STUDI LUBANG HITAM KERR-NEWMAN
DALAM TEORI GRAVITASI $f(R)$

SKRIPSI

Oleh:
Trisna Dwi Lestari
NIM. 18640046

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2024

STUDI LUBANG HITAM KERR-NEWMAN
DALAM TEORI GRAVITASI $f(R)$

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
Trisna Dwi Lestari
NIM. 18640046

PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

HALAMAN PERSETUJUAN

STUDI LUBANG HITAM KERR-NEWMAN
DALAM TEORI GRAVITASI $f(R)$

SKRIPSI

Oleh:
Trisna Dwi Lestari
NIM. 18640046

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
pada tanggal, 20 Mei 2024

Pembimbing I	Pembimbing II
Arista Romadani, M.Sc.	Ahmad Luthfin, S.Si., M.Si.
NIP. 19900905 201903 1 018	NIP. 19860504 201903 1 009

Mengetahui,
Ketua Program Studi

KEMENTERIAN AGAMA REPUBLIK INDONESIA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
JURUSAN FISIKA

Dr. Imam Tazi, M.Si.
NIP.197407302003121002

HALAMAN PENGESAHAN

STUDI LUBANG HITAM KERR-NEWMAN
DALAM TEORI GRAVITASI $f(R)$

SKRIPSI

Oleh:
Trisna Dwi Lestari
NIM. 18640046

Telah Diperiksa di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
pada Tanggal 20 Mei 2024

Penguji Utama	:	Drs. Abdul Basid, M.Si. NIP. 19650504 199003 1 003	
Ketua Penguji	:	Muhammad Taufiqi, M.Si. NIP. LB.64021	
Sekretaris Penguji	:	Arista Romadani, M.Sc. NIP. 19900905 201903 1 018	
Anggota Penguji	:	Ahmad Luthfin, S.Si., M.Si. NIP. 19860504 201903 1 009	

Mengesahkan,
Ketua Program Studi

Dr. Imam Tazi, M.Si.
NIP. 19740730 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Trisna Dwi Lestari
NIM	: 18640046
Jurusan	: Fisika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Penelitian	: Studi Lubang Hitam Kerr-Newman dalam Teori Gravitasi $f(R)$

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa penelitian ini merupakan buah dari proses berpikir saya, bukan jiplakan, atau karya orang lain yang secara sengaja diperoleh dengan cara ilegal. Akan tetapi, terdapat pengecualian pada setiap persamaan yang sudah paten, kutipan, serta gambar yang disertai rujukan sebagaimana tercantum pada daftar pustaka. Bilamana ternyata ditemukan kecurangan pada penelitian ini, saya siap menerima sanksi beserta konsekuensi di kemudian hari.

Malang, 20 Mei 2024

Yang Membuat Pernyataan

10000 METERAI TEMPEL 86-A1AKX376507434

Trisna Dwi Lestari

NIM. 18640046

MOTTO

"Jangan menjelaskan tentang dirimu kepada siapapun. Karena yang menyukaimu tidak membutuhkan itu, dan yang membencimu tidak mempercayai itu."

Ali bin Abi Thalib

HALAMAN PERSEMBAHAN

Pertama, saya haturkan terima kasih kepada Allah SWT yang telah memberi saya kesempatan hingga saat ini. Karena atas izin-Nya, saya bisa menulis penelitian ini yang pada akhirnya akan saya persembahkan untuk diri saya sendiri terlebih dahulu, sebagai bentuk apresiasi atas kesempatan yang sudah Allah berikan kepada saya.

Kedua, kepada keluarga kecil saya. Untuk Ibu dan Bapak, kakak saya, serta kakek saya yang senantiasa membatu saya di berbagai kesempatan, baik dengan kasih sayang, doa, serta dukungan berupa fasilitas guna menunjang pendidikan saya hingga saat ini.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT karena sudah melimpahkan segala nikmat, rahmat, dan taufiq-Nya. Tidak lupa *sholawat* dihaturkan pada junjungan kita, Nabi Besar Muhammad SAW yang telah mewariskan ilmu yang sangat luas, sehingga kita tidak lagi terperangkap di alam kebodohan. *Alhamdulillahi robbil ‘alamiin,* karena atas kehendak-Nya penulis dapat menyelesaikan penelitian dengan judul *Studi Lubang Hitam Kerr-Newman dalam Teori Gravitasi f(R)* yang memaparkan sebagian kecil pembahasan dari salah satu benda langit ciptaan-Nya.

Banyak pihak-pihak yang dari berbagai aspek telah membantu peulis untuk menyelesaikan penelitian ini. Oleh karena itu, penulis haturkan terima kasih kepada:

1. Dr. Imam Tazi, M.Si selaku Ketuan Program Studi Fisika UIN Maulna Malik Ibrahim Malang.
2. Arista Romadani, M.Sc dan Ahmad Luthfin, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing yang telah mencurahkan banyak ilmu. Sehingga menambah wawasan serta sudut pandang baru bagi penulis.
3. Dr. Abdul Basid, M.Si dan Muhammad Taufiqi, M.Si selaku dosen penguji yang turut serta memberikan ilmu dan pembenahan dalam penulisan tugas akhir ini.
4. Irjan, M.Si selaku dosen wali penulis selama mengenyam pendidikan di universitas.

5. Seluruh dosen Jurusan Fisika yang telah mendidik dan menyalurkan banyak ilmunya. Sehingga, penulis mendapat sudut pandang yang berbeda dalam melihat suatu fenomena.
6. Seluruh staf dan admin fisika yang telah memberikan informasi serta layanan yang telah membantu penulis selama mengenyam pendidikan di universitas.
7. Ibu, Bapak, Kakak, serta Kakek. Penulis ucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya atas dukungan dari segala aspek kehidupan penulis hingga saat ini, karena tanpa dukungan dan doan dari keluarga penulis bukanlah apa-apa.
8. Kyai Marzuki Mustamar sekeluarga, jajaran pengasuh, serta para guru di Pondok Pesantren Sabilurrosyad Gasek yang telah memberikan pemahaman baru mengenai Islam. Sehingga penulis menyadari keluasan ilmu Allah dan korelasi antar ilmu-ilmu tersebut.
9. Teman-teman Fisika 2018, terkhusus Fitri, Nayah, serta Luluk yang telah menemanin penulis dam suka dan duka selama masa pembelajaran di universitas. Tak lupa kepada teman kecil, Ayu yang selalu mendukung penulis dengan caranya sendiri hingga saai ini. Serta teman-teman di pesantren yang turut mewarnai kisah penulis selama mengenyam pendidikan di Kota Malang.
10. Masashi Kishimoto, EXO, Luhan, bererta seniman lain yang turut memotivasi penulis dengan karya-karya indahnya.

Penulis berharap keterlibatan pihak yang disebut atau tidak disebutkan dalam penelitian ini dibalas oleh Yang Maha Kuasa di lain kesempatan. Penulis juga menyadari akan kekurangan penelitian ini, walau demikian penulis tetap berharap bahwa penelitian ini akan berguna untuk penelitian selanjutnya.

Malang, Mei 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Lestari, Trisna Dwi.. 2024. **Studi Lubang Hitam Kerr-Newman dalam Teori Gravitasi $\boldsymbol{f(R)}$**. Skripsi. Program Studi Fisika, Fakutas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang. Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Ahmad Luthfin, S.Si., M.Si.

Kata kunci: Lubang Hitam Kerr-Newman, teori $f(R)$, Starobinsky, kelengkungan skalar, geodesik.

Teori relativitas umum (TRU) biasa dianggap belum mampu menjelaskan peristiwa inflasi. Oleh karena itu, penambahan orda yang lebih tinggi dilakukan pada suku Einstein-Hilbert dalam persamaan TRU, modifikasi ini dikenal dengan teori $f(R)$. Penelitian ini menggunakan metode studi literatur, yaitu dengan membaca dan mencatat. Kemudian mengaplikasikan data berupa persamaan dasar sebagai penunjang dalam menyelesaikan perhitungan dalam teori modifikasi $f(R)$. Tujuan peneletian yaitu untuk mendapatkan bentuk metrik lubang hitam Kerr-Newman, kelengkungan skalar, serta persamaan geodesik, yang masing-masing dalam bingkai $f(R)$. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa metrik, kelengkungan ruang-waktu, serta persamaan geodesik dalam bingkai $f(R)$ mengandung suku tambahan berupa $(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$ sebagai konsekuensi dari fungsi khusus Starobinsky $R + \alpha R^2$ yang digunakan pada variasi Einstein-Hilbert. Parameter a sebagai parameter rotasi dan Q sebagai parameter muatan juga mempengaruhi bentuk persamaan pada masing-masing tujuan penelitian. Sehingga, hasil yang didapat akan berbeda dengan persamaan biasa, baik metrik, kelengkungan, serta geodesiknya. Akan tetapi, apabila parameter $\alpha = a = Q = 0$, maka metrik dan skalar ricci dalam bingkai $f(R)$ yang telah disebutkan akan kembali pada bentuk Schwarzschild biasa. Persamaan geodesik menujukkan gerak partikel pada masing-masing koordinat yang dipengaruhi gravitasi lubang hitam Kerr-Newman dalam bingkai $f(R)$.

ABSTRACT

Lestari, Trisna Dwi. 2024. **Study of Kerr-Newman Black Holes in $f(R)$ Theory of Gravity**. Undergraduate Thesis. Departement of Physics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Ahmad Luthfin, S.Si., M.Si.

Keywords: Kerr-Newman Black Holes, f(R) theory, Starobinsky, scalar curvature, geodesics.

The general theory of relativity (GR) is widely regarded as insufficient to explain the phenomenon of inflation. As a result, higher-order additions are made to the Einstein-Hilbert term in the GR equations, also known as $f(R)$ theory. This study uses the literature review method, which involves reading and taking notes. Afterwards, uses basic equations as supporting data to do computations in the modified $f(R)$ theory. The project aims to determine the form of the Kerr-Newman black hole metric, scalar curvature, and geodesic equations, all within the f(R) framework. This study found that the metric, spacetime curvature, and geodesic equations in the $f(R)$ framework have additional terms in the form of $(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$ due to the unique Starobinsky function $(R + \alpha R^2)$ utilized in the Einstein-Hilbert variation. The rotation parameter a and the charge parameter Q alter the shape of the equations for each research objective. As a result, the resultant findings will differ from the standard equations for the metric, curvature, and geodesics. However, if the parameters $\alpha = a = Q = 0$, then the metric and the Ricci scalar in the mentioned $f(R)$ frame will revert to the usual Schwarzschild form. The geodesic equations show the motion of particles in each coordinate influenced by the gravity of a Kerr-Newman black hole in the $f(R)$ frame.

مستخصل البحث

لستاري، ترسنا دوي. ٢٠٢٤. **دراسة ثقب أسواد Kerr–Newman في نظرية الجاذبية $\boldsymbol{f(R)}$**. بحث جامعي. قسم الفزياء. كلية العلوم و تكنولوجيا. جامعة مولانا مالك أبراهيم الإسلامية الحكومية ملانج. المشرف: (I) أريستا رمضاني الماجستير. (II) أحمد لطفن الماجستير.

الكلمت الرئيسية: الثقوب السوداء Kerr–Newman، نظرية $f(R)$، Starobinsky، الانحناء العددي، الجيوديسيا.

نظرية النسبية العامة تعتبر عادةً غير قادرة على تفسير ظاهرة التضخم. لذلك، يتم إجراء إضافة مرتبة أعلى إلى مصطلح أينشتاين–هيلبرت (Einstein-Hilbert) في معادلة النسبية العامة، وتُعرف هذه التعديلات بنظرية ($f(R)$). يستخدم هذا البحث منهجية دراسة الأدبيات، أي من خلال القراءة وتسجيل الملاحظات. ثم تطبيق البيانات على شكل معادلات أساسية لدعم حل الحسابات بنظرية ($f(R)$) المعدلة. يهدف البحث إلى الحصول على شكل مقياس ثقب كير–نيومن (Kerr-Newman) الأسود، والانحناء السلمي، و الجيوديسية، كل ذلك في إطار ($f(R)$). نتائج هذا البحث تظهر أن المقياس، وانحناء المساحة الوقت، و الجيوديسية في إطار ($f(R)$) تحتوي على مصطلحات إضافية على شكل ($\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2$) كنتيجة لاستخدام دالة ستاروبينسكي (Starobinsky) الخاصة ($R + \alpha R^2$) في تباين أينشتاين–هيلبرت (Einstein-Hilbert). كذلك تؤثر المعامل (a) كمعامل الدوران و (Q) كمعامل الشحنة على شكل المعادلات لكل هدف من أهداف البحث. وبالتالي، ستكون النتائج مختلفة عن المعادلات العادية، سواء من حيث المقياس أو الانحناء أو الجيوديسية. ولكن، إذا كانت المعاملات $\alpha = a = Q = 0$، فإن المتريك والقياس الريتشي في إطار ($f(R)$) المذكور سيعودان إلى الشكل المعتاد لشوارزشيلد (Schwarzschild). تُظهر معادلات الجيوديسي حركة الجسيمات في كل إحداثية تتأثر بجاذبية ثقب أسود من نوع كير–نيومان (Kerr-Newman) في إطار ($f(R)$).

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Biruni, seorang ilmuan muslim pada abad ke-10 sempat menyinggung tentang gravitasi walaupun tidak secara spesifik. Ketika membahas mengenai perubahan geologi di bumi, Al-Biruni pernah berkata, "Pusat gravitasi bumi juga mengubah struktur bumi, hal itu berdasarkan perubahan pada permukaannya." (Sparavigna, 2013). Walau belum sampai merumuskan bagaimana gravitasi bekerja, secara garis besar Al-Biruni sudah menyadari bahkan mengetahui tentang 'sesuatu' yang dapat menarik benda jatuh ke bawah.

Abad 17 menjadi sejarah perkembangan fisika klasik yang mana teori gravitasi dirumuskan untuk pertama kali oleh Sir Isaac Newton, seorang fisikawan yang hingga saat ini banyak berjasa dalam perkembangan ilmu Fisika. Menurut Newton, gravitasi adalah gaya tarik menarik dua buah massa yang berbanding terbalik dengan kuadrat jarak keduanya. Hukum ini bertahan selama kurang lebih 300 tahun hingga akhirnya gagasan milik Newton dikoreksi oleh Albert Einstein.

Mekanika Newtonian berhasil menerangkan sifat gerak benda pada kecepatan rendah, akan tetapi gagal untuk menjelaskan gerak benda dengan kecepatan mendekati cahaya. Selain itu, transformasi Galilean juga akan menjadi tidak kovarian dalam kerangka inersial jika diterapkan pada persamaan Maxwell (Anugraha, 2011). Oleh karena itu, Einstein mencoba mengoreksi dengan Teori Relativitas Khususnya (TRK).

Einstein berulang kali mencoba merumuskan teori gravitasi yang konsisten dengan Teori Relativitas Khusus. Kemudian pada tahun 1915 Einstein berhasil menggeneralisir TRK menjadi TRU atau Teori Relativitas Umum. Teori ini memandang gravitasi bukan lagi sebagai gaya, melainkan konsekuensi dari ruang waktu *(spacetime)* yang melengkung (Anugraha, 2011). Pemikiran Einstein tersebut kemudian melahirkan konsep lubang hitam. Lubang hitam sendiri merupakan objek yang sangat masif sehingga menimbulakn fenomena berupa melengkungnya ruang-waktu yang tak terbatas. Menurut teori relativitas umum, lubang hitam memiliki area yang hingga saat ini belum ada yang dapat mengaksesnya, area setelah horizon peristiwa, lebih persisnya singularitas yang masih menjadi pertanyaan hingga saat ini. Akan tetapi, terdapat tiga parameter yang hingga saat ini dapat dijadikan pertimbangan untuk mendeskripsikan sebuah lubang hitam, yaitu massa, rotasi, serta muatannya. Teori tersebut kemudian dikenal dengan sebutan *"no-hair theorem"* (Zajaiek & Tursunov, 2019).

Penggambaran dari gravitasi Einstein dinyatakan dalam bentuk persamaan medan yang mana pada awalnya Einstein sendiri mengantisipasi atau bahkan sukar menyelesaikan persamaannya. Namun, secara tak terduga pada tahun 1916 Karl Schwarzchild berhasil mendapatkan solusi eksak dari persamaan medan Einstein. Kelengkungan ruang waktu atau metrik Schwarzchild adalah solusi lubang hitam statik dalam simetri bola. Tahun 1916 dan 1918, Reissner dan Nordstrom berhasil menemukan solusi lubang hitam yang bermuatan dengan kondisi statik dalam simetri bola. Berlanjut pada tahun 1963, Roy Kerr berhasil merumuskan persamaan untuk lubang hitam tanpa muatan yang berotasi. Kemudian pada tahun 1965, Ezra

Ted Newman berhasil merumuskan persamaan lubang hitam yang berotasi dan bermuatan (Bernard, 2017).

Berkaitan dengan lubang hitam, jauh sebelum para saintis memunculkan gagasannya, benda serupa lubang hitam sudah disebutkan di dalam Al-Qur,an. Ayat tersebut tercantum dalam surah At-Takwir ayat 15-16, yang berbunyi:

فَلَآأُقْسِمُ بِالْخُنَّسِ(١٥) الْجَوَارِالْكُنَّسِ(١٦)

Artinya: "Aku bersumpah demi bintang-bintang, yang beredar dan terbenam." (QS. At-Takwir 81:15-16).

Mengutip penjelasan dalam tafsir Al-Misbah (Shihab, 2005), kata (الخنس) *al-khunnas* merupakan bentuk jamak dari kata (الخانسة) *al-khonisah* yang diambil dari bentuk dasar (خنس) *khonasa* yang memiliki makna bersembunyi (di tempat persembunyiannya). Paragraf lain dalam rujukan yang sama menjelaskan, bahwa yang dimaksud dengan benda yang bersembunyi merujuk pada benda langit (apabila dikaitkan dengan ayat 17 yang menyinggung tentang malam). Ulama pada jaman tersebut menafsirkan benda langit sebagai lima planet yang mengelilingi matahari, yang mana planet-planet tersebut tidak dapat dilihat dengan mata telanjang saat siang hari. Selain itu, alasan hanya diketahui ada lima planet karena dua planet terluar dari tata surya belum diketahui adanya, mengingat pada jaman itu belum ada teknologi memadai seperti teleskop.

Menggarisbawahi kata "bersembunyi" dan kaitannya dengan lubang hitam. Ketika Einstein merumuskan teori relativitas umum pada tahun 1915, lalu setahun kemudian Karl Schwarzschild menemukan solusi untuk teori medan Einstein berupa lubang hitam. Saat itu, lubang hitam hanya berupa objek teoritis yang belumbisa diamatai akibat keterbatasan teknologi. Seiring berkembangnya teknologi, makna (خنس) atau bersembunyi yang merujuk pada benda langi dapat dikaitkan dengan lubang hitam, yang mana lubang hitam pada awalnya hanya berupa teori sebelum akhirnya dapat dibuktikan keberadaannya dengan pengamatan teleskop milik NASA tahun 2019 lalu.

Selain itu, kata "bersembunyi" juga dapat dikaitkan dengan salah satu parameter lubang hitam, yaitu massa. Lubang hitam merupakan objek bermassa masif dengan volume yang tergolong kecil. Karenanya, kerapatan lubang hitm sangatlah besar hingga membuat tarikan gravitasinya sangat besar akibat kelengkungan ruang-waktunya yang ekstrim.

Selanjutnya meninjau kata (الجوار) *al-jawari* yang merupakan bentuk jamak dari (الجارية) *al-jaariyah* dengan makna yang bergerak dengan cepat, baik manusia, binatang, ataupun benda yang tak bernyawa sekalipun (Shihab, 2005). Jika benda tak bernyawa termasuk dalam penafsiran ayat tersebut, maka lubang hitam pun dapat dikategorikan di dalamnya. Lubang hitam merupakan objek yang terbentuk akibat sebuah bintang bermassa amat besar yang runtuh oleh gravitasinya sendiri. Karena lubang hitam terbentuk dari bintang yang sudah "mati", tentunya lubang hitam juga akan berotasi mengikuti rotasi bintang pembentuknya. Putaran lubang hitam sering waktu juga menarik ruang waktu di dekat horizon peistiwanya (Yunus, 2003).

Berdasarkan arti dari kata tersebut, yaitu cepat (dalam konteks kali ini adalah kecepatan rotasi) dapat dihubungkan antara arti dari kata (الجوار) dengan salah satu parameter lubang hitam, yaitu *spin* atau rotasi itu sendiri.

Mengutip dari Rosyidah dan Suliyanah (2022), bahwasanya menurut seorang mufassir, Zaghlul an-Najjar, dalam kitabnya yang berjudul *Al-Ayat Al-Kauniyah fi Al-Qur'an Al-Karim* kata (الكنس) mempunyai arti sesuatu yang hilang di atas permukaan yang lain. Selain itu, kata (الكنس) juga berasal dari *fi'il* (كَنَسَ – يَكْنُسُ) yang mempunyai arti menyapu. Berdasarkan arti tersebut, dapat dikaitkan dengan adanya lubang hitam yang akan menarik objek apapun yang berada dalam jangkauan horizon peristiwanya. Hal tersebut sekali lagi disebabkan oleh gravitasi lubang hitam itu sendiri

Selama satu dekade terakhir, ilmuan diperkenalkan akan adanya materi gelap yang berhubungan dengan kurva rotasi galaksi spiral. Tak berselang lama setelah konsep materi gelap, para ilmuan dipaksa untuk memahami konsep energi gelap yang berhubungan dengan perluasan alam semesta secara eksponensial yang ditinjau dari pergeseran merah supernova (Fadlol, 2016).

Seiring waktu, berbagai upaya dikerahkan untuk memodifikasi Teori Relativitas Umum. Hal tersebut didasarkan atas keinginan untuk mengkuantisasi Teori Relativitas Umum agar dapat menyatu dengan tiga gaya fundamental lainnya: elektromagnetik, gaya nuklir kuat, dan gaya nuklir lemah. Salah satu cara paling sederhana untuk memodifikasi teori gravitasi Einstein dengan menambahkan invarian orde tinggi pada model standar Einstein-Hilbert, yang mengarah pada apa yang disebut teori gravitasi tingkat tinggi. Kelas teori tersebut dikenal sebagai teori $f(R)$ yang diperoleh dengan menambahkan kekuatan skalar Ricci yang lebih tinggi pada aksi teori gravitasi Einstein standar. Salah satu motivasi dipelajari teori $f(R)$ adalah fakta bahwa dengan menambahkan suku yang sesuai akan didapatkan kembali evolusi alam semesta seperti yang telah diamati tanpa adanya keterlibatan materi gelap dan energi gelap (Sporea, 2014).

Motivasi mempelajari lubang hitam dalam teori $f(R)$ untuk mengetahui masalah yang belum bisa diselesaikan dengan teori gravitasi Einstein biasa. Berdasarkan data hasil obeservasi terhadap supernova, menunjukkan bahwa alam semesta sedang meluas secara eksponensial. Fenomena tersebut tidak dapat dijelaskan dengan materi-materi biasa dalam relativitas umum, karena relativitas umum biasa tidak mempertimbangkan adanya inflasi yang terjadi pada awal pembentukan alam semesta (Cembranos & Romero, 2018). Adapun alasan dipilihnya model Starobinsky dengan fungsi $f(R) = R + aR^2$ karena moel tersebut memang sengaja diciptakan oleh Alexei Starobinsky untuk menyelesaikan masalah inflasi atau ekspansi yang terjadi begitu cepat di awal pembentukn alam semesta.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana bentuk metrik lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$?
2. Bagaimana kelengkungan lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$?
3. Bagaimana persamaan geodesik lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$?

1.3 Tujuan penelitian

1. Mengetahui bentuk metrik dari solusi lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$.
2. Mengetahui kelengkungan lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$.

3. Mengetahui persamaan geodesik pada lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini terbatas untuk menemukan metrik lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$, lebih spesifik memakai model Starobinsky dengan fungsi $f(R) = R + aR^2$ sebagai fungsi khusus yang mengkaji tentang ekspansi alam semesta. Kemudian mencari kelengkungan ruang-waktu, serta geodesik dari lubang hitam Kerr-Newman. Hal yang berkaitan dengan lubang hitam Kerr-Newman dan berada di luar pembahasan pada batasan masalah tidak akan dibahas pada penelitian ini.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari peneltian ini untuk memberikan pemahanan mengenai Teori Gravitasi Einstein yang sudah dimodifikasi atau pada konteks ini teori gravitasi $f(R)$ dengan menggunakan model Starobinsky, lebih spesifiknya pada solusi Kerr-Newman yang mengkaji benda masif bermuatan dan berotasi. Selain itu, diharapkan juga penelitian ini dapat menjadi sumber rujukan untuk memunculkan gagasan baru bagi peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Tensor Energi Momentum

Tensor energi momentum adalah kuantitas tensor yang mendeskripsikan kerapatan dan fluks dari energi dan momentum (Irawan, 2016). Kemudian, dengan menurunkan kembali persamaan Euler-Lagrange secara umum untuk rapat Lagrangian L yang bergantung pada kuantitas q dan turunan pertamanya $(q,_{\mu})$, maka persamaannya dapat ditulis dengan (Arrosyidi, 2016):

$$S_G + S_m = S = 0 \tag{2.1}$$

Dengan S_G adalah aksi gravitasi dan S_m adalah aksi materi dan energi. Aksi gravitasi materi dapat ditulis sebagai berikut:

$$S_G = \frac{1}{2\kappa}\int \sqrt{|g|}Rd^4x \tag{2.2}$$

$$S_G = \frac{1}{2\kappa}\int \sqrt{|g|}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}d^4x \tag{2.3}$$

Divariasikan aksi gravitasi, sehingga:

$$\delta\left(\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\right) = \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{|g|} \tag{2.4}$$

Variasi untuk tensor Ricci menggunakan simbol Christoffel dan dapat ditulis dalam bentuk turunan kovarian sebagai berikut:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha\left(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \nabla_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\nu}) \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) dikalikan dengan $g^{\mu\nu}$ sehingga didapat

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\left(\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - g^{\mu\nu}\nabla_\mu(\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\nu})$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) - \nabla_\mu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\nu}) \tag{2.6}$$

Dilakukan pergantian simbol indeks untuk suku pertama $\alpha \rightarrow \lambda$ dan untuk suku kedua $\mu \rightarrow \lambda$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\right) - \nabla_\lambda\left(g^{\lambda\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\nu}\right)$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda\left(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\lambda\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\nu}\right) \tag{2.7}$$

Dengan memisalkan suku di dalam kurung, maka persamaan (2.7) dapat ditulis

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda A^\lambda \tag{2.8}$$

Dari sifat turunan kovarian:

$$\nabla_\lambda A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\sqrt{|g|}A^\lambda\right) \tag{2.9}$$

Didapatkan relasi:

$$\int \sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d^4x = \int \sqrt{|g|}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(\sqrt{|g|}A^\lambda\right) d^4x \tag{2.10}$$

Karena anggapan bahwa metrik statik yang tak bergantung waktu, maka turunan terhadap waktu sama dengan nol. Karena A berhubungan dengan simbol Chrisoffel yang bergantung waktu. Dengan demikian, variasi aksi pada persamaan (2.10) akan sama dengan nol.

$$\int \sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} d^4x = 0 \tag{2.11}$$

Dengan demikian, maka variasi dari integral aksi gravitasi hanya menyisakan dua suku saja:

$$\int \delta\left(\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\right) d^4x = \int R_{\mu\nu}\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x + \int g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta\sqrt{|g|}\, d^4x \tag{2.12}$$

Meninjau sifat dari determinan metrik:

$$\det(A) = e^{tr(\ln(A))}$$

$$\ln(\det(A)) = tr(\ln(A)) \tag{2.13}$$

Kedua sisi diturunkan sehingga didapatkan hasil:

$$\frac{\delta \det(A)}{A} = tr\left(\frac{\delta A}{A}\right)$$

$$= tr(A^{-1}\delta A) \tag{2.14}$$

Dengan begitu jika nila $A = g_{\mu\nu}$ dan $A^{-1} = g^{\mu\nu}$, mana nilai determinan untuk tensor metrik adalah:

$$\frac{\delta g}{g} = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$$

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.15}$$

atau:

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta^{\mu}_{\mu}\delta^{\nu}_{\nu}$$

$$\delta(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}) = \delta(\delta^{\mu}_{\mu}\delta^{\nu}_{\nu}) = 0$$

$$(\delta g_{\mu\nu})g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) = 0$$

$$(\delta g_{\mu\nu})g^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}(\delta g^{\mu\nu}) \tag{2.16}$$

Dengan relasi tensor pada persamaan (2.16), maka variasi tensor metrik pada persamaan (2.15) akan menjadi:

$$\delta\sqrt{|g|} = -\frac{1\sqrt{|g|}}{2} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{2.17}$$

Substitusikan persamaan (2.17) pada persamaan (2.12)

$$\int \delta\left(\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\right) d^4x \quad = \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \tag{2.18}$$

Maka variasi aksi gravitasi pada persamaan (2.3) menjadi:

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa}\int \delta\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} d^4x$$

$$\delta S_G = \frac{1}{2\kappa}\int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \tag{2.19}$$

Aksi materi dapat dituliskan dari integral lagrangian materi sebagai berikut:

$$S_m = \int \mathcal{L}_m\sqrt{|g|}d^4x \tag{2.20}$$

Divariasikan Lagrangian materi pada prinsip aksi (2.20)

$$\begin{aligned}\delta\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right) &= \frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\delta(\partial_\alpha g^{\mu\nu}) \\ &= \frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu}) \qquad (2.21)\end{aligned}$$

Meninjau suku kedua dari prinsip variasi aksi

$$\frac{\partial}{\partial_\alpha}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial_\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\right)\right]\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu})$$

$$\frac{\partial}{\partial_\alpha}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}\right] - \left[\frac{\partial}{\partial_\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\right)\right]\delta g^{\mu\nu} = \frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\partial_\alpha(\delta g^{\mu\nu})$$

(2.22)

Disubstitusikan persamaan (2.22) pada persamaan (2.21), sehingga dapat ditulis persamaan sebagai berikut:

$$\int \delta\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)d^4x = \int\left[\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial_\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\right)\right]\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \tag{2.23}$$

Melihat kembali persamaan aksi minimal (2.1)

$$S_G + S_m = 0$$

Dengan demikian, maka

$$\delta S_G + \delta S_m = \delta S = 0 \tag{2.24}$$

Disubstitusikan persamaan (2.19) dan (2.23) pada persamaan (2.24)

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa}\int\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x$$

$$+\int\left[\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial_\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\right)\right]\delta g^{\mu\nu}\, d^4x$$

$$= \int\left\{\frac{G_{\mu\nu}}{2\kappa} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial_\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\right)\right]\right\}\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x$$

(2.25)

Suku di dalam kurung harus sama dengan nol karena nilai untuk prinsip aksi sama dengan nol.

$$\frac{G_{\mu\nu}}{2\kappa} + \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial_\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\right)\right] = 0$$

$$G_{\mu\nu} = -\frac{2\kappa}{\sqrt{|g|}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial_\alpha}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{|g|}\mathcal{L}_m\right)}{\partial\partial_\alpha g^{\mu\nu}}\right)\right] \tag{2.26}$$

Dengan hubungan persamaan medan Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.27}$$

Substitusi persamaan (2.26) pada (2.27), sehingga:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{2.28}$$

Persmaan (2.28) merupakan tensor energi momentum tanpa muatan. Dengan persamaan tersebut pula kita bisa mendapatkan tensor energi momentum dengan pengaruh medan listrik.

Rapat Lagrangian dari medan elektromagnetik adalah representasi energi-skalar yang menunjukkan rapat energi medan dalam bingkai lokal yang begerak sehingga medan magnet menghilang.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}F_{\mu\alpha}F_{\mu\beta} \tag{2.29}$$

Menggunakan rumus Neother akan didapatkan tensor energi momentum sebagai berikut:

$$T_{\mu\nu} = -F_{\mu}^{\alpha} F_{\nu\alpha} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{2.30}$$

2.2 Persamaan Medan Einstein

Persamaan medan Einstein bermula dari Teori Relativias Khusus Einstein yang berlandaskan akan tiga asas, yaitu (Anugraha, 2011):

a. Asas korespondensi: untuk benda dengan kecepatan rendah (momentum rendah), konsep serta hukum relativistik harus sesuai dengan konsep yang ada dalam teori Newtonian.
b. Asas kovariansi: semua hukum alam bersifat tetap terhadap semua kerangka inersial.
c. Asas invariansi: laju cahaa pada ruang vakum akan konstan dan tidak bergantung pada kerangka inersial yang digunakan.

Persamaan medan Einstein adalah generalisasi relativistik dari hukum gravitasi Newton. Hukum gravitasi Newton menceritakan bagaimana massa menghasilkan gaya gravitasi. Einstein menuntut dari persamaan medannya bahwa mereka harus memberi tahu bagaimana materi dan energi melengkung ruang-waktu. Dia tahu bahwa kekekalan energi-momentum dari kontinum materi dan energi dapat dijelaskan secara kovarian dengan menghilangnya divergensi tensor momentum-energi simetris peringkat dua. Dengan demikian, persamaan medan harus dalam bentuk yang sama: sebuah tensor kelengkungan simetris dan bebas divergensi pangkat dua sebanding dengan tensor energi-momentum. Tensor

Einstein memiliki sifat yang tepat untuk mewakili bagian geometris dari persamaan Einstein (Gron & Hervik, 2004).

Meninjau kembali tensor energi momentum pada persamaan (2.28). Jika disubstitusikan pada prinsip aksi materi maka:

$$\delta S_m = -\frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x \tag{2.31}$$

Substitusikan persamaan (2.31) dan persamaan (2.19) pada persamaan (2.24)

$$\delta S_G + \delta S_m = 0$$

$$\delta S_G = -\delta S_m$$

$$\frac{1}{2\kappa}\int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x = \frac{1}{2}\int T_{\mu\nu}\sqrt{|g|}\delta g^{\mu\nu}\, d^4x$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.32}$$

Persamaan (2.32) adalah persamaan medan Einstein, yang mana untuk ruas kiri berhubungan dengan gravitasi dan kelengkungan sedang ruas kanan berhubukan dengan materi.

2.3 Algoritma Newman-Janis

Algoritma Newman-Janis adalah metode yang dikenal untuk menyelesaikan solusi aksisimetrik dari solusi statis yang biasanya memerlukan formalisme Newman-Penrose menggunakan tetrad null kompleks dengan ide yang diambil dari pemintal dua komponen. Algoritma Newman-Janis dianggap sebagai alat yang dapat menghasilkan solusi sumbu simetris dari lubang hitam yang berputar dari metrik dasar yang memiliki simetri bola. Metrik simetri bola statis pada persamaan medan Einstein dapat ditulis sebagai berikut (Y.-C. Chou, 2020):

$$ds^2 = -f\,dt^2 + f^{-1}\,dr^2 + r^2\,d\Omega^2$$
$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{2.33}$$

Dimana f merupakan representasi dari fungsi metrik dasar $f(r)$. Langkah pertama yaitu mengubah koordinat dari (t, r, θ, ϕ) menjadi (u, r, θ, ϕ) dengan transformasi bahwa $dt = du + f^{-1}dr$. Maka persamaan (2.33) akan berubah menjadi koordinat Eddington-Finkelstein

$$ds^2 = -f\,du^2 - 2dudr + r^2\,d\Omega^2 \tag{2.34}$$

Kemudian dengan langkah kedua yaitu menggunakan transformasi komplek oleh formalisme Newman-Penrose. Pada langkah ini, struktur tensor dx_μ akan menjalani transformasi koordinat yang kompleks. Menggunakan formalisme null tetrad, kita dapat menulis komponen metrik kontravarian menjadi:

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \bar{m}^\nu + m^\nu \bar{m}^\mu \tag{2.35}$$

yang mana null tetrad vektornya $(l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$ dan medan gauge A^a adalah

$$\begin{aligned}
l^a &= -\delta^a_r, \\
n^a &= -\delta^a_u + \frac{f}{2}\delta^a_r, \\
m^a &= \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\delta^a_\theta + \frac{i}{\sin\theta}\delta^a_\phi\right), \\
\bar{m}^a &= \frac{1}{\sqrt{2}r}\left(\delta^a_\theta - \frac{i}{\sin\theta}\delta^a_\phi\right), \\
A^a &= -f_A l^a
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Formalisme matriks dari metrik $g_{\mu\nu}$ dan inversnya $g^{\mu\nu}$ dituliskan dengan

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

Dalam bentuk tetrad, kami membuat perubahan kompleks dari koordinat berdasarkan analogi dengan transformasi Schwarzschild ke Kerr:

$$\begin{gathered} r = r' - ia \cos \theta' \\ u = u' + ia \cos \theta' \\ \theta = \theta' \\ \phi = \phi' \end{gathered} \tag{2.38}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.38) pada (2.36) akan didapatkan transformasi tetrad sebagai berikut:

$$\begin{aligned} l'^a &= -\delta^a_{r\prime}, \\ n'^a &= -\delta^a_{u\prime} + \frac{\tilde{f}}{2}\delta^a_{r\prime}, \\ m'^a &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' - ia\cos\theta')}\left(\delta^a_{\theta\prime} + \frac{i}{\sin\theta'}\delta^a_{\phi\prime} - \left(\delta^a_{u'} - \delta^a_{r'}\right)ia\sin\theta'\right), \\ \bar{m}'^a &= \frac{1}{\sqrt{2}(r' + ia\cos\theta')}\left(\delta^a_{\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\delta^a_{\phi} + \left(\delta^a_{u'} - \delta^a_{r'}\right)ia\sin\theta'\right), \\ A'^a &= -\tilde{f}_A(du' - a\sin^2\theta\, d\phi) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Fungsi metrik asal $f(r)$ kemudian dimisalkan dengan fungsi kompleks $\tilde{f}(r, \bar{r})$. Kita dapatkan tranformasi dari metrik asal dan dapat menuliskannya dengan aturan yang berlaku, sehingga:

$$\tilde{f}(r,\bar{r}) = 1 - \frac{2m(r)}{r}\left(\frac{r^2}{\Sigma}\right) \tag{2.40}$$

yang mana nilai $m(r)$ dan Σ secara berturut-turut adalah:

$$\begin{gathered} m(r) = M - \frac{Q^2}{2r} + \frac{\Lambda r^3}{6} \\ r \to r' - ia\cos\theta', \bar{r} \to r' + ia\cos\theta', |r|^2 = r\bar{r} = \Sigma \end{gathered} \tag{2.41}$$

Dengan transformasi kompleks, maka didapatkan elemen garis

$$\begin{aligned} ds^2 = \tilde{f}du'^2 + 2\,du'dr' + 2a\sin^2\theta\,(\,1 - f)du'd\phi' \\ - 2a\sin^2\theta\,dr'd\phi' - \Sigma\,d\theta^2 \\ - \sin^2\theta\left[(r'^2 + a^2) + a^2\sin^2\theta\left(1 - \tilde{f}\right)\right]d\phi'^2 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Mentransformasikan persamaan (2.42) pada koordinat Boyer-Linquist lalu didapatkan komponen sebagai berikut:

$$\begin{gathered} du' = dt - \frac{r^2 + a^2}{\Delta}dr' \\ d\phi' = d\phi - \frac{a}{\Delta}dr' \\ d\theta' = d\theta \\ dr' = dr \end{gathered} \tag{2.43}$$

2.4 Solusi Medan Einstein

2.4.1 **Solusi Schwarzschild**

Solusi Schwarzschild merupakan solusi pertama persaman medan Einstein. Untuk mendapatkan metrik Schwarzschild, dimulai dengan mentansformasikan ruang-waktu Minkowski dari koordinat kartesian ke koordinat bola. Koordinat Minkowski ditunjukkan sebagai berikut:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{2.44}$$

Kondisi statis lubang hitam Schwarzschild berarti bahwa, dengan sistem koordinat statis, $g_{\mu\nu}$ tidak bergantung pada waktu x^0 atau t dan juga $g_{i0} = 0$. Koordinat spasial dapat diambil dari koordinat bola (T. L. Chou, 2008). Makna statis juga berarti bahwa ds^2 harus invarian terhadan transformasinya $x^0 \to -x^0$ (pembalikan waktu). Akibatnya, ds^2 tidak boleh mengandung suka $dx^i dx^0$ yang membuatnya tidak invarian terhadap transformasi pembalikan waktu atau $g_{i0} = 0$. Dengan demikian, tensor metrik $g_{\mu\nu}$ hanya akan mempunya nilai pada diagonalnya saja akibat tidak boleh adanya suku silang antara t dengan koordinat lainnya (r, θ, ϕ) (Irawan, 2016). Persamaan (2.44) kemudian ditransformasikan ke dalam bentuk simetri bola dengan parameter bebas, sehingga dapat ditulis sebagai berikut:

$$ds^2 = -A\, dt^2 + B\, dr^2 + C\, r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{2.45}$$

yang mana A, B, C adalah fungsi umum yang mengandung unsur r. Tujuannya untuk menyederhanankan cara kita dalam memperoleh solusi Schwarzschild tanpa merusak simetri bola (T. L. Chou, 2008). Elemen garis pada persamaan (2.45) dapat diasumsikan menjadi:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{2.46}$$

Dengan persamaan (2.46) dapat ditulis ke dalam tensor metrik kovarian $g_{\mu\nu}$ sebagai berikut:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

sehingga metrik kontravariannya menjadi:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

Simbol Christoffel untuk metrik kontravarian didefinisikan sebagai:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}\left(\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\mu g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) \tag{2.49}$$

Berdasarkan definisi simbol Christoffel pada persamaan (2.49), jumlah simbol Christoffel sebanyak 64 komponen, dengan komponen yang tak bernilai nol yaitu:

$$\begin{aligned} &\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \nu' && \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\, e^{-2\lambda} \\ &\Gamma^1_{00} = \nu' e^{2\nu-2\lambda} && \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \\ &\Gamma^1_{11} = \lambda' && \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \\ &\Gamma^1_{22} = -re^{-2\lambda} && \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta \end{aligned} \tag{2.50}$$

Dengan menggunakan nilai simbol christoffel pada persamaan (2.50) dapat dihitung nilai Tensor Ricci. Tensor Ricci merupakan tensor rank-2 yang menggambarkan bagaimana bentuk dari kelengkungan ruang-waktu, yang mana secara umum Tensor Ricci dapat ditulis dengan persamaan berikut:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} \tag{2.51}$$

Tensor Ricci bersifat simetris, oleh karena itu berlaku ($R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$). Sehingga untuk komponen R_{i0} dengan ($i = 1, 2, 3$) akan didapat:

$$R_{i0} = \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{i0} - \partial_0\Gamma^\sigma_{i\sigma} + \Gamma^\rho_{i0}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho0} \tag{2.52}$$

Kondisi statik mensyaratkan bahwa $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ sehingga suku kedua pada persmaan (2.52) bernilai nol dan Tensor Ricci menjadi:

$$R_{i0} = \partial_\sigma\Gamma^\sigma_{i0} + \Gamma^\rho_{i0}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} - \Gamma^\rho_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho0} \tag{2.53}$$

Sementara nilai $\Gamma^i_{\sigma0} = 0$, $\Gamma^\rho_{0\rho} = 0$, $\Gamma^0_{i\sigma} = 0$, maka akan didapat

$$R_{i0} = R_{i0} = 0 \tag{2.54}$$

Dengan demikian Tensor Ricci yang tak bernilai nol adalah komponen secara diagonal saja. Dalam kasus ini, indeks Tensor Ricci dapat dikontraksi sehingga $(\nu = \mu)$ dan Tensor Ricci menjadi $R_{\mu\mu}$. Nilai dari diagonal Tensor Ricci secara umum dinyatakan sebagai berikut:

$$R_{\mu\mu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\mu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}$$

Untuk nilain $\mu = 0$

$$R_{00} = -\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r}\right)e^{(2\nu-2\lambda)} \tag{2.55}$$

Untuk nilai $\mu = 1$

$$R_{11} = \nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} \tag{2.56}$$

Untuk nilai $\mu = 2$

$$R_{22} = (1 - \lambda' r + \nu' r)e^{(-2\lambda)} - 1 \tag{2.57}$$

Untuk nilai $\mu = 3$

$$R_{33} = \sin^2\theta\left[(1 - \lambda' r + \nu' r)e^{(-2\lambda)} - 1\right] = \sin^2\theta\, R_{22} \tag{2.58}$$

Pada kondisi vakum, nilai Tensor Ricci adalah nol, sehingga $R_{\mu\nu} = 0$. Dengan demikian maka:

$$-\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r} = 0 \tag{2.59}$$

$$\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \tag{2.60}$$

$$(1 - \lambda' r + \nu' r)e^{(-2\lambda)} = 1 \tag{2.61}$$

Kemudian dijumlahkan persamaan (2.59) dengan (2.60), sehingga

$$-\frac{2}{r}(\nu' + \lambda') = 0$$

$$(\nu' + \lambda') = 0$$

$$\nu + \lambda = konstan \tag{2.62}$$

Pada $r \to \infty$ metrik harus kembali kepada bentuk minkowski $\eta_{\mu\nu}$ sehingga

$$\nu + \lambda = 0 \to \nu = -\lambda \tag{2.63}$$

Substitusikan persamaan (2.63) pada persamaan (2.61)

$$(1 - \lambda' r - \lambda' r)e^{(2\nu)} = 1$$

$$(1 - 2\lambda' r)e^{(2\nu)} = 1$$

$$\frac{d}{dr}\left[re^{(2\nu)}\right] = 1 \tag{2.64}$$

Diintegralkan persamaan (2.64)

$$\int d\left[re^{(2\nu)}\right] = \int dr = r + C$$

$$re^{(2\nu)} = r + C$$

$$e^{(2\nu)} = 1 + \frac{C}{r} \tag{2.65}$$

Dengan C adalah konstanta integrasi dengan nilai:

$$C = -\frac{2GM}{c^2}$$

Dengan menggunakan *natuural unit* yang mana $c = G = 1$. Sehingga nilai $e^{(2\nu)}$menjadi:

$$e^{(2\nu)} = 1 - \frac{2M}{r}$$

Kemudian untuk nilai $e^{(2\lambda)}$, mengingat bahwa $\nu = -\lambda$ pada persamaan (2.63). maka nilainya menjadi:

$$e^{(2\lambda)} = e^{(-2\nu)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

Mengingat elemen garis pada persamaan (2.46):

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

dapat disubstitusikan nilai akhir $e^{(2\nu)}$ dan $e^{(2\lambda)}$ pada persamaan tersebut, sehingga akan didapatkan solusi untuk metrik schwarzschild sebagai berikut:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \qquad (2.66)$$

Persamaan (2.66) merupakan metrik Schwarzschild yang mana apabila parameter massa sama dengan nol, metrik akan kembali pada ruang-waktu Minkowski atau ruang-waktu datar dalam koordinat waktu.

2.4.2 **Solusi Reissner-Nordstrom**

Solusi Reissner-Nordstrom merupakan solusi medan Einstrein yang bermuatan. Konsekuensinya, nilai tensor energi momentum $T_{\mu\nu}$ pada solusi Reissner-Nordstrom tidak sama dengan nol karena ada muatan total q pada sistem tersebut. Untuk medapatkan solusi Reissner-Nordstrom, terlebih dahulu harus didapatkan nilai tensor energi-momentum, yang mana dapat diperoleh dari persamaan medan Einstein (2.32):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} \qquad (2.67)$$

dengan mengkontraksi persamaan Einstein (2.67) akan didapatkan:

$$R = -\kappa T \qquad (2.68)$$

Yang mana T merupakan tensor energi momentum yang dikontraksi, sehingga $T = T_{\mu}^{\mu}$. Substitusikan persamaan (2.68) pada persamaan (2.67) sehingga:

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) \qquad (2.69)$$

dengan meninjau ulang tensor energi momentum pada persamaan (2.30)

$$T_{\mu\nu} = -F_{\alpha\nu}F_{\mu}^{\alpha} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \tag{2.70}$$

serta nilai kuat tensor medan:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \tag{2.71}$$

Nilai T pada persamaan (2.69) adalah nol. Sehingga perrsamaannya menjadi

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.72}$$

Tensor kuat medan $F_{\mu\nu}$ bersifat antisimetri dengan $\partial\left[\rho F_{\mu\nu}\right] = 0$, sehingga

$$\left(\partial_{\rho}F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{\rho\mu} + \partial_{\mu}F_{\nu\rho}\right) = 0 \tag{2.73}$$

Untuk $\rho = 0$ dan $\mu \leftrightarrow \nu$ persamaan (2.73) menjadi

$$\left(\partial_{0}F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{0\mu} + \partial_{\mu}F_{\nu0}\right) = 0$$

$$\partial_{0}F_{\mu\nu} + \partial_{\nu}F_{0\mu} - \partial_{\nu}F_{\mu0} = 0$$

$$\partial_{0}F_{\mu\nu} = 0 \tag{2.74}$$

Medan listrik di luar benda bermuatan total q hanya dalam arah radial

$$E = E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = f \tag{2.75}$$

Dengan demikian, hanya komponen F_{01} dan F_{10} yang tidak bernilai nol

$$F_{01} = -F_{10} = f(r) \tag{2.76}$$

Sehingga kuat tensor medan $F_{\mu\nu}$ adalah

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & f & 0 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

dengan bentuk kontravatiannya adalah:

$$F^{\rho\lambda} = g^{\rho\mu}g^{\lambda\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.78}$$

Dengan komponen-komponen yang tidak bernilai nol adalah

$$F^{01} = -fe^{-2\nu-2\lambda} \tag{2.79}$$

$$F^{10} = fe^{-2\nu-2\lambda} \tag{2.80}$$

sehinga tensor kuat medan dalam bentuk kontravarian menjadi

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -fe^{-2\nu-2\lambda} & 0 & 0 \\ fe^{-2\nu-2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.81}$$

Bentuk tensor campuran kuat medan adalah

$$F_\nu^\rho = g^{\rho\mu} F_{\mu\nu} \tag{2.82}$$

Komponen yang tidak bernilai nol

$$F_0^1 = -fe^{-2\lambda} \tag{2.83}$$

$$F_1^0 = -fe^{-2\nu} \tag{2.84}$$

Dengan demikian, tensor kuat medan dalam bentuk tensor campuran adalah

$$F_\nu^\rho = \begin{pmatrix} 0 & -fe^{-2\nu} & 0 & 0 \\ -fe^{-2\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.85}$$

Substitusikan nilai yang sidah didapat pada persamaan tensor energi momentum

$$T_{\mu\nu} = -F_{\alpha\nu} F_\mu^\alpha + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{2.86}$$

Tensor energi momentum yang mempunyai nilai adalah tensor pada komponen diagonal matriks, yaitu:

$$T_{00} = -\frac{1}{2} f^2 e^{-2\lambda} \tag{2.87}$$

$$T_{11} = \frac{1}{2} f^2 e^{-2\nu} \tag{2.88}$$

$$T_{22} = \frac{1}{2} r^2 \cdot f^2 e^{-2\nu-2\lambda} \tag{2.89}$$

$$T_{33} = -\sin^2\theta \; T_{22} \tag{2.90}$$

Setelah mendapatkan nilai tensor energi-momentum,selajutnya dapat dilakukan langkah yang sama dengan solusi Schwrzchild. Hanya saja, solusi Reissner-Nordstrom harus mempertimbangkan nilai tensor energi-momentum yang kemudian akan disubstitusikan pada persamaan medan Einstein bersamaan dengan komponen tensor Ricci. Untuk tensor Ricci sama dengan solusi Schwarzchild, yaitu:

$$R_{00} = \left(-\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r}\right)e^{(2\nu-2\lambda)} \tag{2.91}$$

$$R_{11} = \nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r} \tag{2.92}$$

$$R_{22} = (1 - \lambda' r + \nu' r)e^{(-2\lambda)} - 1 \tag{2.93}$$

Nilai tensor energi-momentum dan tensor Ricci disubstitusikan pada persamaan medan Einstein:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.94}$$

Untuk komponen -00

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00}$$

$$\left(\nu'' + \nu'\lambda' - (\nu')^2 - \frac{2\nu'}{r}\right)e^{(2\nu-2\lambda)} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(-\frac{1}{2}f^2 e^{-2\lambda}\right) \tag{2.95}$$

Untuk komponen -11

$$R_{11} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{11}$$

$$-\nu'' - (\nu')^2 + \lambda'\nu' + \frac{2\lambda'}{r} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(\frac{1}{2}f^2 e^{-2\nu}\right) \tag{2.96}$$

Untuk komponen -22

$$R_{22} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{22}$$

$$(1 - \lambda' r + \nu' r) e^{(-2\lambda)} + 1 = \frac{8\pi G}{c^4}\left(-\frac{1}{2} r^2 \cdot f^2 e^{-2\nu-2\lambda}\right) \tag{2.97}$$

Persamaan (2.95) dikalikan dengan $\left(e^{2\lambda}\right)$ menjadi:

$$\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r}\right) e^{(2\nu)} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(\frac{1}{2} f^2\right) \tag{2.98}$$

Persamaan (2.96) dikalikan dengan $(e^{2\nu})$ menjadi:

$$\left(-\nu'' - (\nu')^2 + \lambda'\nu' + \frac{2\lambda'}{r}\right) e^{2\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(-\frac{1}{2} f^2\right) \tag{2.99}$$

Kemudian dijumnahkan persamaan (2.98) dengan persamaa (2.99)

$$\left(\frac{2\nu'}{r} + \frac{2\lambda'}{r}\right) = 0$$

$$\nu' + \lambda' = 0 = konstan \tag{2.100}$$

Pada r mendekati tak hingga, metrik akan kembani ke bentuk Minkowski, sehingga $e^{2\nu} \to 1$ dan $e^{2\lambda} \to 1$, maka $\nu = \mu = 0$, kemudian

$$\nu' + \lambda' = 0$$

$$\nu' = -\lambda' \tag{2.101}$$

Kemudian dengan persamaan (2.101), maka persamaan (2.97) menjadi:

$$(1 - \lambda' r + \nu' r) e^{(-2\lambda)} - 1 = \frac{8\pi G}{c^4}\left(-\frac{1}{2} r^2 \cdot f^2 e^{-2\nu-2\lambda}\right)$$

$$e^{2\nu} = \frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4} + 1 + \frac{C}{r} \tag{2.102}$$

Mengingat nilai f pada persamaan (2.75) adalah $\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = f$. Dengan $C = -2m$ yang merupakan jari-jari Schwarzchild dan $\frac{Gq^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 c^4} \equiv Q^2$, maka persamaan (2.102) menjadi:

$$e^{2\nu} = 1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r} \tag{2.103}$$

dan

$$e^{2\lambda} = e^{-2\nu} = \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \tag{2.104}$$

Maka akan didapat solusi Reissner-Nordstrom dalam persamaan garisnya sebagai berikut:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{2.105}$$

dengan

$$Q^2 = -\frac{q^2 G}{8\pi\epsilon_0^2 C^4}$$

dan

$$r^2 d\Omega^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Persamaan (2.105) merupakan solusi Reissner-Nordstrom yang dapat diperoleh dengan cara yang sama untuk mendapat solusi Schwarzchild, akan tetapi dengan memperhitungkan nilai tensor energi-momentum yang berpengaruh terhadap adanya nilai muatan q pada lubang hitam. Reissner-Nordstrom merupakan solusi untuk lubang hitam yang statis dengan muatan q, yang apabila komponen muatan bernilai nol, maka solusi Reissner-Nordstrom akan kembali pada solusi Schwarzschild.

2.4.3 **Solusi Kerr**

Solusi Kerr merupakan solusi lubang hitam yang berotasi dan tanpa muatan. Untuk mempersingkat penulisan, digunakan *natural unit* yang mana $c = 1$. Untuk mendapatkan solusi Kerr, ditinjau kembali solusi Schwarzchild sebagai berikut:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \qquad (2.106)$$

Dengan mengasumsikan metrik di atas menjadi:

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (2.107)$$

yang mana:

$$f = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \qquad (2.108)$$

Untuk mendapatkan solusi massa yang berotasi, dapat menggunakan koordinat Eddington-Finkenstein dengan mengubah koordinat (t, r, θ, ϕ) menjadi (u, r, θ, ϕ) dengan aturan $dt = du + f^{-1}dr$. Maka:

$$ds^2 = -f(du + f^{-1}dr)^2 + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -f(du^2 + 2f^{-1}drdu + f^{-2}dr) + f^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

$$ds^2 = -f du^2 - 2drdu + r^2 d\Omega^2 \qquad (2.109)$$

Sehingga tensor metrik dari metrik pada persamaan (2.109)

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2.110)$$

Dengan bentuk kontravariannya adalah:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \tag{2.111}$$

atau

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \tag{2.112}$$

Komponen vektor null-4 yang bersesuaian dengan metrik di atas diikuti dengan transformasi nilai r menjadi bentuk komplek menghilangkan tanda $\sim$ adalah:

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0, -1, 0,0) \\ n^\mu &= \left(-1, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r}\right), 0, 0\right) \\ m^\mu &= \frac{1}{\tilde{r}\sqrt{2}}\left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right) \\ \bar{m}^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right) \end{aligned} \tag{2.113}$$

Lalu dilakukan transformasi

$$x^\rho \rightarrow x'^\rho = x^\rho + ia\cos\theta\,(\delta_0^\rho - \delta_1^\rho) \tag{2.114}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} u &= u' + ia\cos\theta = u' + ia\cos\theta' \\ r &= r' - ia\cos\theta = r' - ia\cos\theta' \end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\theta = \theta'$$

$$\phi = \phi'$$

dengan u', r', θ', ϕ'adalah kuantitas riil dan vektor-vektor basis berransformasi menggunakan aturan rantai:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.116}$$

Setelah ditransformasikan, maka dihilangkan tanda aksennya ($'$) dan hasilnya menjadi:

$$\begin{aligned} l^\mu &= (0, -1, 0,0) \\ n^\mu &= \left(-1, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right), 0, 0\right) \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta, -ia\sin\theta, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right) \\ \overline{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\cos\theta)}\left(-ia\sin\theta, ia\sin\theta, 1, -\frac{i}{\sin\theta}\right) \end{aligned} \tag{2.117}$$

Dengan demikian, dapat diketahu komponen metrik kontravariannya dengan persamaan umum:

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \overline{m}^\nu + m^\nu \overline{m}^\mu \tag{2.118}$$

yang mana komponen yang mempunyai nilai sebagai berikut:

$$g^{00} = \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2}$$

$$g^{01} = g^{10} = -\left(\frac{r^2 + a^2}{\rho^2}\right)$$

$$g^{03} = g^{30} = \frac{a}{\rho^2}$$

$$g^{11} = \frac{r^2 + a^2 - 2mr}{\rho^2}$$

$$g^{13} = g^{31} = -\frac{a}{\rho^2}$$

$$g^{22} = \frac{1}{\rho^2}$$

$$g^{33} = \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \tag{2.119}$$

Maka, tensor metrik kontravariannya adalah:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -\left(\frac{r^2+a^2}{\rho^2}\right) & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ -\left(\frac{r^2+a^2}{\rho^2}\right) & \frac{r^2+a^2-2mr}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{2.120}$$

mengingat

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\rho^2 + a^2\sin^2\theta = r^2 + a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta$$

$$\rho^2 + a^2\sin^2\theta = r^2 + a^2 \tag{2.121}$$

Maka tensor metrik kontravarian dapat ditulis:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & \frac{r^2+a^2-2mr}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{pmatrix}$$

(2.122)

Bentuk kovarian dari tensor metrik (2.122) dapat dilakukan dengan menggunakan relasi:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{|g^{\mu\nu}|} Adj(g^{\mu\nu}) \tag{2.123}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2mr}{\rho^2}\right) & -1 & 0 & -\frac{2mr\,a\sin^2\theta}{\rho^2} \\ -1 & 0 & 0 & a\sin^2\theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2mr\,a\sin^2\theta}{\rho^2} & a\sin^2\theta & 0 & -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(a\sin^2\theta\,\Delta-(r^2+a^2)^2\right) \end{pmatrix} \tag{2.124}$$

Dengan begitu, elemen garisnya menjadi:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{2mr}{\rho^2}\right)du^2 - 2dudr - 4mr\frac{a\sin^2\theta}{\rho^2}du\,d\phi + 2a\sin^2\theta\ dr\,d\phi \\ &+ \rho^2 d\theta^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(a\sin^2\theta\,\Delta-(r^2+a^2)^2\right)d\phi^2 \end{aligned} \tag{2.125}$$

dengan:

$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \tag{2.126}$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr \tag{2.127}$$

Persamaan (2.125) merupakan metrik garis untuk solusi Kerr pada persamaan medan Einstein, yang mana suku a menunjukkan momentum sudut sebagai perameter rotasi. Jika $a \to 0$, maka metrik Kerr akan kembali pada metrik Schwarzschild.

2.4.4 **Solusi Kerr-Newman**

Solusi Kerr-Newman merupakan solusi paling kompleks dari persamaan medan Einstein, karena lubang hitam Kerr-Newman merupakan jenis lubang hitam yang berotasi dan bermuatan. Metrik Kerr-Newman dapat diperoleh melalui metrik Reissner-Nordstrom sebagai berikut:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (2.128)$$

yang mana nilai fungsi omega sebagai berikut:

$$r^2 d\Omega^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Mengasumsikan metrik (2.128) menjadi fungsi f sebagai berikut:

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (2.129)$$

Dengan:

$$f = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) \qquad (2.130)$$

Maka tensor mentrik kovariannya adalah:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \qquad (2.131)$$

Bentuk kontravarian dari tensor metrik tersebut dapat dicari dengan:

$$g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 1$$

$$g_{\mu\nu}^{-1} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{-1}$$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{-1}$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{|g_{\mu\nu}|} Adj(g_{\mu\nu}) \qquad (2.132)$$

dengan bentuk kontravariannya adalah:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r}^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.133}$$

Komponen-komponen vektor null-4 yang bersesuaian dengan tensor di atas kemudian ditransformasikan nilai r menjadi bentuk kompleks yaitu $r \to \tilde{r} = r + iy$. Maka, bentuk vektor null-4 menjadi:

$$\begin{gathered} l^{\mu} = (0, -1, 0,0) \\ n^{\mu} = \left(-1, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{r} - \frac{m}{\tilde{r}} + \frac{Q^2}{r\tilde{r}}\right), 0, 0\right) \\ m^{\mu} = \frac{1}{\tilde{r}\sqrt{2}}\left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right) \\ \bar{m}^{\mu} = \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right) \end{gathered} \tag{2.134}$$

Lalu dilakukan transformasi

$$x^{\rho} \to x'^{\rho} = x^{\rho} + ia\cos\theta\,(\delta_0^{\rho} - \delta_1^{\rho}) \tag{2.135}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{gathered} u = u' + ia\cos\theta = u' + ia\cos\theta' \\ r = r' - ia\cos\theta = r' - \cos\theta' \\ \theta = \theta' \\ \phi = \phi' \end{gathered} \tag{2.136}$$

dengan u', r', θ', ϕ'adalah kuantitas riil dan vektor-vektor basis berransformasi menggunakan aturan rantai:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2.137}$$

Setelah ditransformasikan, maka dihilangkan tanda aksennya dan hasilnya menjadi:

$$\begin{aligned}
l^\mu &= (0, -1, 0,0) \\
n^\mu &= \left(-1, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2mr - Q^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right), 0, 0\right) \\
m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r - ia\cos\theta)}\left(ia\sin\theta\,, -ia\sin\theta\,, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right) \\
\overline{m}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}(r + ia\cos\theta)}\left(-ia\sin\theta\,, ia\sin\theta\,, 1, -\frac{i}{\sin\theta}\right)
\end{aligned} \tag{2.138}$$

Dengan demikian, dapat diketahu komponen metrik kontravariannya dengan persamaan umum:

$$g^{\mu\nu} = -l^\mu n^\nu - l^\nu n^\mu + m^\mu \overline{m}^\nu + m^\nu \overline{m}^\mu \tag{2.139}$$

Dengan nilai komponen yang tidak nol adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
g^{00} &= \frac{a^2\sin^2\theta}{\rho^2} & g^{13} &= g^{31} = \frac{a}{\rho^2} \\
g^{01} &= g^{10} = -\left(\frac{r^2 + a^2}{\rho^2}\right) & g^{22} &= \frac{1}{\rho^2} \\
g^{03} &= g^{30} = \frac{a^2}{\rho^2} & g^{33} &= \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \\
g^{11} &= \frac{r^2 + a^2 - 2mr + Q^2}{\rho^2}
\end{aligned} \tag{2.140}$$

Sehingga tensor metrik kontravariannya menjadi:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} & -\left(\frac{r^2+a^2}{\rho^2}\right) & 0 & \frac{a^2}{\rho^2} \\ -\left(\frac{r^2+a^2}{\rho^2}\right) & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a^2}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{2.141}$$

Karena $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$ maka:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{a^2 \sin^2\theta}{\rho^2} & -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & 0 & \frac{a^2}{\rho^2} \\ -\left(\frac{\rho^2+a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & \frac{r^2+a^2-2mr+Q^2}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a^2}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{2.142}$$

Bentuk kovarian dari tensor metrik di atas dapat dicari dengan:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{|g^{\mu\nu}|} Adj(g^{\mu\nu}) \tag{2.143}$$

Maka, bentuk tensor metriknya adalah:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1-\frac{2mr-Q^2}{\rho^2}\right) & -1 & 0 & -a\sin^2\theta\frac{(2mr-Q^2)}{\rho^2} \\ -1 & 0 & 0 & a\sin^2\theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -a\sin^2\theta\frac{(2mr-Q^2)}{\rho^2} & a\sin^2\theta & 0 & -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(a\sin^2\theta\,\Delta-(r^2+a^2)^2) \end{pmatrix} \tag{2.144}$$

dengan:

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr + Q^2$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2\theta$$

Dengan begitu, elemen garisnya menjadi:

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left(1 - \frac{2mr - Q^2}{\rho^2}\right) du^2 - 2dudr - 2a\sin^2\theta \frac{(2mr - Q^2)}{\rho^2} du\, d\phi \\ + 2a\sin^2\theta\ dr\, d\phi + \rho^2 d\theta^2 \\ - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(a\sin^2\theta\,\Delta - (r^2 + a^2)^2)d\phi^2 \end{aligned} \tag{2.145}$$

Persamaan (2.145) adalah mertik Kerr-Newman yang merupakan solusi untuk persamaan medan Einstein yang berotasi dan bermuatan. Jika Q^2 bernilai nol, maka persamaan tersebut akan kembali pada solusi Kerr, jika a^2 sebagai angular momentum pada komponen ρ^2 bernilai nol maka persamaan tersebut akan kembali pada solusi Reissner-Nordstrom. Lalu yang terakhir, apabila Q^2 dan a^2 bernilai nol, maka persamaan untuk solusi Kerr-Newman akan kembali pada solusi Schwarzschild.

2.5 Teori $f(R)$

Menurut Yadav dan Verma (2019) terdapat perbedaan antara data hasil observasi dan kalkulasi secara numerik, hal tersebut mendorong ilmuan untuk mendapatkan solusi alternatif dari sulusi teori relativitas umum milik Einstein (Romadani, 2023). Teori $f(R)$ merupakan salah satu modifikasi dari persamaan medan Einstein dengan menambahkan orda yang lebih tinggi pada kelengkungan skalar Riccinya. Denga demikian, diharapkan dapat menyelesaikan persoalan tentang ekspansi alam semesta tanpa melibatkan adanya energi gelap dan zat gelap (Sporea, 2014). Untuk relativistik, teory $f(R)$ dianggap lebih menarik karena lebih jelas geometrinya. Sama halnya dengan teori Brans-Dicke yang lebih cocok untuk topik partikel (Romadani & Rosyid, 2021). Teori $f(R)$ dimulai dengan memodifikasi prinsip aksi minimal pada persamaan (2.1) (Cembranos & Romero, 2018):

$$S_G + S_m = S = 0 \tag{2.146}$$

yang mana S_G merupakan aksi gravitasi, dengan penjabaran sebagai berikut:

$$S_G = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{|g|}(R + f(R)) \tag{2.147}$$

Dengan memvariasikan persamaan (2.147) mengenai tensor metrik, kita akan mendapatkan persamaan medan dalam formalisme metrik:

$$R_{\mu\nu}\big(1 + f'(R)\big) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\big(R + f(R)\big) + \big(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\,\Box\big)f'(R) + 8\pi G T_{\mu\nu} = 0 \tag{2.148}$$

dengan $R_{\mu\nu}$ adalah Ricci Tensor, $\Box = \nabla_\mu \nabla^\mu$ yang mana ∇ adalah turunan kovarian, $f'(R) = df(R)/d(R)$. Dengan identitas tersebut, maka persamaan (2.148) dapat ditulis menjadi:

$$R\big(1 + f'(R)\big) - 2\big(R + f(R)\big) - 3\,\Box\, f'(R) + 8\pi G T = 0 \tag{2.149}$$

Pada persamaan (2.148) dengan $T = 0$ tidak menandakan bahwa $R = 0$, sehingga pada kasus $f(R)$, saat $R = konstan$ dan $T_{\mu\nu} = 0$, persamaannya akan tereduksi menjadi (Sporea, 2014):

$$R_{\mu\nu}\big(1 + f'(R_0)\big) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\big(R_0 + f(R_0)\big) = 0 \tag{2.150}$$

yang mana $R = R_0$ yang menunjukkan bahwa solusi tersebut adalah solusi vakum. Kemudian, tensor Riccinya dapat ditulis:

$$R_{\mu\nu} = \frac{R_0 + f(R_0)}{2\left(1 + f'(R_0)\right)} g_{\mu\nu} \tag{2.151}$$

dengan $1 + f'(R_0) \neq 0$. Di sisi lain, jika kita ambil dari persamaan (2.150)

$$R_0\left(1 + f'(R_0)\right) - 2\left(R_0 + f(R_0)\right) = 0 \tag{2.152}$$

kemudian:

$$R_0 = \frac{2f(R_0)}{f'(R) - 1} \tag{2.153}$$

2.6 Geodesik

Sebagaimana yang sudah kita ketahui bahwasanya pada ruang Euklid, jarak antara dua buah titik yang berdekatan adalah garis lurus. Namun, dalam ruang lengkung hal ini tidak lagi berlaku. Busur yang menghubungkan dua buah titik pada ruang lengkung disebut kelengkungan geodesik (Gron & Hervik, 2004). Lintasan terpendek yang ditempuh suatu partikel dari suatu titik S_A ke S_B adalah lintasan yang memerlukan aksi terkecil yang mungkin. Berdasarkan prinsip aksi terkecil dengan pemilihan interval sebagai aksi (Gautama, 2018):

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} ds = 0 \tag{2.154}$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \delta \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} d\lambda = 0$$

Perlu diketahui bahwa $g_{\mu\nu}$ merupakan fungsi dari x^μ sehingga dapat dinotasikan sebagai:

$$\left(g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} = L$$

$$L = L\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)$$

Dengan begitu, variasi L dapat ditulis dengan:

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)}\delta\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)}\frac{d}{d\lambda}\delta x\hat{}\mu \tag{2.155}$$

Mengingat $uv' = (uv)'u'v$, maka

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/d\lambda)}\delta x^\mu\right] - \left[\frac{d}{d\lambda}\frac{dL}{\partial(dx^\mu/d\lambda)}\right]\delta x^\mu \tag{2.156}$$

Karena λ_1 dan λ_2 bernilai tertentu, $\delta x^\mu(\lambda_1) = \delta x^\mu(\lambda_2) = 0$ sehingga suku kedua pada ruas kanan persamaan (4.23) akan lenyap.

$$\delta\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} ds = \left\{\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \left[\frac{d}{d\lambda}\frac{dL}{\partial(dx^\mu/d\lambda)}\right]\right\}\delta x^\mu d\lambda = 0$$

Komponen $\delta x^\mu d\lambda$ dapat bernilai berapa saja. Dengan demikian, komponen yang berada di dalam kurung haruslah sama dengan nol.

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \left[\frac{d}{d\lambda}\frac{dL}{\partial(dx^\mu/d\lambda)}\right] = 0 \tag{2.157}$$

Kemudian menyelesaikan bentuk $\frac{\partial L}{\partial x^\mu}$ dan $\frac{d}{d\lambda}\frac{dL}{\partial(dx^\mu/d\lambda)}$ dengan mendefinisikan nilai L serta mengingat nilai $1/ds = \left(g_{\rho\sigma}dx^\rho dx^\sigma\right)^{-1/2}$ maka akan diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= \frac{1}{2}\left(g_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}\right)^{-1/2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{ds}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\end{aligned} \tag{2.158}$$

Kemudian benrtuk $\frac{d}{d\lambda}\frac{dL}{\partial(dx^\mu/d\lambda)}$

$$\frac{dL}{\partial(dx^{\mu}/d\lambda)} = \left(g_{\rho\sigma}\frac{dx^{\rho}}{d\lambda}\frac{dx^{\sigma}}{d\lambda}\right)^{-1/2} g_{\mu\alpha}\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{ds}g_{\mu\alpha}\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = g_{\mu\alpha}\frac{dx^{\alpha}}{ds}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\frac{dL}{\partial(dx^{\mu}/d\lambda)} = \frac{d}{d\lambda}\left(g_{\mu\alpha}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\right) = g_{\mu\alpha}\frac{d^2x^{\alpha}}{dsd\lambda} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{d\lambda} \tag{2.159}$$

Mensubstitusikan hasil persamaan (2.158) dan (2.159) pada persamaan (2.157), sehingga:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} - g_{\mu\alpha}\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} - \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0$$

$$g_{\mu\alpha}\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right)\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0$$

$$g_{\mu\alpha}\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right)\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0 \tag{2.160}$$

Mengingat definisi simbol Christoffel sebagai berikut:

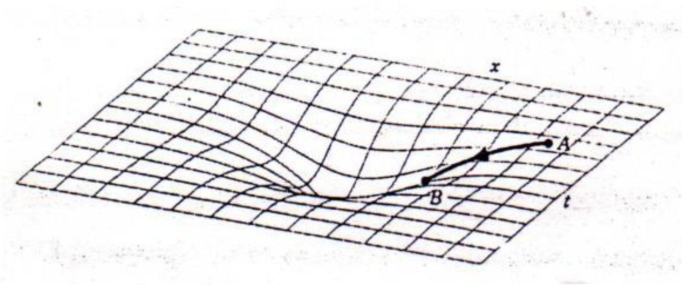
$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = g^{\mu\gamma}\Gamma_{\alpha\beta\mu} = g^{\mu\gamma}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\right)$$

Maka persamaan (2.160) dapat ditulis:

$$g_{\mu\alpha}\frac{d^2x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^{\gamma}}{ds^2} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} = 0 \tag{2.161}$$

Persamaan (2.161) merupakan bentuk persamaan geodesik. Persamaan tersebut digunakan untuk menelaah benda atau partikel yang jatuh bebas dalam ruang bermetrik tertentu. Lintasan partikel dalam ruang lengkung dari titik A ke B diilustasikan pada gambar 2.1 (Anugraha, 2011).



Gambar 2.1 Lintasan geodesik sebuah partikel dalam ruang waktu dengan metrik tertentu

Sumber: (Anugraha, 2011).

2.7 Penelitian Terdahuulu

Penelitian terdahulu digunakan sebagai bahan pernadingan dan acuan untuk penelitian selanjutnya. Selain itu untuk menghindari adanya dugaan kesamaan dengan penelitian terdahulu, maka penulis melampirkan beberapa penelitian berkaitan dengan lubang hitam dalam teori $f(R)$ sebagai berikut:

1. Penelitian yang dilakukan oleh Irawan (2016) dalam tugas akhir dengan judul *"Kaijian Ruang Waktu Kerr-Newman dalan Gravitasi Einstein"*.

   Persamaan penelitian terdahulu dengan penelitian saat ini adalah:

   a. Lubang hitam yang diteliti adalah lubang hitam Kerr-Newman.
   b. Metode yang digunakan sama-sama menggunakan metode analitis dan studi literatur.
   c. Mengkaji sifat fisis metrik Kerr-Newman.

   Perbeaan penelitian terdahulu dengan penelitian saat ini adalah:

   a. Penelitian terdahulu menggunakan teori medan Einstein asli yang belum dimodifikasi, sedangkan penelitian ini menggunakan teori gravitasi Einstein yang sudah dimodifikasi dengan suku tambahan $f(R)$ pada aksi gravitasinya.

b. Peristiwa lain yang dikaji berfokus pada sifat-sifat di dekat horizon peristiwa, sedangkan penelitian ini berfokus mengkaji kelengkungan serta geodesiknya.

2. Penelitian yang dilakukan oleh Arrosyidi (2016) dalam tesis dengan judul *"Soluisi Simetri Aksial dalam Teori Gavitasi* $f(R)$*"*.

   Persamaan penelitian terdahulu dengan penelitian saat ini adalah:

   a. Mencari solusi lubang hitam Kerr-Newman dalam teori gravitasi $f(R)$.

   b. Menggunakan metode nalitis dan studi literatur.

   c. Mengkaji implikasi akibat lubang hitam Kerr-Newman berkaitan dengan geodesiknya.

   Perbedaan penelitian terdahulu dengan penelitian saat ini:

   a. Fungsi $f(R)$ masih dalam bentuk fungsi umum atau tidak spesifik pada fungsi tertentu.

3. Penelitian yang dilakukan oleh J. A. R. Cembranos (2011) dalam artikel jurnal dengan judul *"Kerr-Newman Black Holes in* $f(R)$ *Theories"*.

   Persamaan penelitian terdahulu dengan penelitian saat ini adalah:

   a. Mengkaji lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$.

   b. Metode yang digunakan adalah metode analitis dan studi literatur.

   c. Mengkaji fungsi $f(R)$ secara spesifik pada fungsi tertentu.

   Perbedaan penelitian terdahulu dengan penelitian saat ini adalah:

   a. Fungsi spesifik yang dikaji pada penelitian terdahulu adalah $f(R) = \alpha|R|^{\beta}$, $f(R) = \pm|R|^{\alpha} \exp\left(\frac{\beta}{R}\right) - R$, $f(R) =$

$R\left(Log(\alpha R)^{\beta}\right) - R$, $f(R) = -\alpha \frac{\kappa\left(\frac{R}{\alpha}\right)^{n}}{1+\beta\left(\frac{R}{\alpha}\right)^{n}}$, sedangkan pada penelitian saat ini menggunakan model Starobinsky dengan $f(R) = R + aR^2$.

Beberapa penelitian yang telah disebutkan digunakan sebagai pembanding untuk penelitian kali ini. Lebih dari itu, terdapat beberapa penelitian lain yang dapat dijadikan alternatif untuk mendapatkan topik yang lebih bervariasi. Salah satunya adalah penelitian tentang efek gravitasi pada partikel elementer (dalam kasusnya Fermion dan Boson) pada geometri ruang-waktu Kerr (Pambudi & Romadani, 2023). Penelitain tersebut dapat dikembangkan dengan memvariasikan partikel beserta ruang-waktu yang berbeda.

Kemudian, aspek lain yang dapat diteliti dari sebuah lubang hitam adalah prilaku yang berhubungan dengan partikel kuantum. Salah satunya adalah efek Casimir yang dapat mendukung teori lubang cacing dalam skala mikroskopis (Kuhfittig, 2023). Kemudian penelitian lain yang dapat dikaji adalah tentang efek Casimir pada medan magnet dan pelanggarannya terhadap gaya Lorentz (Rohim et al., 2023).

BAB III

LUBANG HITAM KERR-NEWMAN DALAM TEORI GRAVITASI $f(R)$

3.1 Solusi Lubang Hitam Kerr-Newman dalam Teori $f(R)$

Metrik Kerr-Newman mendeskripsikan sebuah massa bermuatan yang berotasi, yang mana solusi ini merupakan solusi paling umum dari persamaan Einstein-Maxwell pada teori retaivitas umum (Yu-ching, 2017). Metrik lubang hitam Kerr-Newman sejatinya merupakan metrik lubang hitam Reissner-Nordstrom yang dirotasikan. Oleh karena itu, harus dimulai dengan mertik Reissner-Nordstom dalam teori $f(R)$. Berikut adalah metrik Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$ berdasarkan penelitian milik (Fadlol, 2016):

$$ds^2 = -\frac{\Delta_{RN}}{r^2}dt^2 + \frac{r^2}{\Delta_{RN}}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{3.1}$$

dengan

$$\Delta_{\mathrm{RN}} = r^2 + \frac{R_0}{12}r^4 + \frac{Q^2}{1+f'(R_0)} - 2mr \tag{3.2}$$

Elemen garis pada persamaan (3.1) disebut solusi Reissner-Nordstrom dalam teori $f(R)$, yang mana apabila suku R_0 sama dengan nol, metrik garis akan kembali pada solusi Reissner-Nordstrom biasa. Untuk mendapatkan solusi massa yang bermuatan, dapat dilakukan dengan koordinar Eddington-Finklestein yang mengubah koordina (t, r, θ, ϕ) menjadi (u, r, θ, ϕ), dengan aturan $dt = du + f^{-1}dr$. Mengasumsikan persamaan (3.1) sebagai:

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{3.3}$$

Lalu, dengan aturan koordinat Eddington-Finklestein, persamaan (3.3) dapat ditulis dengan:

$$ds^2 = -fdu^2 - 2drdu + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 \tag{3.4}$$

atau

$$ds^2 = (-(f)du - 2dr)du + r(d\theta + i\sin\theta \; d\phi)r(d\theta - i\sin\theta \, d\phi) \tag{3.5}$$

yang mana

$$f = 1 + \frac{R_0}{12}r^2 + \frac{Q^2}{r^2\big(1 + f'(R_0)\big)} - \frac{2m}{r} \tag{3.6}$$

Dalam bentuk tensor metrik kovarian dan kontravarian, persamaan (3.4) adalah:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -f & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Jika dituliskan dalam bentuk null tetrad, maka:

$$ds^2 = -l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu + m_\mu \bar{m}_\nu + m_\nu \bar{m}_\mu \tag{3.8}$$

Dengan $\bar{m}$ merupakan kojugat kompleks dari m. Kemudian dengan mengubah indeks $\mu \leftrightarrow \nu$ pada persamaan (3.8), maka akan didapat persamaan (3.9), yang mana persamaan tersebut berlaku untuk komponen diagonal pada tensor dalam bentuk matriks.

$$g_{\mu\nu} = -2l_\mu n_\nu + 2m_\mu \bar{m}_\nu \tag{3.9}$$

Selanjutnya adalah menentukan vektor-4 null untuk menentukan komponen-komponen metrik pada koordint null, yang mana bila dirangkum, vektor-4 null sebagai berikut:

Vektor-4 null kovarian:

$$
\begin{aligned}
l_\mu &= (1,0,0,0) \\
n_\mu &= \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_0}{12}r^2+\frac{Q^2}{r^2\big(1+f'(R_0)\big)}-\frac{2m}{r}\right),1,0,0\right) \\
m_\mu &= \frac{r}{\sqrt{2}}(0,0,1,i\sin\theta) \\
\bar{m}_\mu &= \frac{r}{\sqrt{2}}\ (0,0,1,-i\sin\theta)
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

Persamaan (3.10) dapat diubah menjadi bentuk kontravarian dengan merujuk pada aturan:

$$Z^\mu = g^{\mu\nu}Z_\nu$$

Sehingga akan didapatkan vektor-4 null kontravarian sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
l^\mu &= (0,-1,0,0) \\
n^\mu &= \left(-1,\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_0}{12}r^2+\frac{Q^2}{r^2\big(1+f'(R_0)\big)}-\frac{2m}{r}\right),0,0\right) \\
m^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0,0,1,\frac{i}{\sin\theta}\right) \\
\bar{m}^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0,0,1,-\frac{i}{\sin\theta}\right)
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Langkah selanjutnya adalah mengubah vektor-4 null kontravarian dalam bentuk kompleks dengan menulis komponen r dalam bentuk biasa dan bentuk konjugat komplesnya, sehingga persamaan (3.11) menjadi:

$$
\begin{aligned}
l^\mu &= (0,-1,0,0) \\
n^\mu &= \left(-1,\frac{1}{2}\left(1+\frac{R_0}{12}r\bar{r}+\frac{Q^2}{r\bar{r}\big(1+f'(R_0)\big)}-\frac{m}{r}-\frac{m}{\bar{r}}\right),0,0\right) \\
m^\mu &= \frac{1}{r\sqrt{2}}(0,0,1,i\sin\theta)
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

$$\bar{m}^{\mu} = \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}(0, 0, 1, -i\sin\theta)$$

Persamaan (3.12) kemudian ditranformasikan dengan relasi:

$$x^{\rho} \to x'^{\rho} = x^{\rho} + ia\cos\theta\left(\delta_0^{\rho} - \delta_1^{\rho}\right) \tag{3.13}$$

yang mana a merupakan sebuah konstanta yang sudah ditentukan, sehingga:

$$\begin{gathered} u \to u' = u + ia\cos\theta \\ r \to r' = r - ia\cos\theta \\ \theta \to \theta' = \theta \\ \phi \to \phi' = \phi \end{gathered} \tag{3.14}$$

atau

$$\begin{gathered} u = u' - ia\cos\theta = u' - ia\cos\theta' \\ r = r' + ia\cos\theta = r' + ia\cos\theta' \end{gathered} \tag{3.15}$$

Yang mana u', r', θ', ϕ' merupakan kuantitas riil. Vektor basis kemudian ditransformasikan dengan aturan rantai:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \to \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial^{\nu}} \tag{3.16}$$

Untuk masing-masing nilai $\mu = (0, 1, 2, 3)$ dan akan didapat hasil sebagai berikut:

$$\begin{gathered} \partial_u \to \partial_{u'} = \partial_u \\ \partial_r \to \partial_{r'} = \partial_r \\ \partial_{\theta} \to \partial_{\theta'} = ia\sin\theta\,\partial_u - ia\sin\theta\,\partial_r + \partial_{\theta} \\ \partial_{\phi} \to \partial_{\phi'} = \partial_{\phi} \end{gathered} \tag{3.17}$$

Kemudian persamaan (3.15) dan (3.17) disubstitusikan pada persamaan (3.12). sehingga null tetradnya menjadi:

$$l^{\mu} = (0, -1, 0, 0)$$

$$n^{\mu} = \left(-1, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{R_0}{12}r^2 + \frac{Q^2}{\rho^2\left(1 + f'(R_0)\right)} - \frac{2mr}{\rho^2}\right), 0, 0\right)$$

$$m^{\mu} = \frac{1}{(r + ia\cos\theta)\sqrt{2}}\left(ia\, sin\theta, -ia\sin\theta\, , 1, \frac{i}{\sin\theta}\right) \quad (3.18)$$

$$\bar{m}^{\mu} = \frac{1}{\overline{(r - \iota a\cos\theta)}\sqrt{2}}\left(-ia\, sin\theta, ia\, sin\theta, 1, -\frac{i}{\sin\theta}\right)$$

Untuk mendapatkan solusi lubang hitam yang dideskripsikan dengan metrik garis, terlebih dahulu mencari komponen metriksnya. Komponen metrik kontravarian terlebih dahulu sebelum diinverskan untuk mendapat metrik kovarian sebagai komponen metrik garis. Komponen metrik kontravarian dapat dihitung dengan relasi berikut:

$$g^{\mu\nu} = -l^{\mu}n^{\nu} - l^{\nu}n^{\mu} + m^{\mu}\,\bar{m}^{\nu} + m^{\nu}\,\bar{m}^{\mu} \quad (3.19)$$

Dengan demikian, akan didapat tensor metriknya:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a^2\sin^2\theta & -\left(\frac{r^2 + a^2}{\rho^2}\right) & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ -\left(\frac{r^2 + a^2}{\rho^2}\right) & \frac{r^2 + a^2 + \frac{R_0 r^4}{12} + Q^2 - 2mr}{\rho^2} & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{bmatrix}$$

(3.20)

Kemudian untuk mendapatkan tensor metrik kovarian dapat menggunakan relasi invers. Maka, tensor metrik kovariannya sebagai berikut:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\rho^2+\frac{R_0 r^4}{12}+Q^2-2mr}{\rho^2}\right) & -1 & 0 & -\frac{a\sin^2\theta\left(\frac{R_0 r^4}{12}+Q^2-2mr\right)}{\rho^2} \\ -1 & 0 & 0 & -\mathrm{a}\sin^2\theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{a\sin^2\theta\left(\frac{R_0 r^4}{12}+Q^2-2mr\right)}{\rho^2} & -\mathrm{a}\sin^2\theta & 0 & -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}-\left(r^2+a^{2^2}\right)\right) \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Atau dapat ditulis dengan:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(\frac{\rho^2+\frac{R_0 r^4}{12}+Q^2-2mr}{\rho^2}\right)du^2-2dudr \\ &-\frac{2a\sin^2\theta\left(\frac{R_0 r^4}{12}+Q^2-2mr\right)dud\phi}{\rho^2}-2\,\mathrm{a}\sin^2\theta\,drd\phi \\ &+\rho^2 d\theta^2-\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}-(r^2+a^2)^2\right)d\phi^2 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Kemudian jika ditulis dalam koordinat Boyer-Lindquist sebagai berikut:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\frac{\Delta_{KN}}{\rho^2}(a\sin^2\theta\,d\phi-dt)^2-\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)d\phi-adt\right)^2 \\ &+\frac{\rho^2}{\Delta_{KN}}dr^2+\rho^2 d\theta^2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

dengan

$$\Delta_{KN} = r^2+a^2+\frac{R_0 r^4}{12}+Q^2-2mr \tag{3.24}$$

dan

$$Q^2 = \frac{Q^2}{\left(1+f'(R_0)\right)} \tag{3.25}$$

Persamaan (3.23) yang merupakn solusi untuk lubang hitam Kerr-Newman dan teori gravitasi $f(R)$, yang mana apabila suku R_0 pada persamaan tersebut bernilai nol, maka metrik pada persamaan (3.23) akan kembali pada metrik lubang hitam Kerr-Newman biasa.

3.2 Solusi Lubang Hitam Reissner-Nordsrom dalam $\boldsymbol{f(R) = R + \alpha R^2}$

Model suku $f(R) = R + \alpha R^2$ pertama kali diajukan oleh Alexei Starobinsky pada tahun 1980. Model tersebut kemudian dikenal sebagai model Starobinsky yang dapat mengawali penjelasan mengenai ekspansi alam semesta akibat adanya suku αR^2 (dengan $\alpha > 0$) pada model tersebut (Felice & Tsujikawa, 2010). Model inflasi Starobinsky sendiri merupakan salah satu model inflasi paling sukses yang dapat menjelaskan observasi CMB (*Cosmic Microwave Background*) serta merupakan model yang paling banyak dipelajari (Mathew, 2023). Untuk menyelesaikan solusi dengan model Starobinsky, dapat kita lihat lagi pada persamaan (2.148) sebagai berikut:

$$R_{\mu\nu}\big(1 + f'(R)\big) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\big(R + f(R)\big) + \big(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\,\Box\big) f'(R) + 8\pi G T_{\mu\nu} = 0$$

atau

$$R_{\mu\nu}\big(1 + \alpha h'(R)\big) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\big(R + \alpha h(R)\big) + \big(\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\,\Box\big) \alpha h'(R) = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{3.26}$$

yang mana pada persamaan tersebut menggunakan *natulal unit,* sehingga $c = 1$ pada suku yang memuat tensor energi-momentum. Persamaan (3.26) diubah menjadi bentuk tensor campuran:

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R + \alpha h'(R)R_{\nu}^{\mu} - \frac{\alpha}{2}\delta_{\nu}^{\mu}h(R) - \alpha\delta_{\nu}^{\mu} \,\Box\, h'(R) + \alpha\nabla^{\mu}\nabla_{\nu}h'(R)$$
$$= -\kappa T_{\nu}^{\mu} \tag{3.27}$$

Tujuannya untuk mendapatkan solusi secara umum, dalam artian tidak hanya pada solusi vakum, tetapi juga solusi pada pusat medan. Kemudian mensubstitusikan solusi pada persamaan medan einstein (Ky et al., 2018):

$$R = \kappa T,\ \ R_{\nu}^{\mu} = -\kappa\left(T_{\nu}^{\mu} - \tfrac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}T\right) \tag{3.28}$$

Persamaan (3.28) kemudian disubstitusikan pada persamaan (3.27), sehingga:

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}R = -\kappa T_{\nu}^{\mu} + \alpha\kappa h'(\kappa T)\left(T_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2}\delta_{\nu}^{\mu}T\right) + \frac{\alpha}{2}\delta_{\nu}^{\mu}h(\kappa T) + \alpha\delta_{\nu}^{\mu}$$
$$\Box\, h'(\kappa T) - \alpha\nabla^{\mu}\nabla_{\nu}h'(\kappa T) \tag{3.29}$$

Tensor Ricci campuran pada persamaan terakhir dapat dihitung dengan menggunakan relasi berikut:

$$R_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{3.30}$$

Berdasarkan relasi tersebut, dapat disubstitusikan persamaan (2.48) dan persamaan (2.55) yang berupa tensor Ricci kovarian untuk mendapat nilai R_0^0. Adapun alasan mengapa hanya nilai R_0^0 yang diperhitungkan dalam proses ini agar bisa didapatkan nilai untuk ν, yang mana dengan hubungan $\nu = -\lambda$, secara otomatis akan mendapat nilai untuk λ.

$$R_0^0 = g^{00}R_{00} = e^{-2\lambda}\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r}\right)$$
$$\tag{3.31}$$
$$R_1^1 = g^{11}R_{11} = e^{-2\lambda}\left(\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r}\right)$$

$$R_2^2 = g^{22}R_{22} = \frac{1}{r^2} \cdot (1 - \lambda' r + \nu' r)e^{(-2\lambda)} - 1$$

$$R_3^3 = g^{33}R_{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} R_{22}$$

Kemudian nilai skalar Ricci berdasarkan persamaan (3.31) adalah:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -e^{-2\nu}R_{00} + e^{-2\lambda}R_{11} + \frac{1}{r^2}\left(R_{22} + \frac{R_{22}\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\right)$$

$$= e^{-2\lambda}\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r}\right) + e^{-2\lambda}\left(\nu'' + (\nu')^2 - \lambda'\nu' - \frac{2\lambda'}{r}\right)$$

$$+ \frac{1}{r^2}\left(2\left((1 - \lambda' r + \nu' r)e^{(-2\lambda)} - 1\right)\right)$$

$$= 2e^{-2\lambda}(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2) + 2e^{-2\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda'}{r}\right) + 2e^{-2\lambda}\left(\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} + \frac{\nu'}{r}\right)\right)$$

$$- \frac{2}{r^2}$$

$$= 2e^{-2\lambda}\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} - \frac{2\lambda'}{r}\right) - \frac{2}{r^2} \tag{3.32}$$

Persamaan (3.31) dan (3.32) kemudian disubstitusikan pada persamaan medan Einstein sebagai berikut:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R$$

$$= R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R = R_0^0 - \frac{1}{2}\delta_0^0 R$$

$$= e^{-2\lambda}\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r}\right)$$

$$- \frac{1}{2}\left(2e^{-2\lambda}\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} - \frac{2\lambda'}{r}\right) - \frac{2}{r^2}\right)$$

$$= e^{-2\lambda}\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{2\nu'}{r}\right)$$

$$- \left(e^{-2\lambda}\left(\nu'' - \nu'\lambda' + (\nu')^2 + \frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} - \frac{2\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}\right)$$

$$= e^{-2\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \tag{3.33}$$

Hasil pada persamaan (3.33) kemudian disubstitusikan pada persamaan (3.29):

$$e^{-2\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}$$

$$= -\kappa T_0^0 + \alpha\kappa h'(\kappa T)\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right) + \frac{\alpha}{2}h(\kappa T) + \alpha \tag{3.34}$$

$$\Box\, h'(\kappa T) - \alpha\nabla^0\nabla_0 h'(\kappa T)$$

Turunan kovarian pada persamaa tersebut dapat ditulis sebagai $\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i = \Box - \nabla^0\nabla_0$, sehingga persamaan (3.34) menjadi:

$$e^{-2\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r}\right) - \frac{1}{r^2}$$

$$= -\kappa T_0^0 + \alpha\kappa h'(\kappa T)\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right) + \frac{\alpha}{2}h(\kappa T) \tag{3.35}$$

$$+ \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T)$$

Dan dapat dituliskan:

$$e^{-2\lambda}\left(\frac{2\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(1 - e^{-2\lambda}\right)$$

$$= \kappa T_0^0 - \alpha\kappa h'(\kappa T)\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right) - \frac{\alpha}{2}h(\kappa T) \tag{3.36}$$

$$- \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T)$$

Apabila $2\lambda = -\ln\left[1 + \frac{C}{r}\right]$, maka

$$-\frac{C'}{r^2} = \kappa T_0^0 - \alpha\kappa h'(\kappa T)\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right) - \frac{\alpha}{2}h(\kappa T) - \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T) \tag{3.36}$$

Persamaann tersebut kemudian diintegralkan untuk mendapat nilai C.

$$C = -\int_0^r \left(\kappa T_0^0 - \alpha\kappa h'(\kappa T)\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T\right) - \frac{\alpha}{2}h(\kappa T) - \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T)\right) r'^2 dr' \tag{3.37}$$

Kemudian substitusikan nilai C pada nilai 2λ, sehingga:

$$2\lambda = -\ln\left[1 - \frac{1}{r}\int_0^r \left(\kappa T_0^0 - \alpha\kappa h'(\kappa T_0^0)\left(T_0^0 - \frac{1}{2}T_0^0\right) - \frac{\alpha}{2}h(\kappa T_0^0) - \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right] \tag{3.38}$$

Untuk mendapatkan solusi yang bermuatan, selanjutnya mencari nilai tensor campuran energi-momentum.

$$T_0^0 = g^{00}T_{00} = -e^{-2\nu} \cdot -\frac{1}{2}f^2 e^{-2\lambda} \tag{3.39}$$

Dengan $\nu = -\lambda$, sehingga:

$$T_0^0 = g^{00}T_{00} = \frac{1}{2}f^2 \tag{3.40}$$

Suku pertama (κT_0^0) pada persamaan (3.38) diintegralkan dengan batas 0 hingga R_0 pada kondisi vakum dan menghasilkan hasil sebagai berikut:

$$\int_0^{R_0} \kappa T_0^0 r'^2 dr' = \frac{\kappa M c^2}{4\pi} \tag{3.41}$$

Dengan demikian dapat ditentukan nilai tensor energi-momentum apabila massanya tidak bermuatan:

$$\kappa T_0^0 \frac{R_0^3}{3} = \frac{\kappa M c^2}{4\pi} \tag{3.42}$$

$$T_0^0 = \frac{Mc^2}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}$$

Persamaan (3.42) kemudian disubstitusikan pada suku pertama integral pada persamaan (3.38), dengan $\kappa = 8\pi G/c^4$

$$\begin{aligned}\int_0^{R_0} \kappa \left(\frac{Mc^2}{\frac{4}{3}\pi R_0^3}\right) r'^2 dr' &= \frac{8\pi G}{c^4} \cdot \frac{Mc^2}{\frac{4}{3}\pi R_0^3} \int_0^{R_0} r'^2 dr' \\ &= \frac{6GM}{c^2 R_0^3} \cdot \frac{1}{3} R_0^3 \\ &= \frac{2GM}{c^2}\end{aligned} \tag{3.43}$$

Kemudian mencari nilai integral dari $T_0^0 \neq 0$ yang mana integralnya tidak terbatas pada R_0 saja, melainnkan pada seluruh area lubang hitam. Karena muatan tersebar di seluruh area lubang hitam. Oleh karena itu, batas integral yang dipakai adalah 0 hingga r. Mensubstitusikan persamaan (3.40) pada persamaan (3.38) dengan nilai $f = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, sehingga:

$$\begin{aligned}\int_0^r \kappa \frac{1}{2} f^2\, r'^2 dr &= \int_0^r \frac{8\pi G}{c^4} \frac{1}{2} \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^4}\, r'^2 dr' \\ &= \int_0^r \frac{G}{c^4} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0^2 r^2}\, dr' \\ &= \frac{q^2 G}{c^4 4\pi\epsilon_0^2} \int_0^r \frac{1}{r^2} dr' \\ &= -\frac{q^2 G}{c^4 4\pi\epsilon_0^2 r}\end{aligned} \tag{3.44}$$

Persamaan (3.38) jika ditulis ulang dengan mensubstitusikan persamaan (3.34) dan (3.44) akan menjadi:

$$2\lambda = -\ln\left[1 - \left(\frac{2GM}{c^2} - \frac{q^2G}{c^4 4\pi\epsilon_0^2 r}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{r}\int_0^r \left(-\frac{\alpha}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) - \frac{\alpha}{2}h(\kappa T_0^0) - \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right]$$
$$= -\ln\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{q^2G}{c^4 4\pi\epsilon_0^2 r^2}\right.$$
$$+ \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0)\right. \tag{3.45}$$
$$\left.\left. + \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right]$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.45) pada metrik garis umum lubang hitam dalam koordinat bola. Dengan demikian, komponen $g_{00}, g_{11}, g_{22},$ serta g_{33} akan bernilai sebagai berikut (dengan mengingat bahwa $\nu = -\lambda$):

$$g_{00} = e^{2\nu} = e^{-2\lambda}$$
$$= e^{\ln\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{q^2G}{c^4 4\pi\epsilon_0^2 r^2} + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0) + \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right]}$$
$$= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{q^2G}{c^4 4\pi\epsilon_0^2 r^2}\right.$$
$$+ \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0)\right.$$
$$\left.\left. + \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right)$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0) + \alpha \nabla^{\mathrm{i}} \nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right) \tag{3.46}$$

$$g_{11} = e^{2\lambda}$$

$$= e^{-\ln\left[1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{q^2 G}{c^4 4\pi\epsilon_0^2 r^2} + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0) + \alpha \nabla^{\mathrm{i}} \nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right]}$$

$$= \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{q^2 G}{c^4 4\pi\epsilon_0^2 r^2} + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0) + \alpha \nabla^{\mathrm{i}} \nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right)^{-1}$$

$$= \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0) + \alpha \nabla^{\mathrm{i}} \nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right)^{-1} \tag{3.47}$$

$$g_{22} = r^2 \tag{3.48}$$

$$g_{33} = r^2 \sin^2\theta \tag{3.49}$$

Yang mana persamaan (3.46) dan persamaan (3.47) menggunakan *Natural Unit* yang mana $c = G = 1$. Dengan demikian, dapat ditulis empat komponen metrik kovarian tersebut ke dalam mentrik garis:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = -\Bigg(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \\
&+ \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0\kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0) \right.\\
&\left. + \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\Bigg) dt^2 \\
&+ \Bigg(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \\
&+ \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0\kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0) \right.\\
&\left. + \alpha\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i h'(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\Bigg)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2
\end{aligned}
\tag{3.50}
$$

Pada kasus khusus, apabila $f'(R)$ atau $h'(\kappa T_0^0)$ adalah konstanta. Maka suku ketiga pada integral di persamaan (3.50) dapat hilang mengingat $\nabla^{\mathrm{i}}\nabla_i$adalah turunan kovarian. Sehingga persamaan (3.50) dapat ditulis:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0\kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right) dt^2 \\
&+ \Bigg(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \\
&+ \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0\kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\Bigg)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \\
&+ r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Kemudian dapat disubstitusikan fungsi khusus Starobinsky $f(R) = R + \alpha R^2$. Mengingat fungsi $f(R) = R + \alpha h(R)$. Maka, $h(R) = R^2$ dan $h'(R) = 2R$ dan persaamaan (3.51) menjadi:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0) +\right) r'^2 dr'\right) dt^2$$

$$+ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right.$$

$$\left. + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}T_0^0 \kappa h'(\kappa T_0^0) + \frac{1}{2}h(\kappa T_0^0)\right) r'^2 dr'\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$+ r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}2RR^2 + \frac{1}{2}R^2\right) r'^2 dr'\right) dt^2$$

$$+ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\int_0^r \left(\frac{1}{2}2RR^2 + \frac{1}{2}R^2\right) r'^2 dr'\right)^{-1} dr^2$$

$$+ r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\left(R^3 + \frac{1}{2}R^2\right)\int_0^r r'^2 dr'\right) dt^2$$

$$+ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\left(R^3 + \frac{1}{2}R^2\right)\int_0^r r'^2 dr'\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$+ r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\left(R^3 + \frac{1}{2}R^2\right)\left(\frac{r^3}{3}\right)\right) dt^2$$

$$+ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\left(R^3 + \frac{1}{2}R^2\right)\left(\frac{r^3}{3}\right)\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$+ r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

$$= -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha R^3 r^2}{3} + \frac{\alpha R^2 r^2}{6}\right) dt^2$$

$$+ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{\alpha R^3 r^2}{3} + \frac{\alpha R^2 r^2}{6}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$+ r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right) dt^2$$

$$+ \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)^{-1} dr^2 \qquad (3.52)$$

$$+ r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2$$

Karena solusi yang dicari merupakan solusi vakum, sehingga $R = R_0$. Persamaan (3.25) merupakan solusi untuk lubang hitam Reissner-Nordstrom dalam teori gravitasi $f(R)$ dengan fungsi khusus menggunakan fungsi Starobinsky, yang mana apabila komponen $R_0 = 0$, solusi tersebut akan kembali pada solusi Reissner-Nordstrom pada persaman medan Einstein biasa.

3.3 Solusi Lubang Hitam Kerr-Newman dalam $f(R) = R + \alpha R^2$

Lubang hitam Kerr-Newman merupakan solusi untuk lubang hitam yang bermuatan dan berotasi. Solusi untuk lubang hitam yang bermuatan ditemukan kurang dari 50 tahun setelah solusi Schwarzschild ditemukan, tepatnya pada tahun1963 oleh Kerr. Penemuan ini tentuya sangat pentiing dalam bidang astrofisika, mengingat mayoritas benda angkasa berotasi (Yu-ching, 2017). Jika solusi lubang hitam Kerr didapat dengan merotasikan metrik Schwarzschild, maka dengan cara yang sama solusi Kerr-Newman juga bisa didapatkan dengan merotasikan metrik Reissner-Nordstom, pun dalam kasus fungsi khusus dimulai dengan metrik Reissner-Nordstrom:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\right)dt^2 \\ &+\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\right)^{-1} dr^2 \\ &+r^2 d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Persamaan (3.53) kemudian dimisalkan untuk mempermudah pengerjaannya pada koordinat Eddington-fingkelstein, dengan syarat $dt = du + f^{-1}dr$.

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f dt^2 + f^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 \\ &= -f du^2 - 2du dr + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 \end{aligned} \tag{3.54}$$

dengan:

$$f = 1-\frac{2M}{r}+\frac{Q^2}{r^2}+\frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2) \tag{3.55}$$

Dalam bentuk tensor metrik kovarian dan kontravarian, persamaan (3.54) adalah:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -f & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

Jika dituliskan dalam bentuk null tetrad, maka:

$$ds^2 = -l_\mu n_\nu - l_\nu n_\mu + m_\mu \overline{m}_\nu + m_\nu \overline{m}_\mu \tag{3.57}$$

Dengan $\overline{m}$ merupakan kojugat kompleks dari m. Kemudian dengan mengubah indeks $\mu \leftrightarrow \nu$ pada persamaan sebelumnya, maka:

$$ds^2 = -2l_\mu n_\nu + 2m_\mu \overline{m}_\nu \tag{3.58}$$

Kemudian, menentukan vektor-4 null untuk menentukan komponen-komponen metrik pada koordint null, yang mana bila dirangkum, vektor-4 null sebagai berikut:

Vektor-4 null kovarian:

$$l_\mu = (1, 0, 0, 0)$$

$$n_\mu = \left(\frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right), 1, 0, 0\right) \tag{3.59}$$

$$m_\mu = (0, 0, 1, i \sin\theta)$$

$$\bar{m}_\mu = (0, 0, 1, -i \sin\theta)$$

Persamaan (3.59) dapat diubanh menjadi bentuk kontravarian dengan merujuk pada aturan:

$$Z^\mu = g^{\mu\nu} Z_\nu$$

Sehingga akan didapatkan vektor-4 null kontravarian sebagai berikut:

$$l^\mu = (0, -1, 0, 0)$$

$$n^\mu = \left(-1, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right), 0, 0\right) \tag{3.60}$$

$$m^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0, 0, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right)$$

$$\bar{m}^\mu = \frac{1}{r\sqrt{2}}\left(0, 0, 1, -\frac{i}{\sin\theta}\right)$$

Langkah selanjutnya adalah mengubah vektor-4 null kontravarian dalam bentuk kompleks dengan menulis komponen r dalam bentuk biasa dan bentuk konjugat komplesnya, sehingga persamaan (3.60) menjadi:

$$l^\mu = (0, -1, 0, 0)$$

$$n^\mu = \left(-1, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{m}{r} - \frac{m}{\bar{r}} + \frac{Q^2}{r\bar{r}} + \frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right), 0, 0\right) \tag{3.61}$$

$$m^{\mu} = \frac{1}{r\sqrt{2}}(0, 0, 1, i\sin\theta)$$

$$\bar{m}^{\mu} = \frac{1}{\bar{r}\sqrt{2}}(0, 0, 1, -i\sin\theta)$$

Persamaan (3.61) kemudian ditranformasikan dengan relasi:

$$x^{\rho} \to x'^{\rho} = x^{\rho} + ia\cos\theta\left(\delta_0^{\rho} - \delta_1^{\rho}\right) \tag{3.62}$$

yang mana a merupakan sebuah konstanta yang sudah ditentukan, sehingga:

$$\begin{aligned} u &\to u' = u - ia\cos\theta \\ r &\to r' = r + ia\cos\theta \\ \theta &\to \theta' = \theta \\ \phi &\to \phi' = \phi \end{aligned} \tag{3.63}$$

atau

$$\begin{aligned} u &= u' - ia\cos\theta = u' - ia\cos\theta' \\ r &= r' + ia\cos\theta = r' + ia\cos\theta' \end{aligned} \tag{3.64}$$

Yang mana u', r', θ', ϕ' merupakan kuantitas riil. Vektor basis kemudian ditransformasikan dengan aturan rantai:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \to \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial^{\nu}} \tag{3.65}$$

Untuk masing-masing nilai $\mu = (0, 1, 2, 3)$ dan akan didapat hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \partial_u &\to \partial_{u'} = \partial_u \\ \partial_r &\to \partial_{r'} = \partial_r \\ \partial_\theta &\to \partial_{\theta'} = ia\sin\theta\,\partial_u - ia\sin\theta\,\partial_r + \partial_\theta \\ \partial_\phi &\to \partial_{\phi'} = \partial_\phi \end{aligned} \tag{3.66}$$

Kemudian persamaan (3.64) dan (3.66) disubstitusikan pada persamaan (3.61). sehingga null tetradnya menjadi:

$$l^{\mu} = (0, -1, 0, 0)$$

$$n^{\mu} = \left(-1, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} + \frac{Q^2}{\rho^2} + \frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right), 0, 0\right)$$

$$m^{\mu} = \frac{1}{(r + ia\cos\theta)\sqrt{2}}\left(ia\, sin\theta, -ia\sin\theta\,, 1, \frac{i}{\sin\theta}\right) \tag{3.67}$$

$$\bar{m}^{\mu} = \frac{1}{\overline{(r - \imath a\cos\theta)}\sqrt{2}}\left(-ia\, sin\theta, ia\, sin\theta, 1, -\frac{i}{\sin\theta}\right)$$

Komponen metrik kontravarian terlebih dahulu sebelum diinverskan untuk mendapat metrik kovarian sebagai komponen metrik garis. Komponen metrik kontravarian dapat dihitung dengan relasi berikut:

$$ds^2 = -l_{\mu}n_{\nu} - l_{\nu}n_{\mu} + m_{\mu}\bar{m}_{\nu} + m_{\nu}\bar{m}_{\mu} \tag{3.68}$$

Dengan demikian, akan didapat tensor metriknya:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} a^2\sin^2\theta & -\left(\frac{r^2 + a^2}{\rho^2}\right) & 0 & \frac{a}{\rho^2} \\ -\left(\frac{r^2 + a^2}{\rho^2}\right) & \frac{r^2 + a^2 + Q^2 - 2mr}{\rho^2} + \frac{R_0 r^2}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) & 0 & -\frac{a}{\rho^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ \frac{a}{\rho^2} & -\frac{a}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho^2\sin^2\theta} \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

Kemudian untuk mendapatkan tensor metrik kovarian dapat menggunakan relasi invers. Maka, tensor metrik kovariannya sebagai berikut:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\rho^2 + Q^2 - 2mr + \Sigma}{\rho^2}\right) & -1 & 0 & -\frac{a\sin^2\theta\,(Q^2 - 2mr + \Sigma)}{\rho^2} \\ -1 & 0 & 0 & -\mathrm{a}\sin^2\theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{a\sin^2\theta\,(Q^2 - 2mr + \Sigma)}{\rho^2} & -\mathrm{a}\sin^2\theta & 0 & -\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left(a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN} - \left(r^2 + a^{2^2}\right)\right) \end{bmatrix} \tag{3.70}$$

dengan:

$$\Sigma = \frac{R_0 r^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) \tag{3.71}$$

Atau dapat ditulis dengan:

$$ds^2 = -\left(\frac{\rho^2 + Q^2 - 2mr + \Sigma}{\rho^2}\right)du^2 - 2dudr$$
$$-\frac{2a\sin^2\theta\,(Q^2 - 2mr + \Sigma)dud\phi}{\rho^2} - 2\,\mathrm{a}\sin^2\theta\,drd\phi + \rho^2 d\theta^2$$
$$-\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}(a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN} - (r^2 + a^2)^2)d\phi^2$$

(3.72)

Kemudian jika ditulis dalam koordinat Boyer-Lindquist sebagai berikut:

$$ds^2 = -\frac{\Delta_{KN}}{\rho^2}(a\sin^2\theta\,d\phi - dt)^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\big((r^2 + a^2)d\phi - adt\big)^2$$
$$+\frac{\rho^2}{\Delta_{KN}}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \tag{3.73}$$

atau

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{2a\sin\theta}{\rho^2}\big((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\big)d\phi dt$$
$$+\frac{\rho^2}{\Delta_{KN}}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \tag{3.74}$$
$$+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2 + a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})d\phi^2$$

dengan

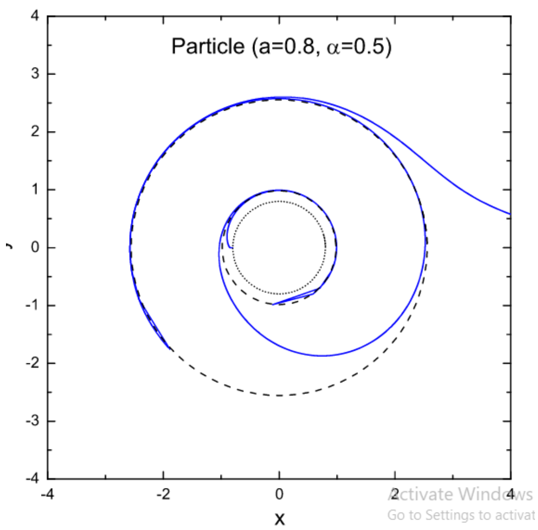
$$\Delta_{KN} = r^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2mr \tag{3.75}$$

dan

$$Q^2 = \frac{\tilde{Q}^2}{\left(1 + f'(R_0)\right)} \tag{3.76}$$

Persamaan (3.74) merupakan solusi untuk lubang hitam Kerr-Newman dalam koordinat Boyer-Lindquist dengan fungsi khusus Starobinsky $f(R) = R + \alpha R^2$. Apabila $\alpha = 0$ persamaan tersebut akan kembali pada solusi Kerr-Newman dalam teori gravitasi biasa.

Selain itu, parameter yang ada pada persamaan (3.74) dapat mendekripsikan sifat-sifat yang dimiliki oleh lubang hitam tersebut. Parameter a, yang merupakan parameter rotasi dapat mendefinisikan lintasan partikel ketika terpengaruh gravitasi lubang hitam. Parameter rotasi pada lubang hitam dapat memelintir ruang-waktu dan membuat cahaya mengikuti arah rotasi lubang hitam apabila sudah memasuki daerah cakrawala peristiwanya. Peristiwa tersebut yang kemudian dikenal dengan efek *frame-dragging*. Ilustrasi berikut dapat memberikan gambaran bagaimana orbit foton yang kemudian berbalik mengikuti rotasi lubang hitam.



Gambar 3.1 Lintasan foton yang bergerak mengikuti rotasi lubanghitam Kerr-MOG
Sumber: (Lee & Han, 2017)

Parameter a juga berhubungan dengan lintasan foton terhadap batas cakrawala peristiwa lubang hitam yang berotasi, yang mana apabila $a = 0$ lintasann foton akan mengikuti batas cakrawala peristiwanya yang menandakan bahwa lubang hitam tersebut tidak berotasi. Sebaliknya, apabila parameter a tidak sama dengan nol, maka foton akan mempunyai jalur yang melenceng dari batas cakrawala peristiwa (Lee & Han, 2017). Selain itu, metrik lubang hitam juga memuat informasi mengenai singularitas dari lubang hitamm itu sendiri.

BAB IV

KELENGKUNGAN DAN GEODESIK LUBANG HITAM KERR-NEWMAN DALAM TEORI GRAVITASI $\boldsymbol{f(R)}$

4.1 Kelengkungan Lubang Hitam Kerr-Newman dalam Teori $\boldsymbol{f(R) = R + \alpha R^2}$

Meninjau persamaan medan Einstein, ruang-waktu digambarkan dengan sebuah manifold. Manifold sendiri merupakan generalisasi dari ruang datar atau Euklidean. Geometri yang berlaku pada ruang lengkung ini kemudian disebut Geometri Riemaninian, diambil dari Bernhard Riemann sebagai perintis geometri Riemannian (Gautama, 2018). Kemudian, kelengkungan pada manifold Riemannian dapat dideskripsikan dengan sebuah tensor yang kemudian disebut tensor Riemann atau tensor kelengkungan. Tensor Riemann dapat dinyatakan dalam bentuk tensor kontravarian berikut (Gautama, 2018):

$$R_{\beta\mu\alpha\nu} = g_{\beta\sigma} R^{\sigma}_{\mu\alpha\nu} \tag{4.1}$$

Kemudian terdapat kontraksi dari tensor kelengkungan Ricci dengan dua indeks kovarian. Tensor ini dikenal dengan tensor Ricci yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\mu\alpha\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} \end{aligned} \tag{4.2}$$

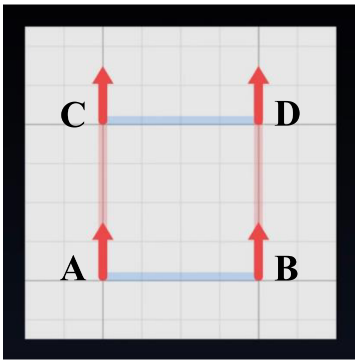
Dengan demikian, dapat terlihat bahwa tensor Ricci merupakan trace bidang $-\sigma\alpha$ dari tensor Riemann $R^{\sigma}_{\mu\alpha\nu}$

$$R_{\mu\nu} = R^{0}_{\mu 0\nu} + R^{1}_{\mu 1\nu} + R^{2}_{\mu 2\nu} + R^{3}_{\mu 3\nu} \tag{4.3}$$

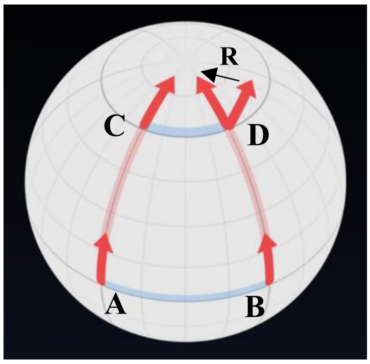
untuk memperoleh inforasi mengenai kelengkungan ruang-waktu, dapat kita kontraksi tensor Ricci untuk memperoleh skalar Ricci.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{4.4}$$

Sebagaimana yang sudah disinggung bahwa skalar Ricci membawa informasi mengenain kelengkungan suatu ruang. Jika digambarkan, nilai skalar Ricci sebenarnya adalah selisih dua vektor yang digeser secara paralel sehingga membentuk vektor dengan arah yang berbeda di titik akhirnya. Perhatikan gambar 4.1(a) dan gambar 4.2(b) berikut:



Gambar 4.1(a)
Geometri Euklidean



Gambar 4.1(b)
Geometri Riemannian

Sumber: (ScienceClic, 2020)

Gambar 4.1(a) menunjukkan pergeseran vektor pada geometri datar. Saat sebuah vektor melintas dari titik A-C-D, arah vektor tersebut tidak berubah. Hal yang sama juga terjadi saat vektor lain yang berangkat melalui titik A-B-D, arah vektor tersebut akan tetap sama arahnya hingga sampai pada titik tujuan. Perpindahan paralel pada geometri datar tidak akan mengubah arah vektor, sehingga vektor yang melalui titik B atau C tidak akan berubah arah dan tidak membentuk adanya ‘selisih’ di titik tujuannya. Selisih di sini yang kemudian disebut dengan skalar Ricci. Itulah mengapa, pada geometri datar nilai R sama dengan nol atau tidak ada kelengkungan di dalamnya.

Hal tersebut aka berbeda saat kita meninjau gambar 4.1(b), gambar tersebut menunjukkan pergeseran paralel vektor pada geometri lengkung atau geometri Riemannian. Saat sebuah vektor bergeser dari titik A-C-D, akan terlihat vektor tersebut berubah arahny, pun demikian saat sebuh vektor lain digeser melalui titik A-B-D akan menglami perubahan arah seiring pergeserannya pada arah non-ekuator. Hal tersebut akan membentuk 'selisih' pada titik tujuan kedua vektor. Adanya 'selisih' merepresentasikan adanya nilai R atau kelengkungan pada geometri tersebut.

Untuk mendapatkan nilai kelengkungan ini, pertama kita harus mendapatkan nilai simbol Christoffel, dengan memanfaatkan nilai simbol Christoffeel bisa didapatkan nilai ternsor Ricci yang kemudian dapat dikontraksi menjadi skalar Ricci. Nilai simbol Christoffel didefinisikan sebagai berikut:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\delta}\left(\partial_{\nu} g_{\delta\mu} + \partial_{\mu} g_{\nu\delta} - \partial_{\delta} g_{\mu\nu}\right) \tag{4.5}$$

Metrik Kerr-Newman pada persamaan (3.74) kemudian ditulis dalam bentuk matriks sebagai langkah untuk mencari nilai simbol Christoffel:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{2a\sin\theta}{\rho^2}\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right) d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta_{KN}} dr^2$$

$$+ \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}) d\phi^2$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right) & 0 & 0 & -\frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2) - \Delta_{KN}\right) \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta_{KN}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2) - \Delta_{KN}\right) & 0 & 0 & \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right) \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Matriks pada persamaan (4.6) kemudian dicari bentuk kontravariannya dengan invers matriks, sehingga didapat nilai sebagai berikut:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g^{00} & 0 & 0 & g^{03} \\ 0 & \frac{\Delta_{KN}}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ g^{30} & 0 & 0 & g^{33} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$g^{00} = -\frac{\rho^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta) + \frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}$$

$$g^{03} = g^{30} = \frac{\rho^2 a}{\sin\theta}\left[\frac{(\Xi - \Delta_{KN})}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\right]$$

$$g^{33} = \frac{\rho^2}{\sin^2\theta}\left[\frac{1}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}}\right]$$

Dengan nilai $\Xi = \mathrm{r}^2 + a^2$. Sehingga dapat dicari simbol Christoffelnya, dengan 64 nilai simbol Christoffel yang ada, berikut nilai simbol Christoffel yang tidak sama dengan nol:

Saat $\rho = 0$ maka nilai Christoffel yang tidak nol sebagai berikut:

$$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\rho^2 - r(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}{\rho^2\left((\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta) + \frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}0\right)}$$

$$+\frac{a^2}{\rho^2}\left(\frac{(\Xi - \Delta_{KN})\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\rho^2 - r(\Xi - \Delta_{KN})}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\right)$$

$$\Gamma^0_{02} = \Gamma^0_{20}$$

$$= -\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2 + a^2 - \Delta_{KN})}{2\rho^2(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta) + \frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}$$

$$-\frac{a^2\cos\theta}{2\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi - \Delta_{KN})^2(\Xi + a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\right]$$

$$\Gamma^0_{13} = \Gamma^0_{31}$$

$$= \frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\rho^2 + r\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta) + \frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right]$$

$$+\frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi - \Delta_{KN})}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\left(2r^3 + 2ra^2\right.\right.$$

$$\left.\left. - a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)\rho^2 - r(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]$$

$$\Gamma_{23}^{0} = \Gamma_{32}^{0} = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2 g_{30}) + \frac{1}{2}g^{03}(\partial_2 g_{33})$$

$$= \frac{a\cos\theta}{2\rho^2}\left[\frac{\big((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\big)(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\dfrac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right]$$

$$+\frac{a\cos\theta}{\rho^2}\left[\frac{\big((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\big)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right.$$

$$\left.\cdot\,((r^2+a^2)^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]$$

(4.8)

Untuk $\rho = \delta = 1$, nilai simbol Christoffel sebagai berikut:

$$\Gamma_{00}^{1} = \frac{\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2 - r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)\right]$$

$$\Gamma_{03}^{1} = \Gamma_{30}^{1} = \frac{a\sin\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2 - r\big((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\big)\right]$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{r\Delta_{KN}-\left(r+\dfrac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2}{\rho^2\Delta_{KN}}$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = \frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = -\frac{\Delta_{KN}}{r}$$

$$\Gamma_{33}^{1} = -\frac{\sin^2\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(2r(r^2+a^2)\right.\right.$$

$$\left.-\,a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2$$

$$\left.-\,r((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right] \tag{4.9}$$

Untuk $\rho = \delta = 2$, nilai simbol Christoffelnya sebagai berikut:

$$\Gamma^2_{00} = -\frac{a^2 \sin\theta \cos\theta}{\rho^6}[\rho^2 - (\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)]$$

$$\Gamma^2_{03} = \Gamma^2_{30} = \frac{a\cos\theta\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{2\rho^6}$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2\Delta_{KN}}$$

$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{r}{\rho^2}$$

$$\Gamma^2_{22} = -\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{33} = -\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^6}[((r^2+a^2)^2 - 2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2 \\ + a^2\sin^2\theta\,((r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})]\end{aligned} \tag{4.10}$$

Untuk $\rho = 3$ nilai simbol Christoffel yang tidak sama dengan nol adalah adalah:

$$\Gamma^3_{01} = \Gamma^3_{10}$$

$$= -\frac{a}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\left(\left(r\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\rho^2 - r(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)\right)$$

$$-\frac{a}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{1}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\left(\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right.\right.$$

$$\left.\left.- m\right)\rho^2 - r(\Xi - \Delta_{KN})\right)$$

$$\Gamma^3_{02} = \Gamma^3_{20} = \frac{a^3\cos\theta}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]$$

$$-\frac{a\cos\theta}{2\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})(\Xi+a^2\sin^2\theta)}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]$$

$$\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{31}$$

$$=-\frac{a^2}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\left(\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})\right)$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\left[\left(2r\Xi\right.\right.$$

$$\left.-\,a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2$$

$$\left.-\,r((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]$$

$$\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{32}$$

$$=-\frac{a^2\cos\theta}{2\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]$$

$$+\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]$$

Dengan $\Xi=(r^2+a^2)$ (4.11)

Simbol Christoffel yang tidak benilai nol dapat digunakan untuk mencari nilai tensor Ricci, dengan definisi matematis tensor Ricci sebagai berikut:

$$R_{\mu\nu}=\partial_\nu\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}-\partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\mu\nu}+\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu}-\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma} \quad (4.12)$$

Melihat bentuk metrik dari lubang hitam Kerr-Newman, terdapat enam kompnen yang bernilai tidak sama dengan nol, yaitu komponen diagonal, komponen g_{03}, serta komponen g_{30}. Dengan demikian, nilai tensor Ricci yang tidak sama dengan nol adalah:

$$R_{00} = -\partial_1\Gamma^1_{00} - \partial_2\Gamma^2_{00} + \Gamma^1_{00}(\Gamma^0_{10} - \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12} - \Gamma^3_{13}) + \Gamma^2_{00}(\Gamma^0_{20} - \Gamma^1_{21} - \Gamma^2_{22} - \Gamma^3_{23}) + 2\Gamma^1_{03}\Gamma^3_{10} + 2\Gamma^2_{03}\Gamma^3_{20}$$

$$R_{11} = \partial_1(\Gamma^0_{10} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) - \partial_2\Gamma^2_{11} + \Gamma^0_{10}\Gamma^0_{01} + \Gamma^0_{13}\Gamma^3_{01} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{10}\Gamma^0_{31} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} - \Gamma^1_{11}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13}) - \Gamma^2_{11}(\Gamma^0_{20} + \Gamma^2_{22} + \Gamma^3_{23})$$

$$R_{22} = \partial_2(\Gamma^0_{20} + \Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{23}) - \partial_1\Gamma^1_{22} + \Gamma^0_{20}\Gamma^0_{02} + \Gamma^0_{23}\Gamma^3_{02} + \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{20}\Gamma^0_{32} + \Gamma^3_{23}\Gamma^3_{32} - \Gamma^1_{22}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^3_{13}) - \Gamma^2_{22}(\Gamma^0_{20} + \Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{23})$$

$$R_{33} = -(\partial_1\Gamma^1_{33} + \partial_2\Gamma^2_{33}) + \Gamma^0_{31}\Gamma^1_{03} + \Gamma^0_{32}\Gamma^2_{03} + \Gamma^1_{30}\Gamma^0_{13} + \Gamma^2_{30}\Gamma^0_{23} + \Gamma^3_{31}\Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{32}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{33}(\Gamma^0_{10} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}) - \Gamma^2_{33}(\Gamma^0_{20} + \Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22})$$

$$R_{03} = R_{30} = -(\partial_1\Gamma^1_{03} + \partial_2\Gamma^2_{03}) + \Gamma^1_{00}\Gamma^0_{13} + \Gamma^2_{00}\Gamma^0_{23} + \Gamma^3_{01}\Gamma^1_{33} + \Gamma^3_{02}\Gamma^2_{33} - \Gamma^1_{03}(+\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}) - \Gamma^2_{03}(+\Gamma^1_{21} + \Gamma^2_{22}) \tag{4.13}$$

Setelah mendapatkan persamaan tensor Ricci, bisa kita dapatkan nilai skalar Ricci dengan mengkontraksi tensor Ricci dengan tensor kontravarian pada persamaan (4.7).

$$R = g^{00}R_{00} + g^{11}R_{11} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33} + 2g^{03}R_{03} \tag{4.14}$$

Sehingga, dapat disubstitusikan nilai tensor Ricci pada persamaan (4.14) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{R} = -\frac{\rho^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta) + \dfrac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}} R_{00}$$

$$+\frac{\Delta_{KN}}{\rho^2}R_{11} + \frac{1}{\rho^2}R_{22}$$

$$+\frac{\rho^2}{\sin^2\theta}\left[\frac{1}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \dfrac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}}\right]R_{33}$$

$$+\frac{2\rho^2 a}{\sin\theta}\left[\frac{\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\right]R_{03}$$

(4.15)

Persamaan 4.15 merupakan nilai skalar Ricci untuk lubang hitam Kerr-Newman pada modifikasi teori gravitasi $f(R)$. Kelengkungan skalar memberikan infomasi mengenai geometri ruang yang melengkung akibat massa yang masif, dalam kasus ini adalah lubang hitam. Adapun nilai untuk masing-masing komponen tensor Ricci dapat dilihat pada lampiran.

Nilai R atau biasanya disebut dengan kelengkungan skalar menunjukkan kelengkungan suatu ruang-waktu. Pada ruang-waktu Minkowski, nilai kelengkungan skalar akan sama dengan nol karena ruang-waktu tidak melengkung. Adapun persamaan 4.15 akan terkonraksi menjadi persamaan skalar Ricci milik lubang hitam Schwarzchild pada solusi medan Einstein biasa dengan syarat nilai $\alpha = a = Q = 0$. Parameter-parameter terebut mempengaruhi nilai simbol Christoffel, sehinga akan berakibat juga pada perubahan bentuk metrik serta komponen lainnya, termasuk bentuk skalar Ricci. Skalar Ricci pada solusi Schwarzschild mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$R=-\frac{U''}{UV}+\frac{U'}{2}\frac{V'}{UV^2}+\frac{U'^2}{2U^2V}-\frac{2}{r}\frac{U'}{UV}+\frac{2}{r}\frac{V'}{V^2}+\frac{2}{r^2}\left(1-\frac{1}{V}\right)$$

$$=-\frac{-\frac{4m}{r^3}}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1-\frac{2m}{r}\right)}+\frac{\frac{2m}{r^2}}{2}\frac{-2m}{(r-2m)^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}\right)$$

$$+\frac{\left(\frac{2m}{r^2}\right)^2}{2\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\right)}-\frac{2}{r}\left(\frac{2m}{r^2}\right)$$

$$+\frac{2}{r}\frac{-2m}{(r-2m)^2}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2}\right)+\frac{2}{r^2}\left(1-\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right)$$

$$=\frac{4m}{r^3}+\frac{-2m^2}{r(r-2m)^3}+\frac{2m^2}{r^2(r-2m)}+\frac{-4m}{(r-2m)^3}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)}\right)\times\frac{r}{r}$$

$$=\frac{4m}{r^3}+\frac{2m}{(r-2m)}\left(-\frac{m}{r(r-2m)^2}+\frac{m}{r^2}-\frac{2r}{(r-2m)^3}\right)$$

yang mana:

$$U=\left(1-\frac{2m}{r}\right);V=\frac{1}{\left(1-\frac{2m}{r}\right)};U'=\frac{2m}{r^2};U''=-\frac{4m}{r^3};dan\,V'=-\frac{2m}{(r-2m)^2}$$

4.2 Geodesik Lubang Hitam Kerr-Newman dalam $f(R)=R+\alpha R^2$

Geodesik dalam ruang-waktu Euklidean merupakan lintasan terpendek dua buah titik, dalam ruang ini tentunya lintasan berupa garis lurus. Lintasan terpendek yang ditempuh sebuah partikel dati titik asal hingga titik akhir adalah lintasan yang membutuhkan aksi prinsip terkecil yang mungkin. Untuk mencari persamaan geodesik pada kasus lubang hitam Kerr-Newman dapat menggunakan persamaan (2.161) pada bab dua.

$$\frac{d^2x^\rho}{ds^2}+\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0$$

Setelah didapatkan persamaan geodesik, langkah senjutnya adalah mencari persamaan geodesik partikel yang dideskripsikan oleh masing-masing koordinat pada lubang hitam, yaitu (t,r,θ,ϕ). Kecepatan partikel pada lubang hitam bernilai konstan, oleh karea itu nilai s dapat dinyatakan dengan waktu yang sebenarnya τ (Aulia, 2022). Sehingga persamaan sebelumnya dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2}+\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0 \tag{4.16}$$

Kurva geodesik pada simetri bola memiliki nilai konstan pada koordinat θ dengan nilai $\theta=\pi/2$. Dengan mengasumsikan bahwasanya partikel melintas pada bidang ekuator pada benda dengan bentuk bola sempurna. Sehingga, bagaimanapun gerak partikel ditinjau terhadap bidang ekuator tersebut, nilai θ akan konstan. Hal tersebut menyebabkan nilai $\cos\theta=0$ dan nilai $\sin\theta=1$. Untuk mendapatkan persamaan geodesik, perlu diketahui kecepatan untuk masing-masing koordinatnya. Pertama, mencari koordinat waktu t dengan menggunakan simbol Christoffel saat $\rho=0$. Simbol Christoffel yang tidak bernilai nol saat $\rho=0$ adalah $\Gamma^0_{01},\Gamma^0_{10},\Gamma^0_{02},\Gamma^0_{20},\Gamma^0_{13},\Gamma^0_{31},\Gamma^0_{23}$, dan Γ^0_{32}.

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2}+2\Gamma^0_{01}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}+\underbrace{2\Gamma^0_{02}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^2}{d\tau}}_{=0}+2\Gamma^0_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}+\underbrace{2\Gamma^0_{23}\frac{dx^2}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}}_{=0}=0$$

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2}=-2\left(\Gamma^0_{01}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^1}{d\tau}+\underbrace{\Gamma^0_{02}\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^2}{d\tau}}_{=0}+\Gamma^0_{13}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}+\underbrace{\Gamma^0_{23}\frac{dx^2}{d\tau}\frac{dx^3}{d\tau}}_{=0}\right)$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = -2\left(\Gamma_{01}^{0}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} + \Gamma_{13}^{0}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau}\right)$$

Persamaan di atas dapat pula ditulis sebagai:

$$\frac{1}{\dot{t}}d\dot{t} = -2\left(\Gamma_{01}^{0}dr + \frac{1}{dt}\Gamma_{13}^{0}drd\phi\right) \tag{4.17}$$

Persamaan (4.16) disubstitusikan nilai simbol Christoffelnya kemudian diintegralkan.

$$\int_{\dot{t}_0}^{\dot{t}}\frac{1}{\dot{t}}d\dot{t} =$$

$$-2\left(\int_{r_0}^{r}\frac{\left(r + \frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)r^2 - r(\Delta_{KN} - a^2)}{r^2\left((\Delta_{KN} - a^2) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN})}\right)}dr\right.$$

$$+\int_{r_0}^{r}\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{(\Xi - \Delta_{KN})\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)r^2 - r(\Xi - \Delta_{KN})}{(\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\right)dr$$

$$+\frac{1}{dt}\left(\int_{r_0}^{r}\frac{a}{r^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)r^2 + r(\Xi - \Delta_{KN})}{(\Delta_{KN} - a^2) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN})}}drd\phi\right]\right.$$

$$+\int_{r_0}^{r}\frac{a}{r^2}\left[\frac{(\Xi - \Delta_{KN})}{(\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\left(2r^3 + 2ra^2\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left. - a^2\left(r + \frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)r^2 - r(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN})\right]drd\phi\right)\right) \tag{4.18}$$

Dengan nilai $\Xi = (r^2 + a^2)$. Perhitungan untuk masing-masing integral pada ruas kanan menggunakan integral funfsi transenden, begitu pula untuk ruas kiri.

perhitungan integral untuk komponen-komponen ruas kanan sebagai berikut:

Untuk suku pertama:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right) r^2 - r(\Delta_{KN} - a^2)}{r^2 \left((\Delta_{KN} - a^2) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2 \Delta_{KN})}\right)} dr$$

Dengan permisalan:

$$a = \left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right) r^2 - r(\Delta_{KN} - a^2)$$

$$b = r^2 \left((\Delta_{KN} - a^2) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2 \Delta_{KN})}\right) = u$$

$$du = b' dr$$

$$\frac{du}{b'} = dr$$

$$\int_{r_0}^{r} a u^{-1} \frac{du}{b'} = \frac{a}{b'} \int_{r_0}^{r} \frac{du}{u} = \frac{a}{b'} \ln \frac{u_r}{u_{r_0}} = \ln \frac{b_r}{b_{r_0}} \frac{a}{b'} \tag{4.19}$$

dengan nilai b_{r_0} yang mempunyai bentuk sama dengan b, hanya saja nilai r berubah menjadi r_0 dalam setiap komponennya. Kemudian nilai b' yang merupakan differensial komponen b terhadap r. Sehingga:

$$b_{r_0} = r_0^2 \left(\left(\Delta_{KN_0} - a^2\right) + \frac{a^2\left(\Xi_0 - \Delta_{KN_0}\right)^2}{\left(\Xi_0^2 - a^2 \Delta_{KN_0}\right)}\right)$$

$$\Delta_{KN_0} = r_0^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r_0^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2 m r_0$$

$$\Xi_0 = r_0^2 + a^2$$

$$b' = \partial_r \left(r^2 \left((\Delta_{KN} - a^2) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2 \Delta_{KN})}\right)\right)$$

Untuk suku kedua:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)r^2-r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2)(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right)dr$$

Misal:

$$c=a^2\left((\Xi-\Delta_{KN})\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)r^2-r(\Xi-\Delta_{KN})\right)$$

$$d=r^2\big((\Delta_{KN}-a^2)(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\big)=u$$

$$\frac{du}{d'}=dr$$

$$\int_{r_0}^{r} cu^{-1}\frac{du}{d'}=\frac{c}{d'}\int_{r_0}^{r}\frac{du}{u}=\ln\frac{d_r}{d_{r_0}}\frac{c}{d'} \tag{4.20}$$

dengan:

$$d_{r_0}=r_0^2\left(\left(\Delta_{KN_0}-a^2\right)\left(\Xi_0^2-a^2\Delta_{KN_0}\right)+a^2\left(\Xi_0-\Delta_{KN_0}\right)^2\right)=u$$

$$\Delta_{KN_0}=r_0^2+a^2+Q^2+\frac{R_0 r_0^4}{6}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2mr_0$$

$$\Xi_0=r_0^2+a^2$$

$$d'=\partial_r\left(r^2\big((\Delta_{KN}-a^2)(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\big)\right)$$

Untuk suku ketiga:

$$\int_{r_0}^{r}\frac{a}{r^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)r^2+r\big((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\big)}{(\Delta_{KN}-a^2)+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})}}\right]dr\,d\phi$$

Misal:

$$e = a\left(\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)r^2 + r\big((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\big)\right)$$

$$f = r^2\left((\Delta_{KN} - a^2) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN})}\right) = u$$

$$\frac{du}{f'} = dr$$

$$\int_{r_0}^{r} eu^{-1} dr d\phi = \int_{r_0}^{r} e\frac{du}{uf'} d\phi = \frac{e}{f'}\ln\frac{f_r}{f_{r_0}}\dot{\phi} = \ln\frac{f_r}{f_{r_0}}\frac{e}{f'}\dot{\phi} \qquad (4.21)$$

Dengan:

$$f_{r_0} = r_0^2\left(\left(\Delta_{KN_0} - a^2\right) + \frac{a^2\left(\Xi_0 - \Delta_{KN_0}\right)^2}{\left(\Xi_0^2 - a^2\Delta_{KN_0}\right)}\right)$$

$$\Delta_{KN_0} = r_0^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r_0^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2mr_0$$

$$\Xi_0 = r_0^2 + a^2$$

$$f' = \partial_r\left(r^2\left((\Delta_{KN} - a^2) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN})}\right)\right)$$

Untuk suku keempat:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{a}{r^2}\Bigg[\frac{(\Xi - \Delta_{KN})}{(\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\Bigg(2r^3 + 2ra^2 - a^2\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\Bigg)r^2 - r(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN})\Bigg] dr d\phi$$

Misal:

$$g = a(\Xi - \Delta_{KN})\left(\left(2r^3 + 2ra^2 - a^2\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)r^2 - r(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN})\right)$$

$$h = u = r^2\big((\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2\big)$$

$$\frac{du}{h'} = dr$$

$$\int_{r_0}^{r} g\frac{du}{uh'}\dot{\phi} = \frac{g}{h'}\int_{r_0}^{r}\frac{du}{u}\dot{\phi} = \ln\frac{h_r}{h_{r_0}}\frac{g}{h'}\dot{\phi} \tag{4.22}$$

dengan:

$$h_{r_0} = r_0^2\left(\left(\Delta_{KN_0} - a^2\right)\left(\Xi_0^2 - a^2\Delta_{KN_0}\right) + a^2\left(\Xi_0 - \Delta_{KN_0}\right)^2\right) = u$$

$$\Delta_{KN_0} = r_0^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r_0^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2mr_0$$

$$\Xi_0 = r_0^2 + a^2$$

$$h' = \partial_r\left(r^2\big((\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2\big)\right)$$

Hasil dari persamaan (4.19) hingga persamaan (4.22) kemudian disubstitusikan pada persamaan (4.18). sehingga hasilnya adalah:

$$\ln\frac{\dot{t}}{\dot{t}_0} = -2\left(\ln\frac{b_r}{b_{r_0}}\frac{a}{b'} + \ln\frac{d_r}{d_{r_0}}\frac{c}{d'} + \frac{1}{\dot{t}}\left(\ln\frac{f_r}{f_{r_0}}\frac{e}{f'}\dot{\phi} + \ln\frac{h_r}{h_{r_0}}\frac{g}{h'}\dot{\phi}\right)\right)$$

$$\frac{\dot{t}}{\dot{t}_0} = -2\left(\frac{b_r}{b_{r_0}}\frac{a}{b'} + \frac{d_r}{d_{r_0}}\frac{c}{d'} + \frac{1}{\dot{t}}\left(\frac{f_r}{f_{r_0}}\frac{e}{f'}\dot{\phi} + \frac{h_r}{h_{r_0}}\frac{g}{h'}\dot{\phi}\right)\right)$$

$$\dot{t} = -2\dot{t}_0\left(\frac{b_r}{b_{r_0}}\frac{a}{b'} + \frac{d_r}{d_{r_0}}\frac{c}{d'} + \frac{1}{\dot{t}}\left(\frac{f_r}{f_{r_0}}\frac{e}{f'}\dot{\phi} + \frac{h_r}{h_{r_0}}\frac{g}{h'}\dot{\phi}\right)\right) \tag{4.23}$$

Beberapa komponen penyebut memiliki bentuk yang sama, seperti $b = f$ dan $d = h$. Sehingga persamaan untuk $\dot{t}$ dapat disederhanakan menjadi:

$$\dot{t} = -2\dot{t}_0 \left(\frac{b_r}{b_{r_0} b'} \left(a + e \frac{d\phi}{dt} \right) + \frac{d_r}{d_{r_0} d'} \left(c + g \frac{d\phi}{dt} \right) \right) \tag{4.24}$$

dengan:

$$a = \left(r + \frac{R_0 r^3}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m \right) r^2 - r(\Delta_{KN} - a^2)$$

$$b_r = r^2 \left((\Delta_{KN} - a^2) + \frac{a^2 (\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2 \Delta_{KN})} \right) = u$$

$$b_{r_0} = r_0^2 \left(\left(\Delta_{KN_0} - a^2 \right) + \frac{a^2 \left(\Xi_0 - \Delta_{KN_0} \right)^2}{\left({\Xi_0}^2 - a^2 \Delta_{KN_0} \right)} \right)$$

dengan:

$$\Delta_{KN_0} = r_0^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r_0^4}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha\, R_0^2) - 2 m r_0$$

$$\Xi_0 = r_0^2 + a^2$$

$$b' = \partial_r \left(r^2 \left((\Delta_{KN} - a^2) + \frac{a^2 (\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2 \Delta_{KN})} \right) \right)$$

$$c = a^2 \left((\Xi - \Delta_{KN}) \left(\frac{R_0 r^3}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m \right) r^2 - r(\Xi - \Delta_{KN}) \right)$$

$$d_r = r^2 \big((\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2 \Delta_{KN}) + a^2 (\Xi - \Delta_{KN})^2 \big) = u$$

$$d_{r_0} = r_0^2 \left(\left(\Delta_{KN_0} - a^2 \right) \left(\Xi_0^2 - a^2 \Delta_{KN_0} \right) + a^2 \left(\Xi_0 - \Delta_{KN_0} \right)^2 \right)$$

$$d' = \partial_r \left(r^2 \big((\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2 \Delta_{KN}) + a^2 (\Xi - \Delta_{KN})^2 \big) \right)$$

$$e = a \left(\left(\frac{R_0 r^3}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m \right) r^2 + r \big((r^2 + a^2) - \Delta_{KN} \big) \right)$$

$$g = a(\Xi - \Delta_{KN})\left(\left(2r^3 + 2ra^2 - a^2\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)r^2 - r(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN})\right)$$

Persamaan (4.24) merupakan salah satu solusi untuk persamaan geodesik, lebih tepatnya untuk koordinat waktu. Persamaan tersebut dapat menjadi jembatan untuk medapatkan solusi persamaan geodesik pada arah radial.

Solusi persamaan geodesik selanjutnya untuk koordinat θ atau saat $\rho = 2$ (pada simbol Christoffel). Pada koordinat ini, nilai simbiol Christoffel yang tidak sama dengan nol adalah $\Gamma^2_{00}, \Gamma^2_{03}, \Gamma^2_{30}, \Gamma^2_{11}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^2_{21}, \Gamma^2_{22}$, dan Γ^2_{33}. Sama seperti solusi sebelumnya, yang mana nilai $\theta = \pi/2$ dan selanjutnya akan mempengaruhi nilai beberpa komponen simbol Christoffel yang ada pada persamaan geodesiknya. Persamaan geodesik pada persamaan (4.16) kembali digunakan untuk memperoleh solusi pada kordinat θ.

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2} = -\Gamma^\rho_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\left(\Gamma^2_{00}\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} + 2\Gamma^2_{03}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} + \Gamma^2_{11}\frac{dr}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} + 2\Gamma^2_{12}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} + \Gamma^2_{22}\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} + \Gamma^2_{33}\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau}\right)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\left(-\frac{a^2 \sin\theta \cos\theta}{\rho^6}[\rho^2 - (\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)]\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau}\right.$$
$$+ 2\frac{a\cos\theta\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)(r^2 + a^2 + a^2 \sin^2\theta)}{2\rho^6}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau}$$
$$+ \frac{a^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2\Delta_{KN}}\frac{dr}{d\tau}\frac{dr}{d\tau} + 2\frac{r}{\rho^2}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} - \frac{a^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2}\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau}$$
$$- \frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^6}[((r^2 + a^2)^2 - 2a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN})\rho^2$$
$$\left. + a^2 \sin^2\theta\, ((r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN})]\frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau}\right)$$

(4.25)

Oleh karena θ bernilai konstan, maka suku pada ruas kira akan bernilai nol, pun nilai θ akan mempengaruhi nilai suku yang mengandung unsur trigonometri pada persamaan, sehingga persamaa di atas dapat ditulis dengan:

$$0 = 2\frac{r}{r^2}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{2}{r}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} = 0 \qquad (4.26)$$

Persamaan (4.26) merupakan persamaan geodesik untuk koordinat θ. Berdasarkan persamaan tersebut nilai $\dot{\theta} = 0$, sehingga pada koordinat θ persamaan geodesiknya bernilai nol.

Proses selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan geodesik untuk koordinat ϕ atau saat $\rho = 3$. Pada nilai tersebut, simbol Christoffel yang tidak bernilai nol adalah $\Gamma^3_{01}, \Gamma^3_{10}, \Gamma^3_{02}, \Gamma^3_{20}, \Gamma^3_{13}, \Gamma^3_{31}, \Gamma^3_{23}$, dan Γ^3_{32}. Perlu diingat juga bahwasanya nilai $\theta = \pi/2$ yang akan berpengaruh terhadap suku-suku yang mempunyai komponen trigonometri di dalamnya. Sehingga, dengan tetap mengacu pada persamaan (4.16) sebagai persamaan geodesik awal, persamaan geodesik pada koordinat ϕ menjadi:

$$\frac{d^2x^\rho}{d\tau^2}+\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2}=-2\left(\Gamma^3_{01}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}+\underbrace{\Gamma^3_{02}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\theta}{d\tau}}_{=0}+\Gamma^3_{13}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau}+\underbrace{\Gamma^3_{23}\frac{d\theta}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau}}_{=0}\right)$$

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2}=-2\left(\Gamma^3_{01}\frac{dt}{d\tau}\frac{dr}{d\tau}+\Gamma^3_{13}\frac{dr}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau}\right)$$

$$\frac{1}{\dot{\phi}}d\dot{\phi}=-2\left(\frac{1}{d\phi}\Gamma^3_{01}drdt+\Gamma^3_{13}dr\right)$$

Persamaan di atas kemudian diintegralkan untuk mendapatkan solusi $\dot{\phi}$ atau geodesi pada koordinat tersebut:

$$\int_{\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}}\frac{1}{\dot{\phi}}d\dot{\phi}=-2\left(\int_{r_0}^{r}\frac{1}{d\phi}\Gamma^3_{01}drdt+\Gamma^3_{13}dr\right) \tag{4.27}$$

kemudian disubstitusikan nilai simbol Christoffel mengacu pada hasil yang sudah didapatkan pada subbab 4.1. Dengan demikian, persamaan (4.27) menjadi:

$$\int_{\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}}\frac{1}{\dot{\phi}}d\dot{\phi}=$$

$$-2\frac{1}{d\phi}\int_{r_0}^{r} -\frac{a}{r^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2)(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\Bigg(\Bigg(r$$

$$+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\Bigg)r^2-r(\Delta_{KN}-a^2)\Bigg)drdt$$

$$+2\frac{1}{d\phi}\int_{r_0}^{r}\frac{a}{r^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)r^2-r\big((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\big)}{(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2)}}\right]drdt$$

$$+2\int_{r_0}^{r}\frac{a^2}{r^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\left(\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)r^2-r(\Xi-\Delta_{KN})\right)}{(\Delta_{KN}-a^2)(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]dr$$

$$-2\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r^2}\left[\frac{\left(2r\Xi-a^2\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)r^2-r(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2)}}\right]dr$$

(4.28)

Perhitungan untuk masing-masing integral pada ruas kanan sebagai berikut:

Untuk suku pertama:

$$\int_{r_0}^{r} -\frac{a}{r^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2)(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\Bigg(\Bigg(r$$

$$+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\Bigg)r^2-r(\Delta_{KN}-a^2)\Bigg)drdt$$

Misal:

$$i=a\left((\Xi-\Delta_{KN})\left(\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)r^2-r(\Delta_{KN}-a^2)\right)\right)$$

$$j=r^2\big((\Delta_{KN}-a^2)(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\big)=u$$

$$\frac{du}{j'} = dr$$

$$-\int_{r_0}^{r} i\frac{du}{j'u}dt = -\frac{1}{j'}\ln\frac{u_r}{u_{r_0}}dt = -\frac{1}{j'}\ln\frac{j_r}{j_{r_0}}dt = -\ln\frac{j_r}{j_{r_0}}\frac{1}{j'}dt \tag{4.29}$$

Sama halnya dengan perhitungan pada koordinat t, yang mana nilai r diganti menjadi r_0 pada suku dengan indeks bawah r_0. Sehingga:

$$j_{r_0} = r_0^2\left(\left(\Delta_{KN_0} - a^2\right)\left(\Xi_0^2 - a^2\Delta_{KN_0}\right) + a^2\left(\Xi_0 - \Delta_{KN_0}\right)^2\right) = u$$

$$\Delta_{KN_0} = r_0^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r_0^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2mr_0$$

$$\Xi_0 = r_0^2 + a^2$$

$$j' = \partial_r\left(r^2\left((\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2\right)\right)$$

Untuk suku kedua:

$$\int_{r_0}^{r} \frac{a}{r^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)r^2 - r\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)}{(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2)}}\right]drdt$$

Misal:

$$k = a\left(\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)r^2 - r\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)\right)$$

$$l = r^2\left((\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2)}\right) = u$$

$$\frac{du}{l'} = dr$$

$$\int_{r_0}^{r} k\frac{du}{ul'}dt = \frac{k}{l'}\ln\frac{u_r}{u_{r_0}}dt = \ln\frac{l_r}{l_{r_0}}\frac{k}{l'}dt \tag{4.30}$$

Untuk suku ketiga:

$$-\int_{r_0}^{r}\frac{a^2}{r^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\left(\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)r^2-r(\Xi-\Delta_{KN})\right)}{(\Delta_{KN}-a^2)(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]dr$$

Misal:

$$m=a^2(\Xi-\Delta_{KN})\left(\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)r^2-r(\Xi-\Delta_{KN})\right)$$

$$n=r^2\big((\Delta_{KN}-a^2)(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\big)=u=j$$

$$\frac{du}{n'}=dr$$

$$-\int_{r_0}^{r}m\frac{du}{un'}=-\frac{m}{n'}\ln\frac{u_r}{u_{r_0}}=-\ln\frac{n_r}{n_{r_0}}\frac{m}{n'} \tag{4.31}$$

Untuk suku keempat:

$$\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2)}}\right]\Bigg[\Bigg(2r(r^2+a^2)$$
$$-a^2\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\Bigg)r^2$$
$$-r((r^2+a^2)^2-a^2\Delta_{KN})\Bigg]dr$$

Misal:

$$o=\left(2r(r^2+a^2)-a^2\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)r^2$$
$$-r((r^2+a^2)^2-a^2\Delta_{KN})$$

$$p = r^2\left((\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2)}\right) = u = l = b$$

$$\frac{du}{p'} = dr$$

$$\int_{t_0}^{t} o\frac{du}{up'} = \frac{o}{p'}\ln\frac{u_r}{u_{r_0}} = \ln\frac{p_r}{p_{r_0}}\frac{o}{p'} \tag{4.32}$$

Kemudian persamaan (4.29) hingga persamaan (4.32) disubstitusikan pada persamaan (4.28). sehingga akan didapat:

$$\ln\frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} = -2\left(-\frac{1}{d\phi}\ln\frac{j_r}{j_{r_0}}\frac{i}{j'}dt - \frac{1}{d\phi}\ln\frac{l_r}{l_{r_0}}\frac{k}{l'}dt - \ln\frac{n_r}{n_{r_0}}\frac{m}{n'} + \ln\frac{p_r}{p_{r_0}}\frac{o}{p'}\right)$$

Beberapa penyebut mempunyai nilai yang sama dengan koponen penyebut pada solusi koordinat t. Beberapa yang sama adalah komponen $n = j$ dan $p = l$. Sehingga persamaan terakhir dapat juga ditulis dengan:

$$\ln\frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} = -2\left(-\frac{1}{d\phi}\ln\frac{j_r}{j_{r_0}}\frac{i}{j'}dt - \frac{1}{d\phi}\ln\frac{l_r}{l_{r_0}}\frac{k}{l'}dt - \ln\frac{j_r}{j_{r_0}}\frac{m}{j'} + \ln\frac{l_r}{l_{r_0}}\frac{o}{l'}\right)$$

$$\frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} = 2\left(\frac{1}{d\phi}\frac{j_r}{j_{r_0}}\frac{i}{j'}dt + \frac{1}{d\phi}\frac{l_r}{l_{r_0}}\frac{k}{l'}dt + \frac{j_r}{j_{r_0}}\frac{m}{j'} - \frac{l_r}{l_{r_0}}\frac{o}{l'}\right)$$

$$\frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} = 2\left(\frac{j_r}{j_{r_0}j'}\left(i\frac{dt}{d\phi} + m\right) + \frac{l_r}{l_{r_0}l'}\left(k\frac{dt}{d\phi} - o\right)\right)$$

$$\dot{\phi} = 2\dot{\phi}_0\left(\frac{j_r}{j_{r_0}j'}\left(i\frac{dt}{d\phi} + m\right) + \frac{l_r}{l_{r_0}l'}\left(k\frac{dt}{d\phi} - o\right)\right) \tag{4.33}$$

Persamaan (4.33) merupakan solusi geodesik partikel pada koordinat ϕ, yang mendeskripsikan kecepatan partikel yang bergerak pada koordinat tersebut. Nilai untuk masing-masing komponen yang terkandung di dalam suku persamaan tersebut sebgai berikut:

$$i = a\left(\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)\left(\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)r^2\right.\right.$$

$$\left.\left.- r(\Delta_{KN} - a^2)\right)\right)$$

$$k = a\left(\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)r^2 - r\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)\right)$$

$$m = a^2\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)\left(\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)r^2\right.$$

$$\left.- r\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)\right)$$

$$o = \left(2r(r^2 + a^2) - a^2\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)r^2$$

$$- r((r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta_{KN})$$

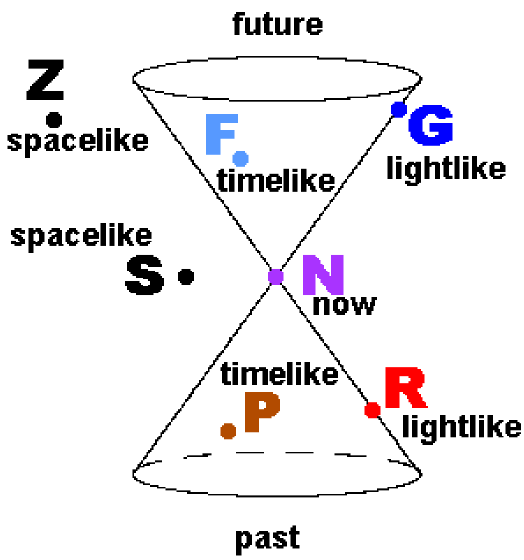
$$j = n = r^2\left((\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2\right)$$

$$j' = n' = \partial_r\left(r^2\left((\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2\right)\right)$$

$$l = p = r^2\left((\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2)}\right)$$

$$l' = p' = \partial_r\left(r^2\left((\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2)}\right)\right)$$

Solusi terakhir untuk persamaan geodesik adalah pada koordinat r. Untuk mendapatkan solusi ini, dapat memanfaatkan persamaan metrik lubang hitam pada Bab tiga atau persamaan (3.74), dengan nilai $ds^2 = 0$ mempertimbangkan bahwasanya partikel yang ditinjau adalah foton dengan kecepatan c. Oleh karenanya, digunakan solusi untuk null-geodesik. Null geodesik atau *like-light* merupakan lintasan partikel foton pada kerucut cahaya, yang menjadi pembatas antara *time-like* dan *space-like.*



Gambar 4.2 Kerucut cahaya
Sumber: (Salgado, 1996)

Persamaan (3.74) pada bab tiga atau persamaan metrik untuk lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$ sebagai berikut:

$$0 = -\left(\frac{\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{2a\sin\theta}{\rho^2}\big((r^2+a^2) - \Delta_{KN}\big)d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta_{KN}}dr^2$$

$$+ \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)d\phi^2$$

$$\frac{\rho^2}{\Delta_{KN}}dr^2 = \left(\frac{\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{2a\sin\theta}{\rho^2}\big((r^2+a^2) - \Delta_{KN}\big)d\phi dt$$

$$- \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)d\phi^2$$

$$r^{\cdot 2} = \frac{\Delta_{KN}}{\rho^2}\left(\left(\frac{\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right)\dot{t}^2 + \frac{2a\sin\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2) - \Delta_{KN}\right)\dot{\phi}\dot{t}\right.$$

$$\left. - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\dot{\phi}^2\right)$$

$$\dot{r} = SQRT\left(\frac{\Delta_{KN}}{\rho^2}\left(\left(\frac{\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right)\dot{t}^2 + \frac{2a\sin\theta}{\rho^2}\left((r^2+a^2) - \Delta_{KN}\right)\dot{\phi}\dot{t}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\dot{\phi}^2\right)\right)$$

(4.34)

Dengan:

$$\dot{t} = -2\dot{t}_0\left(\frac{b_r}{b_{r_0}b'}\left(a + e\frac{d\phi}{dt}\right) + \frac{d_r}{d_{r_0}d'}\left(c + g\frac{d\phi}{dt}\right)\right)$$

$$\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} = 0 \qquad \text{maka, } \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} = 2\dot{\phi}_0\left(\frac{j_r}{j_{r_0}j'}\left(i\frac{dt}{d\phi} + m\right) + \frac{l_r}{l_{r_0}l'}\left(k\frac{dt}{d\phi} - o\right)\right)$$

Persamaan (4.34) adalah solusi persamaan geodesik berupa kecepatan partikel dalam koordinat radial.

Dengan demikian, empat solusi berupa kecepatan partikel pada masing-masing koordinat sudah didapatkan, dengan satu koordinat waktu dan tiga koordinat ruang. Terdapat satu solusi yang bernilai nol, yaitu pada koordinat θ (*theta*). Sebagaimana yang sudah disinggung sebelumnya, hal tersebut dapat tarjadi karena gerak partikel diasumsikan berada pada bidang equatornya. Gerak partikel pada bidang ekuator pada massa berbentuk bola akan konstan bagaimanapun partikel tersebut dirotasikan terhadap bidangnya. Nilai yang konstan dari *theta* akan menyebabkan turunannya bernilai nol. Sementara pada koordinat lain, solusi geodesik tetap mempunyai nilai sebagaimana sudah tercantum pada hasil di atas.

Selain itu, mengingat partikel yang ditinjau dalam penelitian ini adalah foton, maka tidak dapat diperoleh solusi berupa percepatan, karena kecepatan dari foton itu sendiri adalah konstan yang apabila dideferensialkan akan bernilai nol.

4.3 Kelengkungan Ruang-Waktu dalam Al-Quran

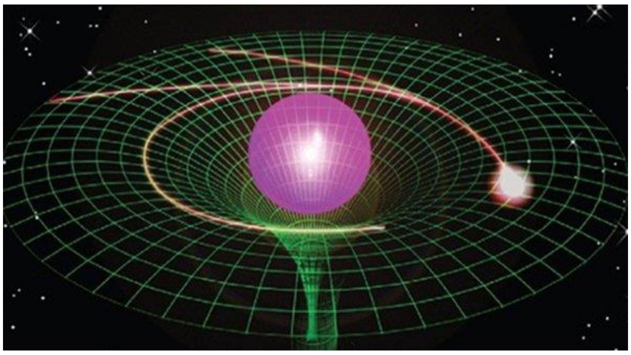
Pembahasan mengenai kelengkungan ruang-waktu di dalam Al-Quran tentunya tidak disebutkan secara gamblang. Oleh karena itu, perlu adanya pendekan dengan memecah parameter pada fenomena yang terjadi. Penelitian ini membahas tentang lubang hitam Kerr-Newman (lubang hitam yang berotasi dan bermuatan), adapun parameternya yaitu massa, rotasi, serta muatan (Zajaiek & Tursunov, 2019).

Parameter yang berhubungan dengan kelengkungan ruang-waktu adalah massa. Lubang hitam yang massanya terkonsentrasi dalam radius sangat kecil membuat ruang-waktu melengkung hebat, membuat medan gravitasi yang ditimbukan sangat kuat hingga cahaya sekalipun tidak dapat lolos jika berada dalam daerah yang disebut cakrawala peristiwa. Kemudian meninjau dari persamaan dasar medan gravitasi yaitu:

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Berdasarkan persamaan tersebut, kuat medan gravitasi berbanding lurus dengan massa sebuah objek. Artinya semakin besar massa objek, semakin lengkung geometri ruang-waktunya, lalu medan gravitasinya juga semakin kuat.

Sebagai gambaran, dapat diperhatikan ilustrasi berikut:



Gambar 4.3 Ilustrasi manifold yang melengkung
Sumber: (Cowen, 2013)

Gambar 4.3 memperlihatkan sebuah objek yang bermassa lebih besar dan cenderung membengkokkan geometri ruang-waktu lebih dalam. Sehingga, objek dengan massa yang lebih ringan akan terpengaruh oleh medan gravitasi objek tersebut dan pada radius tertentu akan bergerak melingkar dengan objek yang lebih berat sebagai pusatnya.

Fenomena tersebut, juga terjadi dalam lingkup galaksi kita, Bima Sakti. Pengamatan astrofisika memberikan informasi bahwa lubang hitam kemungkinan besar ada pada sebagian pusat galaksi, termasuk Bima Sakti. Hal ini sudah dikonfirmasi melalui observasi orbit bintang-S. Lubang hitam ini bernama Sagittarius A* *(Sagittarius A-star)* dengan massa $4.3 \times 10^6\ M_{\odot}$, dengan jarak pada sistem surya sejauh 8 kpc (Hu et al., 2023). Keberadaan lubang hitam di pusat galaksi menjadi salah satu penyebab objek-objek luar angkasa terkonsentrasi pada pusat galaksi. Hal tersebut yang membuat massa pusat galaksi lebih besar, sehingga menimbulkan pengaruh medan gravitasi yang lebih besar pula. Einstein dalam teori relativitas umumnya menjelaskan hal yang pada intinya, gravitasi bukanlah sebuah gaya, melainkan sebuah medan yang timbul dari melengkungkannya ruang-waktu akibat adanya suatu benda bermassa masif (Kaku, 2005). Timbulnya medan gravitasi inilah yang membuat bintang-bintang di galaksi Bima Sakti bergerak mengelilingi pusat galaksi, pun dengan Sistem Surya kita.

Hasil penelitian dan observasi di atas selaras dengan firman Allah SWT dalam surat Yaasin ayat 38 yang berbunyi:

وَالشَّمْسُ تَجْرِيْ لِمُسْتَقَرٍّ لَّهَا ۗ ذٰلِكَ تَقْدِيْرُالْعَزِيْزِالْعَلِيْمِ(٣٨)

Artinya: "Dan matahari berjalan di tempat peredarannya. Demikialah ketetapan (Allah) Yang Maha Perkasa, Maha Mengetahui." (QS. Yaasin 36:38).

Lafadz تَجْرِيْ berasal dari *fi'il* جَرَى–يَجْرِي yang mempunyai arti berlari atau berjalan dengan cepat. Ayat tersebut dapat diartikan bahwa gerak cepat (yang dilakukan matahari) sedang berlangsung dan bekelanjutan. Alasannaya, karena *fi'il mudhori'* merupakan kata untuk masa sekarang dan masa yang akan datang. Sejalan dengan ayat Al-Quran yang telah dipaparkan, penelitian menunjukkan bahwasanya matahati bergerak dengan kecepatan kurang lebih 220 km/s dengan orbit melingkar terhadap pusat galaksi.

Menyinggung tentang orbit, pada ayat tersebut Allah menyebut لِمُسْتَقَرّ yang berasal dari *fi'il* اسْتَقَرَّ - يَسْتَقِرُّ yang mempunyai makna menetap. Kemudian pada ayat tersebut adalah bentuk *isim makan* dari *lafadz* اسْتَقَرَّ yaitu مُسْتَقَرٌّ, sehingga bermakna tempat menetap. Ayat tersebut dapat dimaknai bahwa matahari mempunyai orbit geraknya sendiri, mengelilingi sesuatu yang lebih masif dari dirinya, dan dalam konteks ini adalah inti galaksi yang sudah disebutkan sebelumnya pada penelitian milik (Hu et al., 2023). Gerak orbit matahari, bersta bintang lain di piringan galaksi tentu tak lepas karena pengeruh objek masif yang terkonsentras pada pusat galaksi yang membuat ruang-waktu melengkung dan berakibat pada timbulnya medan gravitasi, sehingga mempengaruhi objek lain di pringan galaksi.

Kestabilan orbit matahari juga dipengaruhi oleh gerak rotasi matahari yang kemudian menimbulkan gaya sentrifugal agar matahari tidak tertarik pada pusat galaksi. Faktor lainnya adalah sebaran objek pada piringan galaksi yang saling mempengaruhi satu dengann yang lainnya, sehingga saling membentuk kestabilan.

Akan tetapi, kestabilan tersebut tidak dapat bertahan selamanya. Matahari cenderung mempertahankan tempat ia mengorbit karena ia mempunyai gerak rotasi yang sudah ada sejak awal pembentukannya sebagai sebuah bintang, oleh karena itu matahari juga mempunyai gaya sentrifugal agar tidak tertarik masuk ke pusat galaksi. Hukum inersia sebuah benda akan terus berlaku selama taidak ada gaya lain yang mengganggunya, begitu pun matahari yang akan terus berotasi hingga terdapat gaya yang menggagunya. Secara hakikat, makhluk adalah hal yang fana. Ketidakstabilan antar benda langit bisa saja terjadi pada hari kiamat. Seperti firman Allah dalam surah Al-Haqqoh ayat 16 yang berbunyi:

وَانْشَقَّتِ السَّمَآءُ فَهِيَ يَوْمَئِذٍ وَّاهِيَةٌ ۙ(١٦)

Artinya:"dan terbelahlah langit, karena pada hari itu langit menjadi rapuh." (QS. Al-Haqqoh 69:16).

Ayat pada surat tersebut memaparkan kondisi langit saat terjadi kiamat. Saat itu, sifat langit menjadi rapuh. apabila dilihat dari perspektif fisika, melemahnya langit dapat diartikan melemahnya hukum-hukum fisika yang berlaku. Atas kehendak Allah, melemahnya gravitasi yang berlaku antar benda langit dapat menyebabkan ketidakstabilan sehingga akan bertabrakan satu dengan yang lainnya (Shihab, 2005). Oleh karena itu, berkaitan dengan kata لِمُسْتَقَرٍ (tempat menetap atau orbit) yang pada akhirnya tempat menetap tersebut akan melenceng atas kehendak Allah pada hari kiamat.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan penelitian yang telah dilakukan adalah:

1. Metrik lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$ berbentuk sebagai berikut:

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{2a\sin\theta}{\rho^2}\big((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\big)d\phi dt$$

$$+ \frac{\rho^2}{\Delta_{KN}}dr^2 + \rho^2 d\theta^2$$

$$+ \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2 + a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})d\phi^2$$

dengan

$$\Delta_{KN} = r^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2mr$$

dan

$$Q^2 = \frac{\tilde{Q}^2}{\big(1 + f'(R_0)\big)}$$

Komponen $(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$ merupakan komponen yang muncul akibat modifikasi teori $f(R)$ dengan fungsi khusus Starobinsky $f(R) = R + \alpha R^2$, yang mana apabila α pada komponen tersebut bernilai nol maka persamaan akan kembali pada metrik Kerr-Newman biasa tanpa modifikasi. Kemudian, apabila $Q = \alpha = a = 0$ metrik lubang hitam Kerr-

Newman dalam teori $f(R)$ akan terkontraksi menjadi solusi Schwarzschild.

2. Skalar Ricci menyatakan tentang kelengkungan suatu ruang-waktu. Nilai skalar Ricci pada ruang datar sama dengan nol, karena pergeseran paralel vektor pada ruang datar tidak menyebabkan perubahan pada arah vektornya. Sedangkan pada ruang lengkung atau disebut juga geometri Remannian, nilai skalar Ricci tidak sama dengan nol. Seperti halnya nilai skalar Ricci pada lubang hitam Kerr-Newman dalam teori $f(R)$ yang dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$\boldsymbol{R} =$$

$$-\frac{\rho^2}{(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta) + \frac{a^2 \sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\,\Delta_{KN})}} R_{00} + \frac{\Delta_{KN}}{\rho^2} R_{11} + \frac{1}{\rho^2} R_{22}$$

$$+\frac{\rho^2}{\sin^2\theta}\left[\frac{1}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}}\right] R_{33}$$

$$+\frac{2\rho^2 a}{\sin\theta}\left[\frac{\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\right] R_{03}$$

Apabila parameter $Q = \alpha = a = 0$, nilai skalar Ricci tersebut akan terkontraksi menjadi nilai skalar Ricci Schwarzschild seperti yang sudah disebutkan dalam subbab 4.1.

3. Geodesik merupakan lintasan terpendek partikel untuk melalui dua buah titik. Persamaan geodesik dideskripsikan dalam bentuk persamaan keceparan pada masing-masing koordinatnya, yaitu:

$$\dot{t} = -2\dot{t}_0\left(\frac{b_r}{b_{r_0} b'}\left(a + e\frac{d\phi}{dt}\right) + \frac{d_r}{d_{r_0} d'}\left(c + g\frac{d\phi}{dt}\right)\right)$$

$$\dot{r} = SQRT\left(\frac{\Delta_{KN}}{\rho^2}\left(\left(\frac{\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta}{\rho^2}\right)\dot{t}^2 + \frac{2a\sin\theta}{\rho^2}\left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)\dot{\phi}\dot{t} - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}((r^2 + a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\dot{\phi}^2\right)\right)$$

$$\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} = 0, \text{dengan demikian } \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} = 2\dot{\phi}_0\left(\frac{j_r}{j_{r_0}j'}\left(i\frac{dt}{d\phi} + m\right) + \frac{l_r}{l_{r_0}l'}\left(k\frac{dt}{d\phi} - o\right)\right)$$

Solusi tersebut berhubungan dengan simbol Christoffel, yang mana simbol Christoffel sendiri berhubungan dengan kelengkungan ruang-waktu. Geometri ruang-waktu berkaitan dengan medan gravitasi yang secara tidak langsung geodesik berkaitan dengan medan gravitasi. Gerak partikel yang dideskripsikan dengan persamaan geodesik merupakan efek dari medan gravitasi yang ditimbulkan objek masif.

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya adalah lebih teiliti dalam melakukan perhitungan terhadap beberapa persamaan yang berkaitan dengan solusi lubang hitam Kerr-Newman, mengingat perhitungan yang tergolong rumit. Selain itu, diharapkan untuk penelitian selanjutnya dapat mencari lubang hitam Kerr-Newman pada teori $f(R)$ dalam koordinat elips, menvariasikan fungsi yang dikaji, serta mencari komponen lain mengenai lubang hitam Kerr-Newman, seperti singularitas dan termodinamika.

DAFTAR PUSTAKA

Anugraha, R. (2011). *Teori relativitas dan Kosmologi*. Yogyakarta: Universitas Gajahmada Press.

Arrosyidi, A. F. (2016). *Solusi Simetri Aksial dalam Teori Gravitasi f(R)*. Surabaya: Departemen Fisika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Aulia, K. (2022). *Studi Lubang Hitam Schwarzchild dalam Teori Gravitasi f(R) Menggunakan Metode Gangguan*. UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Bernard, C. (2017). Metrik Reissner-Nordstrom dalam Teori Gravitasi Einstein. *Jurnal Fisika Dan Aplikasinya*, *13*(1), 1. https://doi.org/10.12962/j24604682.v13i1.2128

Cembranos, J. A. R., & Romero, P. J. (2018). *Kerr-Newman Black holes in f(R) Theories*. arxiv:1109.4519v2

Chou, T. L. (2008). *Gravity , Black Holes , and the Very Early Universe*. New York: Springer New York.

Chou, Y.-C. (2020). Extension Rules of Newman–Janis Algorithm for Rotation Metrics in General Relativity. *Physical Science International Journal*, *24*(6), 1–14. https://doi.org/10.9734/psij/2020/v24i630194

Cowen, R. (2013). *Curved Spacetime on Chip*. https://www.nature.com/articles/nature.2013.13840

Fadlol, A. (2016). Solusi Reisner-Nordstrom dalam Teori Gravitasi f(R). *Jurnal Fisika Dan Aplikasinya*, *12*(2), 93. https://doi.org/10.12962/j24604682.v12i2.1338

Felice, A. De, & Tsujikawa, S. (2010). *f(R) Theories*. *13*, 1–3.

Gautama, E. S. (2018). *Pengantar Teori Relativitas Umum dan Kosmologi Revisi 2.1*. Penerbit Online Paradoks Sotbook Publisher.

Gron, O., & Hervik, S. (2004). *Einstein's General Theory of Relativity*. New York: Springer New York.

Hu, Z., Shao, L., & Zhang, F. (2023). *Prospects for Probing Small-scale Dark Matter Models with Pulsars around Sagittarius A**. *1*, 1–12. http://arxiv.org/abs/2312.01889

Irawan, A. (2016). *Kajian Ruang Waktu Kerr-Newman dalam Gravitasi Einstein*. Surabaya: Departemen Fisika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Kaku, M. (2005). *Parallel worlds: A journey through creation, higher dimmensions, and the future of the cosmos* (G. Leben (ed.)). Doubleday Books.

Kuhfittig, P. K. F. (2023). Noncommutative-Geometry Wormholes Based on the Casimir Effect. *Journal of High Energy Physics, Gravitation and Cosmology*, *09*(01), 295–300. https://doi.org/10.4236/jhepgc.2023.91022

Ky, N. A., Ky, P. Van, & Van, N. T. H. (2018). Perturbative Solutions of the f(R)-Theory of Gravity in a Central Gravitational Field and Some Applications. *The European Physical Journal C*, *78*(7), 1–16. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6023-6

Lee, H. C., & Han, Y. J. (2017). Innermost Stable Circular Orbit of Kerr-MOG Black Hole. *European Physical Journal C*, *77*(10), 1–9. https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-5152-7

Mathew, J. (2023). *Starobinsky inflation and its spin-offs in the light of exact solutions*. https://arxiv.org/abs/2307.01899%0Ahttps://arxiv.org/pdf/2307.01899

Pambudi, D. E., & Romadani, A. (2023). Study of the Gravity Effects of Fermion and Boson Particles in Curved Spacetime. *Jurnal Neutrino:Jurnal Fisika Dan Aplikasinya*, *16*(1), 1–12. https://doi.org/10.18860/neu.v16i1.18017

Rohim, A., Adam, A. S., & Romadani, A. (2023). *Casimir Effect of Lorentz-Violating Charged Dirac in Background Magnetic Field*. 1–17. http://arxiv.org/abs/2307.04448

Romadani, A. (2023). Solution of Klein-Gordon Equation in F(R) Theory of Gravity.pdf. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Fisika Al-Biruni*, *12*, 31–41. https://doi.org/10.24042/jipalbiruni.v12i1.15340

Romadani, A., & Rosyid, M. F. (2021). Kruskal-Szekeres coordinates of spherically simmetric solution in f(R) Theories of Gravity. *Journal of Physics: Coference Series*, 1–8. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1816/1/012030

Salgado, R. (1996). *A More Illuminating Look at the Light Cone*. isualrelativity.com/LIGHTCONE/lightcone.html

ScienceClic, E. (2020). *The Maths of General Relativity (5/8) - Curvature*. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=HJlhBPci_Bg

Shihab, M. Q. (2005). *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian al-Quran* (Edisi keli). Lentera Hati.

Sparavigna, A. C. (2013). The Science of al-Biruni. *International Journal of Sciences*, *2*(12), 1–11. https://doi.org/https://doi.org/10.48550/arXiv. 1312.7288

Sporea, C. A. (2014). *Notes on f(R) Theories of Gravity*. *4*. arxiv:1403.3852v2

Yu-ching, C. M. D. (2017). A Derivation of the Kerr Metric by Ellipsoid Coordinate Transformation. *International Journal of Physical Sciences*, *12*(11), 130–136. https://doi.org/10.5897/ijps2017.4605

Yunus, F. M. (2003). Lubang Hitam Akhir Dari Ornamen Jagad Raya. *Filsafat*, *34*, 103–110.

Zajaiek, M., & Tursunov, A. (2019). The Electric Charge of Black Holes: Is It Really Always Neigligible? *Observatory*, *139*(1273), 231–236.

LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

NILAI TENSOR RICCI

$\boldsymbol{R_{00}} =$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho^6}\Bigg(\Bigg[\Bigg(2r\left(r^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r^4}{2}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 3m\right) \\
+ 2a^2\cos^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\Bigg)\Bigg(r \\
+ \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\Bigg) + R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\rho^2\Delta_{KN} - 5r^4 \\
- a^4 - Q^4 - 6r^2(a^2 + Q^2) - 2a^2Q^2 - \frac{R_0^2 r^8}{4}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)^2 \\
- \frac{R_0 r^4}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)(7r^2 + 5a^2 + 5Q^2 - 12mr) \\
+ 4mr(3mr - 4r^2 - 2a^2 - 4Q^2) \\
+ 2a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\Bigg]\rho^6 \\
- 6r\rho^4\Delta_{KN}\Bigg[\rho^2\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right) \\
- r(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)\Bigg]\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{1}{2\rho^6}\big(2a^2[(r^2+\Delta_{KN})(\cos^2\theta-\sin^2\theta)
$$

$$
+a^2(\cos^4\theta-6\sin^2\theta\cos^2\theta-\sin^4\theta)]2\rho^6
$$

$$
-(6r^4a^2\cos\theta\sin\theta+12r^2a^4\cos^3\theta\sin\theta+6a^6\cos^5\theta\sin\theta)(r^2a^2\sin 2\theta
$$

$$
+2a^4\sin\theta\cos^3\theta+a^2\sin 2\theta\,\Delta_{KN}-2a^4\sin^3\theta\cos\theta)\big)
$$

$$
+\frac{\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2\right.
$$

$$
\left.-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)\right]\left[\frac{\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}{\rho^2\left((\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}0\right)}\right.
$$

$$
+\frac{a^2}{\rho^2}\left(\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right)
$$

$$
-\frac{2r\Delta_{KN}-\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2}{\rho^2\Delta_{KN}}
$$

$$
\pm\frac{a^2}{\rho^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)(\Xi-\Delta_{KN})\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]
$$

$$
\left.-\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\left(2r\Xi-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right]
$$

$$
-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{\rho^6}[\Xi-\Delta_{KN}]\left[-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})}{2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right.
$$

$$
\left.-\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right]
$$

$$
+\frac{2a\sin\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})\right]
$$

$$
\times\left(-\frac{a}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\left(\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)\right)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right.
$$

$$
\left.-\frac{a}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)
$$

$$
+\left[\frac{a\cos\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})(\Xi+a^2\sin^2\theta)}{\rho^6}\right]
$$

$$
\left(\frac{a^3\cos\theta}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right.
$$

$$
\left.-\frac{a\cos\theta}{2\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})(\Xi+a^2\sin^2\theta)}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)
$$

(A.1)

Dengan nilai $\Xi=\mathrm{r}^2+a^2$, $\rho^2=r^2+a^2\cos\theta$, dan $\Delta_{KN}=r^2+a^2+Q^2+\frac{R_0r^4}{6}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2mr.$

$\boldsymbol{R_{11}} =$

$$\partial_r\left(\frac{\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}{\rho^2\left((\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}0\right)}+\frac{r}{\rho^2}\right.$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\left[\left(2r\Xi\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)$$

$$-\frac{1}{\rho^4\Delta_{KN}^2}(a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\rho^2\Delta_{KN}-a^4\sin^3\theta\cos\theta\,\Delta_{KN})$$

$$+\left(\frac{\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}{\rho^2\left((\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}0\right)}\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{\rho^2}\left(\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right)\right)^2+\left(\frac{r}{\rho^2}\right)^2$$

$$+\left(-\frac{a^2}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\left(\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\left(2r\Xi-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)^2$$

$$+2\left(-\frac{a}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\left(\left(r\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)\right)$$

$$-\frac{a}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]$$

$$+\frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2+r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right]$$

$$+\frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\left(2r^3+2ra^2\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)$$

$$-\frac{r\Delta_{KN}-\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2}{\rho^2\Delta_{KN}}$$

$$\times\left(\frac{\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}{\rho^2\left((\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}0\right)}+\frac{r}{\rho^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\left(2r\Xi-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)$$

$$-\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2\Delta_{KN}}\left(-\frac{2a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\right.$$

$$-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})}{2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}$$

$$-\frac{a^2\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})^2(\Xi+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]$$

$$\left.+\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)$$

(A.2)

Dengan nilai $\Xi = \mathrm{r}^2 + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2\cos\theta$, dan $\Delta_{KN} = r^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2mr$.

$\boldsymbol{R_{22}}$

$$= \partial_\theta \left(-\frac{a^2 \sin\theta \cos\theta \left(\rho^2 + a^2 - \Delta_{KN}\right)}{2\rho^2\left(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta\right) + \dfrac{a^2 \sin^2\theta \left(\Xi - \Delta_{KN}\right)^2}{\left(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}\right)}} \right.$$

$$- \frac{a^2 \cos\theta}{\rho^2 \sin\theta}\left[\frac{(\Xi - \Delta_{KN})^2\left(\Xi + a^2 \sin^2\theta\right)}{\left(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta\right)\left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}\right]$$

$$+ \frac{a^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2}$$

$$\left. + \frac{\cos\theta}{\rho^2 \sin\theta}\left[\frac{\left(\Xi^2 - 2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)\rho^2 + a^2\sin^2\theta\left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)}{\left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right) + \dfrac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{\left(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta\right)}}\right]\right)$$

$$+ \partial_r\left(\frac{\Delta_{KN}}{r}\right)$$

$$- \frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\left(\frac{\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - m\right)\rho^2 - r\left(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta\right)}{\rho^2\left(\left(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta\right) + \dfrac{a^2\sin^2\theta\left(\Xi - \Delta_{KN}\right)^2}{\left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)}\right)}\right)$$

$$+ \frac{r\Delta_{KN} - \left(r + \frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - m\right)\rho^2}{\rho^2\Delta_{KN}}$$

$$+ \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right) + \dfrac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{\left(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta\right)}}\right]\left[\left(\left(2r\Xi\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - m\right)\right)\rho^2 - r\left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)\right] - \frac{r}{\rho^2}\right)$$

$$+\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\left(-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\left(\rho^2+a^2-\Delta_{KN}\right)}{2\rho^2\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)}}\right.$$

$$-\frac{a^2\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})^2\left(\Xi+a^2\sin^2\theta\right)}{\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]$$

$$+\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}$$

$$\left.+\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)\rho^2+a^2\sin^2\theta\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)}{\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)}}\right]\right)$$

$$+\left(-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\left(\rho^2+a^2-\Delta_{KN}\right)}{2\rho^2\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)}}\right.$$

$$\left.-\frac{a^2\cos\theta}{2\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})^2\left(\Xi+a^2\sin^2\theta\right)}{\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right)^2$$

$$+\left(\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\right)^2$$

$$+\left(-\frac{a^2\cos\theta}{2\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})^2\left(\Xi+a^2\sin^2\theta\right)}{\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)\rho^2+a^2\sin^2\theta\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)}{\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)}}\right]\right)^2$$

$$+\frac{\Delta_{KN}}{r}\left(\frac{\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0+2\alpha R_0^2\right)-m\right)\rho^2-r\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)}{\rho^2\left(\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)}0\right)}\right.$$

$$+\frac{a^2}{\rho^2}\left(\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\left(\frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0+2\alpha R_0^2\right)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})}{\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right)$$

$$+\frac{r\Delta_{KN}-\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0+2\alpha R_0^2\right)-m\right)\rho^2}{\rho^2\Delta_{KN}}-\frac{r}{\rho^2}$$

$$-\frac{a^2}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})}{\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\left(\left(\frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+2\alpha R_0^2\right)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})\right)$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)}}\right]\left[\left(2r\Xi\right.\right.$$

$$\left.-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0+2\alpha R_0^2\right)-m\right)\right)\rho^2$$

$$\left.\left.-r\left(\left(r^2+a^2\right)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)\right]\right)$$

$$+\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\left(-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\left(\rho^2+a^2-\Delta_{KN}\right)}{2\rho^2\left(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta\right)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)}}\right.$$

$$- \frac{a^2 \cos\theta}{\rho^2 \sin\theta} \left[\frac{(\Xi - \Delta_{KN})^2 (\Xi + a^2 \sin^2\theta)}{(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)\left(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}\right) + a^2 (\Xi - \Delta_{KN})^2} \right]$$

$$+ \frac{a^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^2}$$

$$+ \frac{\cos\theta}{\rho^2 \sin\theta} \left[\frac{\left(\Xi^2 - 2a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}\right)\rho^2 + a^2 \sin^2\theta \left(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}\right)}{\left(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}\right) + \frac{a^2 (\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)}} \right] \Bigg)$$

(A.3)

Dengan nilai $\Xi = \mathrm{r}^2 + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos\theta$, dan $\Delta_{KN} = r^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r^4}{6} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2mr$.

$\boldsymbol{R_{33}} =$

$$\partial_r \left(- \frac{\sin^2\theta\, \Delta_{KN}}{\rho^6} \left[\left(2r\Xi - a^2 \sin^2\theta \left(r + \frac{R_0 r^3}{3} (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m \right) \right) \rho^2 - r(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}) \right] \right)$$

$$+\partial_\theta\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^6}\left[(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)$$

$$+\,2\left(\frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2+r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right]\right.$$

$$+\frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\left(2r^3+2ra^2\right.\right.$$

$$\left.-\,a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2$$

$$\left.\left.-\,r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)\left(\frac{a\sin\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\,r(\Xi-\Delta_{KN})\right]\right)$$

$$+\,2\left(\frac{a\cos\theta}{2\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})(\Xi+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{a\cos\theta}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right)$$

$$\left(-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})}{2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}+\frac{r-a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)$$

$$\left(\frac{a\cos\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{2\rho^6}\right)$$

$$+\frac{\sin^2\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\Bigg[\Bigg(2r\Xi$$

$$-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\Bigg)\rho^2$$

$$-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\Bigg]$$

$$
\times\left(\frac{\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}{\rho^2\left((\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}0\right)}\right.
$$

$$
+\frac{a^2}{\rho^2}\left(\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right)
$$

$$
+\frac{2r\Delta_{KN}-\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2}{\rho^2\Delta_{KN}}
$$

$$
+\frac{a^2}{\rho^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)(\Xi-\Delta_{KN})\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]
$$

$$
-\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\left[\left(2r\Xi\right.\right.
$$

$$
\left.-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2
$$

$$
\left.\left.-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)
$$

$$
+\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^6}[(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2
$$

$$
+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})]
$$

(A.4)

Dengan nilai $\Xi=\mathrm{r}^2+a^2$, $\rho^2=r^2+a^2\cos\theta$, dan $\Delta_{KN}=r^2+a^2+Q^2+\frac{R_0 r^4}{6}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2mr$.

$\boldsymbol{R_{03}} = \boldsymbol{R_{30}} =$

$$-\partial_r\left(\frac{a\sin\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})\right]\right)$$

$$-\,\partial_\theta\left(\frac{a\cos\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})(\Xi+a^2\sin^2\theta)}{2\rho^6}\right)$$

$$+\left(\frac{\Delta_{KN}\left[\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)\right]}{\rho^6}\right)$$

$$\left(\frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left[\frac{\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2+r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right]\right.$$

$$+\frac{a\sin\theta}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right(2r^3+2ra^2$$

$$\left.\left.-\,a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)$$

$$+\left(-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\,(\Xi^2-\Delta_{KN})}{\rho^6}\right)\left(\frac{a\cos\theta}{2\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})(\Xi+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{a\cos\theta}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\big((\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\big)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right)$$

$$+\left(-\frac{a}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})\left(\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)\right)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{a}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Xi-\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)$$

$$\left(-\frac{\sin^2\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(2r\Xi-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)\left(-\frac{\sin^2\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(2r\Xi\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\right)\rho^2-r(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)$$

$$+\left(\frac{a^3\cos\theta}{\rho^2}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{a\cos\theta}{2\rho^2\sin^2\theta}\left[\frac{(\Xi-\Delta_{KN})(\Xi+a^2\sin^2\theta)}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)$$

$$\times\left(-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^6}[(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})]\right)$$

$$-\frac{a\sin\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2\right.$$

$$\left.-r(\Xi-\Delta_{KN})\right]\left(\frac{2r\Delta_{KN}-\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2}{\rho^2\Delta_{KN}}\right)$$

(A.5)

Dengan nilai $\Xi = \mathrm{r}^2 + a^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos\theta$, dan $\Delta_{KN} = r^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2mr$.

LAMPIRAN 2

PERHITUNGAN DIFFERENSIAL PADA MASING-MASING TENSOR RICCI

Perhitungan differensial suku pertama pada tensor Ricci R_{11}. Perlu diingat bahwasanya nilai $\Xi = r^2 + a^2$ berlaku untuk semua suku yang mengandung simbol tersebut.

$$\partial_r \left(\frac{\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\rho^2 - r(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)}{\rho^2 \left((\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta) + \frac{a^2 \sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\,\Delta_{KN})} 0 \right)} + \frac{r}{\rho^2} \right.$$

$$+ \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}}\right]\left[\left(2r(r^2\right.\right.$$

$$\left. + a^2) - a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)\rho^2$$

$$\left.\left. - r((r^2 + a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)$$

Suku pertama:

$$\partial_r \left(\frac{\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\rho^2 - r(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)}{\rho^2 \left((\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta) + \frac{a^2 \sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\,\Delta_{KN})} 0 \right)} \right)$$

$$u = \left(r + \frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - m\right)\rho^2 - r\left(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta\right)$$

$$u' = 3r^2 + \frac{5}{3}R_0 r^4\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - 2mr - a^2\cos^2\theta$$

$$+ R_0 r^2\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right)a^2\cos^2\theta$$

$$-\left(3r^2 + a^2 + Q^2 + \frac{5}{6}R_0 r^4\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - 4mr - a^2\sin^2\theta\right)$$

$$u' = \frac{5}{3}R_0 r^4\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - \frac{5}{6}R_0 r^4\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right)$$

$$+ R_0 r^2\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right)a^2\cos^2\theta - a^2 - Q^2 + 2mr$$

$$v = \rho^2\left(\left(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta\right) + \frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{\left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)}\right)$$

$$v' = 2r\left(\left(2r^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r^4}{6}\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - 3mr\right) - a^2\sin^2\theta\right.$$

$$\left.+ a^2\cos^2\theta\left(1 + \frac{R_0 r^2}{3}\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - \frac{m}{r}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{\left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)^2}\left[2r(r^2 + a^2\right.$$

$$- \Delta_{KN})\left(a^2\sin^2\theta\,(r^2 + a^2 - \Delta_{KN})\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2}{3}R_0 r^2\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - \frac{2m}{r}\right)\right)\left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right)$$

$$\left.-\left(4r(r^2 + a^2) - 2ra^2\sin^2\theta\left(1 + R_0 r^2\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - \frac{m}{r}\right)\right)\right]$$

$$\partial_r\left(\frac{\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}{\rho^2\left((\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}0\right)}\right)$$

$$=\frac{1}{\rho^4\left((\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}\right)^2}\left(\left[\frac{5}{3}R_0r^4(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\right.\right.$$

$$-\frac{5}{6}R_0r^4(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)+R_0r^2(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)a^2\cos^2\theta-a^2-Q^2$$

$$\left.+2mr\right]\left[\rho^2\left((\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}\right)\right]$$

$$-\left[2r\left(\left(2r^2+a^2+Q^2+\frac{R_0r^4}{6}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-3mr\right)-a^2\sin^2\theta\right.\right.$$

$$\left.+a^2\cos^2\theta\left(1+\frac{R_0r^2}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-\frac{m}{r}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})^2}\left[2r(r^2+\ a^2-\Delta_{KN})\left(a^2\sin^2\theta\,(r^2+\ a^2-\Delta_{KN})\right.\right.$$

$$\left.-\left(\frac{2}{3}R_0r^2(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-\frac{2m}{r}\right)\right)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})$$

$$\left.\left.-\left(4r(r^2+\ a^2)-2ra^2\sin^2\theta\left(1+R_0r^2(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-\frac{m}{r}\right)\right)\right]\right]\left[\left(r\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)\right]\right)$$

Suku kedua:

$$\partial_r\left(\frac{r}{\rho^2}\right)=\frac{a^2\cos^2\theta}{\rho^4}$$

Suku ketiga:

$$\partial_r\left(\frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}}\right]\left[\left(2r(r^2+a^2)\right.\right.\right.$$

$$\left.- a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)\rho^2$$

$$\left.\left.- r((r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)$$

$$\partial_r\left(\frac{2r(r^2+a^2) - a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}}\right)$$

$$- \partial_r\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{r((r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}}\right)$$

Suku ketiga mempunyai dua suku yang harus diturunkan secara parsial. Untuk mempermudah perhitungan, masing-masing suku dihitung secara terpisah sebelum akhirnya disubstitusikan.

$$\partial_r\left(\frac{2r(r^2+a^2) - a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}}\right)$$

$$u = 2r(r^2+a^2) - a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - m\right)$$

$$u' = 6r^2 + 2a^2 - a^2\sin^2\theta\left(1 + R_0 r^2\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right)\right)$$

$$v = \left(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}\right) + \frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\frac{2}{3}R_0 r^3\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right)}$$

$$v' = 4r\left(r^2 + a^2\right) - a^2 \sin^2\theta \left(2r + \frac{2}{3}R_0 r^3\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right) - 2m\right)$$

$$+ \frac{1}{\left(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta\right)^2}\left(-2a^2(\Xi - \Delta_{KN})\left(\frac{2}{3}R_0 r^3\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right)\right.\right.$$

$$\left. - 2m\right)\frac{2}{3}R_0 r^3\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right)$$

$$\left. - a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2\left(2R_0 r^2\left(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2\right)\right)\right)$$

$$\partial_r\left(\frac{2r(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right)$$

$$= \frac{1}{\left((\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)}\right)^2}\Bigg(\Big[6r^2+2a^2$$

$$-a^2\sin^2\theta\left(1+R_0r^2(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\right)\Big]\Bigg[(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})$$

$$+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)}\Bigg]$$

$$-\Bigg[4r(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta\left(2r+\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2m\right)$$

$$+\frac{1}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)^2}\Bigg(-2a^2(\Xi-\Delta_{KN})\Big(\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)$$

$$-2m\Big)\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)$$

$$-a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\left(2R_0r^2(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg[4r(r^2+a^2)$$

$$-a^2\sin^2\theta\left(2r+\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2m\right)$$

$$+\frac{1}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)^2}\Bigg(-2a^2(\Xi-\Delta_{KN})\Big(\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)$$

$$-2m\Big)\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)$$

$$-a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\left(2R_0r^2(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg)$$

$$-\partial_r\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{r((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right)$$

$$u=r((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})$$

$$u'=(r^2+a^2)(5r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta\left(2r+\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2m\right)$$

$$v = \rho^2(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}) + \frac{\rho^2 a^2 (\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)}$$

$$v' = 4r(r^2 + a^2) - 2ra^2 \sin^2\theta \left(1 + \frac{2}{3}R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - \frac{m}{r}\right)$$

$$+ \frac{1}{(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)^2}\left(2a^2(\Xi - \Delta_{KN})\left[r(\Xi - \Delta_{KN})\right.\right.$$

$$\left. - \left(\frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2m\right)\rho^2\right]$$

$$\left. - \left(2r + \frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2m\right)\rho^2 a^2 (\Xi - \Delta_{KN})^2\right)$$

$$-\partial_r \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{r((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right)$$

$$=-\frac{1}{\left(\rho^2(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{\rho^2a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}\right)^2}\Bigg(\Big[(r^2$$

$$+a^2)(5r^2+a^2)$$

$$-a^2\sin^2\theta\left(2r+\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2m\right)\Big]\Big[\rho^2(\Xi^2$$

$$-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{\rho^2a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}\Big]$$

$$-\Big[4r(r^2+a^2)-2ra^2\sin^2\theta\left(1+\frac{2}{3}R_0r^2(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-\frac{m}{r}\right)$$

$$+\frac{1}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)^2}\Big(2a^2(\Xi-\Delta_{KN})\Big[r(\Xi-\Delta_{KN})$$

$$-\left(\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2m\right)\rho^2\Big]$$

$$-\Big(2r+\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)$$

$$-2m\Big)\rho^2a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\Big)\Big]\,[r((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})]\Bigg)$$

Dengan demikian nilai akhir dari turunan pada suku pertama R_{11} adalah:

$$\partial_r \left(\frac{\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\rho^2 - r(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)}{\rho^2 \left((\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta) + \frac{a^2 \sin^2\theta\,(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})} 0 \right)} + \frac{r}{\rho^2} \right.$$

$$+ \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{1}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)}}\right]\left[\left(2r(r^2+a^2)\right.\right.$$

$$\left.- a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)\rho^2$$

$$\left.\left. - r((r^2+a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\rho^4\left((\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta) + \frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}\right)^2}\left(\left[\frac{5}{3}R_0 r^4(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right.\right.$$

$$- \frac{5}{6}R_0 r^4(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) + R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)a^2\cos^2\theta - a^2 - Q^2$$

$$\left. + 2mr\right]\left[\rho^2\left((\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta) + \frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}\right)\right]$$

$$- \left[2r\left(\left(2r^2 + a^2 + Q^2 + \frac{R_0 r^4}{6}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 3mr\right) - a^2\sin^2\theta\right.\right.$$

$$\left.\left. + a^2\cos^2\theta\left(1 + \frac{R_0 r^2}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - \frac{m}{r}\right)\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})^2}\left[2r(r^2 + a^2 - \Delta_{KN})\left(a^2\sin^2\theta\,(r^2 + a^2 - \Delta_{KN})\right.\right.$$

$$\left. - \left(\frac{2}{3}R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - \frac{2m}{r}\right)\right)(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})$$

$$-\Bigg(4r(r^2 + a^2)$$

$$-2ra^2\sin^2\theta\left(1 + R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - \frac{m}{r}\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg]\Bigg[\Bigg(r$$

$$+\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\Bigg)\rho^2 - r(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)\Bigg]\Bigg)$$

$$+\frac{a^2\cos^2\theta}{\rho^4}$$

$$+\frac{1}{\left((\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)}\right)^2}\Bigg(\Big[6r^2 + 2a^2$$

$$-a^2\sin^2\theta\left(1 + R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)\Big]\Bigg[(\Xi^2 - a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})$$

$$+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)}\Bigg]$$

$$-\Bigg[4r(r^2 + a^2) - a^2\sin^2\theta\left(2r + \frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2m\right)$$

$$+\frac{1}{(\Delta_{KN} - a^2\sin^2\theta)^2}\Bigg(-2a^2(\Xi-\Delta_{KN})\Big(\frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$$

$$-2m\Big)\frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$$

$$-a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\left(2R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)\Bigg)\Bigg]\Bigg[4r(r^2 + a^2)$$

$$-a^2\sin^2\theta\left(2r + \frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2m\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)^2}\Bigg(-2a^2(\Xi-\Delta_{KN})\left(\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\right.\\
&\left.-2m\right)\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\\
&\left.\left.-a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\big(2R_0r^2(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\big)\right)\right]\Bigg)\\
&-\frac{1}{\left(\rho^2(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{\rho^2a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}\right)^2}\Bigg(\Bigg[(r^2\\
&+a^2)(5r^2+a^2)\\
&-a^2\sin^2\theta\left(2r+\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2m\right)\Bigg]\Bigg[\rho^2(\Xi^2\\
&\left.-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{\rho^2a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}\right]\\
&-\left[4r(r^2+a^2)-2ra^2\sin^2\theta\left(1+\frac{2}{3}R_0r^2(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-\frac{m}{r}\right)\right.\\
&+\frac{1}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)^2}\Bigg(2a^2(\Xi-\Delta_{KN})\Big[r(\Xi-\Delta_{KN})\\
&-\left(\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-2m\right)\rho^2\Big]\\
&-\left(2r+\frac{2}{3}R_0r^3(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)\right.\\
&\left.\left.-2m\right)\rho^2a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\Bigg)\right]\left[r((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\Bigg)
\end{aligned}
$$

(A.6)

Perhitungan differensial suku pertama pada persamaan $\boldsymbol{R_{22}}$.

$$\partial_\theta\left(-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})}{2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\dfrac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right.$$

$$-\frac{a^2\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]$$

$$+\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}$$

$$\left.+\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\dfrac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)$$

Suku pertama:

$$-\partial_\theta\left(\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})}{2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\dfrac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right)$$

$$u=a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})$$

$$u'=a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})-2a^4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$v=2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}$$

$$v'=2\Delta_{KN}(2a^2\cos\theta\sin\theta)+(4a^2\sin\theta\cos\theta\,\rho^2-4a^4\sin^3\theta\cos\theta)$$

$$+\frac{1}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})^2}(2a^2\sin\theta\cos\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2(\Xi^2$$

$$-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+2a^4\sin^3\theta\cos\theta\,\Delta_{\mathrm{KN}}(\Xi-\Delta_{KN})^2)$$

$$-\partial_\theta\left(\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})}{2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\dfrac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\dfrac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}\right)^2}\Bigg([a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\rho^2$$

$$+a^2-\Delta_{KN})-2a^4\sin^2\theta\cos^2\theta]\Bigg[2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)$$

$$+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}\Bigg]$$

$$-\Bigg[2\Delta_{KN}(2a^2\cos\theta\sin\theta)+(4a^2\sin\theta\cos\theta\,\rho^2-4a^4\sin^3\theta\cos\theta)$$

$$+\frac{1}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})^2}(2a^2\sin\theta\cos\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})$$

$$+2a^4\sin^3\theta\cos\theta\,\Delta_{\mathrm{KN}}(\Xi-\Delta_{KN})^2)\Bigg][a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})]\Bigg)$$

Suku kedua:

$$-\partial_\theta\left(\frac{a^2\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right)$$

$$u=\frac{a^2\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}$$

$$u'=\frac{a^2}{\rho^4\sin^2\theta}(2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta-\rho^2)$$

$$v=\frac{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}$$

$$v'=\left(\frac{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}\right)^2$$

$$\left(\left[2a^2 \sin\theta \cos\theta \left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2\right]\left[(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2\right.\right.$$

$$\left.-\,a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\right]$$

$$+\left[2a^2\sin\theta\cos\theta\,(r^2+a^2+\Delta_{KN}^2\right.$$

$$\left.-\,2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\left[\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2\right.$$

$$\left.\left.+\,a^2\sin^2\theta)\right]\right)$$

$$-\partial_\theta\left(\frac{a^2\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]\right)$$

$$=-\left[\frac{a^2}{\rho^4\sin^2\theta}(2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta\right.$$

$$\left.-\,\rho^2)\right]\left[\frac{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]$$

$$-\left[\left(\frac{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}\right)^2\left(\left[2a^2\sin\theta\cos\theta\left((r^2\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,a^2)-\Delta_{KN}\right)^2\right]\left[(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\right]$$

$$+\left[2a^2\sin\theta\cos\theta\,(r^2+a^2+\Delta_{KN}^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\right]\left[\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2\right.$$

$$\left.\left.\left.+\,a^2\sin^2\theta)\right]\right)\right]\left[\frac{a^2\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\right]$$

Suku ketiga:

$$\partial_\theta\left(\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}\right)=\frac{1}{\rho^4}\left((-a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)\rho^2+2a^4\sin^2\theta\cos^2\theta\right)$$

Suku keempat:

$$\partial_\theta\left(\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\dfrac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)$$

$$u = \frac{\cos\theta}{\rho^2 \sin\theta}$$

$$u' = \frac{1}{\rho^4 \sin^2\theta}(\rho^2 - 2a^2 \sin^2\theta \cos^2\theta)$$

$$v = \frac{(\Xi^2 - 2a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN})\rho^2 + a^2 \sin^2\theta\,(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN})}{(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)}}$$

$$v' = \frac{1}{\left((\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)}\right)^2}$$

$$\left([2a^2 \sin\theta \cos\theta\,(-2\rho^2\Delta_{KN})]\left[(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2 \sin^2\theta)}\right]\right.$$

$$- \left[2a^2 \sin\theta \cos\theta \left(\frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{\mathrm{KN}} - a^2 \sin^2\theta} - \Delta_{\mathrm{KN}}\right)\right][(\Xi^2$$

$$\left. - 2a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN})\rho^2 + a^2 \sin^2\theta\,(\Xi^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN})]\right)$$

$$\partial_\theta\left(\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\dfrac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)$$

$$=\left[\frac{1}{\rho^4\sin^2\theta}(\rho^2\right.$$

$$\left.-\,2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta)\right]\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\dfrac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]$$

$$+\left[\frac{1}{\left((\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\dfrac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}\right)^2}\left([2a^2\sin\theta\cos\theta\,(-2\rho^2\Delta_{KN})]\left[(\Xi^2\right.\right.\right.$$

$$\left.-\,a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}\right]$$

$$-\left[2a^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{\mathrm{KN}}-a^2\sin^2\theta}-\Delta_{\mathrm{KN}}\right)\right][(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2$$

$$\left.\left.+\,a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})]\right)\right]\left[\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\right]$$

Dengan demikian, nilai untuk differensial pada suku pertama dari persamaan tensor Ricci R_{22} adalah:

$$\partial_\theta\left(-\frac{a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})}{2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}}\right.$$

$$-\frac{a^2\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]$$

$$+\frac{a^2\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}$$

$$\left.+\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]\right)$$

$$=-\frac{1}{\left(2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}\right)^2}\Bigg([a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(\rho^2$$

$$+a^2-\Delta_{KN})-2a^4\sin^2\theta\cos^2\theta]\Bigg[2\rho^2(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)$$

$$+\frac{a^2\sin^2\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}\Bigg]$$

$$-\Bigg[2\Delta_{KN}(2a^2\cos\theta\sin\theta)+(4a^2\sin\theta\cos\theta\,\rho^2-4a^4\sin^3\theta\cos\theta)$$

$$+\frac{1}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})^2}(2a^2\sin\theta\cos\theta\,(\Xi-\Delta_{KN})^2(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})$$

$$+2a^4\sin^3\theta\cos\theta\,\Delta_{\mathrm{KN}}(\Xi-\Delta_{KN})^2)\Bigg]\,[a^2\sin\theta\cos\theta\,(\rho^2+a^2-\Delta_{KN})]\Bigg)$$

$$-\Bigg[\frac{a^2}{\rho^4\sin^2\theta}(2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$-\rho^2)\Bigg]\left[\frac{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}\right]$$

$$-\left[\left(\frac{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta)}\right)^2\left(\left[2a^2\sin\theta\cos\theta\left((r^2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2\right][(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2]$$

$$+[2a^2\sin\theta\cos\theta\,(r^2+a^2+\Delta_{KN}^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})]\left[\left((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\right)^2(r^2+a^2\right.$$

$$\left.\left.\left.+a^2\sin^2\theta)\right]\right)\right]\left[\frac{a^2\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\right]+\frac{1}{\rho^4}\left((-a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)\rho^2+2a^4\sin^2\theta\cos^2\theta\right)$$

$$+\left[\frac{1}{\rho^4\sin^2\theta}(\rho^2\right.$$

$$\left.-2a^2\sin^2\theta\cos^2\theta)\right]\left[\frac{(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})}{(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\dfrac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}}\right]$$

$$+\left[\frac{1}{\left((\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\dfrac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}\right)^2}\left([2a^2\sin\theta\cos\theta\,(-2\rho^2\Delta_{KN})]\left[(\Xi^2\right.\right.\right.$$

$$\left.-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2\sin^2\theta)}\right]$$

$$-\left[2a^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{\mathrm{KN}}-a^2\sin^2\theta}-\Delta_{\mathrm{KN}}\right)\right][(\Xi^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2$$

$$\left.\left.+a^2\sin^2\theta\,(\Xi^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})]\right)\right]\left[\frac{\cos\theta}{\rho^2\sin\theta}\right]$$

(A.7)

Selanjutnya adalah perhitungan suku kedua pada persamaan $\boldsymbol{R_{22}}$**,** yaitu turunan terhadap r sebagaimana persamaannya sebagai berikut:

$$\partial_r \left(\frac{\Delta_{KN}}{r}\right)$$

$$u = \Delta_{KN}$$

$$u' = 2r + +\frac{2}{3} R_0 r^3 (\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2mr$$

$$v = r$$

$$v' = 1$$

$$\partial_r \left(\frac{\Delta_{KN} r}{\rho^6}\right) = \frac{2r\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0) - m\right) - \Delta_{KN}}{r^2}$$

(A.8)

Perhitungan differensial untuk persamaan $\boldsymbol{R_{33}}$ suku pertama.

$$-\partial_r \left(\frac{\sin^2\theta\, \Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(2r(r^2 + a^2)\right.\right.\right.$$
$$\left. - a^2 \sin^2\theta \left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)\rho^2$$
$$\left.\left. - r((r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN})\right]\right)$$

$$u = \frac{\sin^2\theta\, \Delta_{KN}}{\rho^6}$$

$$u' = \frac{2\sin\theta}{\rho^8}\left(\rho^2\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right) - 3r\, sin\,\theta\, \Delta_{KN}\right)$$

$$v = \left(2r(r^2 + a^2) - a^2\sin^2\theta\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)\rho^2$$
$$- r((r^2 + a^2)^2 - a^2\sin^2\theta\, \Delta_{KN})$$

$$v' = 6r^2 + 2a^2$$

$$- a^2 \sin^2\theta \left(2r\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right.$$

$$\left. + \rho^2\left(1 + R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)\right) - (r^2 + a^2)(5r^2 + a^2)$$

$$- a^2 \sin^2\theta \left(2r - \frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2m\right)$$

$$-(u'v + v'u) = -\left[\frac{2\sin\theta}{\rho^8}\left(\rho^2\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - 3r\, sin\,\theta\, \Delta_{KN}\right)\right]\left[\left(2r(r^2 + a^2)\right.\right.$$

$$\left. - a^2 \sin^2\theta \left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right)\rho^2$$

$$\left. - r((r^2 + a^2)^2 - a^2 \sin^2\theta\, \Delta_{KN})\right]$$

$$-\left[6r^2 + 2a^2\right.$$

$$- a^2 \sin^2\theta \left(2r\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\right.$$

$$\left. + \rho^2\left(1 + R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right)\right) - (r^2 + a^2)(5r^2 + a^2)$$

$$\left. - a^2 \sin^2\theta \left(2r - \frac{2}{3}R_0 r^3(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - 2m\right)\right]\left[\frac{\sin^2\theta\, \Delta_{KN}}{\rho^6}\right]$$

(A.4)

Perhitungan differensial suku kedua pada persamaan $\boldsymbol{R_{33}}$, yaitu differensial terhadap θ dengan komponen sebagai berikut:

$$\partial_\theta\left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^6}[((r^2+a^2)^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2 \right.$$

$$\left. +\,a^2\sin^2\theta\,((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})]\right)$$

$$u=\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^6}$$

$$u'=\frac{1}{\rho^8}(\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+6a^2\sin^2\theta\cos^2\theta)$$

$$v=((r^2+a^2)^2-2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2$$

$$+\,a^2\sin^2\theta\,((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})$$

$$v'=4a^2\cos\theta\sin\theta\,(\Delta_{\mathrm{KN}}(r^2+a^2)-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})$$

$$=4a^2\cos\theta\sin\theta\,\Delta_{KN}\rho^2$$

$$u'v+v'u=\left[\frac{1}{\rho^8}(\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+6a^2\sin^2\theta\cos^2\theta)\right][((r^2+a^2)^2$$

$$-\,2a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})\rho^2+a^2\sin^2\theta\,((r^2+a^2)^2-a^2\sin^2\theta\,\Delta_{KN})]$$

$$+\,\frac{4a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^4}$$

(A.9)

Perhitungan differensial pada persamaan $\boldsymbol{R_{03}}$. Suku pertama, differensial terhadap r dengan komponennya sebagai berikut:

$$-\partial_r\left(\frac{a\sin\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\left[\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+2\alpha R_0^2)-m\right)\rho^2-r\big((r^2+a^2)-\Delta_{KN}\big)\right]\right)$$

$$u = \frac{a\sin\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}$$

$$u' = \frac{2a\sin\theta}{\rho^8}\left(\rho^2\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right) - 3r\Delta_{KN}\right)$$

$$v = \left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\rho^2 - r\big((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\big)$$

$$v' = 2r\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right) + \rho^2 R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) + Q^2 + \frac{5}{6}R_0 r^4(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)$$

$$-(u'v + v'u) = -\left(\left[\frac{2a\sin\theta}{\rho^8}\left(\rho^2\left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right) - 3r\Delta_{KN}\right)\right]\left[\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right)\rho^2 - r\big((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\big)\right] + \left[2r\left(\frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) - m\right) + \rho^2 R_0 r^2(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2) + Q^2 + \frac{5}{6}R_0 r^4(\alpha R_0 + 2\alpha R_0^2)\right]\left[\frac{a\sin\theta\,\Delta_{KN}}{\rho^6}\right]\right) \tag{A.10}$$

Suku kedua dari persamaan R_{03}, yaitu differensial terhadap θ dengan komponen sebagai berikut:

$$-\partial_\theta\left(\frac{a\cos\theta\big((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\big)(r^2 + a^2 + a^2\sin^2\theta)}{2\rho^6}\right)$$

$$u = a\cos\theta\big((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\big)(r^2 + a^2 + a^2\sin^2\theta)$$

$$u' = -a\sin\theta\big((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\big)(r^2 + a^2 + a^2\sin^2\theta - 2a^2\cos^2\theta)$$

$v = 2\rho^6$

$v' = -12a^2 \cos\theta \sin\theta\, \rho^4$

$$-(u'v + v'u) = 2\rho^6 a \sin\theta \left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)(r^2 + a^2 + a^2 \sin^2\theta$$

$$- 2a^2 \cos^2\theta)$$

$$+ 12a^3 \cos^2\theta \sin\theta\, \rho^4 \left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)(r^2 + a^2 + a^2 \sin^2\theta)$$

$$= 2a \sin\theta\, \rho^4 \left((r^2 + a^2) - \Delta_{KN}\right)[\rho^2(r^2 + a^2 + a^2 \sin^2\theta - 2a^2 \cos^2\theta)$$

$$+ 6a^2 \cos^2\theta\, (r^2 + a^2 + a^2 \sin^2\theta)]$$

(A.11)

LAMPIRAN 3

PERHITUNGAN DIFFERENSIAL BAB EMPAT

BAGIAN PERSAMAAN GEODESIK

Berikut adalah differensial untuk masing-masing komponen penyebut yang ada pada persamaan geodesik.

$$d' = h' = j' = n' = \partial_r \left(r^2\big((\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2\big)\right)$$

$$\begin{aligned}\partial_r \left(r^2\big((\Delta_{KN} - a^2)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2\big)\right) \\ &= [(2r(\Delta_{KN} - a^2) + 2r^2\Upsilon)(\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + 4r\Xi \\ &- 4ar^2\Upsilon(\Delta_{KN} - a^2)] \\ &+ \left[2ra(\Xi - \Delta_{KN})^2 + ar^2\big(4(\Xi - \Delta_{KN})(\Upsilon - \mathrm{r})\big)\right]\end{aligned}$$

Dengan:

$$\Upsilon = \left(r + \frac{R_0 r^3}{3}(\alpha R_0 + \alpha R_0^2) - m\right) \tag{A.12}$$

$$b' = f' = l' = p' = \partial_r \left(r^2\left((\Xi^2 - a^2\Delta_{KN}) + \frac{a^2(\Xi - \Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN} - a^2)}\right)\right)$$

$$\partial_r\left(r^2\left((\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+\frac{a^2(\Xi-\Delta_{KN})^2}{(\Delta_{KN}-a^2)}\right)\right)$$

$$=[2r(\Xi^2-a^2\Delta_{KN})+r^2(4r\Xi-2a^2\Upsilon)]$$

$$+\left[\frac{1}{(\Delta_{KN}-a^2)^2}\left((\Delta_{KN}-a^2)\left(2ra^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+2a^2r^2(\Xi-\Delta_{KN})\left(\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+\alpha R_0^2)-m\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.-2\Upsilon a^2r^2(\Xi-\Delta_{KN})^2\right)\right]$$

Dengan:

$$\Upsilon=\left(r+\frac{R_0r^3}{3}(\alpha R_0+\alpha R_0^2)-m\right)$$

(A.13)

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
Jalan Gajayana Nomor 50, Telepon (0341)551354, Fax. (0341) 572533
Website: http://www.uin-malang.ac.id Email: info@uin-malang.ac.id

JURNAL BIMBINGAN SKRIPSI/TESIS/DISERTASI

IDENTITAS MAHASISWA

NIM	:	18640046
Nama	:	TRISNA DWI LESTARI
Fakultas	:	SAINS DAN TEKNOLOGI
Jurusan	:	FISIKA
Dosen Pembimbing 1	:	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc
Dosen Pembimbing 2	:	AHMAD LUTHFIN,M.Si
Judul Skripsi/Tesis/Disertasi	:	STUDI LUBANG HITAM KERR-NEWMAN DALAM TEORI GRAVITASI F(R)

IDENTITAS BIMBINGAN

No	Tanggal Bimbingan	Nama Pembimbing	Deskripsi Proses Bimbingan	Tahun Akademik	Status
1	16 November 2022	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi Judul Skripsi	Ganjil 2022/2023	Sudah Dikoreksi
2	09 Februari 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Judul (acc) dan konsultasi Bab 1	Genap 2022/2023	Sudah Dikoreksi
3	23 Februari 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi Bab 2 dan Bab 3	Genap 2022/2023	Sudah Dikoreksi
4	07 Maret 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi Bab 1-3 untuk seminar proposal	Genap 2022/2023	Sudah Dikoreksi
5	01 Juni 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi revisi seminar proposal	Genap 2022/2023	Sudah Dikoreksi
6	15 Agustus 2023	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi hasil Bab 3	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
7	06 September 2023	AHMAD LUTHFIN,M.Si	Konsultasi Integrasi Bab 1	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
8	12 Desember 2023	AHMAD LUTHFIN,M.Si	Konsultasi Integrasi Bab 4	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
9	14 Desember 2023	AHMAD LUTHFIN,M.Si	Revisi integrasi Bab 4	Ganjil 2023/2024	Sudah Dikoreksi
10	15 Januari 2024	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi hasil Bab 4	Genap 2023/2024	Sudah Dikoreksi
11	08 Maret 2024	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Revisi seminar hasil	Genap 2023/2024	Sudah Dikoreksi
12	29 April 2024	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi revisi seminar hasil dan BAB 5	Genap 2023/2024	Sudah Dikoreksi
13	21 Mei 2024	ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc	Konsultasi revisi sidang	Genap 2023/2024	Sudah Dikoreksi

Telah disetujui
Untuk mengajukan ujian Skripsi/Tesis/Desertasi

Malang, 25 Juni 2024

Dosen Pembimbing 2

AHMAD LUTHFIN,M.Si

Dosen Pembimbing 1

ARISTA ROMADANI,S.Si., M.Sc

KEMENTERIAN AGAMA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN FISIKA
REPUBLIK INDONESIA

Ketua Kaprodi,