kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen terima kasih atas ilmu dan bimbingan yang telah diberikan pada penulis.

7. Bapak, ibu dan saudara-saudara penulis yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, doa, serta motivasi kepada penulis sampai saat ini.
8. Semua teman–teman Matematika angkatan 2010, “Kelas Infnit ”, dan teman-teman Matematika Terapan terutama Binti Tsamrotul, Afidah Karimatul, Siti Muyassar, Tufina Kurnisih, Rofiatul Jamilah, Khairul Umam, dan Nur Saidah. Terima kasih atas semua pengalaman, motivasi, serta doanya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat penulis terutama Amirrudin Musa, Fina Lutfiana, Nur Desianti, Septia Ningsih, “Padepokan Pagar Nusa”, “Kos Arkesa”, dan “Pembina Ma’had MTsN Babat”. Terima kasih atas semua pengalaman, motivasi, serta doanya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat bagi semua pihak dan semoga Allah Swt. membalas kebaikan mereka semua.

*Wassalamu’alaikum Wrarohmatullahi Wabarokatuh*

Malang, Januari 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>ملخص</b> .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	4
1.4 Manfaat Penelitian .....	5
1.5 Batasan Masalah .....	5
1.6 Metode Penelitian .....	6
1.7 Sistematika Penulisan .....	6
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Model <i>Prey-predator</i> .....	8
2.2 Model Pemanenan Ikan .....	10
2.3 Linierisasi PDB Autonomous .....	13
2.4 Titik Keseimbangan Sistem Autonomous .....	14
2.5 Kestabilan pada Titik Keseimbangan dari Sistem Autonomous .....	15
2.6 Potret Fase dari Sistem Autonomous .....	21
2.7 Kajian Al-Quran Mengenai Kestabilan dan Pemanenan Ikan .....	27

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1 Model <i>Prey-predator</i> dengan Pemanenan Konstan pada Ikan <i>Prey</i> .	30
3.2 Besaran Parameter Model .....	32
3.3 Penentuan Nilai Pemanenan Maksimum ( $h_{maks}$ ) .....	32
3.4 Analisis Model <i>Prey-predator</i> dengan pemanenan Konstan pada Ikan <i>Prey</i> Ketika Salah Satunya Tidak Ada .....	35
3.5 Linierisasi Model .....	37
3.6 Menentukan Titik Kesetimbangan .....	38
3.7 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan .....	41
3.8 Simulasi .....	46

### **BAB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan .....	55
4.1 Saran .....	56

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	57
-----------------------------	----

<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b> .....	59
--------------------------------	----

<b>RIWAYAT HIDUP</b> .....	67
----------------------------	----

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Jenis-jenis Kestabilan dari Titik Kesetimbangan (0,0) .....	17
Tabel 3.2 Nilai Awal yang Digunakan untuk Model .....	32
Tabel 3.3 Nilai Parameter untuk Model .....	32



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Grafik Pertumbuhan Maksimum Populasi Ikan <i>Prey</i> dengan $r = 0.8$ dan $K = 100$ .....	11
Gambar 2.2	Perilaku Titik <i>Node</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Real dan Bertanda Sama .....	18
Gambar 2.3	Perilaku Titik <i>Saddle</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Real dan Berbeda Tanda .....	19
Gambar 2.4	Perilaku Titik <i>Star</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Kembar .....	19
Gambar 2.5	Perilaku Titik <i>Spiral</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Kompleks .....	20
Gambar 2.6	Perilaku Titik <i>Center</i> dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Imajiner .....	20
Gambar 2.7	Trayektori Titik Simpul ( <i>Node</i> ) Tidak Stabil pada Potret Fase .....	22
Gambar 2.8	Trayektori Titik Pelana ( <i>Saddle</i> ) Tidak Stabil pada Potret Fase .....	23
Gambar 2.9	Trayektori Titik <i>Star</i> Stabil pada Potret Fase .....	24
Gambar 2.10	Trayektori Titik <i>Sepiral</i> Tidak Stabil pada Potret Fase .....	25
Gambar 2.11	Trayektori Titik Pusat ( <i>Center</i> ) Stabil pada Potret Fase .....	26
Gambar 3.1	Diagram Model <i>Prey-predator</i> dengan Pemanenan Konstan Ikan <i>Prey</i> .....	30
Gambar 3.2	Model <i>Prey-predator</i> dengan Pemanenan Konstan Ikan <i>Prey</i> Ketika Tidak Ada Populasi Ikan <i>Predator</i> .....	35
Gambar 3.3	Model <i>Prey-predator</i> dengan Pemanenan Konstan Ikan <i>Prey</i> Ketika Tidak Ada Populasi Ikan <i>Prey</i> .....	36
Gambar 3.4	Bidang Fase (a) dan Grafik Perilaku (b) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai $h = 0$ .....	46
Gambar 3.5	Bidang Fase (c) dan Grafik Perilaku (d) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai $h = 5$ .....	47
Gambar 3.6	Bidang Fase (e) dan Grafik Perilaku (f) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai $h = 10$ .....	48

Gambar 3.7	Bidang Fase (g) dan Grafik Perilaku (h) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai $h = 16.25$ .....	49
Gambar 3.8	Bidang Fase (i) dan Grafik Perilaku (j) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai $h = 16.35$ .....	50
Gambar 3.9	Bidang Fase (k) dan Grafik Perilaku (l) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai $h = 16.45$ .....	51
Gambar 3.10	Bidang Fase (m) dan Grafik Perilaku (n) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai $h = 18$ .....	52
Gambar 3.11	Bidang Fase (o) dan Grafik Perilaku (p) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai $h = 20$ .....	53



## ABSTRAK

Afifah, Luluk Ianatul. 2015. **Analisis Kestabilan Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Abdul Aziz, M.Si.

**Kata kunci:** model *prey-predator*, pemanenan maksimum, kestabilan

Model *Prey-predator* merupakan salah satu model interaksi antara dua jenis spesies yang berbentuk persamaan diferensial biasa nonlinier. Tujuan dari penelitian ini yaitu untuk menganalisis model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* dan melakukan interpretasi pada model tersebut berdasarkan simulasi yang dilakukan. Dengan menggunakan nilai pemanenan  $0 \leq h \leq h_{maks}$ , dimana  $h_{maks}$  merupakan nilai pemanenan maksimum. Maka didapatkan lima titik kesetimbangan yang terdapat satu titik kesetimbangan yang stabil dengan jenis titik simpul dan jenis kestabilan berupa stabil asimtotik. Dari simulasi yang dilakukan dengan tiga kondisi nilai pemanenan yaitu ketika  $h < h_{maks}$ ,  $h = h_{maks}$  dan  $h > h_{maks}$ . Maka dapat disimpulkan bahwa jika nilai pemanenan melebihi nilai pemanenan maksimum maka model tersebut tidak stabil dan populasi ikan *prey* akan punah dan diikuti oleh populasi ikan *predator*. Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan analisis pada model *prey-predator* dengan memberikan perlakuan pemanenan berupa konstan pada kedua spesies dan selain itu juga dengan memberikan perlakuan pemanenan berupa fungsi pemanenan kepada salah satu spesies atau kedua spesies.

## ABSTRACT

Afifah, Luluk Ianatul. 2015. **Stability Analysis of Prey-predator Model with Constant Harvesting of Prey Fish**. Skripsi. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, the State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Abdul Aziz, M.Si.

**Keywords:** *prey-predator* model, maximum harvesting, stability

A *prey-predator* model is one of interaction models between the two species populations in the form of system of nonlinear differential equations. The aim of this study is to analyze a prey-predator model with harvesting at the prey and interpret the model based on simulation. The value of the harvesting used is  $0 \leq h \leq h_{maks}$ , where  $h_{maks}$  is maximum value of the Harvesting. Then there are five equilibrium points obtained in which there is one stable point in type node point and the type of asymptotic stability. The results of the simulations, simulation done by three conditions of the harvesting is  $h < h_{maks}$ ,  $h = h_{maks}$  and  $h > h_{maks}$ . Then we can conclude that if the value of the harvesting exceeds maximum value of the harvesting then the model was unstable and the population of prey will that will be followed by the extinction of predator fish. Further research can be done in a *prey-predator* model with a given treatment harvesting constant to the two of them and what is treatment in the form of a harvesting function for one or two species.

## ملخص

عفيفة، لولو إعانة. ٢٠١٥. تحليل الاستقرار نموذج فريسة-المفترس مع حصاد المستمر. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا . جامعة الدولة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١)الدكتور عثمان فاغلي الماجستير(٢)عبد العزيز الماجستير

## الكلمات الرئيسية : نماذج فريس- المفترس، أقصى حصاد، استقرار

نماذج فريسة-المفترس هي واحدة من نماذج للتفاعل بين النوعين في شكل غير المعادلات التفاضلية العادية الخطية. والغرض من هذه الدراسة هو تحليل نماذج فريسة-المفترس مع حصاد مستمر الأسماك فريسة وتفسير نموذج يقوم على المحاكاة التي أجريت. باستخدام قيمة الحصاد  $0 \leq h \leq h_{maks}$ ، التي  $h_{maks}$  قيمة الحد الأقصى للحصاد. ثم حصل على خمس نقاط التوازن أن هناك نقطة توازن مستقرة مع نوع العقد ونوع من الاستقرار في شكل مستقر مقارب. من المحاكاة التي أجريت مع ثلاثة شروط، وهي عندما تكون قيمة الحصاد  $h < h_{maks}$  و  $h = h_{maks}$  و  $h > h_{maks}$ . ويمكن أن نخلص إلى أنه إذا كانت قيمة حصاد تتجاوز قيمة استخراج الحد الأقصى لهذا النموذج هو سيصبح أعداد الأسماك فريسة غير مستقر انقرضت وتليها أعداد الأسماك المفترسة. في إجراء مزيد من البحوث يمكن القيام به على تحليل نماذج فريسة-المفترس مع العلاج الحصاد أو يكون ثابتا في كل الأنواع وبالإضافة إلى ذلك فإنه يوفر أيضا وظائف مثل العلاج الحصاد لنوع واحد أو نوعين.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Semua makhluk hidup di dunia ini melakukan interaksi baik secara positif maupun secara negatif untuk bertahan hidup. Interaksi yang terjadi antara individu satu dengan individu yang lain baik sesama jenis spesies maupun berbeda jenis spesies. Salah satu bentuk interaksi pada makhluk hidup yaitu saling memangsa antara spesies satu dengan lainnya demi kelangsungan hidupnya. Dalam matematika model tersebut dinamakan model *prey-predator* yang diperkenalkan oleh Vito Volterra atau lebih dikenal dengan model *Lotka-Volterra*.

Menurut Iswanto (2012:135), dalam model *prey-predator* terdapat dua jenis sistem interaksi. Pertama yaitu jenis sistem interaksi antara dua spesies yang salah satunya dimangsa. Dalam kasus ini, interaksi tersebut yaitu ikan yang lebih kecil merupakan ikan *prey* (mangsa) dimangsa oleh ikan yang lebih besar yang merupakan ikan *predator* (pemangsa). Kemudian jenis sistem interaksi kedua yaitu adanya persaingan dalam memperebutkan satu spesies mangsa. Dalam kasus ini, interaksi tersebut yaitu ikan yang lebih kecil merupakan ikan *prey* diburu oleh dua *predator*, dengan *predator* pertama yaitu ikan yang lebih kecil dan *predator* yang kedua yaitu pemanenan yang dilakukan oleh nelayan.

Terdapat asumsi dasar mengenai kasus tersebut yaitu populasi ikan *prey* tumbuh secara eksponensial jika tidak dipengaruhi oleh ikan *predator*. Untuk populasi ikan *predator* dipengaruhi faktor predasi antara ikan *prey* dan ikan *predator*. Predasi merupakan persaingan antara ikan *predator* dalam

memperebutkan ikan *prey* demi mempertahankan hidupnya. Dengan adanya predasi maka populasi dari ikan *prey* akan terkontrol dan untuk mengontrol tingkat predasi agar tidak menyebabkan terjadinya kepunahan pada kedua spesies tersebut, maka diberikan perlakuan pemanenan pada populasi ikan *prey* secara teratur. Namun jika pemanenan terlalu tinggi, maka akan menyebabkan kepunahan.

Pada kasus ini pemanenan yang dilakukan pada populasi ikan *prey* berupa konstan. Menurut Idels dan Wang (2008:3), pemanenan yang berupa konstan pada ikan tidak mengalami kenaikan maupun penurunan disetiap tahunnya. Dalam penelitian ini diasumsikan pemanenan yang dilakukan dapat mendapatkan hasil yang maksimum. Dalam usaha pemanenan yang harus diutamakan adalah pemanenan yang tidak menyebabkan kepunahan pada spesies ikan tersebut.

Terdapat salah satu konsep pemanenan yaitu pemanenan maksimum disebut juga sebagai *Maximum Sustainable Yield* (MSY). Menurut Hertini dan Gusriani (2013:308), secara teoritis MSY merupakan jumlah tangkapan ikan *predator* terbesar yang dapat diambil dari persediaan suatu jenis ikan *prey* dalam jangka waktu yang tak terbatas. MSY bertujuan untuk membatasi nilai pemanenan agar tidak terjadi pemanenan yang berlebihan (eksploitasi).

Eksplorasi merupakan suatu pemanfaatan sumber daya alam secara berlebihan yang dapat merusak alam. Sesungguhnya Allah Swt. tidak menyukai orang yang berlebih-lebihan dalam firman-Nya pada surat al-A'raaf/7:31 yaitu:

يٰۤاٰدَمُ خُذُوْا زِيْنَتَكُمْ عِنْدَ كُلِّ مَسْجِدٍ وَكُلُوْا وَاشْرَبُوْا وَلَا تُسْرِفُوْا ۗ اِنَّهٗ لَا يُحِبُّ الْمُسْرِفِيْنَ



“Hai anak Adam, pakailah pakaianmu yang indah di setiap (memasuki) masjid, makan dan minumlah, dan janganlah berlebih-lebihan. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berlebih-lebihan”. (QS. al-A'raaf/7:31)

Dari ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah Swt. tidak menyukai orang yang berlebih-lebihan baik pada pakaian, makanan maupun minuman. Berlebih-lebihan dalam hal ini dapat diartikan yang lebih luas yaitu berlebih-lebihan dalam segala hal. Seperti dalam kasus ini berlebih-lebihan dalam memanen ikan yang dapat menyebabkan ketidakseimbangan ekosistem.

Penelitian terdahulu oleh Hertini dan Gusriani (2013:307-311) tentang *Maximum Sustainable Yield* (MSY) pada perikanan dengan struktur *prey-predator*, terdapat dua perlakuan pemanenan yaitu pemanenan yang dilakukan pada populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* kemudian didapatkan hasil pemanenan maksimum pada populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* secara analitik.

Penelitian yang dilakukan oleh Dwaradi (2011:15) tentang analisis model mangsa-pemangsa Michaelis-Menten dengan pemanenan konstan pada populasi *prey*. Pada penelitian tersebut diperoleh nilai pemanenan maksimum sebesar  $1/4$  dari populasi ikan *prey*. Jika pemanenan yang dilakukan melebihi nilai pemanenan maksimum maka model tidak akan stabil.

Penelitian yang dilakukan oleh Kar dan Chakraborty (2010:318-332) tentang *Effort Dynamics in a Prey-Predator Model with Harvesting*. Pada penelitian tersebut telah membahas kestabilan model *prey-predator* dengan perlakuan pemanenan yang berupa fungsi pada populasi ikan *prey* dan didapatkan hasil kestabilannya. Sedangkan dalam penelitian tersebut belum dibahas mengenai model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey*.

Berdasarkan uraian yang telah dijabarkan maka dalam penelitian ini, penulis menganalisis kestabilan dan membuat simulasi dari model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* berdasarkan model dari Kar dan Cakrabouty (2010: 312-322). Judul penelitian ini yaitu “Analisis Kestabilan Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey*”.

### 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijabarkan, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana analisis kestabilan model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey*?
2. Bagaimana interpretasi model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* berdasarkan simulasinya?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah pada penelitian ini, maka tujuan penelitian ini yaitu:

1. Untuk menganalisis kestabilan model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey*.
2. Untuk interpretasi model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* berdasarkan simulasinya.

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Pada penelitian yang dilakukan diharapkan dapat bermanfaat sebagai berikut:

1. Bagi penulis diharapkan mampu mengetahui, menelaah, memahami serta menganalisis pemodelan matematika terutama model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* dan mengaplikasikannya ke kasus lain.
2. Bagi pembaca dapat dijadikan informasi serta motivasi dalam pengembangan model tersebut dan penerapannya dalam bidang matematika maupun bidang perikanan khususnya dalam memanen ikan.

#### 1.5 Batasan Masalah

Agar pembahasan tidak melebar, maka penulis membatasi permasalahan yang dibahas pada penelitian ini yaitu:

1. Pada penelitian ini peneliti hanya meneliti tentang dua sistem persamaan dari model *prey-predator* dengan pemanenan pada ikan *prey* yang sesuai pada jurnal dari Kar dan Chakraborty (2010:318-332) yang hanya berlaku di perairan umum. Persamaan yang digunakan yaitu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{a + x(t)} - h$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -by(t) + \frac{\beta \alpha x(t)y(t)}{a + x(t)} - \gamma y^2(t)$$

dengan nilai awal  $x(0) \geq 0, y(0) \geq 0$

2. Pada penelitian ini yang dimaksud pemanenan konstan pada ikan *prey* adalah pemanenan yang berupa nilai konstanta  $h$  yang ditentukan dengan asumsi

nilai pemanenan yaitu  $0 \leq h \leq h_{maks}$ , dimana  $h_{maks}$  merupakan nilai pemanenan maksimum pada populasi ikan *prey*.

### 1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dipakai dalam penelitian ini yaitu metode studi pustaka, literatur tentang model *prey-predator* dan analisis kestabilannya. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini yaitu:

1. Mengkaji model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey*.
2. Menentukan nilai pemanenan maksimum.
3. Menganalisis model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* ketika salah satunya tidak ada.
4. Melakukan linierisasi pada model.
5. Menentukan titik kesetimbangan.
6. Menganalisis kestabilan pada titik kesetimbangan.
7. Melakukan simulasi.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada penelitian ini dibagi menjadi empat bab yaitu:

#### Bab I Pendahuluan

Bab ini menguraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian dan sistematika penulisan.

#### Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menguraikan tentang model *prey-predator*, model pemanenan, linierisasi PDB autonomous, titik kesetimbangan sistem autonomous, kestabilan pada titik kesetimbangan dari sistem autonomous, potret fase dari sistem autonomous dan kajian al-Quran tentang kestabilan dan pemanenan ikan.

### Bab III Pembahasan

Bab ini menguraikan tentang model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey*, besaran parameter model, penentuan nilai maksimum pemanenan ( $h_{maks}$ ), linierisasi model, menentukan titik kesetimbangan, analisis kestabilan pada titik kesetimbangan, kemudian membuat simulasi dan menginterpretasikan hasil simulasi tersebut.

### Bab IV Penutup

Bab ini menyimpulkan tentang hasil pembahasan dari penelitian yang telah dilakukan dan saran dari penulis.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Model *Prey-predator*

Menurut Dwaradi (2011:3), model *prey-predator* juga dikenal sebagai model *Lokta-Volterra*. Model ini secara umum diasumsikan berdasarkan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Dalam keadaan tanpa *prey*, lingkungan hidup populasi *prey* sangat ideal sehingga perkembangan tidak terbatas.
2. Pertumbuhan *prey* juga ideal, kecuali terdapat kendala makan.
3. Laju mangsa proporsional dengan laju pertemuan antara *prey* dan *predator*.
4. Laju kematian *predator* adalah konstan, tidak terpengaruh terhadap kepadatan dan umur *prey*.
5. Efisiensi *predator* tidak tergantung umur *prey* dan *predator*.
6. Efisiensi penggunaan *prey* sebagai makanan *predator* untuk bereproduksi adalah konstan dan tidak tergantung umur dan kepadatan *predator*.
7. Gerakan dan kontak *prey* dan *predator* bergantung secara acak. Setiap individu *prey* memiliki peluang yang sama untuk dimangsa.
8. Waktu yang digunakan *predator* untuk memangsa diabaikan.
9. Kepadatan *prey* tidak mempengaruhi peluang pemangsaan.
10. Kepadatan *predator* tidak mempengaruhi peluang *predator* untuk memangsa.
11. Keadaan lingkungan adalah homogen.

Menurut Redjeki (2009:49) pada model *prey-predator*, misalkan  $x(t)$  menyatakan banyaknya populasi *prey* (mangsa) pada saat  $t$  dan  $y(t)$  menyatakan banyaknya populasi *predator* pada saat  $t$ . Jika populasi *prey* dan *predator* tidak saling berinteraksi maka model pertumbuhan masing-masing yaitu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -by(t)$$

dengan  $a$  merupakan konstanta pertumbuhan dari populasi *prey* dan  $b$  konstanta kematian dari populasi *predator*. Jika populasi *prey* dan *predator* saling berinteraksi, maka populasi *prey* akan berkurang karena dimakan oleh populasi *predator*. Adanya interaksi antara populasi *prey* dan *predator* ( $p$ ) mengakibatkan berkurangnya populasi *prey*, akan tetapi populasi *predator* akan bertambah akibat adanya interaksi tersebut, sehingga model tersebut yaitu:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - px(t)y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -by(t) + px(t)y(t)$$

Menurut Finizio dan Ladas (1988:304), model *prey-predator* merupakan sistem persamaan nonlinier dan tidak ada cara yang diketahui untuk menyelesaikan secara eksplisit, meskipun demikian dimungkinkan dengan menggunakan teori kualitatif mengenai sistem semacam itu. Menurut Waluya (2006:174), terdapat dua kunci konsep dalam sistem nonlinier yang menentukan semua hasil dinamik. Dua konsep tersebut adalah titik kesetimbangan (titik *equilibrium*) dan kestabilan.

Menurut Dwaradi (2011:4), model *Lokta-Volterra* layak digunakan jika interaksi yang terjadi hanya intraspecies. Intraspecies dapat diartikan interaksi yang terjadi antara spesies satu dengan spesies yang lain. Model ini layak digunakan dalam kehidupan nyata dengan tidak terbatasnya kapasitas mangsa. Jika model ini terdapat keterbatasan kapasitasnya, maka model ini tidak layak dapat digunakan. Pada penelitian ini akan digunakan model *Lokta-Volterra* yaitu model *prey-predator* dengan adanya perlakuan pemanenan pada populasi *prey*.

## 2.2 Model Pemanenan Ikan

Menurut Verhust pada buku Iswanto (2012:136) menyatakan bahwa laju pertumbuhan perkapita bersih (laju kelahiran dikurangi laju kematian) harus menurun sepanjang  $N(t)$  mendekati nilai daya dukung kapasitas  $K$ , dan menjadi negatif ketika  $N(t)$  melebihi  $K$ . Fungsi yang paling mudah untuk menggambarkan model tersebut adalah  $r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ , dimana  $r$  merupakan konstanta positif laju pertumbuhan populasi. Dengan menggunakan asumsi ini maka laju pertumbuhan bersih perkapita, akan mendapatkan persamaan sebagai berikut

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \quad (2.1)$$

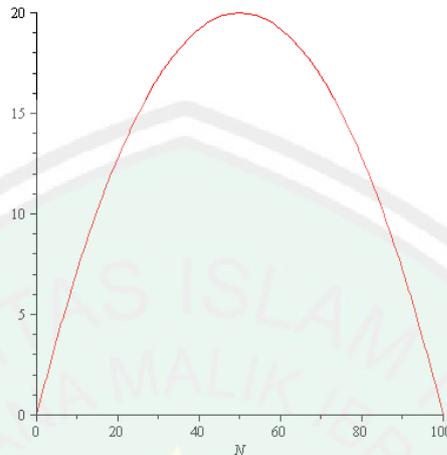
didapatkan solusi analitik dengan nilai  $r = 0.8$  dan  $K = 100$  dari model tersebut adalah

$$N(t) = \frac{100}{1 + 100e^{-\frac{4}{5}t}}$$

dengan diberikan nilai awal sebesar 80, maka didapatkan solusi khusus yaitu

$$N(t) = \frac{400}{4 + e^{-\frac{4}{5}t}}$$

Dari model pertumbuhan (2.1), akan ditunjukkan simulasi pertumbuhan maksimum dari populasi  $N(t)$  yaitu



Gambar 2.1 Grafik Pertumbuhan Maksimum dari Persamaan (2.1) dengan  $r = 0.8$  dan  $K = 100$

Menurut Dwaradi (2011:6) terdapat pertumbuhan populasi  $N(t)$  maksimum diberi simbol  $N(t)^*$ , sesuai pada Gambar 2.1, dapat dilihat nilai pertumbuhan maksimum dari populasi  $N(t)$  yaitu

$$N(t)^* = \frac{K}{2} \quad (2.2)$$

sehingga populasi  $N(t)$  akan mencapai nilai maksimum pada kondisi setengah dari daya dukung lingkungan.

Menurut Dwaradi (2011:5), bahwa hubungan antara pertumbuhan perkapita secara alamiah dengan pemanenan merupakan dinamika populasi mangsa. Sehingga laju kelahiran dipengaruhi oleh kematian mangsa dan jumlah pemanenan yang dilakukan. Jika jumlah pemanenan dilakukan dengan ukuran  $h$ , maka persamaan pertumbuhan logistik menjadi

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) - h$$

dengan peubah tak bebas  $N(t) \geq 0$ , dan populasi awal  $N(0)$  diasumsikan diketahui, sedangkan  $h$  diasumsikan  $0 \leq h \leq h_{maks}$ , dan  $h_{maks}$  merupakan nilai maksimum mangsa yang dapat dipanen.

Menurut Supriatna dan Lestari (2001:2), agar populasi tidak mengalami kepunahan dengan adanya eksploitasi, maka pertumbuhan populasi disamadengankan nol, sehingga didapatkan tingkat pemanenan

$$h = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right) \quad (2.3)$$

dengan memasukan nilai  $N(t)^*$  ke dalam persamaan (2.3) maka didapatkan nilai maksimum pemanenan

$$h_{maks} = \frac{rK}{4} \quad (2.4)$$

persamaan (2.4) merupakan tingkat pemanenan maksimum yang dapat diambil dengan tetap mempertahankan populasi tersebut untuk keperluan regenerasi. Besaran tersebut dinamakan *Maximum Sustainable Yield* (MSY).

Menurut Hertini dan Gusriani (2013:308), bahwa MSY secara teoritis yaitu jumlah tangkapan ikan (*predator*) terbesar yang dapat diambil dari persediaan jenis ikan (*prey*) dalam jangka waktu yang tak terbatas. Tujuan dari MSY yaitu mempertahankan ukuran populasi pada titik maksimum dimana tingkat pertumbuhan dengan pemanenan, sehingga populasi tersebut menjadi produktif selamanya.

Menurut Hertini dan Gusriani (2013:308), terdapat asumsi mengenai MSY yaitu populasi organisme tumbuh dan menggantikan diri sendiri, dalam pengertian populasi organisme tersebut merupakan sumber daya terbarukan. Selain itu diasumsikan tingkat pertumbuhan, tingkat kelangsungan hidup dan tingkat

produksi akan meningkatkan pemanenan dan mengurangi kepadatan, sehingga akan menghasilkan surplus biomassa yang dapat dipanen.

### 2.3 Linierisasi PDB Autonomus

Persamaan pada penelitian ini berbentuk PDB nonlinier maka perlu dilinierisasi terlebih dahulu. Menurut Boyce dan DiPrima (1999:482-483), linierisasi adalah proses pendekatan persamaan diferensial nonlinier dengan persamaan diferensial linier untuk membantu memahami persamaan diferensial nonlinier. Dalam suatu sistem autonomus seperti

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\quad (2.5)$$

untuk  $f$  dan  $g$  adalah nonlinier, kemudian akan dicari pendekatan pada sistem linier di sekitar  $(x^*, y^*)$  menggunakan deret Taylor, untuk menghilangkan suku nonliniernya yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x-x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y-y^*) \\ \frac{dy}{dt} &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x-x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y-y^*)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Misal  $(x-x^*) = v$  dan  $(y-y^*) = u$  maka untuk  $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$  dan  $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$  pada keadaan setimbang  $f(x^*, y^*) = 0$  dan  $g(x^*, y^*) = 0$ , kemudian substitusikan pada sistem persamaan (2.6) sehingga diperoleh sistem persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v\end{aligned}\quad (2.7)$$

Pada sistem persamaan (2.7) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix}\quad (2.8)$$

Sehingga sistem persamaan linier pada titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$  diberikan dengan

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}\quad (2.9)$$

dimana semua turunan parsial di dalam matriks adalah dievaluasi pada  $(x^*, y^*)$ , maka didapatkan matriks Jacobi, dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}\quad (2.10)$$

Setelah didapatkan matriks Jacobi maka, kemudian akan menganalisis mengenai kesetabilannya.

#### 2.4 Titik Kestabilan Sistem Autonomus

Menurut Robinson (2004:99), persamaan karakteristik dari suatu sistem linier mengidentifikasi banyak solusi yang menuju ke arah asal. Diasumsikan bahwa sebuah sistem persamaan diferensial  $\dot{x} = F(x)$  memiliki turunan parsial komponen dari  $F$ , ini adalah solusi yang unik. Jika diberikan  $\phi(t; x_0)$  maka

$$\frac{d}{dt}\phi(t; x_0) = F(\phi(t; x_0)) \text{ dan } \phi(0; x_0) = x_0$$

**Definisi 1.** Suatu titik  $x^*$  disebut suatu titik kesetimbangan, jika  $F(x^*) = 0$ . Solusi mulai pada suatu titik kesetimbangan mempunyai percepatan nol dan  $\phi(t; x^*, n) = x^*$  untuk semua  $t$ . Inilah yang disebut titik kesetimbangan. Disebut juga titik kesetimbangan jika solusi berada di dalam kesetimbangan dan berkumpul pada titik tersebut.

Sebuah titik kesetimbangan untuk sistem linier yaitu  $e^{At}0 \equiv 0$ . Ini adalah satu-satunya titik kesetimbangan dari sistem linier, kecuali jika 0 adalah sebuah nilai eigen.

## 2.5 Kestabilan pada Titik Kesetimbangan dari Sistem Autonomus

Menurut Finizio dan Ladas (1988:290-291), diberikan sistem persamaan autonomus sebagai berikut:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2) \quad \text{dan} \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2) \quad (2.11)$$

akan mempunyai  $((x_1)_0, (x_2)_0)$  sehingga didapatkan titik kesetimbangan dari sistem (2.11), apabila  $f_1((x_1)_0, (x_2)_0) = 0$  dan  $f_2((x_1)_0, (x_2)_0) = 0$ , yang merupakan turunan dari turunan suatu konstanta sama dengan nol. Akibatnya, jika titik  $((x_1)_0, (x_2)_0)$  merupakan titik kestabilan dari sistem ini, maka didapatkan sepasang fungsi konstanta sebagai berikut:

$$x_1(t) = (x_1)_0, \quad x_2(t) = (x_2)_0 \quad (2.12)$$

merupakan penyelesaian dari sistem persamaan (2.11) untuk semua nilai  $t$ .

**Definisi 2.** Titik kesetimbangan  $((x_1)_0, (x_2)_0)$  penyelesaian konstan (2.11) dari sistem (2.12) disebut stabil jika untuk setiap bilangan  $\epsilon > 0$  terdapat suatu bilangan  $\delta > 0$  sedemikian sehingga setiap penyelesaian  $(x_1(t), x_2(t))$  yang pada  $t = 0$  memenuhi

$$[x_1(0) - (x_1)_0]^2 + [x_2(0) - (x_2)_0]^2 < \delta$$

ujud dan memenuhi

$$[x_1(0) - (x_1)_0]^2 + [x_2(0) - (x_2)_0]^2 < \epsilon$$

untuk semua  $t \geq 0$ .

**Definisi 3.** Titik kesetimbangan  $((x_1)_0, (x_2)_0)$  atau menyelesaikan kostanta (2.12) disebut stabil asimtotik jika titik itu stabil dan sebagai tambahan terdapat  $\delta_0$  sedemikian sehingga setiap penyelesaian  $(x_1(t), x_2(t))$  dari (2.11) yang pada  $t = 0$  memenuhi

$$[x_1(0) - (x_1)_0]^2 + [x_2(0) - (x_2)_0]^2 < \delta_0$$

ujud untuk semua  $t \geq 0$  dan memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) = 0$$

**Definisi 4.** Sebuah titik yang tidak stabil disebut tak stabil.

Menurut Widowati dan Sutimin (2007:60), terdapat beberapa kemungkinan dari nilai akar-akar karakteristik sebagai berikut:

1.  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah riil, berbeda dan mempunyai tanda yang sama
2.  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah riil, berbeda dan mempunyai berbeda tanda
3.  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah riil dan sama
4.  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah kompleks tetapi bukan imajiner murni.
5.  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  adalah imajiner murni

dari akar-akar karakteristik  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  tersebut, maka jenis titik kesetimbangan  $(0,0)$  dapat digolongkan seperti pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Jenis-jenis Kestabilan dari Titik Kesetimbangan (0,0)

Nilai Akar-akar Persamaan Karakteristik	Jenis dari Titik Kesetimbangan (0,0)	Jenis Kestabilan
Riil, berbeda dan bertanda sama	Titik simpul ( <i>node</i> )	Stabil asimtotik bila akar-akar negatif, tidak stabil bila akar-akar positif
Riil, berbeda dan berbeda tanda	Titik plana ( <i>saddle point</i> )	Tidak stabil
Riil dan sama	Titik bintang ( <i>star</i> )	Stabil asimtotik bila akar-akar negatif, tidak stabil bila akar-akar positif
Kompleks tapi tidak imajiner murni	Titik spiral ( <i>spiral point</i> )	Stabil asimtotik bila bagian riil dari akar-akar negatif, tidak stabil bila bagian riil dari akar-akar positif
Imajiner murni	Titik pusat ( <i>center</i> )	Stabil, tetapi tidak stabil asimtotik

Sumber: Widowati dan Sutiman (2007:61)

Menurut Waluya (2006:160-165), terdapat lima perbedaan yang mendasar dari perilaku solusi yaitu:

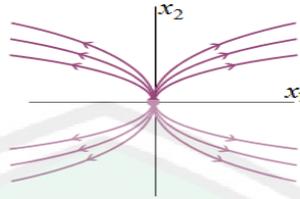
**Kasus 1.** Jika nilai-nilai eigennya riil, berbeda dan bertanda sama.

Dalam kasus ini, solusi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (2.13)$$

dimana diasumsikan bahwa  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  riil, berbeda dan bertanda sama. Perilaku dari solusi dalam kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.2. Dalam Gambar 2.2, diasumsikan bahwa  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , sehingga penurunan lebih tajam sepanjang vektor eigen  $\vec{v}^{(1)}$ . Ini juga disebut *node* atau *node sink*. Perlu dicatat bahwa semua trayektori menuju ke titik nol yang berarti bahwa titik kesetimbangan nol adalah stabil. Jika dalam kasus  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , maka arah trayektori yang digambarkan dalam Gambar 2.2 akan berkebalikan arah, dan titik kesetimbangannya akan

menjadi tak stabil. Ini sering disebut *node source*. Maka potret fasenya sebagai berikut:



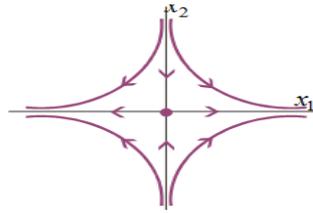
Gambar 2.2 Perilaku Titik *Node* dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Riil dan Bertanda Sama

**Kasus 2.** Jika nilai-nilai eigennya riil, berbeda dan berbeda tanda.

Jika nilai eigen-eigennya berbeda tanda dan riil, maka solusi umumnya dapat ditulis sebagai berikut,

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (2.14)$$

dimana diasumsikan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  riil, berbeda dan berbeda tanda. Perilaku dari solusi dalam kasus ini dapat dilihat pada Gambar 2.3. Dalam Gambar 2.3, kemudian diasumsikan bahwa  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , sehingga trayektori membesar sepanjang vektor eigen  $\vec{v}^{(1)}$  dan menurun sepanjang vektor eigen  $\vec{v}^{(2)}$ . Dalam hal ini akan disebut titik *saddle*. Catatan bahwa semua trayektori akan menjauh ke tak hingga sepanjang vektor eigen  $\vec{v}^{(1)}$ . Ini mengakibatkan bahwa titik *saddle* akan selalu tak stabil. Jika sekarang  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ , maka arah dari trayektori pada Gambar 2.3 akan berkebalikan dan solusi juga akan menuju ke tak hingga sepanjang vektor eigen  $\vec{v}^{(2)}$  sehingga titik kesetimbangannya juga menjadi tidak stabil. Maka potret fasenya sebagai berikut,



Gambar 2.3 Perilaku Titik *Saddle* dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Riil dan Berbeda Tanda

**Kasus 3.** Jika nilai-nilai eigennya riil dan sama (akar kembar)

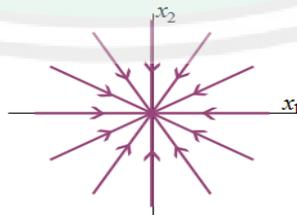
Dalam kasus akar kembar, dua kemungkinan bisa terjadi yaitu dua vektor eigen yang bebas linier, sehingga solusinya akan berbentuk sebagai berikut,

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (2.15)$$

atau hanya menemukan satu vektor eigen, sehingga harus melakukan generalisasi vektor eigen dengan metode yang telah dipelajari, dan solusi yang dibentuk

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 [\vec{v}^{(1)} t e^{\lambda_1 t} + \vec{\eta}^{(1)} t e^{\lambda_1 t}] \quad (2.16)$$

dalam kasus pertama akan mendapatkan apa yang dinamakan *proper node* atau *star point* yang gambarnya untuk  $\lambda_1 > 0$ . Dalam kasus kedua akan didapatkan *improper node* untuk kasus  $\lambda_1 > 0$ . Kedua kasus tersebut titik kesetimbangannya akan tak stabil. Jika  $\lambda_2 < 0$  untuk kedua kasus tersebut, maka arah trayektor dalam Gambar 2.4 berkebalikan dan titik kesetimbangannya akan menjadi stabil. Maka potret fasenya sebagai berikut,



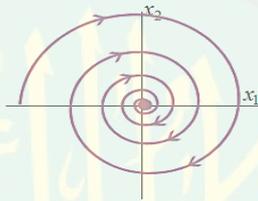
Gambar 2.4 Perilaku Titik *Star* dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Kembar

**Kasus 4.** Jika nilai-nilai eigennya kompleks

Dalam kasus ini nilai eigennya kompleks, yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\lambda_{\pm} = \beta \pm i\mu$$

ini akan menghasilkan perilaku yang disebut *spiral* dimana kestabilannya ditentukan oleh tanda dari bagian riil  $\beta$ . Untuk kasus  $\beta > 0$  solusinya dapat digambarkan dalam Gambar 2.5. Dalam hal ini titik kesetimbangannya akan tak stabil. Untuk kasus  $\beta < 0$ , trayektori solusi yang berbeda arah dalam Gambar 2.5 dan titik kesetimbangannya menjadi stabil. Maka potret fasenya sebagai berikut



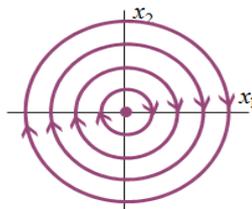
Gambar 2.5 Perilaku Titik Spiral dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Kompleks

**Kasus 5.** Jika nilai-nilai eigennya imajiner murni

Dalam kasus ini nilai-nilai eigen yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\lambda_{\pm} = \pm i\mu$$

dalam hal ini solusi ini merupakan osilator dan stabil secara alami. Titik kesetimbangannya dalam hal ini akan disebut titik *center*. Trayektorinya dapat diperlihatkan pada Gambar 2.6 yang berupa ellip. Maka potret fasenya sebagai berikut:



Gambar 2.6 Perilaku Titik *Center* dari Solusi Ketika Kedua Nilai Eigennya Imajiner

## 2.6 Potret Fase dari Sistem Autonomus

Menurut Finizio dan Ladas (1988:296), diberikan sistem persamaan diferensial yang berbentuk sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x, y) \text{ dan } \dot{y} = g(x, y)$$

Dimana fungsi-fungsi  $f$  dan  $g$  bebas dari waktu disebut autonomus, jika  $(x_0, y_0)$  sembarang titik di  $\mathcal{R}$  dan jika  $t_0$  sebarang bilangan riil maka penyelesaian tunggal dari sistem persamaan tersebut yaitu:

$$x = x(t) \text{ dan } y = y(t)$$

Dengan nilai  $t$  yang didefinisikan di dalam suatu selang  $a < t < b$  yang memuat  $t_0$  maka memenuhi syarat awal

$$x(t_0) = x_0 \text{ dan } y(t_0) = y_0$$

Pandang  $t$  sebagai parameter, maka bila  $t$  berubah di dalam selang  $a < t < b$ , titik  $(x(t), y(t))$  menelusuri sebuah kurva yang disebut trayektori atau orbit dari penyelesaian sistem tersebut di bidang  $xy$ . Dalam kajian dari sistem ini pasangan  $(x, y)$  disebut fase dari sistem, bidang  $xy$  pada umumnya disebut bidang fase yang digambarkan dengan parameter oleh suatu penyelesaian dari sistem.

Menurut Finizio dan Ladas (1988:296), gambar semua trayektori dari suatu sistem disebut potret fase dari sistem. Potret fase dari sebuah sistem hampir seluruhnya bergantung pada akar  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ . Terdapat lima kasus perilaku solusi yang telah dibahas pada subbab 2.5, kemudian pada subbab ini akan diberi contohnya dan potret fasen sebagai berikut:

**Kasus 1.** Jika nilai-nilai eigennya riil, berbeda dan bertanda sama

Diberikan sistem sebagai berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t) + y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - 2y(t)$$

maka akar-akar karakteristik dari sistem tersebut adalah -1 dan -3 (sama tanda) sehingga mempunyai bentuk solusi eksak yaitu

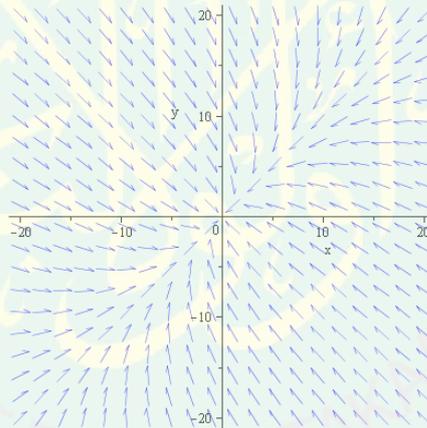
$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} - C_2 e^{-3t}$$

dan sistem tersebut memiliki titik kesetimbangan (0,0). Sedangkan bidang fase tersebut adalah

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}}{C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}}$$

Maka bidang fasenya sebagai berikut



Gambar 2.7 Trayektori Titik Simpul (*Node*) Tidak Stabil pada Potret Fase

Semua trayektori ini menunjukkan titik asal dan menyinggung garis  $y = x$ , hal ini menunjukkan bahwa semua trayektori dari sistem tersebut, pasangan garis  $y = -x > 0$  dan  $y = -x < 0$ , menuju ke titik asal dengan menyinggung garis  $y = x$ . Titik kesetimbangan ini disebut titik simpul stabil. Jika  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , potret fase tetap sama akan tetapi arah panah dibalik trayektori menuju ke titik asal bila  $t \rightarrow -\infty$ . Titik kesetimbangan tipe ini disebut titik simpul tidak stabil.

**Kasus 2.** Jika nilai-nilai eigennya riil, berbeda dan berbeda tanda

Diberikan sistem dua persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -3x - 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 2y$$

akar-akar karakteristik dari sistem tersebut adalah 2 dan -1 (berlawanan tanda)

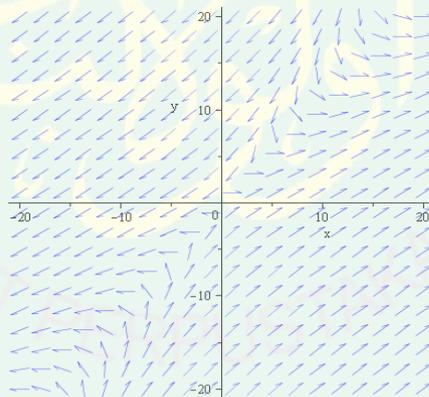
sehingga mempunyai bentuk solusi eksak yaitu

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$$

$$y(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t}$$

dan sistem dua persamaan diferensial tersebut memiliki titik kesetimbangan (0,0).

berdasarkan solusi yang dihasilkan dapat digambarkan kurva trayektori dalam bidang fase sebagai berikut



Gambar 2.8 Trayektori Titik Pelana (*Saddle*) pada Bidang Fase

dari bidang fase tersebut menyatakan bahwa semua trayektori asimtotik ke garis  $y = 2x$ , bila  $t$  menuju ke  $-\infty$ . Titik kesetimbangan ini dinamakan titik pelana karena salah satu akar karakteristiknya positif, maka titik pelana adalah tidak stabil.

**Kasus 3.** Jika nilai-nilai eigennya riil dan sama (akar kembar)

Diberikan sistem dua persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -2x$$

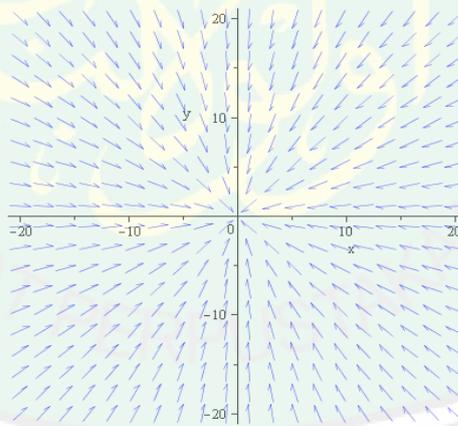
$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

akar-akar karakteristik dari sistem tersebut adalah  $-2$  (akar kembar) sehingga mempunyai bentuk solusi eksak yaitu

$$x = C_1 e^{-2t}$$

$$y = C_2 e^{-2t}$$

sistem dua persamaan diferensial tersebut memiliki titik kesetimbangan  $(0,0)$ . dari solusi yang dihasilkan dapat digambarkan kurva trayektori dalam bidang fase sebagai berikut



Gambar 2.9 Trayektori Titik *Star* Stabil pada Potret Fase

Potret fase dari sistem ini mempunyai titik kesetimbangan yang disebut titik simpul (titik *center*) stabil, jika  $\lambda < 0$ . Maka arah panah akan menuju ke titik kesetimbangan dan titik simpul tidak stabil, jika  $\lambda > 0$  maka arah panah berkebalikan menjauhi titik kesetimbangan.

**Kasus 4.** Jika nilai-nilai eigennya kompleks

Diberikan sistem

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x + 2y$$

sistem tersebut memiliki titik kesetimbangan (0,0). Sedangkan akar-akar karakteristik ditentukan dari persamaan karakteristik sebagai berikut:

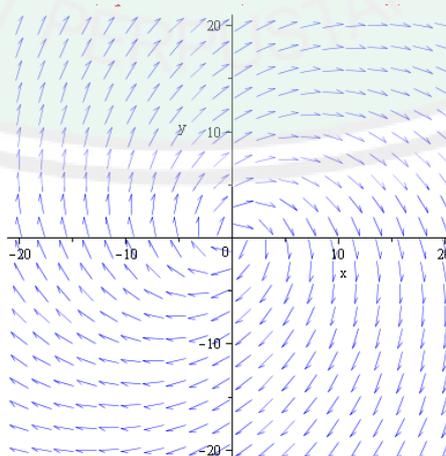
$$\lambda^2 - (-1 + 2)\lambda + ((-1) \cdot (-2) - (-3) \cdot 3) = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 11 = 0$$

sehingga dihasilkan  $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{35}i}{2}$  dan  $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{35}i}{2}$  yaitu akar-akar kompleks konjugat dengan bagian riil negatif, sedangkan potret fase sistem tersebut adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x + 2y}{x + 3y}$$

karena dihasilkan akar-akar kompleks konjugat dengan bagian riil yang positif, maka titik kesetimbangan (0,0) merupakan titik spiral yang tidak stabil sebagai berikut:



Gambar 2.10 Trayektor Titik Spiral Tidak Stabil pada Potret Fase

Trayektori ini berbentuk spiral menunjukkan titik asal bila  $t$  menuju tak hingga. Potret fase dari sistem ini mempunyai bentuk spiral dengan tipe titik kesetimbangan disebut fokus stabil jika bagian riilnya bernilai negatif dan fokus tidak stabil jika bagian riilnya bernilai positif.

**Kasus 5.** Jika nilai-nilai eigennya imajiner murni

Diberikan sistem

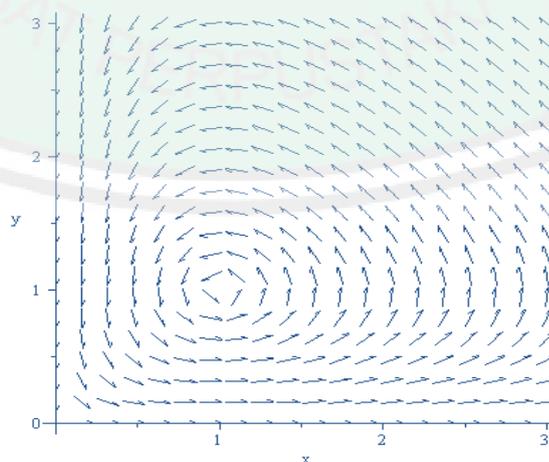
$$\frac{dx}{dy} = x - yx$$

$$\frac{dx}{dy} = -y + yx$$

sistem tersebut memiliki titik kesetimbangan  $(1,1)$ . Sedangkan akar-akar karakteristik ditentukan dari persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^2 - 8 = 0$$

maka akar-akar yang didapatkan yaitu  $i$  dan  $-i$ , maka tipe titik berupa titik pusat (*center*) dan jenis kestabilannya stabil asimtotik. Bisa disimulasikan berupa bidang fase sebagai berikut:



Gambar 2.11 Trayektori Titik Pusat (*Center*) Stabil pada Potret Fase

Potret fase dari sistem ini berbentuk lingkaran berpusat pada titik asal dengan tipe titik kesetimbangan disebut pusat. Dengan arah panah menuju ke titik kesetimbangan dan sistem ini stabil.

## 2.7 Kajian Al-Quran Mengenai Kestabilan dan Pemanenan Ikan

Menurut Hideaki (2009:4), sumber daya perikanan sama seperti sumber daya pertambangan yaitu ada batasnya. Akan tetapi terdapat perbedaannya dimana sumber daya tambang tidak dapat diperbaharui sedangkan sumber daya perikanan dapat diperbaharui. Sehingga apabila dikelola dengan baik akan dapat digunakan secara berkesinambungan. Untuk mencapai hal tersebut harus menghindari adanya eksploitasi pada ikan.

Menurut Kartono (2012:39), pemanenan ikan *prey* juga berperan penting pada pendapatan devisa negara, jika ada pemanenan yang berlebih (Eksploitasi) yang tidak memperhatikan jangka panjang, maka berdampak pada kepunahan populasi ikan *prey* dan diikuti oleh populasi ikan *predator*. Eksploitasi merupakan pemanfaatan sumber daya alam yang berlebihan, yang menyebabkan kerusakan pada alam.

Dalam al-Quran telah melarang sesuatu yang berlebih-lebihan, sebagaimana firman Allah Swt. pada surat al-A'raaf/7:31, yaitu:

﴿ يَبْنَى ءآءَمَ خُءُوآ زِبَنَتَكُمُ عِنءَ كُلِّ مَسْءِءٍ وَكُلُوآ وَآشْرَبُوآ وَلَا تُسْرِفُوآ ۚ إِنَّهُ لَا يُحِبُّ

الْمُسْرِفِينَ ﴿٣١﴾

“Hai anak Adam, pakailah pakaianmu yang indah disetiap (memasuki) masjid, makan dan minumlah, dan janganlah berlebih-lebihan. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang berlebih-lebihan”. (QS. al-A'raaf/7:31)

Dalam tafsir Jalalain Jalaluddin Asy-syuyuti oleh Hidayah (2010:206) bahwa (hai anak Adam, pakailah pakaianmu yang indah) yaitu buat menutupi auratmu (disetip masuk masjid) yaitu dikala hendak melakukan shalat dan thawaf (makan dan minumlah) sesukamu (dan janganlah berlebih-lebihan. Sesungguhnya Allah Swt. tidak menyukai orang yang berlebih-lebihan).

Sesuatu yang berlebih-lebihan merupakan salah satu yang menyebabkan sesuatu yang tidak seimbang, sesuatu yang tidak seimbang disebabkan oleh perbuatan manusia. Sesungguhnya Allah Swt. telah menciptakan sesuatu yang seimbang, adanya sesuatu yang tidak seimbang disebabkan adanya campur tangan manusia yang berlebihan dalam memanfaatkan ciptaan-Nya. Dalam firman-Nya pada surat al-Mulk/67:3-4, yaitu:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ۗ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوُّتٍ ۗ فَارْجِعِ الْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ ﴿٣﴾ ثُمَّ ارْجِعِ الْبَصَرَ كَرَّتَيْنِ يَنقَلِبْ إِلَيْكَ الْبَصَرُ خَاسِئًا وَهُوَ حَسِيرٌ ﴿٤﴾

*“Yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. Kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, adakah kamu lihat sesuatu yang tidak seimbang?. Kemudian pandanglah sekali lagi niscaya penglihatanmu akan kembali kepadamu dengan tidak menemukan sesuatu cacat dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah”. (QS. al-Mulk/67:3-4)*

Dalam tafsir Jalalain Jalaluddin Asy-syuyuti oleh Hidayah (2010:30) bahwa (yang telah menciptakan tujuh langit yang berlapis-lapis) yakni sebagian diantaranya berada di atas sebagian yang lain tanpa bersentuhan. (Kamu tidak sekali-kali melihat pada ciptaan Yang Maha Pemurah) pada tujuh langit yang berlapis-lapis atau pada makhluk yang lain (sesuatu yang tidak seimbang) yang berbeda dan tidak seimbang (adakah yang kamu lihat) padanya (keretakan?) maksudnya retak dan berbelah-belah. (Kemudian pandanglah sekali lagi)

ulangilah penglihatanmu berkali-kali (niscaya akan berbalik) akan kembali (penglihatanmu itu padamu dalam keadaan hina) karena tidak menemukan sesuatu yang cacat (dan penglihatanmu itupun dalam keadaan payah) yakni tidak melihat sama sekali adanya cacat.



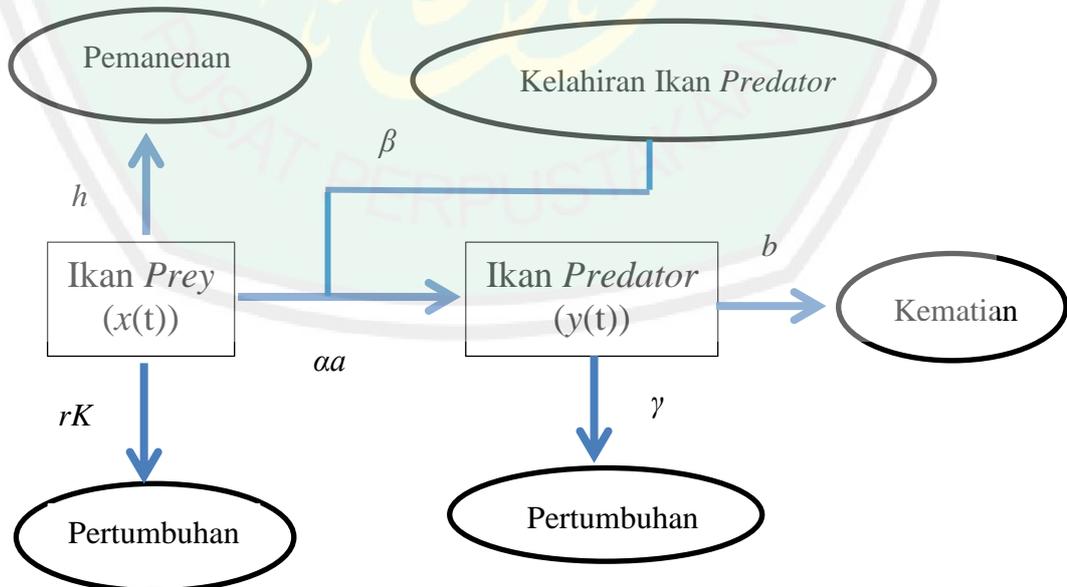
### BAB III

#### PEMBAHASAN

#### 3.1 Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey*

Pada skripsi ini penulis akan membahas tentang model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* yang melanjutkan penelitian dari Kar dan Chakraborty (2010:318-332). Dalam model tersebut terdapat interaksi antara populasi ikan *prey* dengan populasi ikan *predator*, karena ada interaksi tersebut menyebabkan adanya predasi. Predasi merupakan salah satu bentuk interaksi yang berkaitan dengan pengontrolan populasi ikan *prey* dan ikan *predator*. Selain itu dalam model tersebut terdapat perlakuan pemanenan, yang mana pemanenan hanya dilakukan pada populasi ikan *prey*.

Berikut diberikan diagram model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* yaitu sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey*

Pada Gambar 3.1 tersebut menunjukkan bahwa laju pertumbuhan ikan *prey* sebesar  $rx$ , merupakan pertumbuhan ikan *prey* secara alami. Sedangkan laju perkapita populasi ikan *prey* berkurang sebesar  $\frac{r}{K}$  untuk setiap bertambahnya ikan *prey*, karena ada keterbatasan daya dukung lingkungan. Terdapat interaksi antara ikan *prey* dan ikan *predator* yang mengakibatkan populasi ikan *prey* berkurang akibat adanya laju peningkatan relatif akibat predasi sebanding dengan laju kelahiran populasi ikan *prey* sebesar  $\frac{\alpha}{a+x}$  dan akibat interaksi tersebut mengakibatkan laju pertumbuhan maksimum ikan *predator* sebesar  $\beta$ . Adanya interaksi antara ikan *prey* dan ikan *predator* memiliki dampak negatif bagi ikan *predator* yaitu laju kematian ikan *predator* akibat predasi sebesar  $\gamma$ . Untuk mengontrol populasi ikan *prey* dilakukan tingkat pemanenan sebesar  $h$  dan untuk ikan *predator* diperhitungkan laju kematian secara alami sebesar  $b$ .

Dari penjabaran tersebut, maka dapat dirumuskan menjadi model matematika oleh Kar dan Chakraborty (2010:320) sebagai berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{a + x(t)} - h \quad (3.1)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -by(t) + \frac{\beta \alpha x(t)y(t)}{a + x(t)} - \gamma y(t)^2 \quad (3.2)$$

dengan:

$x(t)$  = Banyaknya populasi ikan *prey* terhadap waktu  $t$

$y(t)$  = Banyaknya populasi ikan *predator* terhadap waktu  $t$

$r$  = Laju pertumbuhan interistik populasi ikan *prey*

$K$  = Daya kapasitas populasi ikan *prey*

$\alpha$  = Laju penangkapan relatif maksimum akibat predasi

$\beta$  = Laju pertumbuhan maksimum ikan *predator*

- $\gamma$  = Laju kematian *predator* akibat predasi  
 $a$  = Laju kelahiran populasi ikan *prey*  
 $b$  = Laju kematian alami ikan *predator*  
 $h$  = Tingkat pemanenan ikan *prey*

dengan  $r, K, \alpha, \beta, \gamma, a, b, h$  adalah parameter positif.

### 3.2 Besaran Parameter Model

Parameter yang dipakai dalam model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey* menggunakan parameter dari penelitian Kar dan Chakraborty (2010:328), yaitu:

Tabel 3.1 Nilai Awal yang Digunakan untuk Model

Vareabel	Nilai
$x(t)$	80
$y(t)$	20

Tabel 3.2 Nilai Parameter untuk Model

Parameter	Nilai
$R$	0.8
$K$	100
$\alpha$	0.75
$\beta$	0.75
$\gamma$	0.08
$A$	10
$B$	0.001

### 3.3 Penentuan Nilai Pemanenan Maksimum ( $h_{maks}$ )

Diberikan perlakuan pemanenan berupa konstanta  $h$  dalam kasus ini pada populasi ikan *prey*. Telah diketahui bahwa nilai pertumbuhan maksimum populasi ikan *prey* ( $x(t)^*$ ) adalah setengah dari daya kapasitasnya  $\left(\frac{K}{2}\right)$ . Nilai tersebut didapatkan pada saat populasi ikan *prey* tumbuh eksponensial tanpa adanya pengaruh dari pemanenan maupun populasi ikan *predator*. Berdasarkan

asumsi yang diberikan untuk nilai pemanenan yaitu  $0 \leq h \leq h_{maks}$ , dimana  $h_{maks}$  merupakan nilai pemanenan maksimum. Untuk mengetahui nilai pemanenan, maka sebelumnya harus ditentukan nilai pemanenan maksimumnya terlebih dahulu.

Sebelum menentukan nilai pemanenan maksimum pada populasi ikan *prey* perlu diingat dalam kasus ini laju pertumbuhan populasi ikan *prey* selain dipengaruhi oleh faktor internal pada populasi ikan *prey* sendiri, populasi ikan *prey* juga dipengaruhi oleh populasi ikan predator dan juga pemanenan. Maka untuk mendapatkan nilai pemanenan maksimum pada populasi ikan *prey*, terlebih dahulu menentukan nilai maksimum dari populasi ikan *predator*. Untuk mendapatkan nilai maksimum populasi ikan *predator* maka harus disamadengankan dengan nol terlebih dahulu, dimana populasi ikan *predator* tidak mengalami pergerakan atau monoton, maka persamaan tersebut adalah

$$0 = -by(t) + \frac{\beta\alpha x(t)y(t)}{a + x(t)} - \gamma y(t)^2 \quad (3.3)$$

Kemudian didapatkan bentuk sederhana dari persamaan (3.3), sebagai berikut

$$\left( -b + \frac{\beta\alpha x(t)}{a + x(t)} - \gamma y(t) \right) y(t) = 0$$

Maka didapatkan nilai populasi ikan *predator* yaitu

$$y(t) = \frac{-b}{\gamma} + \frac{\beta\alpha x(t)}{\gamma(a + x(t))} \quad (3.4)$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $x(t)^*$  pada persamaan (3.4), maka didapatkan

nilai populasi ikan *predator* maksimum yaitu

$$y(t) = \frac{-b}{\gamma} + \frac{\beta\alpha K}{\gamma(2a + K)}$$

Kemudian untuk mendapatkan nilai pemanenan maksimum pada populasi ikan *prey*. Dengan mensubstitusikan nilai populasi maksimum ikan *predator*  $y(t)$  dan nilai pertumbuhan maksimum ikan *prey*  $x(t)^*$ , maka didapatkan nilai pemanenan maksimum pada populasi ikan *prey*  $h_{maks}$  adalah

$$h_{maks} = \frac{rK}{4} + \frac{abK}{\gamma(2a + K)} - \frac{\beta\alpha^2K^2}{\gamma(2a + K)^2} \quad (3.5)$$

Jika disubstitusikan nilai parameter sesuai Tabel 3.2, maka didapatkan nilai pemanenan maksimum  $h_{maks} = 16.35$ . Setelah didapatkan nilai pemanenan maksimum sesuai asumsi yang diberikan yaitu  $0 \leq h \leq h_{maks}$ , maka untuk nilai pemanenan yaitu  $0 \leq h \leq 16.35$ .

Nilai pemanenan maksimum ini merupakan batas maksimum pemanenan. Pemanenan ikan *prey* dibatasi agar tidak terjadi eksploitasi yang berlebihan pada ikan *prey* yang dapat menyebabkan kepunahan pada spesies ikan *prey* karena tereksploitasi. Eksploitasi merupakan suatu pemanfaatan sumber daya alam yang berlebih-lebihan yang mempunyai dampak sangat banyak. Salah satunya dapat menyebabkan kerusakan pada alam. Pemanenan yang berlebihan merupakan kerusakan yang disebabkan oleh manusia yang menjadikan alam tidak seimbang. Dalam al-Quran juga dijelaskan pada surat ar-Ruum/30:41, yaitu:

ظَهَرَ الْفَسَادُ فِي الْبَرِّ وَالْبَحْرِ بِمَا كَسَبَتْ أَيْدِي النَّاسِ لِيُذِيقَهُمْ بَعْضَ الَّذِي عَمِلُوا لَعَلَّهُمْ  
يَرْجِعُونَ ﴿٤١﴾

“Telah nampak kerusakan di darat dan di laut disebabkan karena perbuatan tangan manusia, supaya Allah merasakan kepada mereka sebagian dari (akibat) perbuatan mereka, agar mereka kembali (ke jalan yang benar)”(QS. Ar-Ruum/30:41).

Dari surat tersebut Allah Swt. telah memperingatkan agar menjaga alam semesta ini dan janganlah merusaknya. Jika merusak alam semesta ini baik di darat maupun di laut, Allah Swt. akan memperingatkan agar manusia sadar.

### 3.4 Analisis Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey* Ketika Salah Satunya Tidak Ada

Pada bagian ini akan dianalisis mengenai populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* ketika salah satunya tidak ada. Maka akan dijabarkan sebagai berikut:

#### 1. Ketika Tidak Ada Populasi Ikan *Predator*

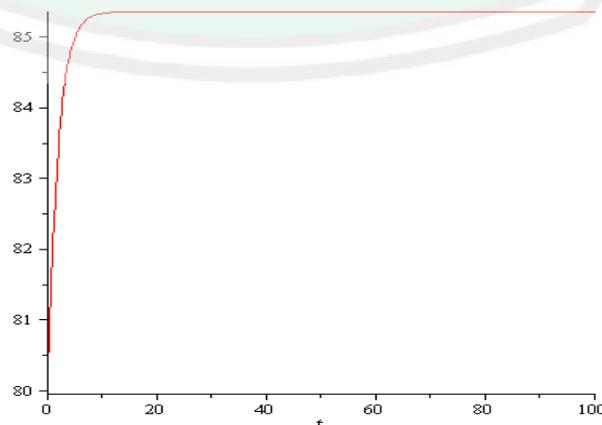
Untuk populasi ikan *prey* ketika tidak adanya populasi ikan *predator* persamaan (3.1) menjadi sebagai berikut:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - h$$

dengan nilai awal sebesar 80 dan nilai pemanenan sebesar 10, maka didapatkan solusi dari persamaan tersebut

$$x(t) = \frac{5}{1454} \left( 20\sqrt{727} + 727 \tanh \left( \frac{1}{36350} (727t + 50\sqrt{727}) \operatorname{arctanh} \left( \frac{12}{727} \sqrt{727} \right) \right) \right) \sqrt{727}$$

maka simulasi dari solusi  $x(t)$  yaitu



Gambar 3.2 Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey* Ketika Tidak Ada Populasi Ikan *Predator*

dari Gambar 3.2 terlihat bahwa populasi ikan *prey* akan mengalami peningkatan terus menerus sampai mengarah kesuatu titik yaitu 85.38 yang berarti stabil. Kestabilan tersebut dapat diartikan bahwa jumlah populasi ikan *prey* mengalami peningkatan meskipun terdapat pemanenan sebesar 10 satu satuan, jika tidak dipengaruhi oleh populasi ikan *predator*.

## 2. Ketika Tidak Ada Populasi Ikan *Prey*

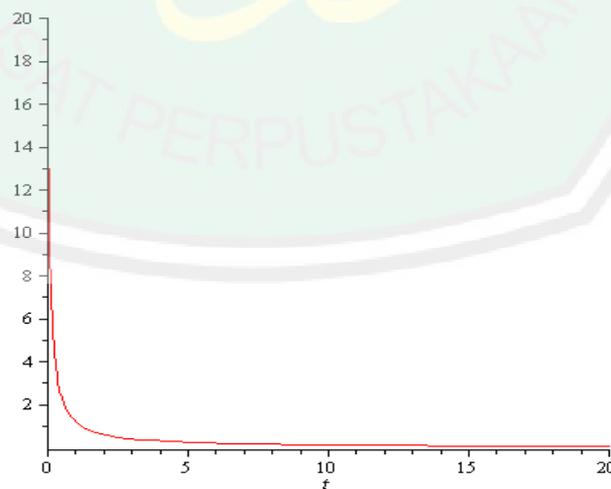
Untuk populasi ikan *predator* ketika tidak adanya populasi ikan *prey*, maka persamaan (3.2) menjadi sebagai berikut,

$$\frac{dy(t)}{dt} = -by(t) - \gamma y(t)^2$$

dengan nilai awal sebesar 20 dan nilai pemanenan sebesar 10, maka didapatkan solusi dari persamaan tersebut

$$y(t) = \frac{520}{-16000 + 16001e^{\frac{1}{1000}t}}$$

maka simulasi dari solusi  $y(t)$  yaitu



Gambar 3.3 Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey* Ketika Tidak Ada Populasi Ikan *Prey*

dari Gambar 3.3 terlihat bahwa populasi ikan *predator* akan mengalami penurunan terus menerus sampai menuju ke nol yang berarti tidak stabil. Tidak stabil tersebut dapat diartikan bahwa jumlah populasi ikan *predator* mengalami penurunan sampai pada kepunahan karena tidak ada sumber makanan.

### 3.5 Linierisasi Model

Linierisasi merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mentransformasi persamaan diferensial nonlinier menjadi persamaan diferensial linier dengan melakukan ekspansi deret Taylor dan menghilangkan suku nonlinier di persekitaran titik kesetimbangan. Dari persamaan (3.1) dimisalkan sebagai berikut:

$$f(x, y) = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{a + x} - h$$

$$g(x, y) = -dy(t) + \frac{\beta \alpha x(t)y(t)}{a + x(t)} - \gamma y^2(t)$$

maka akan dilakukan linierisasi dengan menggunakan deret Taylor sebagai berikut:

$$\frac{du(t)}{dt} = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} (x(t) - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} (y(t) - y^*) + \dots$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} (x(t) - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} (y(t) - y^*) + \dots$$

dimana untuk setiap  $u(t) = x(t) - x^*$ ,  $v(t) = y(t) - y^*$  untuk  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ , maka menjadi:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} u(t) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} v(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} u(t) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} v(t)$$

dari sistem tersebut maka dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu

$$\begin{pmatrix} \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

maka didapatkan hasil linierisasi dari sistem tersebut dengan titik kesetimbangan  $(x^*, y^*)$ , yaitu

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

setelah disubstitusikan dan diturunkan, didapatkan bentuk linier sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{rx(t)}{K} - \frac{\alpha y(t)}{a + x(t)} + \frac{\alpha x(t)y(t)}{(a + x(t))^2} & -\frac{\alpha x(t)}{a + x(t)} \\ \frac{\beta \alpha y(t)}{a + x(t)} + \frac{\beta \alpha x(t)y(t)}{(a + x(t))^2} & -b + \frac{\beta \alpha x(t)}{a + x(t)} - 2\gamma y \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

dari matriks Jacobi yang didapatkan, kemudian akan dianalisis kestabilannya.

### 3.6 Penentuan Titik Kesetimbangan

Pada persamaan (3.1) dan (3.2) dengan memisalkan  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy(t)}{dt} = 0$  maka persamaan tersebut menjadi:

$$0 = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{\alpha x(t)y(t)}{a + x(t)} - h \quad (3.7)$$

$$0 = -by(t) + \frac{\beta \alpha x(t)y(t)}{a + x(t)} - \gamma y(t)^2 \quad (3.8)$$

1. Ketika  $x(t) = 0$

Dengan memisalkan  $x(t) = 0$ , kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.8), maka

$$\begin{aligned} 0 &= -by(t) + 0 - \gamma y(t)^2 \\ 0 &= y(t)(-b - \gamma y(t)) \end{aligned}$$

sehingga didapatkan nilai  $y(t)$  sebagai berikut  $y(t) = 0$ . Untuk titik kesetimbangan pertama yaitu  $(x_1^*, y_1^*) = (0, 0)$ . Pada titik kesetimbangan ini dapat diartikan bahwa jika populasi ikan *prey* tidak ada, maka populasi ikan *predator* juga tidak ada. Hal ini dikarenakan tidak adanya sumber makanan untuk populasi ikan *predator*.

2. Ketika  $y(t) = 0$

Dengan memisalkan  $y(t) = 0$ , kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.7), yaitu

$$0 = \left( -\frac{rx(t)^2}{K} \right) + rx(t) - h$$

sehingga didapatkan nilai  $x(t)$ , sebagai berikut

$$x(t)_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 4\frac{r}{K}h}}{-2\frac{r}{K}}$$

sehingga

$$x(t)_{1,2} = \frac{K \pm \frac{K}{r} \sqrt{r^2 + 4\frac{r}{K}h}}{2}$$

didapatkan nilai  $x(t)$  yaitu

$$x(t)_1 = \frac{K + \frac{K}{r} \sqrt{r^2 + 4\frac{r}{K}h}}{2}$$

dan

$$x(t)_2 = \frac{K - \frac{K}{r} \sqrt{r^2 + 4 \frac{r}{K} h}}{2}$$

sehingga didapatkan titik kesetimbangan yang dua  $(x_2^*, y_2^*) = \left( \frac{K + \frac{K}{r} \sqrt{r^2 + 4 \frac{r}{K} h}}{2}, 0 \right) =$

$(71.36, 0)$  dan untuk titik kesetimbangan yang ketiga  $(x_4^*, y_4^*) =$

$\left( \frac{K - \frac{K}{r} \sqrt{r^2 + 4 \frac{r}{K} h}}{2}, 0 \right) = (28.63, 0)$ . Pada titik kesetimbangan ini dapat diartikan

bahwa jika populasi ikan *predator* tidak ada, maka populasi ikan *prey* tetap dapat bertahan hidup meskipun terdapat pemanenan pada populasi ikan *prey*.

3. Ketika  $x(t) \neq 0$  dan  $y(t) \neq 0$

Dengan memisalkan  $x(t) = 0$ , kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.8), maka sebagai berikut:

$$0 = -by(t) + \frac{\beta ax(t)y(t)}{a + x(t)} - \gamma y(t)^2$$

didapatkan nilai  $y(t)$ , yaitu

$$y(t) = \frac{-b}{\gamma} + \frac{\beta ax(t)}{\gamma(a + x(t))}$$

dan untuk persamaan (3.8) menjadi:

$$0 = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{ax(t)y(t)}{a + x(t)} - h$$

kemudian mensubstitusikan nilai  $y(t)$ , maka

$$0 = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) - \frac{ax(t) \left( \frac{-b}{\gamma} + \frac{\beta ax(t)}{\gamma(a + x(t))} \right)}{a + x(t)} - h$$

sehingga diperoleh

$$0 = \left( -\frac{rx(t)^2}{K} \right) + rx(t) - ax(t) \left( \frac{-b}{\gamma(a + x(t))} + \frac{\beta ax(t)}{\gamma(a + x(t))^2} \right) - h$$

Maka pada titik kesetimbangan ini, jika dimasukan nilai parameter sesuai pada tabel (3.2) dengan menggunakan bantuan *software* MAPLE 12 maka didapatkan dua nilai dari  $x(t)$  yaitu 6.41 dan 88.33. Sehingga didapatkan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan keempat  $(x_4^*, y_4^*) = (46.98, 5.78)$  dan titik kesetimbangan kelima  $(x_5^*, y_5^*) = (49.81, 5.84)$ . Setelah didapatkan titik kesetimbangan kemudian akan dianalisis kestabilanya.

### 3.7 Analisis Kestabilan pada Titik Kesetimbangan

Untuk menentukan kestabilan pada titik kesetimbangan, maka akan dihitung nilai eigen dari titik kesetimbangan dengan menggunakan nilai pemanenan maksimum pada populasi ikan *prey* yaitu:

#### 1. Untuk Titik Kesetimbangan Pertama $(x_1^*, y_1^*)$

Pada titik kesetimbangan pertama yaitu  $(0,0)$  kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.6), secara umum

$$J_1 = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

dengan memasukkan nilai parameternya maka akan didapatkan matrik Jakobi sebagai berikut:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -0.001 \end{pmatrix}$$

maka untuk mencari nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & -0.001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0.8 - \lambda & 0 \\ 0 & -0.001 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

maka didapatkan nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda = 0.8$$

$$\lambda = -0.001$$

didapatkan nilai eigen riil, berbeda dan tidak sama tanda yaitu maka nilai eigen pada titik kesetimbangan (0,0) termasuk pada tipe titik *saddle* yang tidak stabil.

2. Untuk Titik Kesetimbangan Kedua ( $x_2^*, y_2^*$ )

Pada titik kesetimbangan ketiga yaitu  $\left( \frac{K + \frac{K}{r} \sqrt{r^2 + 4\frac{r}{K}h}}{2}, 0 \right)$  kemudian

disubstitusikan ke persamaan (3.6), secara umum yaitu

$$J_3 = \begin{pmatrix} r \left( 1 - \frac{x_3^*}{K} \right) - \frac{rx_3^*}{K} & -\frac{\alpha x_3^*}{a + x_3^*} \\ 0 & -b + \frac{\beta \alpha x_3^*}{a + x_3^*} \end{pmatrix}$$

dengan memasukkan nilai parameternya titik kesetimbangan  $\left( \frac{K + \frac{K}{r} \sqrt{r^2 + 4\frac{r}{K}h}}{2}, 0 \right) =$

(71.36,0) maka akan didapatkan matriks Jakobi sebagai berikut:

$$J_3 = \begin{pmatrix} -0.34 & -0.66 \\ 0 & 0.49 \end{pmatrix}$$

maka untuk mencari nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{bmatrix} -0.34 & -0.66 \\ 0 & 0.49 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -0.34 - \lambda & -0.66 \\ 0 & 0.49 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

maka didapatkan nilai eigen sebagai berikut

$$\lambda = -0.34$$

$$\lambda = 0.49$$

didapatkan nilai eigen riil, berbeda dan tidak sama tanda yaitu maka nilai eigen pada titik kesetimbangan (71.62,0) termasuk pada tipe titik *saddle* yang tidak stabil.

### 3. Untuk Titik Kesetimbangan Ketiga ( $x_3^*, y_3^*$ )

Pada titik kesetimbangan keempat yaitu  $\left(\frac{K - \frac{K}{r}\sqrt{r^2 + 4\frac{r}{K}h}}{2}, 0\right)$  kemudian

disubstitusikan ke persamaan (3.6), secara umum yaitu

$$J_4 = \begin{pmatrix} r\left(1 - \frac{x_4^*}{K}\right) - \frac{rx_4^*}{K} & -\frac{\alpha x_4^*}{a + x_4^*} \\ 0 & -b + \frac{\beta \alpha x_4^*}{a + x_4^*} \end{pmatrix}$$

dengan memasukkan nilai parameternya pada titik kesetimbangan

$\left(\frac{K - \frac{K}{r}\sqrt{r^2 + 4\frac{r}{K}h}}{2}, 0\right) = (28.64, 0)$  maka akan didapatkan matriks Jakobi sebagai

berikut:

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0.34 & -0.56 \\ 0 & 0.42 \end{pmatrix}$$

maka untuk mencari nilai eigen dapat dicari dengan

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} [0.34 & -0.56] - [\lambda & 0] \\ 0 & 0.42 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0.34 - \lambda & -0.56 \\ 0 & 0.42 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

maka didapatkan nilai eigen sebagai berikut:

$$\lambda = 0.34$$

$$\lambda = 0.41$$

didapatkan nilai eigen riil, berbeda dan sama tanda yaitu maka nilai eigen pada titik kesetimbangan (5.28,0) termasuk pada tipe titik simpul (*node*) yang tidak stabil, karena nilai eigen bertanda positif.

#### 4. Untuk Titik Kesetimbangan Keempat ( $x_4^*, y_4^*$ )

Pada titik kesetimbangan yang kelima yaitu (46.98,5.78) kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.6), maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.034 & -0.62 \\ 0.01 & -0.46 \end{bmatrix}$$

untuk mencari nilai eigen sebagai berikut

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \left[ \begin{bmatrix} 0.034 & -0.62 \\ 0.01 & -0.46 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 0.034 - \lambda & -0.62 \\ 0.01 & -0.46 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

maka didapatkan nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = 0.022 \qquad \lambda_2 = -0.45$$

didapatkan nilai eigen riil, berbeda dan tidak sama tanda yaitu maka nilai eigen pada titik kesetimbangan (46.98, 5.78) termasuk pada tipe titik *saddle* yang tidak stabil, karena terdapat nilai eigen yang bertanda positif.

#### 5. Untuk Titik Kesetimbangan Kelima ( $x_5^*, y_5^*$ )

Pada titik kesetimbangan yang keenam yaitu (49.81,5.84) kemudian disubstitusikan ke persamaan (3.6), maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.009 & -0.62 \\ 0.009 & -0.47 \end{bmatrix}$$

untuk mencari nilai eigen yaitu

$$\det[A - \lambda I] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -0.009 & -0.62 \\ 0.009 & -0.47 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -0.009 - \lambda & -0.62 \\ 0.009 & -0.47 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

maka didapatkan nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = -0.022 \quad \lambda_2 = -0.45$$

didapatkan nilai eigen riil, berbeda dan sama tanda, maka nilai eigen pada titik kesetimbangan (88.33,6.30) termasuk pada tipe titik simpul (*node*) yang stabil, karena nilai eigen keduanya bertanda negatif. Maka jenis kestabilan pada titik kesetimbangan ini merupakan kestabilan asimtotik. Kestabilan pada titik kesetimbangan tersebut menunjukkan bahwa, populasi ikan *prey* populasi ikan *predator* dapat hidup berdampingan meskipun terdapat pemanenan pada ikan *prey*. Jika terdapat kerusakan di bumi ini maka Allah Swt. yang memperbaikinya dan tugas kita agar menjaga apa yang telah Allah Swt. berikan dengan memanfaatkannya dengan baik tanpa merusaknya. Dalam al-Quran surat al-A'raaf/7:56 sebagai berikut:

وَلَا تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ بَعْدَ إِصْلَاحِهَا وَادْعُوهُ خَوْفًا وَطَمَعًا إِنَّ رَحْمَتَ اللَّهِ قَرِيبٌ  
مِّنَ الْمُحْسِنِينَ

“Dan janganlah kamu membuat kerusakan di muka bumi, sesudah (Allah) memperbaikinya dan berdoalah kepada-Nya dengan rasa takut (tidak akan diterima) dan harapan (akan dikabulkan). Sesungguhnya rahmat Allah Swt. amat dekat kepada orang-orang yang berbuat baik”.(QS. al-A'raaf/7:56)

Pada ayat tersebut menjelaskan bahwa sesungguhnya segala ciptaan Allah Swt. di muka bumi ini seimbang dan Allah Swt. menciptakan segala sesuatu di bumi ini tak lain untuk memenuhi kebutuhan manusia. Dikatakan seimbang jika semua makhluk hidup bisa hidup berdampingan tanpa adanya kerusakan atau

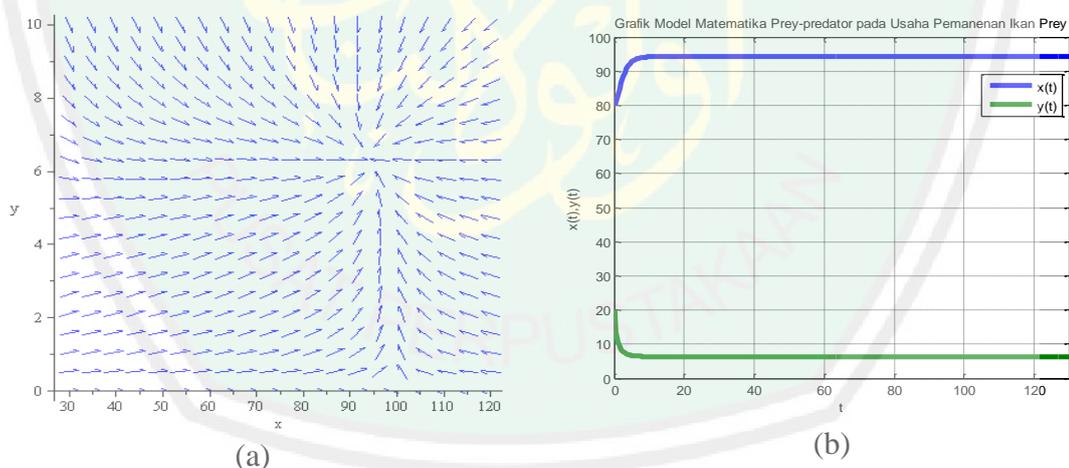
kepunahan makhluk hidup lain dan dikatakan tidak seimbang jika terdapat kepunahan pada salah satunya.

### 3.7 Simulasi

Pada subbab ini akan diberikan simulasi dari persamaan (3.1) dan (3.2) dengan nilai parameter yang diberikan oleh Kar dan Chakraborty (2010:320) sesuai Tabel 3.1 dan 3.2 dengan parameter nilai  $h$  yang berbeda. Simulasi yang dilakukan dengan diberikan tiga kondisi yaitu kondisi pertama yaitu  $h < h_{maks}$ , kemudian kondisi kedua yaitu  $h = h_{maks}$ , dan kondisi ketiga  $h > h_{maks}$ . Dengan menggunakan bantuan *software* MAPLE 12 dan MATLAB R2010a yaitu

Kondisi Ketika  $h < h_{maks}$

Ketika nilai pemanenan  $h = 0$

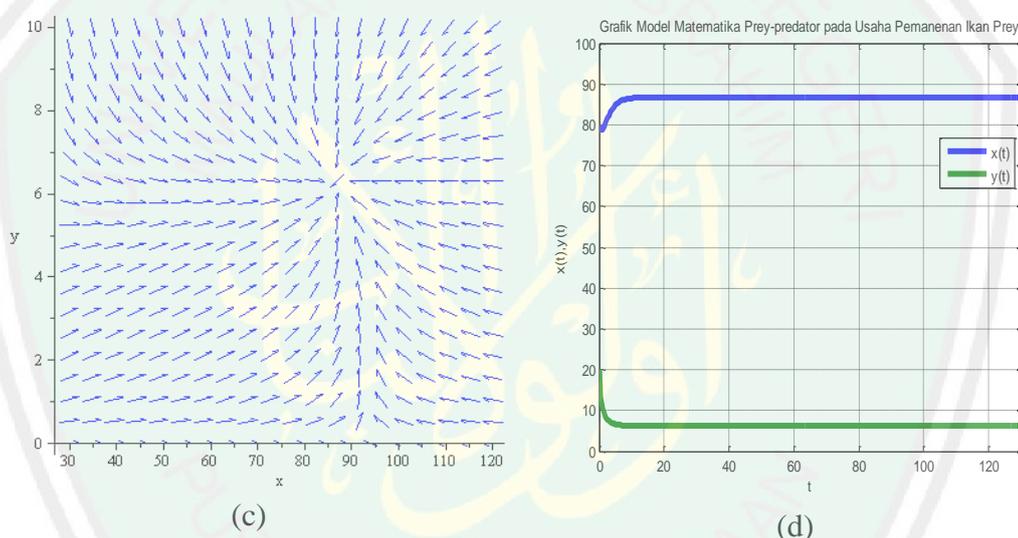


Gambar 3.4 Potret Fase (a) dan Grafik Perilaku (b) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai Pemanenan  $h = 0$

Dari Gambar 3.4 untuk potret fase (a) dapat dilihat bahwa tidak ditemukan titik kesetimbangan dengan ditunjukkan adanya arah panah menuju ke suatu titik yaitu (94.3, 6.34). Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai pemanenan tidak ada maka model ini stabil. Untuk grafik perilaku (b) dengan nilai pemanenan tidak

ada, dapat dilihat bahwa grafik dari populasi ikan *prey* dengan nilai awal sebesar 80 satu satuan mengalami kenaikan pada saat waktu sebesar 12 satu satuan menuju ke suatu titik 94.3 satu satuan. Sedangkan untuk populasi ikan *prey* dengan nilai awal 20 satu satuan mengalami penurunan saat waktu sebesar 6 satu satuan dan menuju ke titik 6.34 satu satuan waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* dapat hidup berdampingan tanpa adanya pemanenan pada populasi ikan *prey*.

Ketika nilai pemanenan  $h = 5$

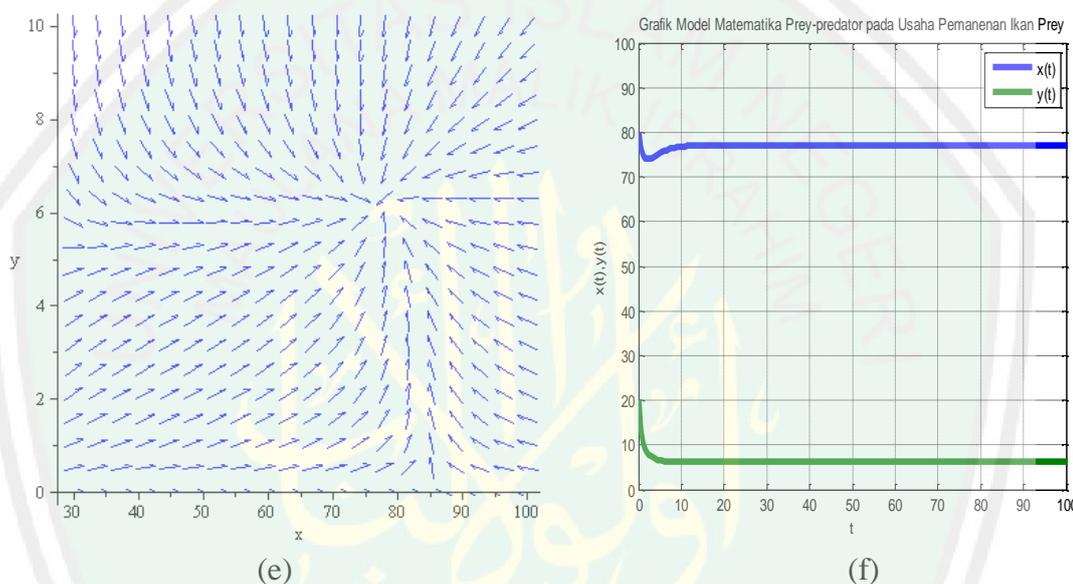


Gambar 3.5 Potret Fase (c) dan Grafik Perilaku (d) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai Pemanenan  $h = 5$

Dari Gambar 3.5 untuk potret fase (c) dapat dilihat bahwa tidak ditemukan titik kesetimbangan dengan ditunjukkan adanya arah panah menuju ke suatu titik yaitu  $(86.7, 6.29)$ . Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai pemanenan sebesar 5 satu satuan stabil. Untuk grafik perilaku (d) dengan nilai pemanenan sebesar 5 satu satuan dapat dilihat bahwa grafik dari ikan *prey* dengan nilai awal sebesar 80 satu satuan mengalami penurunan sebesar 78.75 satu satuan pada saat waktu 0.5 satu satuan waktu dan mengalami kenaikan menuju ke suatu titik 86.7 satu satuan

pada saat waktu 10 satu satuan waktu. Sedangkan untuk populasi ikan *predator* dengan nilai awal sebesar 20 satu satuan mengalami penurunan pada saat waktu 5 satu satuan waktu dan menuju ke suatu titik 6.29 satu satuan. Hal ini dapat diartikan bahwa populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* dapat hidup berdampingan meskipun adanya pemanenan pada ikan *prey* sebesar 5 satu satuan.

Ketika nilai pemanenan  $h = 10$

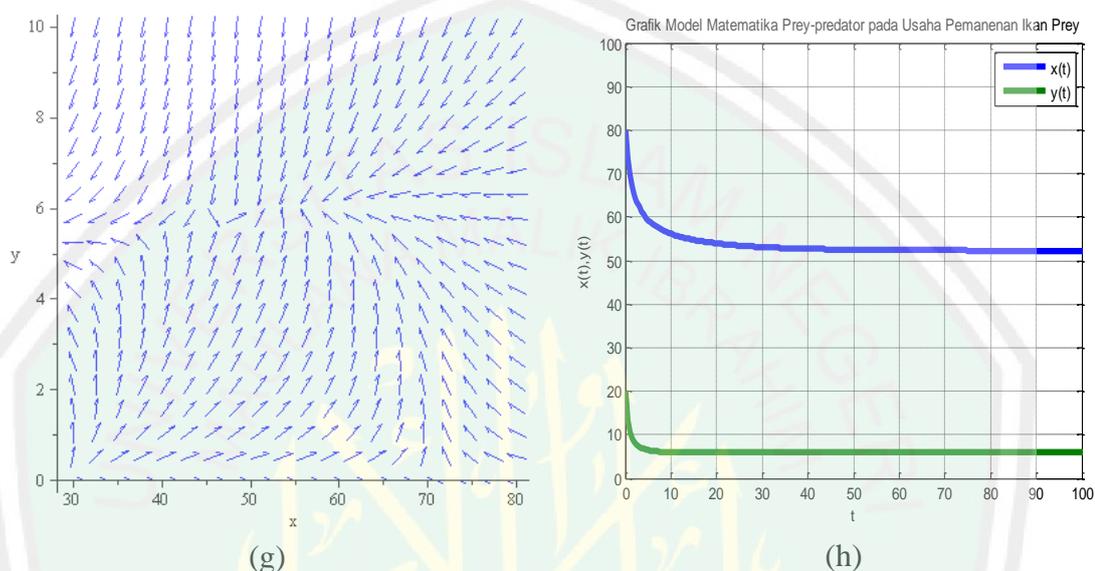


Gambar 3.6 Potret Fase (e) dan Grafik Perilaku (f) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai Pemanenan  $h = 10$

Dari Gambar 3.6 untuk potret fase (e) dapat dilihat bahwa tidak ditemukan titik kesetimbangan dengan ditunjukkan adanya arah panah menuju ke suatu titik yaitu (77.1, 6.21). Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai pemanenan sebesar 10 satu satuan stabil. Untuk grafik perilaku (f) dengan nilai pemanenan sebesar 10 satu satuan dapat dilihat bahwa grafik dari ikan *prey* dengan nilai awal sebesar 80 satu satuan mengalami penurunan sampai 74 satu satuan pada saat waktu 2 satu satuan waktu dan mengalami kenaikan menuju ke suatu titik 77.1 satu satuan pada saat waktu 18.3 satu satuan waktu. Sedangkan untuk populasi ikan *predator* dengan nilai awal sebesar 20 satu satuan mengalami penurunan pada saat waktu

11 satu satuan waktu dan menuju ke suatu titik 6.21. Hal ini dapat diartikan bahwa populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* dapat hidup berdampingan meskipun adanya pemanenan pada ikan *prey* sebesar 10 satu satuan.

Ketika nilai pemanenan  $h = 16.25$

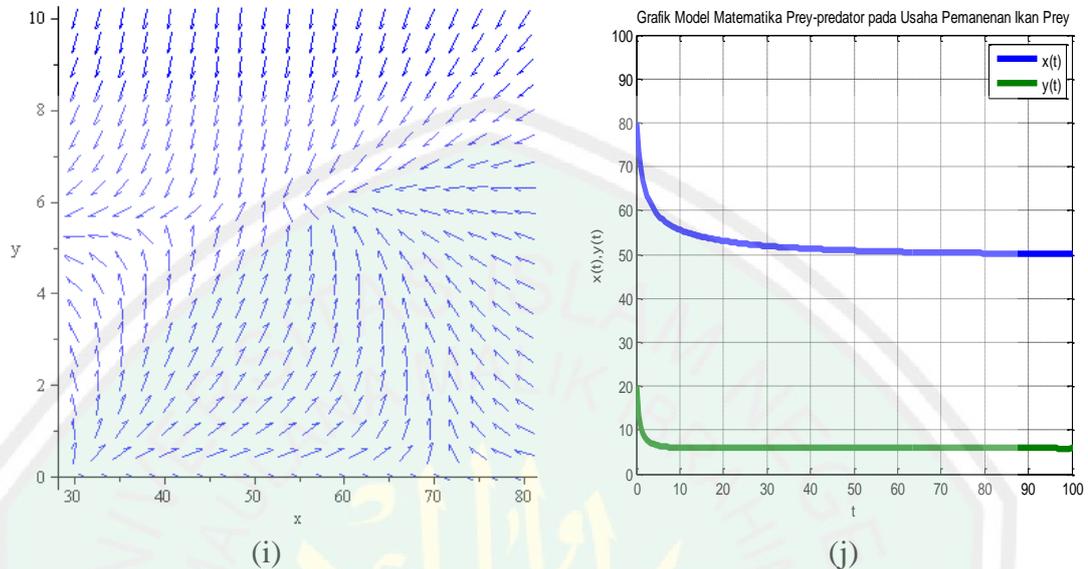


Gambar 3.7 Potret Fase (g) dan Grafik Perilaku (h) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai Pemanenan  $h = 16.25$

Dari Gambar 3.7 untuk potret fase (g) dapat dilihat bahwa tidak ditemukan titik kesetimbangan dengan ditunjukkan adanya arah panah menuju ke suatu titik yaitu  $(52.28, 5.89)$ . Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai pemanenan sebesar 16.25 satu satuan stabil. Untuk grafik perilaku (h) dengan nilai pemanenan sebesar 16.25 satu satuan dapat dilihat bahwa grafik dari ikan *prey* dengan nilai awal sebesar 80 satu satuan mengalami penurunan sampai 52.28 satu satuan pada saat waktu 62 satu satuan waktu. Sedangkan untuk populasi ikan *predator* dengan nilai awal sebesar 20 satu satuan mengalami penurunan pada saat waktu 16.5 satu satuan waktu dan menuju ke suatu titik 5,89 . Hal ini dapat diartikan bahwa populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* dapat hidup berdampingan meskipun adanya pemanenan pada ikan *prey* sebesar 16.25 satu satuan.

Kondisi Ketika  $h = h_{maks}$

Ketika nilai pemanenan  $h = 16.35$

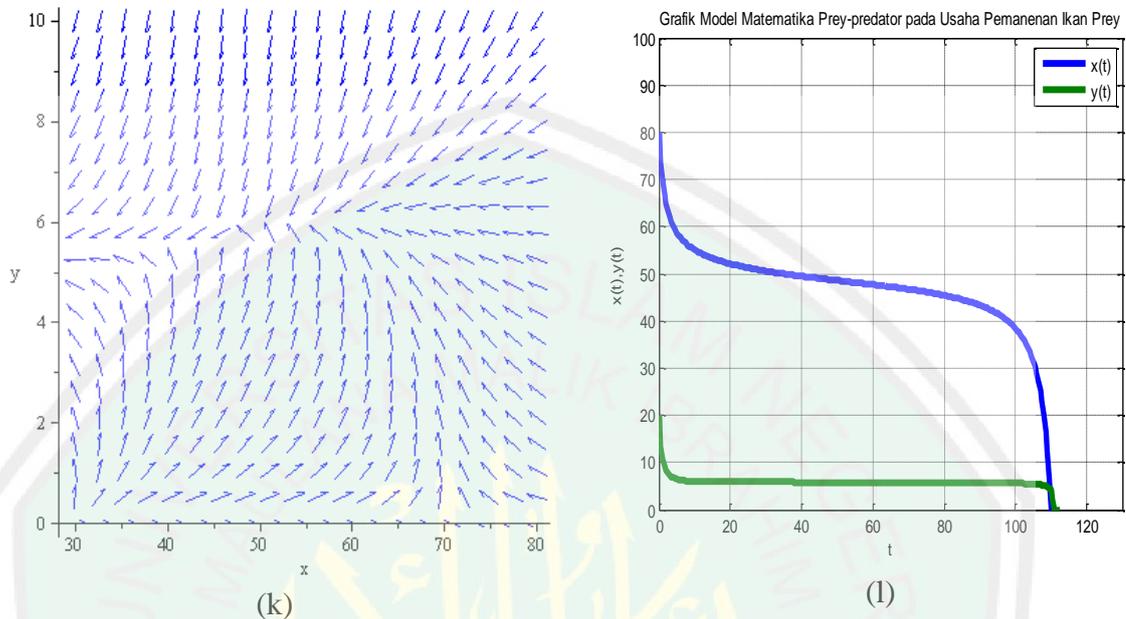


Gambar 3.8 Potret Fase (i) dan Grafik Perilaku (j) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai Pemanenan  $h = 16.35$

Dari Gambar 3.8 untuk potret fase (i) dapat dilihat bahwa tidak ditemukan titik kesetimbangan dengan ditunjukkan adanya arah panah menuju ke suatu titik yaitu  $(49.81, 5.84)$ . Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai pemanenan sebesar 16.35 satu satuan stabil. Untuk grafik perilaku (j) dengan nilai pemanenan sebesar 16.35 satu satuan dapat dilihat bahwa grafik dari ikan *prey* dengan nilai awal sebesar 80 satu satuan mengalami penurunan sampai 49.81 satu satuan pada saat waktu 40 satu satuan waktu. Sedangkan untuk populasi ikan *predator* dengan nilai awal sebesar 10 satu satuan mengalami penurunan pada saat waktu 10 satu satuan waktu dan menuju ke suatu titik 5.84 satu satuan. Hal ini dapat diartikan bahwa populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* dapat hidup berdampingan dengan meskipun adanya pemanenan pada ikan *prey* sebesar 16.35 satu satuan.

Kondisi Ketika  $h > h_{maks}$

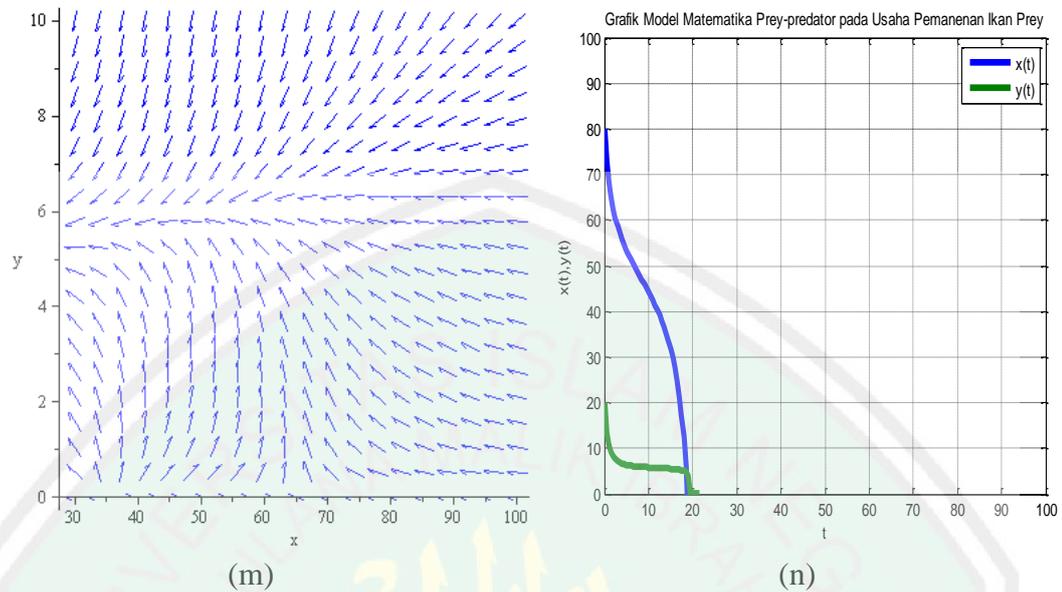
Ketika nilai pemanenan  $h = 16.45$



Gambar 3.9 Potret Fase (k) dan Grafik Perilaku (l) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai Pemanenan  $h = 16.45$

Dari Gambar 3.9 untuk potret fase (k) dapat dilihat bahwa tidak ditemukan titik kesetimbangan dengan ditunjukkan tidak adanya arah panah menuju ke suatu titik. Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai pemanenan sebesar 16.45 satu satuan tidak stabil. Untuk grafik perilaku (l) dengan nilai pemanenan sebesar 16.45 satu satuan dapat dilihat bahwa grafik dari ikan *prey* dengan nilai awal sebesar 80 satu satuan mengalami penurunan sampai 0 satu satuan pada saat waktu sebesar 110 satu satuan waktu. Sedangkan untuk populasi ikan *predator* dengan nilai awal sebesar 20 satu satuan mengalami penurunan sampai 0 satu satuan pada saat waktu sebesar 111 satu satuan waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa populasi ikan *prey* akan mengalami kepunahan kemudian terjadi kepunahan pada populasi ikan *predator* karena terdapat pemanenan sebesar 16.45 satu satuan.

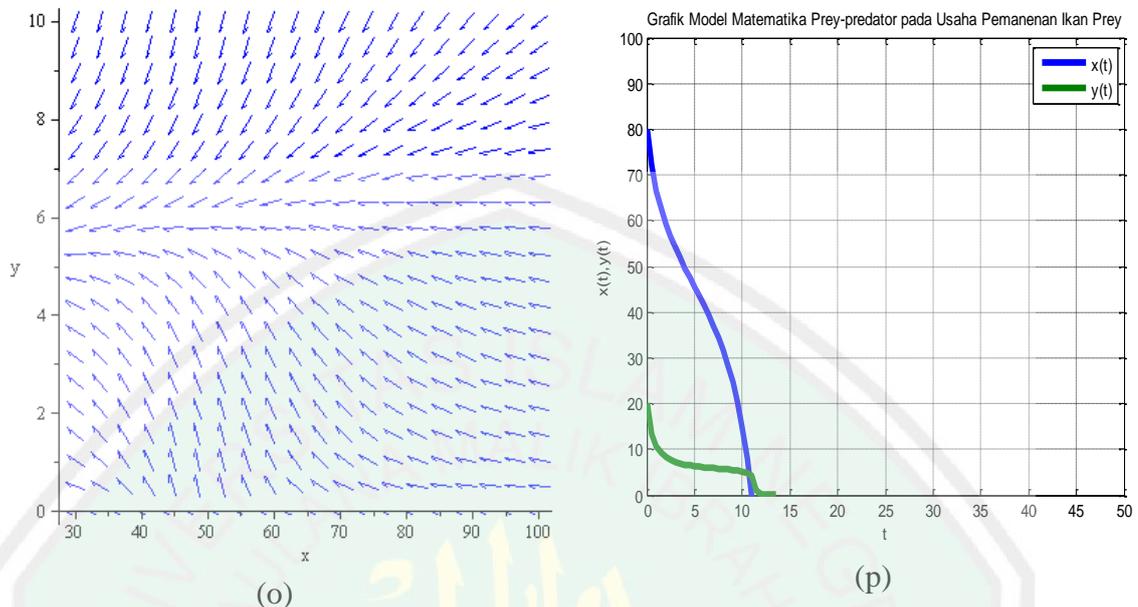
Ketika nilai pemanenan  $h = 18$



Gambar 3.10 Potret Fase (m) dan Grafik Perilaku (n) dari Sistem Persamaan (3.1) dan (3.2) dengan Nilai Pemanenan  $h = 18$

Dari Gambar 3.10 untuk potret fase (m) dapat dilihat bahwa tidak ditemukan titik kesetimbangan dengan ditunjukkan tidak adanya arah panah menuju ke suatu titik. Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai pemanenan sebesar 18 satu satuan tidak stabil. Untuk grafik perilaku (n) dengan nilai pemanenan sebesar 18 satu satuan dapat dilihat bahwa grafik dari ikan *prey* dengan nilai awal sebesar 80 satu satuan mengalami penurunan sampai 0 satu satuan pada saat waktu sebesar 19 satu satuan waktu. Sedangkan untuk populasi ikan *predator* dengan nilai awal sebesar 20 satu satuan mengalami penurunan sampai 0 satu satuan pada saat waktu sebesar 20 satu satuan waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa populasi ikan *prey* akan mengalami kepunahan kemudian terjadi kepunahan pada populasi ikan *predator* karena terdapat pemanenan sebesar 18 satu satuan.

Ketika nilai pemanenan  $h = 20$



Gambar 3.11 Potret Fase (o) dan Grafik Perilaku (p) dari Sistem Persamaan (3.1) dengan Nilai Pemanenan  $h = 20$

Dari Gambar 3.11 untuk Potret Fase (o) dapat dilihat bahwa tidak ditemukan titik kesetimbangan dengan ditunjukkan tidak adanya arah panah menuju ke suatu titik. Hal ini menunjukkan bahwa ketika nilai pemanenan sebesar 20 satu satuan tidak stabil. Untuk grafik perilaku (p) dengan nilai pemanenan sebesar 20 satu satuan dapat dilihat bahwa grafik dari ikan *prey* dengan nilai awal sebesar 80 satu satuan mengalami penurunan sampai 0 satu satuan pada saat waktu sebesar 10.95 satu satuan waktu. Sedangkan untuk populasi ikan *predator* dengan nilai awal sebesar 20 satu satuan mengalami penurunan sampai 0 satu satuan pada saat waktu sebesar 11.95 satu satuan waktu. Hal ini dapat diartikan bahwa populasi ikan *prey* akan mengalami kepunahan kemudian terjadi kepunahan pada populasi ikan *predator* karena terdapat pemanenan sebesar 20 satu satuan.

Dari simulasi yang dilakukan dengan asumsi nilai pemanenan  $0 \leq h \leq h_{maks}$ , maka terdapat tiga kondisi yang berbeda yaitu kondisi pertama yaitu

$h < h_{maks}$ , kemudian kondisi kedua yaitu  $h = h_{maks}$ , dan kondisi ketiga  $h > h_{maks}$ . Pada kondisi  $h < h_{maks}$  dengan nilai pemanenan antara 0 sampai 16.25 dilakukan simulasi pada nilai pemanenan yaitu 0, 5, 10 dan 16.25. Dari simulasi yang dilakukan maka dapat disimpulkan untuk nilai pemanenan  $h < h_{maks}$  pada potret fase arah panah terlihat menuju ke suatu titik, ini berarti model tersebut stabil. Dan untuk grafik perilaku dapat diartikan populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* dapat hidup berdampingan dengan nilai pemanenan  $h < h_{maks}$ .

Sedangkan hasil simulasi pada kondisi nilai pemanenan  $h = h_{maks}$  yaitu nilai pemanenan sebesar 16.35 satu satuan. Pada potret fase terlihat menuju kesuatu titik yang berarti stabil. Dan untuk grafik perilaku dapat diartikan populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* dapat hidup berdampingan dengan nilai pemanenan  $h = h_{maks}$ . Untuk kondisi nilai pemanenan  $h > h_{maks}$  maka nilai pemanenan antara 16.45 sampai 20 dan simulasi yang dilakukan pada nilai pemanenan yaitu 16.45, 18 dan 20. Dari simulasi yang dilakukan maka dapat disimpulkan pada potret fase arah panah tidak menuju ke suatu titik, ini berarti model tersebut tidak stabil. Dan untuk grafik perilaku dapat diartikan bahwa populasi ikan *prey* mengalami kepunahan dan diikuti oleh populasi ikan *predator* karena populasi ikan *predator* tidak mendapatkan makanan pada saat nilai pemanenan  $h < h_{maks}$ . Pada kondisi tersebut pemanenan yang dilakukan pada populasi ikan *prey* telah melampaui batas yang telah ditentukan sehingga, ini mengakibatkan persediaan populasi ikan *prey* akan habis dan berdampak pada populasi ikan *predator* yang tidak mendapatkan makanan. Maka kedua populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* akan punah.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang dilakukan pada model *prey-predator* dengan pemanenan konstan pada ikan *prey*. Dari hasil analisis yang dilakukan pada model tersebut, didapatkan nilai pemanenan maksimum  $h_{maks}$  sebesar 16.35 satu satuan. Kemudian dilakukan analisis kestabilan ketika nilai pemanenan maksimum. Dari lima titik kesetimbangan didapatkan satu titik kesetimbangan yang stabil yaitu pada titik (49.81, 5.84) kemudian didapatkan nilai eigennya yaitu  $\lambda_1 = -0.022$  dan  $\lambda_2 = -0.45$ , maka jenis titik kesetimbangan yaitu berupa titik simpul yang stabil dengan jenis kestabilan adalah stabil asimtotik.

Dari simulasi yang dilakukan dengan nilai pemanenan diasumsikan  $0 \leq h \leq h_{maks}$ , maka diberikan tiga kondisi untuk menganalisis model ini yaitu kondisi pertama  $h < h_{maks}$ , kondisi kedua  $h = h_{maks}$ , dan kondisi ketiga  $h > h_{maks}$ . Pada kondisi nilai pemanenan  $h < h_{maks}$  dan  $h = h_{maks}$  dapat disimpulkan model tersebut stabil, ini berarti bahwa spesies ikan *prey* dan populasi ikan *predator* dapat hidup berdampingan meskipun terdapat pemanenan pada populasi ikan *prey*. Pada kondisi nilai pemanenan  $h > h_{maks}$  dapat disimpulkan bahwa model tersebut tidak stabil, ini berarti populasi ikan *prey* dan populasi ikan *predator* tidak dapat hidup berdampingan dengan nilai pemanenan melebihi nilai pemanenan maksimum.

#### 4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat dilakukan pada model *prey-predator* dengan memberikan perlakuan pemanenan berupa konstan pada kedua spesies dan selain itu juga dengan memberikan perlakuan pemanenan berupa fungsi pemanenan kepada salah satu spesies atau kedua spesies.



## DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W.E dan DiPrima, R.C. 1999. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problem*. John Wiley & Sons. United States of America.
- Dwaradi, H. 2011. *Analisis Model Mangsa-pemangsa Michaelis-Menten dengan Pemanenan pada populasi Mangsa*. Skripsi tidak dipublikasikan. Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- Finizio dan Ladas. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.
- Hertini, E dan Gusriani, N. 2013. *Maximum Sustainable Yield (MSY) pada Perikanan dengan Struktur Prey-predator*. Prosiding Seminar Nasional Sains dan Teknologi Nuklir. Sumedang: PTNBR-BATAN Bandung. 2013
- Hidayah. D. 2010. *Tafsir Jalalain Jalaludin Asy-syuyuthi Jalaludin Muhamad bin Ahmad Al-Mahalliy*. Tasikmalaya: Pesantren Persatuan Islam 91.
- Hideaki, K. 2009. *Text Book: Pengelolaan Sumber Daya Perikanan*. Jakarta: JICA.
- Idels, L.V dan Wong, M. 2008. *Harvesting Fisheries Management Strategies with Modified Effort Function*. IJMC Jurnal dalam Modelling Complex System.
- Iswanto, R.J. 2012. *Pemodelan Matematika: Aplikasi dan Terapan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Kar, T.K dan Chakraborty, K. 2010. *Effort Dynamics in a Prey-Predator Model with Harvesting*. Vol. 6 No. 3 Hal. 318-332.
- Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Bisa: Model Matematika Fenomena Perubahan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Redjeki, P.S. 2009. *Diktat Kuliah MA2271 Metoda Matematika*. Bandung: Fakultas MIPA ITB.
- Robinson, R.C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. New Jersey: Pearson Education, In.
- Supriatna, A.K dan Lestari, M. 2001. *Pengaruh Ambang Batas Kepunahan dalam Penentuan Tingkat Eksploitasi Sumber Alam Regeneratif*. Laporan Penelitian Dosen Dosen Bersama Mahasiswa tidak dipublikasikan. Sumedang: Universitas Padjajaran.

Widowati dan Sutimin. 2007. *Buku Ajar Model Matematika*. Semarang: Fakultas MIPA UNDIP.

Waluya, S.B. 2006. *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.



## Lampiran

Lampiran 1. Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey* Ketika Tidak Ada Populasi Ikan *Predator*

```
> restart;
```

```
> per1:={diff(x(t),t)-0.8*x(t)*(1-x(t)/100)+10};
```

$$per1 := \left\{ \frac{d}{dt} x(t) - 0.8x(t) \left( 1 - \frac{1}{100} x(t) \right) + 10 \right\}$$

```
> solusi:=dsolve(per1);
```

$$solusi := \left\{ x(t) = 50 + 25\sqrt{2} \tanh\left(\frac{1}{5}\sqrt{2}t + \frac{1}{5}\sqrt{2}CI\right) \right\}$$

```
> nilai_awal:={x(0)=80};
```

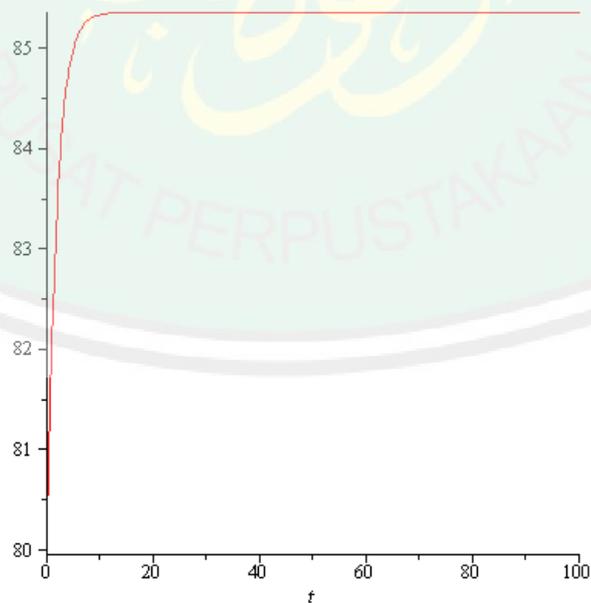
$$nilai_awal := \{x(0) = 80\}$$

```
> solusi_khusus:=dsolve(per1 union nilai_awal,{x(t)});
```

$$solusi_khusus := x(t) = 25 \left( \sqrt{2} + \tanh\left(\frac{1}{10} \left( 2t + 5\sqrt{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{3}{5}\sqrt{2}\right) \right) \sqrt{2} \right) \sqrt{2} \right)$$

```
>
```

```
plot((25*(sqrt(2)+tanh((1/10*(2*t+5*sqrt(2)*arctanh((3/5)*sqrt(2))))*sqrt(2))))*sqrt(2),t=0..100);
```



Lampiran 2. Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey* Ketika Tidak Ada Populasi Ikan *Predator*

> restart;

> per2 := {diff(y(t), t) + 0.001 · y(t) + 0.08 · y(t)<sup>2</sup>};

$$\text{per2} := \left\{ \frac{d}{dt} y(t) + 0.001 y(t) + 0.08 y(t)^2 \right\}$$

> solusi := dsolve(per2);

$$\text{solusi} := \left\{ y(t) = \frac{1}{-80 + e^{\frac{1}{1000} t} \_C1} \right\}$$

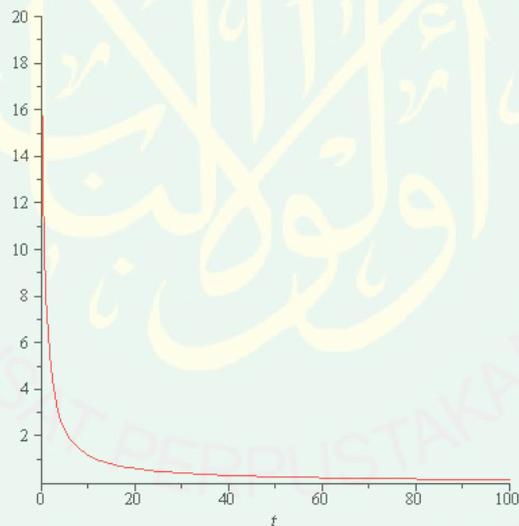
> nilai\_awal := {y(0) = 20};

$$\text{nilai\_awal} := \{y(0) = 20\}$$

> solusi\_khusus := dsolve(per2 union nilai\_awal, {y(t)});

$$\text{solusi\_khusus} := y(t) = \frac{20}{-1600 + 1601 e^{\frac{1}{1000} t}}$$

> plot  $\left( \frac{20}{-1600 + 1601 e^{\frac{1}{1000} t}}, t = 0..100 \right)$ ;

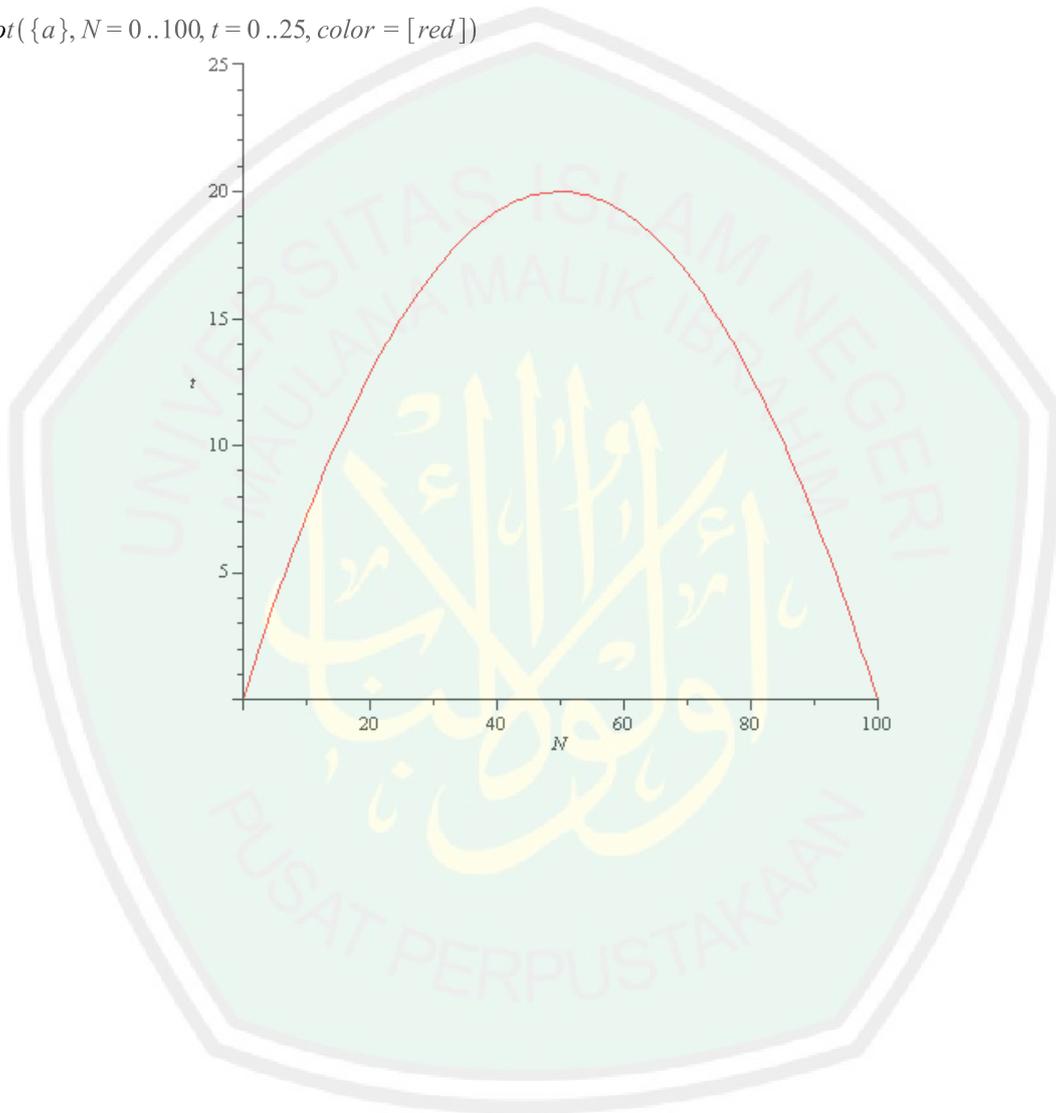


Lampiran 3. Grafik Pertumbuhan Maksimum dari Persamaan (2.1) dengan  $r = 0.8$  dan  $K = 100$

- > *restart;*
- > *whit(plot) : whit(linang) :*
- >  $a := 0.8 \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{100}\right)$

$$a := 0.8 N \left(1 - \frac{1}{100} N\right)$$

- > *plot({a}, N = 0 .. 100, t = 0 .. 25, color = [red])*



Lampiran 4. Menentukan Titik Tetap dan Nilai Eigen dari Model *Prey-predator* dengan Pemanenan Konstan pada Ikan *Prey* Menggunakan *Software* MAPLE

```

> > restart;

> r := .8; b := 0.001; a := 10; alpha := .75; beta := .75; K
:= 100; gama := 0.08; h :=16.35;
      r :=0.8
      b :=0.001
      a :=10
      α :=0.75
      β :=0.75
      K :=100
      gama :=0.08
      h :=16.35
> dx:=r*x*(1-(x/K))-alpha*x*y/(a+x)-h;
      dx :=0.8x(1-1/100x)-0.75xy/(10+x)-16.35
> dy:=-b*y+beta*alpha*x*y/(a+x)-gama*y^2;
      dy :=-0.001y+0.5625xy/(10+x)-0.08y^2
> titiktetap:=solve({dx,dy},{x,y});

      titiktetap := {x = 28.63999064, y = 0.}, {x = 71.36000936, y = 0.}, {x
= 46.98539477, y = 5.784881212}, {x = 49.81284949, y
= 5.843208280}, {x = -8.399122131+ 4.095938626I, y
= 1.198455254+ 14.89156077I}, {x = -8.399122131
- 4.095938626I, y = 1.198455254- 14.89156077I}

>
titiktetap1:=titiktetap[1];titiktetap2:=titiktetap[2];titiktet
ap3:=titiktetap[3];titiktetap4:=titiktetap[4];titiktetap5:=tit
iktetap[5];titiktetap6:=titiktetap[6];
      titiktetap1 := {x = 28.63999064, y = 0.}
      titiktetap2 := {x = 71.36000936, y = 0.}
      titiktetap3 := {x = 46.98539477, y = 5.784881212}
      titiktetap4 := {x = 49.81284949, y = 5.843208280}
      titiktetap5 := {x = -8.399122131+ 4.095938626I, y = 1.198455254
+ 14.89156077I}
      titiktetap6 := {x = -8.399122131- 4.095938626I, y = 1.198455254
- 14.89156077I}

> with(plots):with(linalg):
> jac:=jacobian([dx,dy],[x,y]);
      jac := [[0.8 - 0.01600000000x - 0.75y/(10+x) + 0.75xy/(10+x)^2, -0.75x/(10+x)
],
[0.5625y/(10+x) - 0.5625xy/(10+x)^2, -0.001 + 0.5625x/(10+x) - 0.16y]]
> titiktetap1:=titiktetap[1];

```

```

      titiktetap1 := {x = 28.63999064, y = 0.}
> jac1:=subs (titiktetap1,evalm(jac)) ;
      jac1 :=  $\begin{bmatrix} 0.3417601498 & -0.5559005741 \\ 0. & 0.4159254306 \end{bmatrix}$ 
> eigenvals (jac1) ;
      0.3417601498 0.4159254306
> titiktetap2:=titiktetap[2] ;
      titiktetap2 := {x = 71.36000936, y = 0.}
> jac2:=subs (titiktetap2,evalm(jac)) ;
      jac2 :=  $\begin{bmatrix} -0.341760150 & -0.6578171198 \\ 0. & 0.4923628398 \end{bmatrix}$ 
> eigenvals (jac2) ;
      -0.3417601500 0.4923628398
> titiktetap3:=titiktetap[3] ;
      titiktetap3 := {x = 46.98539477, y = 5.784881212}
> jac3:=subs (titiktetap3,evalm(jac)) ;
      jac3 :=  $\begin{bmatrix} 0.03487300297 & -0.6183873292 \\ 0.01002051055 & -0.4627904970 \end{bmatrix}$ 
> eigenvals (jac3) ;
      0.02209354178 -0.4500110351
> titiktetap4:=titiktetap[4] ;
      titiktetap4 := {x = 49.81284949, y = 5.843208280}
> jac4:=subs (titiktetap4,evalm(jac)) ;
      jac4 :=  $\begin{bmatrix} -0.00925524080 & -0.6246088832 \\ 0.00918723675 & -0.4674566624 \end{bmatrix}$ 
> eigenvals (jac4) ;
      -0.02214146087 -0.4545704421
> titiktetap5:=titiktetap[5] ;
      titiktetap5 := {x = -8.399122131+ 4.095938626I, y = 1.198455254
+ 14.89156077I}
> jac5:=subs (titiktetap5,evalm(jac)) ;
      jac5 :=
      [[ -2.640104577+ 4.494094992I, -0.1291685603
- 1.588433149I],
      [2.680867899- 3.419722508I, -0.09587642036- 1.191324861I]]
> eigenvals (jac5) ;
      -2.825587466+ 5.441582799I, 0.08960646837- 2.138812669I
> titiktetap6:=titiktetap[6] ;
      titiktetap6 := {x = -8.399122131- 4.095938626I, y = 1.198455254
- 14.89156077I}
> jac6:=subs (titiktetap6,evalm(jac)) ;
      jac6 :=
      [[ -2.640104577- 4.494094992I, -0.1291685603
+ 1.588433149I],
      [2.680867899+ 3.419722508I, -0.09587642036+ 1.191324861I]]
> eigenvals (jac6) ;
      -2.825587466- 5.441582799I, 0.08960646837+ 2.138812669I

```

Lampiran 5. Simulasi Potret Fase Menggunakan *Software* MAPLE 12

```
> restart; with(DEtools):with(plots):with(linalg):
> r := .8; b := 0.001; a := 10; alpha := .75; beta := .75; K
:= 100; gama := 0.08; h :=10;
>
```

```
      r:=0.8
      b:=0.001
      a:=10
      α:=0.75
      β:=0.75
      K:=100
      gama:=0.08
      h:=10
```

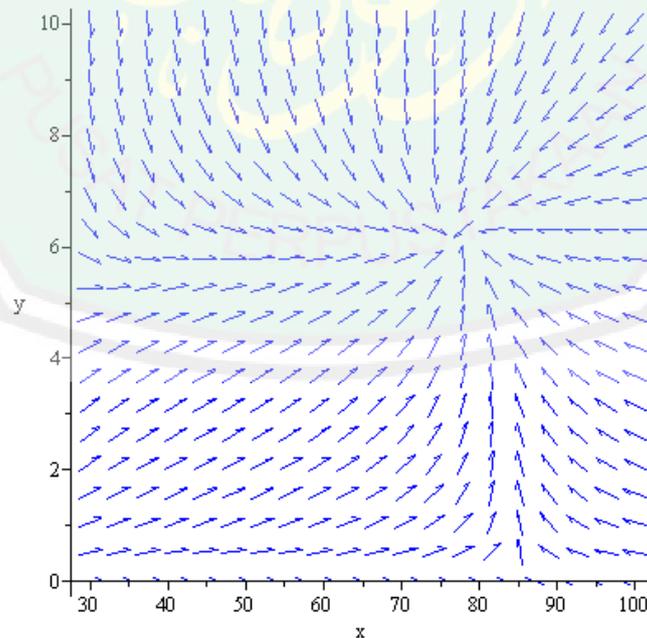
```
> q := diff(x(t), t) = r*x(t)*(1-x(t)/K) -
(alpha*x(t)*y(t)/(a+x(t)))-h, diff(y(t), t) = -
b*y(t)+beta*alpha*x(t)*y(t)/(a+x(t))-gama*y^2;
>
```

$$q := \frac{d}{dt} x(t) = 0.8x(t) \left( 1 - \frac{1}{100} x(t) \right) - \frac{0.75x(t)y(t)}{10+x(t)} - 10,$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = -0.001y(t) + \frac{0.5625x(t)y(t)}{10+x(t)} - 0.08y^2$$

```
> DEplot({q}, [x(t), y(t)], 0..100, x = 30.. 100, y = 0.. 10,
color = blue);
```

Warning, y is present as both a dependent variable and a name. Inconsistent specification of the dependent variable is deprecated, and it is assumed that the name is being used in place of the dependent variable.



## Lampiran 6. Simulasi Analisis Perilaku Menggunakan *Software* MATLAB R2010a

Model kontinu Predator prey

```
function kontinu
t=0:0.001:100;
initial_x=80;
initial_y=20;

[t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y]);

plot(t,x(:,1),t,x(:,2),'LineWidth',2);
title('Grafik Model Prey-predator dengan Pemanenan konstan pada Ikan Prey')
legend('x(t)', 'y(t)')
xlabel('t');ylabel('x(t),y(t)');
grid on
axis([0 100 0 100])

function modelLo=kk(t,x)
r=0.8;b=0.001;a=10;alpa=0.75;beta=0.75;K=100;gama=0.08;h=16.35;
modelLo_1=r*x(1)*(1-(x(1)/K))-(alpa*x(1)*x(2)/(a+x(1)))-h;
modelLo_2=-b*x(2)+(beta*alpa*x(1)*x(2)/(a+x(1)))-gama*(x(2))^2;
modelLo=[modelLo_1;modelLo_2]
end
end
```