

UKURAN FUZZY PADA INTERVAL $[0, 1]$ DAN SIFAT- SIFATNYA

SKRIPSI

OLEH
SYIFA'UR ROHMAH
NIM. 0861003



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

UKURAN FUZZY PADA INTERVAL $[0,1]$ DAN SIFAT- SIFATNYA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
SYIFA'UR ROHMAH
NIM. 08610037

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015
UKURAN FUZZY PADA INTERVAL $[0, 1]$ DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh
Syifa'ur Rohmah
NIM. 08610037

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 23 November 2014

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Dr. H. Ahmad Barizi, MA
NIP. 19721212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

UKURAN FUZZY PADA INTERVAL $[0, 1]$ DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh
SYIFA'UR ROHMAH
NIM. 08610037

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 07 Januari 2015

Penguji Utama : H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Ketua Penguji : Dr. H. Imam Sujarwo M.Pd

Sekretaris Penguji : Hairur Rahman, M.Si

Anggota Penguji : Dr. H. Ahmad Barizi, MA

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 00
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Syifa'ur Rohmah

NIM : 08610037

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Ukuran fuzzy pada Interval $[0,1]$ dan Sifat-sifatnya
menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Desember 2014

Yang membuat pernyataan,

Syifa'ur Rohmah

NIM. 08610037

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada kedua orang tua penulis yang selalu mendidik dan membimbing penulis dengan kesempurnaan cinta yang tidak diberikan oleh siapapun.



MOTO

لَا تُؤَخِّرْ عَمَلَكَ إِلَى الْغَدِ مَا تَقْدِرُ أَنْ تَعْمَلَهُ الْيَوْمَ

Janganlah kamu menunda pekerjaanmu sampai besok jika kamu bisa mengerjakannya hari ini



KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim.

Segala puji bagi Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat serta karunia Nya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Diskritisasi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Pola Pembentukan Sel” dengan baik. Shalawat dan salam senantiasa penulis persembahkan kepada sang pioner umat, baginda Rasulullah Muhammad Saw. yang telah memberikan inspirasi kepada seluruh umat tidak terkecuali penulis untuk selalu berkarya dengan penuh semangat berlandaskan keagungan moral dan spiritual.

Penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari iringan do’a dan besarnya motivasi, dukungan, bimbingan, arahan, dorongan, semangat, spirit, pemikiran, serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini, suatu kebanggaan bagi penulis untuk memberikan penghargaan dan ucapan terima kasih yang akan disampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mujia Raharjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Maliki Ibrahim Malang.
2. Dr. Hj. Bayyinatul M., drh., M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Maliki Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Maliki Ibrahim Malang.
4. Hairur Rohman, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Skripsi I, yang telah memberikan pengarahan dan memberikan bimbingan dalam menyelesaikan skripsi ini
5. Dr. H. Ahmad Barizi, MA, selaku Dosen Pembimbing II, yang telah memberikan pengarahan dan memberikan bimbingan dalam menyelesaikan skripsi ini.
6. Bapak Sufyan, ibu Akromah, dan cacak syafi’uddin, adik Zumrotin Aliyah, adik Miftahul Fauziah, Adik achmad Zaki Fuad, yang selalu memberikan do’a, semangat, serta motivasi kepda penulis sampai saat ini.
7. Segenap dewan pengasuh PP. Sabilurrosyad Gasek, KH. Marzuki Mustamar, KH. Murtadho Amin, Ust. H. Ahmad Warsito, Ust Abd. Aziz Husein, beserta keluarga yang telah membimbing dalam kebenaran agama Islam
8. Saudara dan sahabat seperjuangan yang seangkatan jurusan matematika 2008 Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan sumbangsih berupa masukan, pemikiran, dan ide demi kelancaran selama penyelesaian skripsi berlangsung. Dan pihak-pihak lain yang selalu membantu.

Akhir kata, semoga Allah Swt. yang maha pengasih dan maha penyayang membalas semua kebaikan mereka. Semoga karya tulis ini bermanfaat, terutama kaum muslim dan dijadikan sebagai tabungan amal sampai hari pembalasan nanti, amin.

Malang, 29 Desember 2014

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIANTULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATAPENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xi
DAFTAR SIMBOL	xii
ABSTRAK	xiii
ABSTRACT	xiv
ملخص	xv
 BAB I PENDAHULUAN	
Latar Belakang	1
Rumusan Masalah.....	5
Tujuan Masalah.....	5
Manfaat Penelitian.....	6
Batasan Masalah.....	6
Metode Penelitian.....	6
Sistematika Penulisan	7
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Ukuran umum	9
2.2 Ukuran Luar	18
2.3 Ukuran Fuzzy	23
2.4 Himpunan Fuzzy.....	26
2.4.1 Operasi-operasi Himpunan Fuzzy.....	27
2.4.2 Fungsi Keanggotaan.....	29
2.5 Kajian Al – Qur'an tentang Ukuran dan Ragu-ragu.....	32
 BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Ukuran fuzzy.....	36
3.2 Sifat-sifat Ukuran	42
3.3 Integrasi antara QS Al-Qomar Ayat 49 dengan Ukuran Fuzz.....	45
 BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan.....	53
4.2 Saran.....	54
DAFTAR PUSTAKA.....	56
LAMPIRAN-LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Contoh Representasi Linear Naik	30
Gambar 2.2 Contoh Kurva Segitiga.....	31
Gambar 2.2 Contoh Kurva trapesium.....	31



DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut:

$\in$	Anggota
$\notin$	bukan anggota
$\ni$	sedemikian hingga
$\forall$	untuk semua/ untuk setiap
$\exists$	terdapat/ ada
$\cup$	union/ gabungan
$\cap$	interseksi/ irisan
$\subset$	termuat
$\supset$	memuat
∞	tak berhingga
$\emptyset$	himpunan kosong
Σ	sigma
$\langle \rangle$	barisan
$ $	nilai mutlak
$n(A)$	cacah anggota himpunan A
$p(X)$	himpunan kuasa dari himpunan X
$(X, \mathfrak{B})$	ruang terukur
$\mathbb{N}$	himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{R}$	himpunan Real

ABSTRAK

Rohmah, Syifa'ur. 2015. Ukuran Fuzzy pada interval $[0, 1]$ dan Sifat – sifatnya, Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Hairur Rahman, M.Si (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci: Ukuran, fuzzy, ukuran fuzzy

Matematika mempelajari tentang teori ukuran yang mengkonstruksikan ukuran umum dan integral terhadap ukuran umum pada himpunan. Hingga akhirnya seorang matemaikawan dari *Universitas California*, Lotfi Asker Zadeh, pada tahun 1960 mempelajari tentang ukuran fuzzy. Sebelum dibicarakan pengertian ukuran umum, lebih dahulu didefinisikan pengertian-pengertian fungsi himpunan dan himpunan terukur.

Berdasarkan latar belakang tersebut, penelitian ini dilakukan dengan tujuan untuk: menyebutkan, mendiskripsikan, menganalisis, dan membuktikan teorema-teorema yang pada Ukuran Fuzzy pada interval $[0, 1]$ dan sifat-sifatnya. Dalam hal ini peneliti akan memaparkan tentang ukuran fuzzy bersifat monoton, sifat-sifat ukuran fuzzy meliputi sifat additive, super additive, sub additive dan membuktikan teorema-teorema beserta mendiskripsikan contoh-contohnya. Ukuran fuzzy pada A dalam X adalah fungsi $g: A \rightarrow [0, 1]$ yang memberikan nilai dalam interval $[0, 1]$ untuk setiap himpunan A , yang harus memenuhi aksioma

$$(i) X \in A, g(\emptyset) = 0 \text{ dan } g(X) = 1$$

$$(ii) g(A) \leq g(B)$$

$$(iii) g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

$$(iv) g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

Penelitian ini menganalisis beberapa teorema yang merupakan sifat-sifat dari ukuran fuzzy, yaitu:

$$(1) \text{ Additive jika: } \forall A, B \in P(X) \text{ maka } g(A \cup B) = g(A) + g(B)$$

$$(2) \text{ super-additive jika } \forall A, B \in P(X) \text{ maka } g(A \cup B) \geq g(A) + g(B)$$

$$(3) \text{ sub-additive jika } \forall A, B \in P(X), \text{ maka } g(A \cup B) \leq g(A) + g(B).$$

ABSTRACT

Rohmah, Syifaaur. 2015. The Fuzzy Measure On Interval [0,1] and its Properties. Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor (1) HairurRahman, M.Si(2) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Keywords: Measure, fuzzy, fuzzy measure

Mathematics talk about theory of measure that construct a general measure and integral of general measure of a set. On 1960 a mathematician of California university, Lotfi Asker Zaedah, did a research about fuzzy measure. Before going forth to the general measure, first we define a function set and measure set.

Based on this background, this study was conducted to: mention, describe, analyze, and prove theorems on fuzzy measure on the interval [0,1] and its properties. In this thesis, the author will explain about the measure fuzzy monotonous, its properties including the additive, superadditive, sub-additive property and prove theorems along with describing examples. Fuzzy measure of A in X is a function $g: A \rightarrow [0, 1]$ that gives the values in the interval $[0, 1]$ for any set A , which should satisfy the axioms

$$(i) X \in A, g(\emptyset) = 0 \text{ dan } g(X) = 1$$

$$(ii) g(A) \leq g(B)$$

$$(iii) g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

$$(iv) g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

In this study the author analyzed several theorems which are the properties of the Fuzzy Measure, namely:

$$(1) \text{ Additive if: } \forall A, B \in P(X) \text{ then } g(A \cup B) = g(A) + g(B)$$

$$(2) \text{ super-additive if } \forall A, B \in P(X) \text{ then } g(A \cup B) \geq g(A) + g(B)$$

$$(3) \text{ sub-additive if } \forall A, B \in P(X), \text{ then } g(A \cup B) \leq g(A) + g(B)$$

ملخص

رحمة, شفاء. 2015. حجمغامض في الفترة الفاصلة [0,1] وخصائصه ، بحث جامعي، الشعبة الرياضيت. كلية العلوم والتكنولوجيا . الجامعة الإسلامية الحكومية المولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: حيرو الرحمن الماجستير و دكتور أحمد باريزي الماجستير

الكلمات الرئيسية: قياس،ضباب، وقياس ضباب

تعلم الرياضيات عن نظرية القياس وبناء قياس عام والتكامل لقياس عام عن مجموعة. وهو عالم الرياضيات من جامعة كاليفورنيا، لطفي أسكير زاده ، في عام 1960 درس عن قياس ضباب. وقبل أن نتحدث عن القياس العام، نحدد عن تعريف دالة المعخوعة والمخوعة المقاس

وبناء على هذه الخلفية، هذه الدراسة تهدف الى: ذكر ووصف وتحليل، وتشبيث النظريات على مقياس غامض على الفترة [0, 1] وخصائصه. في هذه الحالة الكاتبة أشرح عن قياس ضباب ، وتشمل خصائص قياس ضباب، additive, super additive, sub additive وتشبيث النظريات وأمسلته. قياس ضباب عن A في X هي دالة $g: A \rightarrow [0, 1]$ التي تعطي الأرقام في $(0,1)$ لكل مجموعة A ، التي يجب أن ترضي البديهيات

$$g(X) = 1 \text{ و } X \in A, g(\emptyset) = 0 \text{ i}$$

$$g(A) \leq g(B) \text{ ii}$$

$$(iii) g(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n) \text{ iii}$$

$$(iv) g(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n) \text{ iv}$$

في هذه الدراسة بتحليل عدة نظريات التي هي خصائص القياس غامض، وهي:

$$g(A \cup B) = g(A) + g(B) \text{ ثم } \forall A, B \in P(X) \text{ additive 1}$$

$$g(A \cup B) \geq g(A) + g(B) \text{ ثم } \forall A, B \in P(X) \text{ Super additive 2}$$

$$g(A \cup B) \leq g(A) + g(B) \text{ ثم } \forall A, B \in P(X) \text{ Sub additive 3}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori ukuran merupakan suatu ilmu utama yang termasuk di dalam kelompok analisis dan merupakan pembahasan pokok dalam kalkulus, serta merupakan salah satu topik yang terdepan. Seperti ilmu-ilmu yang lain dalam matematika, maka teori ukuran modern bukanlah subyek mati dan masih tetap berkembang luas seperti ilmu-ilmu lainnya baik dari segi teori maupun pemakaiannya. Selain itu, konsep ukuran lebih menekankan pada variabel real dengan teori utama kalkulus modern.

Teori ukuran didasarkan pada suatu teori dari himpunan terukur. Ide dan gagasan teori ukuran berasal dari suatu himpunan yang dalam urutannya didasarkan pada ide primitif dan klasik dari ukuran (volume) suatu interval. Pendekatan alternatif dari suatu ukuran akan mempertimbangkan suatu keluarga dari himpunan dan mengasumsikan bahwa mereka semu mempunyai ukuran. Hal itu mengasumsikan bahwa setiap anggota dari himpunan dapat diklasifikasikan dalam anggota yang memenuhi dasar dan syarat dari suatu ukuran (Paul, 1978:121).

Ukuran fuzzy adalah fungsi himpunan monoton terpakai untuk memodelkan kekuatan dari kesatuan kriteria di multicriteria pembuatan keputusan. Semua hal yang terdapat di alam semesta ini diciptakan-Nya dengan perhitungan (ukuran). Seperti yang dijelaskan dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49

إِنَّا كُنَّا نَخْلُقُهَا بِقَدَرٍ (٤٩)

Artinya: Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran (Q.S. Al-Qomar 54:49)

Dalam al-Qur'an menjelaskan Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya yang diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mampu dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.(Abdussakir,2007: 79)

Mengukur teori fuzzy yang sekarang berkembang dengan baik[wang danklir, 1992], bukan darikepentingan utamadalam teks ini. Namun, kita perlu memperkenalkan konsep ukuran fuzzy untuk setidaknya dua alasan. pertama, konsep ini akan memberikan kita dengan kerangka kerja yang luas di mana akan lebih mudah untuk memperkenalkan dan meneliti teori kemungkinan, sebuah teori yang sangat berhubungan dengan teori himpunan fuzzy dan memainkan peran penting dalam beberapa aplikasi. Kedua, ia akan memungkinkan kita untuk menjelaskanperbedaanantara teorihimpunan fuzzydan teoriprobabilitas. Penelitian ini merupakan eksplorasi spesifik dalam melengkapi *Fuzzy Logic* yang akhir-akhir ini berkembang sngat pesat dan digeneralisasi aplikasinya pada bidang Matematika maupun lintas Matematika.

Konsep logika erat kaitannya dengan konsep himpunan, karena himpunan merupakan konsep dasar dari semua cabang matematika. Seperti halnya konsep yang terdapat pada logika, dalam konsep himpunan terdapat istilah himpunan tegas dan himpunan fuzzy. Dalam himpunan tegas terdapat batas yang tegas

Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, di mana pada manusia sering terjadi keragu-raguan dalam hal kepercayaan, seperti yang terdapat dalam Q.S. An-Nisaa ayat 143:

Ayat di atas menjelaskan tentang golongan yang masih diragukan kedudukannya apakah mereka iman atau kafir pada Allah SWT. Golong anter sebut disebut dengan orang-orang munafik. Dalam ayat lainnya dijelaskan secara tegas bahwa “orang munafik adalah orang yang fasik” juga diterangkan dalam al-Qur’an surat Taubah ayat 67

Artinya: Orang-orang munafik laki-laki dan perempuan. Sebagian dengan sebagian yang lain adalah sama, mereka menyuruh membuat yang

munkar dan melarang berbuat yang ma'ruf dan mereka menggenggamkan tangannya. Mereka telah lupa kepada Allah, maka Allah melupakan mereka. Sesungguhnya orang-orang munafik itu adalah orang-orang yang fasik. (Q.S. At-Taubah 9:67)

Akan tetapi karena orang munafik memiliki sifat-sifat khusus yang membuat beberapa orang menganggap munafik dan fasik itu berbeda. Sehingga dianggap perlu untuk memperlakukan munafik sebagai kategori yang berbeda yang sama tingkatannya dengan kafir dan iman dalam pembagian seluruh bidang akhlak islam menjadi 3 kategori utama: (1) Mukmin "orang yang percaya", (2) Kafir "orang yang tidak percaya", (3) Munafik "hipokrit". Beberapa ahli filologi Arab menilai munafik sebagai salah satu jenis dari kafir, dan menyebutkan "kufr al-nifaq", yang secara harfiah "jenis munafik dari kafir". Akan tetapi terdapat pendapat tertentu di mana munafik muncul lebih diperlakukan secara tepat sebagai suatu kategori semantikin dependen yang terdapat diantara "percaya" dan "tidak percaya". Jika diintegrasikan dalam teori fuzzy, maka orang munafik merupakan suatu anggota himpunan yang memiliki derajat keanggotaan pada interval $[0, 1]$. Di mana derajat keanggotaan 1 untuk orang yang beriman dan derajat keanggotaan 0 untuk orang yang kafir (Izutsu, 1993: 213).

Sebelum munculnya teori logika fuzzy (*Fuzzy Logic*), dikenal sebuah logika tegas (*Crisp Logic*) yang memiliki nilai benar atau salah secara tegas. Sebaliknya, logika fuzzy merupakan sebuah logika yang memiliki nilai kekaburan atau kesamaran antara benar dan salah. Dalam contoh kehidupan kita, seseorang dikatakan sudah dewasa apabila berumur lebih dari 17 tahun, maka siapapun yang kurang dari umur tersebut di dalam logika tegas akan dikatakan sebagai tidak

dewasa atau anak-anak. Sedangkan dalam hal ini pada logika fuzzy umur dibawah 17 tahun dapat saja dikategorikan dewasa tapi tidak penuh, misal untuk umur 16 tahun atau 15 tahun atau 13 tahun (Anonim, 2008).

Membership Function (derajat keanggotaan) dan *Fuzzy Sets* (himpunan fuzzy) merupakan hal dasar dalam pengembangan logika klasik menjadi *Fuzzy Logic*. Sementara logika klasik tetap dapat direpresentasikan secara *Fuzzy Logic*. Misalnya titik dan garis dalam geometri klasik dapat direpresentasikan secara *Fuzzy Logic* dengan derajat keanggotaan 1. Tetapi berkembang dengan ketebalan yang berbeda dan atau pemberian warna yang berbeda untuk derajat keanggotaan yang berbeda.

Berdasarkan paparan di atas, maka pada penelitian ini penulis mengangkat tema yang berjudul “**ukuran Fuzzy pada interval $[0,1]$ dan sifat – sifatnya**”

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana definisi ukuran fuzzy pada interval $[0,1]$
2. Bagaimana menjelaskan sifat-sifat dari ukuran fuzzy pada interval $[0,1]$

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasar rumusan masalah diatas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui dan menjelaskan definisi ukuran fuzzy pada interval $[0,1]$
2. Mengetahui dan menjelaskan sifat-sifat dari ukuran fuzzy pada interval $[0,1]$

1.4 Manfaat Penelitian

a. Bagi penulis

Untuk memperdalam pemahaman penulis mengenai analisis riil dan fuzzy serta mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji suatu permasalahan ukuran dan fuzzy khususnya tentang ukuran fuzzy pada interval $[0,1]$ dan sifat - sifatnya.

b. Bagi Lembaga

Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan perkuliahan, khususnya materi tentang probabilitas ukuran fuzzy. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang materi ukuran fuzzy.

c. Bagi pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai analisis riil dan fuzzy pada matematika. Khususnya tentang ukuran fuzzy

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis membatasi ukuran fuzzy dikaji pada interval $[0,1]$

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode kajian pustaka (*Library research*), yakni dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan penelitian yang telah diangkat oleh penulis. Adapun metode literatur terdiri atas:

a. **literatur utama yang dijadikan sebagai acuan adalah:**

Adapun Literatur utama yang penulis gunakan adalah sebuah buku yang berjudul “Fuzzy Measures” oleh Mark Burgin

b. literatur pendukung yang digunakan adalah:

1. Zadeh, L.A. (1978) dalam bukunya yang berjudul “*Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems*”,
2. Zimmermann, H. J. Dalam bukunya yang berjudul “*Fuzzy Set Theory and Its Applications*”,
3. Dan literatur-literatur yang bersumber dari buku kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan dalam penelitian ini.

Langkah selanjutnya adalah mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan. Langkah-langkah tersebut meliputi:

1. Merumuskan masalah
2. Mengumpulkan data
3. Menganalisis data :
 - Mendefinisikan ukuran fuzzy
 - Membuktikan teorema-teorema dari ukuran fuzzy pada interval[0,1]
 - Memberikan contoh dan mendeskripsikannya
4. Membuat kesimpulan dari pembahasan penelitian.

1.7 Sistematika Pembahasan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini kedalam empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN :

Pada bab ini penulis memaparkan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian serta sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI:

Penulis membahas tentang landasan teori yang dijadikan ukuran standarisasi dalam pembahasan pada bab yang merupakan tinjauan teoritis, yaitu tentang teori ukuran umum, ukuran luar, ukuran fuzzy, himpunan fuzzy, kajian Al-Qur'an

BAB III PEMBAHASAN :

Dalam bab ini dipaparkan pembahasan tentang analisis dari ukuran fuzzy pada interval $[0,1]$ yang disertai dengan pembuktian dari teorema-teorema yang mendasarinya dan sifat-sifatnya

BAB IV PENUTUP :

Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Ukuran Umum

Sebelum dibicarakan terdiri pengertian ukuran umum, lebih dahulu didefinisikan pengertian-pengertian fungsi himpunan, ruang terukur dan himpunan terukur

Definisi 2.1.1 Fungsi himpunan μ adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu himpunan-himpunan ke dalam himpunan semua bilangan real diperluas R^*

Definisi 2.1.2 Diberikan himpunan sembarang X dan σ aljabar himpunan $\mathfrak{B}$ terdiri dari himpunan-himpunan bagian dari X pasangan $(X, \mathfrak{B})$ disebut ruang terukur.

Definisi 2.1.3 Misalkan $(X, \mathfrak{B})$ sembarang ruang terukur. Himpunan bagian A dari X disebut himpunan terukur apabila $A \in \mathfrak{B}$.

Definisi 2.1.4 Diberikan ruang terukur sembarang $(X, \mathfrak{B})$. Ukuran μ pada $(X, \mathfrak{B})$ adalah fungsi himpunan yang didefinisikan pada $\mathfrak{B}$ sedemikian hingga memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut

- 1) $(A \in \mathfrak{B}) \implies \mu(A) \geq 0$ (non negatif)
- 2) $\mu(\emptyset) = 0$
- 3) Jika $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ barisan himpunan-himpunan terukur saling asing maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(countably additive)

Jika μ ukuran pada ruang terukur $(X, \mathfrak{B})$ maka $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ disebut ruang ukuran.

Contoh 2.1.5

$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ dengan X himpunan uncountable (tak terbilang),

$\mathfrak{B} = \{A \subset X \mid A \text{ terbilang atau } A^c \text{ terbilang}\}$ dan μ ukuran yang didefinisikan pada $\mathfrak{B}$ dengan rumus

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{jika } A \text{ terbilang} \\ 1 & \text{jika } A^c \text{ terbilang} \end{cases}$$

Contoh 2.1.6

$([0,1], \mathfrak{B}, \mu)$ dengan $\mathfrak{B} = \{A \subset$

$[0,1] \mid A \text{ himpunan terukur Lebesgue}\}$ dan μ adalah menghitung ukuran yang didefinisikan dengan rumus

$$\mu(A) = \begin{cases} n(A), & \text{jika } A \text{ berhingga} \\ \infty, & \text{jika } A \text{ tak berhingga} \end{cases}$$

Mengenai sifat-sifat ukuran μ yang didefinisikan pada suatu ruang terukur $(X, \mathfrak{B})$ terdapat di dalam proposisi-proposisi berikut ini

Proposisi 2.1.7 (sifat Monoton)

Jika $A \in \mathfrak{B}, B \in \mathfrak{B}$ dan $A \subset B$

maka $\mu(A) \leq \mu(B)$

Bukti: karena $B = A \cup (B - A)$ gabung 2 himpunan saling asing

Maka $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$

Proposisi 2.1.8

Jika $E_1 \in \mathfrak{B}, \mu(E_1) < \infty$ dan $E_1 \supset E_{i+1}$ untuk semua $i \in \mathbb{N}$

Maka

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow 1} \mu(E_i).$$

Bukti:

Misalkan

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Maka

$$E_1 = E \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i + E_{i+1})$$

Karena merupakan gabungan himpunan – himpunan terukur saling asing maka:

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i + E_{i+1}).$$

Karena $E_i = E_{i+1} \cup (E_i + E_{i+1})$

maka $\mu(E_1) = \mu(E_i + E_{i+1})$,

sebab $\mu(E_{i+1}) \leq \mu(E_i) \leq \mu(E_1) \leq \infty$

$$\mu(E_1) = \mu(E) + \sum_{i=1}^{\infty} [\mu(E_i) - \mu(E_{i+1})]$$

$$= \mu(E) + \mu(E_1) - \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$$

Karena $\mu(E_1) < \infty$

Maka

$$\mu(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(E_i)$$

Proposisi 2.1.9 (countably subadditive)

Jika $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ dengan $E_n \in \mathfrak{B}$

Maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Bukti :

Misalkan

$$G_n = E_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$$

Maka $G_n \subset E_n$, $\langle G_n \rangle n \in \mathbb{N}$ barisan himpunan- himpunan terukur saling asing dan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Karena $\mu(G_n) \leq \mu(E_n)$

Maka

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Definisi 2.1.10 Diberikan ruang ukuran $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Ukuran μ disebut ukuran berhingga, jika $\mu(X) < \infty$ dan disebut ukuran σ berhingga, jika ada barisan himpunan- himpunan terukur

$$\langle X_n \rangle n \in \mathbb{N} \ni X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

dan $\mu(X) < \infty$

Definisi 2.1.11 Suatu himpunan E disebut berukuran berhingga jika $\mu(X) < \infty$

dan disebut berukuran σ berhingga, jika ada $\langle E_n \rangle n \in \mathbb{N} \ni E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ dan E_n berukuran berhingga.

Lema 2.1.12 Jika $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ suatu ruang ukuran σ berhingga maka setiap himpunan terukur berukuran σ berhingga.

Bukti: dari definisi ukuran σ berhingga ada barisan himpunan- himpunan terukur

$$\langle X_n \rangle n \in \mathbb{N} \ni X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ dan } \mu(X) < \infty.$$

Ambil $E \in \mathfrak{B}$,

Maka

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap E) \text{ dan } \mu(X_n \cap E) < \infty$$

Contoh 2.1.13 $([0,1], \mathfrak{M}, m)$ ruang ukuran berhingga, sedangkan $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, m)$ ruang ukuran σ berhingga sebab ada

$$X_n = [-n, -n+1] \cup [n-1, n]$$

Dengan

$$R = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ dan } m(X_n) < \infty$$

Definisi 2.1.14 Diberikan ruang ukuran $(X, \mathfrak{B}, \mu)$. Ukuran μ disebut semifinite jika setiap himpunan terukur dengan ukuran tak hingga memuat himpunan terukur dengan ukuran berhingga besar sembarang.

Lema 2.1.15 Misalkan $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ suatu ruang ukuran. Jika μ ukuran σ berhingga maka μ ukuran semifinite.

Bukti: Dari μ ukuran σ berhingga ada barisan himpunan-himpunan terukur

$$\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \ni X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \text{ dan } \mu(X_n) < \infty$$

Dapat dipilih $\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ yang saling asing.

Ambil sembarang $E \in \mathfrak{B}, \mu(E) = \infty$.

Misalkan $E_n = X_n \cap E$

Maka $\mu(E) < \infty, \langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$

Barisan himpunan-himpunan terukur saling asing dan $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Oleh karena itu

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Jika diberikan M dengan $0 < M < \infty$,

Maka

$$N \in \mathbb{N} \ni \sum_{n=1}^N \mu(E_n) > M$$

Jika diambil

$$P = \bigcup_{n=1}^N E_n$$

Maka $\mu(P) > M$.

Karena M dan E sembarang, maka setiap himpunan terukur dengan ukuran tak berhingga memuat himpunan terukur dengan ukuran berhingga besar sembarang.

Definisi 2.1.16 Suatu ruang ukuran $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ disebut lengkap (complete), jika $\mathfrak{B}$ memuat semua himpunan-himpunan bagian dari himpunan-himpunan berukuran 0. Yaitu jika $B \in \mathfrak{B}, \mu(B) = 0$ dan $A \subset B$ maka $A \in \mathfrak{B}$.

Tidak semua ruang ukuran adalah lengkap, tetapi dengan proposisi berikut ini setiap ruang ukuran dapat dijadikan lengkap.

Proposisi 2.1.17 Jika $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ suatu ruang ukuran maka ada ruang ukuran lengkap $(X, \mathfrak{B}_0, \mu_0)$ sedemikian hingga

$$(i). \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}_0$$

$$(ii). E \in \mathfrak{B} \implies \mu(E) = \mu_0(E).$$

$$(iii). E \in \mathfrak{B}_0 \iff E = A \cup B \text{ dengan } B \in \mathfrak{B}, A \subset C, C \in \mathfrak{B} \text{ dan } \mu(C) = 0.$$

Ruang ukuran $(X, \mathfrak{B}_0, \mu_0)$ disebut pelengkapan dari ruang ukuran $(X, \mathfrak{B}, \mu)$.

Bukti :

Dapat dibuktikan bahwa $\mathfrak{B}_0$ merupakan σ aljabar himpunan.

$$\text{Jika } E \in \mathfrak{B}_0$$

Maka $\mu(B), \forall B \in \mathfrak{B}$ yang memenuhi

$$E = A \cup B \text{ dengan } A \subset C, C \in \mathfrak{B} \text{ dan } \mu(C) = 0$$

Sebab kalau $E = A \cup B = X \cup B$ dengan $Y \in \mathfrak{B}$

$$X \subset Z, \quad Z \in \mathfrak{B} \text{ dan } \mu(Z) = 0$$

Maka

$$\mu(E) \geq \mu(Y) \text{ dan}$$

$$\mu(E) \geq \mu(B)$$

Oleh karena itu

$$\mu(B) = \mu(E) = \mu(Y)$$

Jika $E \in \mathfrak{B}_0, E = A \cup B$ dengan

$B \in \mathfrak{B}, A \subset C, C \in \mathfrak{B}$ dan

$$\mu(C) = 0$$

Didefinisikan suatu ukuran μ_0 pada $\mathfrak{B}_0$ dengan Rumus

$$\mu_0(E) = \begin{cases} \mu(E) & \text{jika } E \in B \\ \mu(B) & \text{jika } E \notin B \end{cases}$$

Jika $E \in B$

Maka, $E = A \cup B \in \mathfrak{B}$

Didefinisikan $\mu_0(E) = \mu(E)$

Jika $A \notin B$, maka $C \notin B$

Tetapi $A \subset C \in \mathfrak{B}$

Jadi $E \subset C \cup B \in \mathfrak{B}$

Kalau μ_0 ukuran pada $\mathfrak{B}_0$

Maka $\mu_0(E) \leq \mu_0(C \cup B) = \mu(C \cup B) = \mu(B)$

Karena $B \subset C$

Maka berlaku $\mu_0 = \mu(B) \leq \mu_0(E)$

Oleh karena itu

$$\mu_0(E) = \mu(B)$$

2.2 Ukuran Luar

Sebelum membahas ukuran luar, akan dibahas mengenai koleksi, aljabar himpunan, aljabar σ , dan panjang interval.

Koleksi A adalah himpunan yang beranggotakan himpunan-himpunan, sehingga $A = \{A : A \subseteq X\}$, untuk $X \neq \varnothing$. Menurut Royden, Koleksi $A = \{A : A \subseteq X\}$ disebut aljabar himpunan atau aljabar Boolean jika

$$1. A \cup B \in A, \text{ untuk } \forall A, B \in A$$

$$2. A^c \in A, \text{ untuk } \forall A \in A.$$

$$3. A \cap B \in A, \text{ untuk } A, B \in A.$$

Sedangkan, koleksi $A = \{A : A \subseteq X\}$ disebut aljabar σ jika

$$1. \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in A, \text{ untuk } \forall A_i \in A$$

$$2. A^c \in A, \text{ untuk } \forall A \in A.$$

Di bawah ini, akan dibahas mengenai panjang interval dan ukuran luar.

Diberikan interval terbatas $I \subseteq \mathbb{R}$ dengan titik-titik ujungnya a dan b sehingga $a \leq b$. Panjang interval I , ditulis $l(I)$.

$$l(I) = b - a$$

Contoh :

Diketahui interval $I = (0,1)$, maka panjang interval $l(I) = 1 - 0 = 1$.

Teorema 2.2.1(Gupta, 1976 : 56)

Diberikan himpunan $E, F \subset \mathbb{R}$.

- a) $m^*(E) \geq 0$, untuk semua himpunan E .
- b) $m^*(\varnothing) = 0$.
- c) Jika diberikan himpunan E dan F dengan $E \subset F$, maka $m^*(E) \leq m^*(F)$.
- d) $m^*(E) = 0$, untuk setiap himpunan E singleton.
- e) Fungsi m^* bersifat translasi invarian artinya $m^*(E + x) = m^*(E)$ untuk setiap

himpunan E dan $x \in \mathbb{R}$.

Bukti:

Diberikan himpunan *countable* $J = \{I_i / I_i \text{ interval terbuka yang saling asing}\}$ dan

himpunan $E \subset \mathbb{R}$. *Subfamily* C dari keluarga J adalah

$$C = \{J : J \text{ covers } E\} = \{J : E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\} \text{ dengan } E \neq \varnothing$$

a) Setiap $l(I_{ni}) \geq 0$, sehingga $l(J_n) \geq 0$, untuk setiap $n \in N$ dan $i = 1, 2, 3, \dots$,

Sehingga

$$m^*(E) = \inf \{ l(J) : J \text{ cover } E \} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni}) \right\} = 0$$

b). Karena $\varnothing$ adalah interval yang tidak mempunyai anggota, maka

untuk setiap $l(I_{ni}) = 0$, maka $l(J_n) = 0$, untuk setiap $n \in N$.

Sehingga

$$m^*(\varnothing) = \inf \{ l(J) : J \text{ cover } \varnothing \} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni}) \right\} = 0$$

Terbukti bahwa $m^*(\varnothing) = 0$

c). Karena $E \subset F$ maka $m^*(E) = \inf \{ l(J) : J \text{ cover } E \subset F \}$.

$$m^*(F) = \inf \{ l(J) : J \text{ cover } F \}.$$

Karena $l(J_n) = 0$,

$$\text{maka } \inf \{ l(J) : J \text{ cover } E \subset F \} \leq \inf \inf \{ l(J) : J \text{ cover } F \}.$$

$$m^*(E) \leq m^*(F)$$

Terbukti $E \subset F$, maka $m^*(E) \leq m^*(F)$.

d). Misalkan $E = \{x\}$ himpunan singleton.

untuk setiap

$$n \in \mathbb{N}, J_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

Dengan

$$I_i = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } I_i = \varnothing, \forall i \geq 2.$$

Sehingga $l(J_n) = \frac{2}{n}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Maka } m^*(E) = \inf \{l(J) : J \text{ cover } E\} = \inf \{2, 1, \frac{3}{2}, \dots\} = 0.$$

Terbukti bahwa $m^*(E) = 0$, untuk setiap himpunan A singleton.

e) Diberikan setiap interval I dengan titik ujungnya a dan b . Maka himpunan

$I + x$ mempunyai titik ujung $a + x$ dan $b + x$.

$$l(I + x) = b + x - (a + x) = b - a = l(I).$$

Akan ditunjukkan bahwa $m^*(E + x) \leq m^*(E)$.

Diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat koleksi terhitung $\{I_{ni}\}$ dari interval terbuka

sedemikian sehingga

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni},$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan berlaku

$$l(J_n) < m^*(E) + \varepsilon.$$

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$$

maka

$$E + x \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (I_i + x),$$

sehingga

$$m^*(E + x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni} + x) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_{ni}) + m^*(E) + \varepsilon, \text{ untuk setiap } n \in N.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, diperoleh $m^*(E + x) \leq m^*(E)$.

Akan ditunjukkan bahwa $m^*(E + x) \geq m^*(E)$.

Sedangkan, $E = (E + x) - x$, maka $E \subset (E + x)$.

$\{I_{ni}\}$ adalah koleksi terhitung dari interval terbuka yang saling asing

sedemikian sehingga

$$E + x \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni} \text{ maka } E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{ni}$$

$$E \subset (E + x) \text{ maka } m^*(E) \leq m^*(E + x).$$

b) Dari (a) dan (b) didapatkan $m^*(E) = m^*(E + x)$.

Terbukti bahwa $m^*(E + x) = m^*(E)$, untuk setiap himpunan E dan $x \in \mathfrak{R}$.

Teorema 2.2.2(Gupta, 1976 : 58)

Diberikan koleksi terhitung himpunan-himpunan $\{E_n\}$, maka

$$m^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_n m^*(E_n)$$

Bukti :

Jika $m^*(E_n) = \infty$ untuk beberapa $n \in N$ maka pertidaksamaan trivial.

Asumsikan bahwa $m^*(E_n) < \infty$, untuk masing-masing $n \in N$. Diberikan $\varepsilon > 0$,

terdapat koleksi terhitung $\{I_{n,i}\}$ dari interval terbuka sedemikian sehingga

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i},$$

berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(I_{n,i}) < m^*(E_n) + 2^{-n} \varepsilon \quad (1)$$

Karena

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n,i} \text{ maka } \bigcup_{i=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{n,i}$$

sehingga

$$m^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n \right) < \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} l(I_{n,i}) \quad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) maka diperoleh

$$m^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n \right) < \sum_{i=1}^{\infty} (m^*(E_n) + 2^{-n} \varepsilon)$$

$$m^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n \right) < \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_n) + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n} \varepsilon$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$
maka

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

2.3 Ukuran Fuzzy

Himpunan kabur pada dasarnya mendeskripsikan keadaan tidak tegas (kekaburan) yang terdapat pada suatu himpunan, yaitu ketidak tegasan batas antara unsure-unsur yang merupakan anggota himpunan itu dan unsure-unsur yang bukan anggota himpunan itu sendiri. Ketidak tegasan atau kekaburan itu berbeda-beda pada himpunan kabur yang satu dengan yang lainnya. Setiap himpunan kabur mempunyai derajat kekaburan tertentu yang dapat dinyatakan dengan suatu bilang real dalam selang tertutup $[0,1]$. Ukuran kekaburan (sering sekali juga disebut entropi) dari suatu himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah ukuran atau indeks yang menyatakan derajat kekaburan dari himpunan kabur $\tilde{A}$ itu, dengan notasi

$$\mathcal{E}(\tilde{A}) \in [0,1].$$

Secara umum, ukuran kekaburan dari himpunan kabur dapat didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\mathcal{E}: \mathcal{F}(X) \rightarrow [0,1]$, di mana $\mathcal{F}(X)$ adalah kelas semua himpunan kabur pada semesta X . Tentu saja pemetaan $\mathcal{E}$ itu harus memenuhi syarat-syarat tertentu agar dapat mencerminkan ciri-ciri ukuran kekaburan yang diharapkan secara intuitif.

Syarat-syarat tersebut adalah sebagai berikut:

- a) $\mathcal{E}(\tilde{A}) = 0$ jika dan hanya jika $\tilde{A}$ adalah himpunan tegas

b) $\mathcal{E}(\tilde{A}) = 1$ jika dan hanya jika $\tilde{A}$ adalah himpunan yang paling kabur, yaitu

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0,5 \text{ untuk setiap } x \in X$$

c) Jika $\tilde{A}$ kurang kabur dari $\tilde{B}$, maka $\mathcal{E}(\tilde{A}) \leq \mathcal{E}(\tilde{B})$.

Himpunan kabur $\tilde{A}$ dikatakan kurang kabur dari himpunan kabur

$\tilde{B}$ ($\tilde{B}$ lebih kurang dari $\tilde{A}$) jika untuk setiap $x \in X$ berlaku:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \mu_{\tilde{B}}(x) \text{ bila } \mu_{\tilde{B}}(x) \geq 0,5,$$

$$\text{dan } \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \text{ bila } \mu_{\tilde{B}}(x) \leq 0,5.$$

$$\mathcal{E}(\tilde{A}) = \mathcal{E}(\tilde{A}')$$
 untuk setiap $\tilde{A} \in \mathcal{F}(X)$

Contoh

Menurut sugeno (1974) memperkenalkan konsep ukuran fuzzy

Misalkan $p(X)$ adalah himpunan dari semua subset dari himpunan X dan A adalah borel set dari $P(X)$ secara $A \subseteq P(X)$.

Definisi 2.3.1 ukuran fuzzy pada A dalam X menurut (sugeno) adalah fungsi $g: A \rightarrow [0, 1]$ yang memberikan angka dalam interval $[0,1]$ untuk setiap himpunan dari A sehingga memenuhi:

1. $X \in A, g(\emptyset) = 0$ dan $g(X) = 1$, yaitu, fungsi g adalah bernorma.

2. fungsi g adalah monoton, yaitu, sembarang A dan B dari A , inklusi $A \subseteq B$ berarti $g(A) \leq g(B)$

3. untuk sembarang barisan non-decreasing $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots$ dari himpunan A , persamaan berikut ini berlaku sebagai berikut:

$$g(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

4. untuk sembarang barisan non-increasing $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots$ dari himpunan A persamaan memenuhi sebagai berikut:

$$g(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

Jika $A \in A$, maka nilai $g(A)$ disebutkan ukuran fuzzy

Definisi 2.3.2 Ukuran fuzzy pada A dalam X menurut (Zimmermann) adalah fungsi $g: A \rightarrow [0, 1]$ yang memberikan angka dalam interval $[0,1]$ untuk setiap himpunan dari A sehingga memenuhi:

$$1. g(\emptyset) = 0 \text{ dan } g(X) = 1$$

$$2. \text{sembarang } A \text{ dan } B \text{ dari } A, \text{ inklusi } A \subseteq B \text{ berarti } g(A) \leq g(B)$$

3. untuk sembarang barisan non-decreasing $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots$ dari himpunan A , persamaan berikut ini berlaku sebagai berikut:

$$g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

Definisi 2.3.3 Ukuran fuzzy pada B dalam X menurut (klir and Wang) adalah fungsi $g: B \rightarrow R^+$ yang memberikan setiap himpunan dari B adalah positif angka realnya, disebut monoton:

$$g(\emptyset) = 0$$

Sembarang A dan B dari B , inklusi $A \subseteq B$ berarti $g(A) \leq g(B)$.

2.4 Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy mempunyai peranan yang penting dalam perkembangan matematika khususnya dalam matematika himpunan. Matematikawan German George Cantor (1845-1918) adalah orang yang pertama kali secara formal

mempelajari konsep tentang himpunan, Jantzen. Teori himpunan selalu dipelajari dan di terapkan sepanjang masa, bahkan sampai saat ini matematikawan selalu mengembangkan tentang bahasa matematika (teori himpunan). Banyak penelitian-penelitian yang menggunakan teori himpunan fuzzy dan saat ini banyak literatur-literatur tentang himpunan fuzzy, misalnya yang berkaitan dengan teknik kontrol, *fuzzy logic* dan relasi fuzzy.

Ide himpunan fuzzy (*fuzzy set*) diawali dari matematika dan teori system dari L.A Zadeh, pada tahun 1965. jika diterjemahkan, “fuzzy” artinya tidak jelas/buram, tidak pasti. Himpunan fuzzy adalah cabang dari matematika yang tertua, yang mempelajari proses bilangan random: teori probabilitas, statistik matematik, teori informasi dan lainnya. Penyelesaian masalah dengan himpunan fuzzy lebih mudah dari pada dengan menggunakan teori probabilitas (konsep pengukuran).(Sudrajat, 2008).

Ada beberapa definisi mengenai teori Fuzzy Set yang diberikan oleh para ahli baik dari dalam maupun dari luar negeri yang mencoba menggambarkan secara garis besar makna istilah tersebut. Menurut Zadeh (1987), Fuzzy Set adalah himpunan obyek-obyek baik konkret maupun abstrak dengan batasan yang tidak jelas sehingga keanggotaan obyek dalam himpunan lebih cenderung merupakan suatu tingkatan atau derajat daripada suatu batasan anggota atau bukan anggota. Sedangkan menurut Hadipriyono (1986), Fuzzy Set adalah himpunan pernyataan yang memiliki arti namun definisinya tidak jelas sehingga penilaian yang dilakukan terhadap pernyataan tersebut tergantung dari persepsi tiap individu.

2.4.1. Operasi-operasi Himpunan Fuzzy

a. Komplemen himpunan fuzzy

komplemen dari himpunan A dalam semesta X , dengan notasi A' , adalah himpunan semua anggota semesta yang bukan anggota himpunan A , yaitu

$$A' = \{x \in X | x \notin A\}$$

Kalau A adalah himpunan semua bilangan positif dalam semesta himpunan semua bilangan bulat, maka A' adalah himpunan semua bilangan negative atau nol

Contoh:

Misalkan ada 2 himpunan fuzzy yang dipresentasikan secara diskret sebagai berikut:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0,3}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,3}{5} \right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{0,5}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,5}{5} \right\}$$

Maka:

$$\tilde{A}' = \left\{ \frac{0,7}{1} + \frac{0,6}{2} + \frac{0,8}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,7}{5} \right\}$$

$$\tilde{B}' = \left\{ \frac{0,5}{1} + \frac{0,7}{2} + \frac{0,9}{3} + \frac{0,6}{4} + \frac{0,8}{5} \right\}$$

b. Gabungan himpunan fuzzy

Gabungan dua himpunan A dan B, dengan notasi $A \cup B$ adalah himpunan semua elemen dalam semesta yang merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B yaitu $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Contoh:

Misalkan ada 2 himpunan fuzzy yang dipresentasikan secara diskret sebagai berikut:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0,3}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,3}{5} \right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{0,5}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,5}{5} \right\}$$

Maka:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \left\{ \frac{0,5}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,3}{5} \right\}$$

c. Irisan himpunan fuzzy

Irisan dua himpunan A dan B, dengan notasi $A \cap B$ adalah himpunan semua elemen dalam semesta yang merupakan anggota himpunan A atau anggota himpunan B yaitu $A \cap B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$

Contoh:

Misalkan ada 2 himpunan fuzzy yang dipresentasikan secara diskret sebagai berikut:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{0,3}{1} + \frac{0,4}{2} + \frac{0,2}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{0,3}{5} \right\}$$

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{0,5}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,5}{5} \right\}$$

Maka:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \left\{ \frac{0,3}{1} + \frac{0,3}{2} + \frac{0,1}{3} + \frac{0,4}{4} + \frac{0,2}{5} \right\}$$

2.4.2 Fungsi Keanggotaan

Setiap elemen dari semesta pada wacana merupakan anggota dari himpunan fuzzy untuk beberapa angka, mungkin juga nol. Fungsi yang menghubungkan nilai dengan beberapa elemen x dari semesta disebut fungsi keanggotaan ($\mu_{\tilde{A}}(x)$). Dalam perkataan lain, fungsi keanggotaan dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dari semesta X merupakan pemetaan $\mu_{\tilde{A}}$ dari X ke interval $[0,1]$ yaitu

$$\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1].$$

Kebanyakan himpunan fuzzy berada dalam semesta himpunan semua bilangan real R dengan fungsi keanggotaan yang dinyatakan dalam bentuk suatu formula matematis. Fungsi keanggotaan ini memainkan peranan sentral dalam teori himpunan fuzzy (Susilo, 2006: 55).

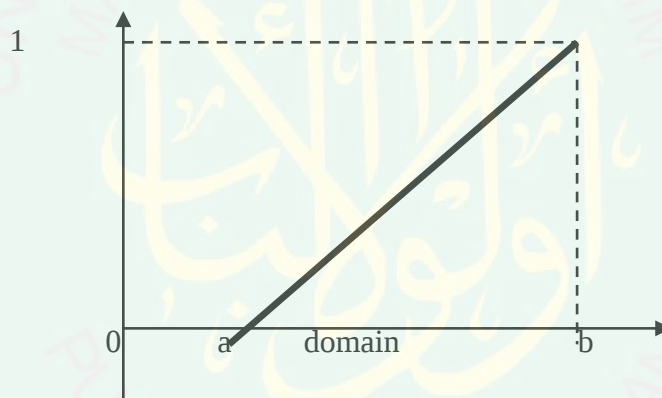
Grafik fungsi keanggotaan adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai keanggotaannya yang memiliki interval antara 0 sampai 1. Terdapat berbagai fungsi keanggotaan yang bisa digunakan untuk

mendapatkan nilai keanggotaan. Fungsi keanggotaan yang paling banyak digunakan dalam berbagai aplikasi adalah bentuk Representasi linear, segitiga dan trapesium.

Bentuk representasi linear naik dinyatakan secara umum dalam fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0; & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}; & a \leq x \leq b \\ 1; & x \geq b \end{cases}$$

Dan grafiknya dapat dilihat pada gambar berikut:



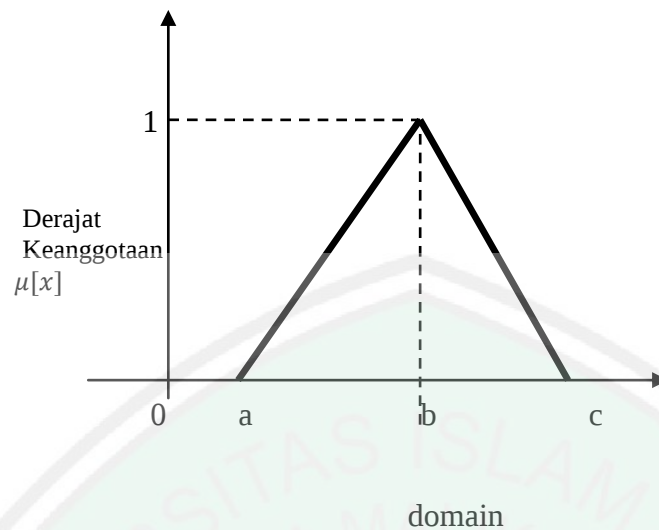
gambar 2.1(Representasi Linear naik)

(Sri Kusumadewi, 2004)

Bentuk segitiga dinyatakan secara umum dalam fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b < x \leq c \\ 0, & x < a \text{ atau } x > c \end{cases}$$

Dan grafiknya dapat dilihat pada gambar berikut:



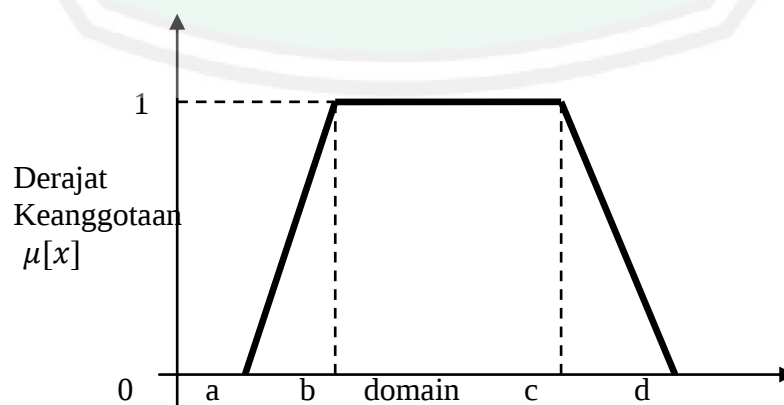
gambar 2.2 Kurva Segitiga

(Sri Kusumadewi, 2004)

Bentuk trapesium dapat dinyatakan secara umum dalam fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c < x \leq d \\ 0, & x > d \end{cases}$$

Dan grafik dapat dilihat pada gambar berikut:



gambar 2.3 (Kurva Trapesium)

(Sri Kusumadewi, 2004)

2.5 kajian al-Qur'an tentang Ukuran dan Ragu- ragu

Al-Qur'an dikenal sebagai kitab yang aktif. Ia bisa memberikan berbagai landasan-landasan sebagai dasar sumber adanya ilmu pengetahuan lainnya. Secara umum konsep dasar dari ilmu matematika terdapat dalam al-Qur'an, dan beberapakonsep dasar dari berbagai cabang dari ilmu matematika juga dibahas dalam al-Qur'an yang salah satunya adalah ukuran dan himpunan fuzzy.

Dalam al-Qur'an menjelaskan Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya yang diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mampu dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.(Abdussakir,2007: 79).

Allah berfirman dalam al-Qur'an suratal-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ (٤٩)

Artinya: Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Ayat tersebut menjelaskan bahwa, alam semesta beserta isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang setimbang dan rapi. Ahli matematika dan fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun, tetapi mereka hanya menemukan rumus dan persamaan tersebut. Apabila dalam

kehidupan kita terdapat suatu permasalahan, maka manusia harus berusaha untuk menemukan selesainya atau solusinya.

Salah satu cabang ilmu matematika lainnya yang dibahas dalam bab ini adalah himpunan fuzzy, himpunan fuzzy disebut juga himpunan kabur atau samar. Kekaburan dan kesamaran ini ada karena banyaknya permasalahan yang tidak pasti, banyak keraguan dan ketidak pastian, seperti halnya permasalahan orang munafik dalam islam yang memiliki kedudukan yang tidak pasti dalam islam, kaum munafik mengaku islam tetapi hatinya tidak, mereka selalu dalam keragu-raguan sebagaimana yang diterangkan dalam surat An nisaa' ayat 143:

سَبِيلًا لَهُ تَجِدُ فَلَئِنَّ اللَّهَ يُضِلُّ مَنْ هَتُوْلًا إِلَىٰ وَلَا هَتُوْلًا إِلَىٰ لَا ذَلِكَ بَيْنَ مُذَبِّبِينَ ﴿١٤٣﴾

Artinya: Mereka dalam keadaan ragu-ragu antara yang demikian (iman atau kafir): tidak masuk kepada golongan ini (orang-orang beriman) dan tidak (pula) kepada golongan itu (orang-orang kafir). Barang siapa yang disesatkan Allah, maka kamu sekali-kali tidak akan mendapat jalan (untuk memberi petunjuk) baginya.

Dalam matematika, golongan orang-orang munafik ini termasuk dalam anggota dari himpunan fuzzy dalam hal kepercayaan. Dimana terdapat orang kafir dan orang mukmin yang berada dalam tingkatan percaya dan tidak percaya, sedangkan orang munafik berada diantara keduanya, karena masih ada dalam keragu-raguan.

Permasalahan lain yang juga termasuk dalam permasalahan fuzzy adalah permasalahan ayat-ayat yang muhkamaat dan ayat-ayat mutasyaabihaat, sebagaimana yang dijelaskan dalam Al-Qur'an surat AliImran ayat 7 – 8 Allah SWT bersabda:

نَفَا مَا مُتَشَبِهَتْ وَأُخِرَ الْكِتَابُ أَمْ هُنَّ مُحْكَمَاتٌ آيَاتٌ مِنْهُ الْكِتَابُ عَلَيْكَ أَنْزَلَ الَّذِي هُوَ
تَأْوِيلُهُ يَعْلَمُ وَمَا تَأْوِيلُهُ وَأَبْتِغَاءَ الْفِتْنَةِ ابْتِغَاءَ مَنْ تَشَبَهَ مَا فَيَتَّبِعُونَ زَيْغَ قُلُوبِهِمْ فِي الَّذِي
لَا لَبَّاءُ وَلَا يَدُ الْآيِدِ كَرُّ وَمَارٍ بِنَا عِنْدَ مَنْ كُلُّ بِيَةٍ أَمْ نَاقِلُونَ الْعِلْمَ فِي وَالرَّسْخُونَ اللَّهُ إِلَّا



الْوَهَابُ أَنْتَ إِنَّا نَكْرَحْمَةً لَدُنْكَ مِنْ لَنَا وَهَبَ هَدَيْتَنَا إِذْ بَعَدَ قُلُوبَنَا تُرْغِ لَا رَبَّنَا

Artinya: “Dia-lah yang menurunkan Al Kitab (Al Qur’an) kepada kamu. Di antara (isi) nya ada ayat-ayat yang muhkamaat, itulah pokok-pokok isi Al Qur’an dan yang lain (ayat-ayat) mutasyaabihaat. Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong kepada kesesatan, maka mereka mengikuti sebahagian ayat-ayat yang mutasyaabihaat daripadanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta’wilnya, padahal tidak ada yang mengetahui ta’wilnya melainkan Allah. Dan orang-orang yang mendalam ilmunya berkata: “Kami beriman kepada ayat-ayat yang mutasyaabihaat, semuanya itu dari sisi Tuhan kami.” Dan tidak dapat mengambil pelajaran (daripadanya) melainkan orang-orang yang berakal. (mereka berdo’a): “Ya Tuhan kami, janganlah Engkau jadikan hati kami condong kepada kesesatan sesudah Engkau beri petunjuk kepada kami, dan karuniakanlah kepada kami rahmat dari sisi Engkau; karena sesungguhnya Engkau-lah Maha Pemberi (karunia)” (QS. Ali Imron 3: 7-8)

Ayat di atas menerangkan bahwa dalam al-Qur’an terdapat ayat-ayat yang jelas dan tegas pengertiannya (muhkamat) dan ada juga ayat-ayat yang mengandung banyak arti dan tidak dapat ditentukan arti mana yang dimaksud kecuali sudah dikaji secara mendalam dan hanya Allah saja yang tahu maksudnya (mutasyaabihaat). Dalam ayat tersebut di atas disebutkan bahwa tidak ada yang mengetahui ta’wilnya kecuali Allah, penggunaan kata ta’wil bermakna mutlak. Dan penggunaannya dalam al-Qur’an memiliki dua makna: pertama: ta’wil yang berarti hakekat sesuatu dan apa yang dikembalikan permasalahan kepadanya. Seperti firman Allah yang artinya, “Wahai Ayahku, inilah ta’wil (hakekat/kenyataan/kebenaran) mimpi yang dahulu itu” (QS.

Yusuf: 100). Jikayang dimaksud dengan ta'wil adalah pengertian ini, maka hakekat segala sesuatu itu tidak diketahui secara pasti kecuali Allah semata. Tetapi jika yang dimaksud ta'wil adalah makna yang lain, kedua: yaitu tafsir, keterangan, dan penjelasan mengenai sesuatu hal, seperti firman Allah yang Artinya, “Berikanlah kepada kami ta'wilnya.” (QS. Yusuf: 36). Disebutkan ta'wilnya hanya diketahui oleh orang-orang yang memiliki ilmu yang mendalam, karena mereka mengetahui dan memahami apa yang difirmankan kepada mereka dengan ungkapan seperti itu, meskipun mereka secara tidak penuh mengetahui segala hal. Jika diintegrasikan dengan pencarian derajat keanggotaan, maka derajat keanggotaan hanya bisa didapatkan jika ada variable-variabel fuzzy yang nilainya selain 0 dan 1

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dipaparkan tentang definisi tentang ukuran fuzzy beserta contoh-contohnya. Kemudian dipaparkan juga bukti dari sifat-sifat ukuran fuzzy disertai beberapa contoh dan akan dijelaskan teorema baru tentang keunikan dari ukuran.

3.1 Ukuran Fuzzy

Menurut sugeno (1974) memperkenalkan konsep ukuran fuzzy

Misalkan $p(X)$ adalah himpunan dari semua subset dari himpunan X yang memuat A adalah borel set dari $P(X)$ secara $A \subseteq P(X)$.

Definisi 3.1.1 Al- jabar $-\sigma$ (field Borel)

$\mathcal{A}$ adalah keluarga himpunan-himpunan bagian dari X yang dimana aljabar bila memenuhi:

- (i) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
- (ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

Dan jika memenuhi

- (iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Maka $\mathcal{A}$ merupakan aljabar- σ (field Borel).

Contoh 3.1

Bila $\mathfrak{B}$ keluarga sub himpunan dari X yang memuat C maka ada aljabar- σ terkecil yang memuat C . Ada aljabar- σ $\mathcal{A}$ yang memuat C sehingga untuk setiap aljabar- σ $\mathfrak{B}$ yang juga memuat $\mathcal{A}$.

Bukti:

Misalkan g adalah keluarga dari semua aljabar- σ yang memuat C , $g \neq \emptyset$ (sebab bisa dibentuk aljabar- σ $\mathfrak{B}$ yang memuat C). Dibentuk,

$$\mathcal{A} = \cap \{\mathfrak{B} | \mathfrak{B} \in g\} \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}, \forall \mathfrak{B} \in g$$

$\mathcal{A}$ adalah aljabar- σ , sebab

$$(i) A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A, B \in \mathfrak{B}, \forall \mathfrak{B} \in g$$

$$\begin{aligned} \text{Karena } \mathfrak{B} \text{ aljabar-}\sigma &\Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{B}, \forall \mathfrak{B} \in g \\ &\Rightarrow A \cup B \in \cap \{\mathfrak{B} | \mathfrak{B} \in g\} \\ &\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$(ii) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathfrak{B}, \forall \mathfrak{B} \in g$$

$$\begin{aligned} \text{Karena } \mathfrak{B} \text{ aljabar-}\sigma &\Rightarrow A^c \in \mathfrak{B}, \forall \mathfrak{B} \in g \\ &\Rightarrow A^c \in \cap \{\mathfrak{B} | \mathfrak{B} \in g\} \\ &\Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

$$(iii) A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{B}, \forall \mathfrak{B} \in g$$

$$\begin{aligned} \text{Karena } \mathfrak{B} \text{ aljabar-}\sigma &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{B}, \forall \mathfrak{B} \in g \\ &\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Jadi $\mathcal{A}$ adalah aljabar- σ terkecil yang memuat C .

Definisi 3.1.2 ukuran fuzzy pada A dalam X menurut (sugeno) adalah fungsi $g(x)_{x \in A} \in [0, 1] = \mu_A(x)$ yang memberikan nilai dalam interval $[0, 1]$ untuk setiap himpunan dari A sehingga memenuhi:

1. $X \in A, g(\emptyset) = 0$ dan $g(X) = 1$ yaitu, fungsi g adalah bernorma.
2. fungsi g adalah monoton yaitu, sebarang A dan B dari A , inklusi $A \subseteq B$ berarti $g(A) \leq g(B)$
3. untuk sebarang barisan non-menurun $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots$ dari himpunan A , persamaan berikut ini berlaku sebagai berikut:

$$g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

4. untuk sebarang barisan tak-turun $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots$ dari himpunan A persamaan memenuhi sebagai berikut:

$$g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

Jika $A \in \mathcal{A}$, maka nilai $g(A)$ disebutkan ukuran fuzzy

Contoh 3.1.2

Misalkan $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$\tilde{A} = 0.1/1 + 0.5/2 + 0.7/3 + 0.8/4 + 0.9/5$$

$$\tilde{B} = 0.2/1 + 0.5/2 + 0.6/3 + 0.8/4 + 0.8/5$$

$$\mu_{\tilde{A} \circ \tilde{B}} = \max \inf((1,1), (1,2), (1,3), (1,4)(1,5))$$

$$= \max (0.2, 0.5, 0.6, 0.8, 0.8)$$

$$= 0.2$$

$$\mu_{\tilde{A} \circ \tilde{B}} = \max \inf((2,1)(2,2), (2,3), (2,4)(2,5))$$

$$= \max (0.2, 0.5, 0.6, 0.8, 0.8)$$

$$= 0.5$$

$$\mu_{\tilde{A} \circ \tilde{B}} = \max \inf((3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5))$$

$$= \max (0.2, 0.5, 0.6, 0.8, 0.8)$$

$$= 0.6$$

$$\mu_{\tilde{A} \circ \tilde{B}} = \max \inf((4,1)(4,2), (4,3), (4,4)(4,5))$$

$$= \max (0.2, 0.5, 0.6, 0.8, 0.8)$$

$$= 0.8$$

$$\mu_{\tilde{A} \circ \tilde{B}} = \max \inf((5,1)(5,2), (5,3), (5,4)(5,5))$$

$$= \max (0.2, 0.5, 0.6, 0.8, 0.8)$$

$$= 0.8$$

Proposisi 3.1.3

Jika $E_1 \in \mathfrak{B}$, $g(E_1) < \infty$ dan $E_1 \supset E_{i+1}$

untuk semua $i \in \mathbb{N}$

maka

$$g\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(E_i)$$

Bukti

Misalkan $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$

maka

$$E_1 = E \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (E_1 - E_{i+1}).$$

Karena merupakan gabungan himpunan-himpunan terukur saling asing maka

$$g(E_1) = g(E) + \sum_{i=1}^{\infty} g(E_i - E_{i+1})$$

Karena $E_i = E_{i+1} \cup (E_i - E_{i+1})$

Maka

$$g(E_i) - g(E_{i+1}) = g(E_i - E_{i+1})$$

Sebab $g(E_{i+1}) \leq g(E_1) < \infty$

$$g(E_1) = g(E) + \sum_{i=1}^{\infty} [g(E_i) - g(E_{i+1})]$$

$$= g(E) + g(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} g(E_n)$$

Karena $g(E_1) < \infty$

Maka

$$g(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(E_i)$$

Teorema 3.1.5 Diberikan ruang ukuran $(X, \mathfrak{B}, g)$. Ukuran g disebut ukuran berhingga jika $g(X) < \infty$ dan disebut ukuran σ berhingga jika ada barisan himpunan-himpunan terukur $\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$

sedemikian hingga

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

dan $g(X_n) < \infty$.

Lema 3.1.3

Jika $(X, \mathfrak{B}, g)$ suatu fuzzy ukuran σ berhingga maka setiap himpunan terukur berukuran σ berhingga

Bukti:

Dari definisi ukuran σ berhingga ada barisan himpunan-himpunan terukur

$$\langle X_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

Sedemikian hingga

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

dan

$$g(X_n) < \infty \text{ ambil } E \in \mathfrak{B}$$

Maka

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \cap E)$$

$$\text{Dan } g(X_n \cap E) < \infty$$

3.2 Sifat-sifat ukuran fuzzy

1) additive jika untuk sembarang A dan B dari $\mathfrak{B}$, persamaan dengan

$$A \cap B = \emptyset \text{ harus memenuhi syarat sebagai berikut:}$$

$$\forall A, B \in P(X)$$

$$g(A \cup B) = g(A) + g(B)$$

2) super-additive jika untuk sembarang A dan B dari B, persamaan $A \cap B = \emptyset$ harus memenuhi syarat sebagai berikut:

$$\forall A, B \in P(X)$$

$$g(A \cup B) \geq g(A) + g(B)$$

3) sub-additive jika untuk sembarang A dan B dari B, persamaan $A \cap B = \emptyset$ harus memenuhi syarat sebagai berikut:

$$\forall A, B \in P(X),$$

$$g(A \cup B) \leq g(A) + g(B)$$

Teorema 3.2.1 Additive Measure:

Misalkan $(X, \mathcal{P})$ menjadi ruang terukur. Fungsi $g: \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty]$ merupakan ukuran σ -Aditif ketika sifat-sifat berikut ini terpenuhi:

1. $g(\emptyset) = 0$.
2. Jika $A_n, n = 1, 2, \dots$ adalah suatu himpunan bagaian menguraikan dari $\mathcal{P}$ maka

$$g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g(A_n)$$

Teorema 3.2.2 Countably subadditive

Jika $\langle E_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ dengan $E_n \in \mathcal{B}$

Maka

$$g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} g(E_n)$$

Bukti

Misalkan

$$F_n = E_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$$

Maka $F_n \subset E_n, \langle F_n \rangle n \in \mathbb{N}$

Barisan himpunan-himpunan terukur saling asing dan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Karena $g(F_n) \leq g(E_n)$

Maka

$$g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} g(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} g(E_n)$$

3.3. Integrasi Antara QS al-Qomar Ayat 49 dengan Ukuran fuzzy

Matahari, bumi, bulan, serta planet-planet yang lain. Semuanya berbentuk bola. Bukankah bola merupakan bangun geometri? Perhatikan bentuk lintasan bumi saat mengelilingi matahari, demikian juga lintasan-lintasan planet lain saat mengelilingi matahari. Lintasannya berbentuk elips. Bukankah elips merupakan bangun geometri? Bukankah geometri merupakan cabang matematika? Berdasarkan fakta ini, tidaklah salah jika kemudian Galileo mengatakan “Mathematics is the language with which God created the universe”.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segalaisinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh, tidak salah kiranya jika penulis menyatakan bahwa Allah maha matematis.

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan. Albert Einstein tidak membuat rumus $e = mc^2$, dia hanya menemukan dan menyibolkannya dalam bahasa matematika. Lihatlah bagaimana Archimedes menemukan hitungan mengenai volume benda melalui media air. Hukum Archimedes itu sudah ada sebelumnya, dan dialah yang menemukan pertama kali melalui hasil menelaah dan membaca ketetapan Allah (Abdussakir, 2007:79).

Semua jenis ukuran ditetapkan melalui perhitungan-perhitungan. Dan semua bentuk perhitungan tersebut menghasilkan suatu ukuran yang digambarkan dalam angka-angka. Satuan ukuran panjang, berat, volume, kecepatan, tinggi nada, dan lain-lain.

Perhitungan digunakan di seluruh aspek kehidupan tanpa ada batasan ruang dan waktu. Hasil dari perhitungan menjadikan sebuah ukuran. Apakah ada kehidupan ini dimana satuan ukuran tidak terlihat? Bahkan metode penelitian yang bersifat kualitatif pun dapat dikonversi menjadi ukuran yang kuantitatif dengan menggunakan skala Likert. Betapa pentingnya ukuran bagi berlangsungnya proses kehidupan. Bagi manusia, ukuran yang ditetapkan dalam satuan angka, merupakan hal yang sangat berarti. Satuan ukuran ditetapkan dalam seluruh dimensi kehidupan dan keberlangsungan manusia dan alam semesta yang meliputi ukuran jarak, waktu, gaya energi, massa, dan sebagainya. Tidak terhitung banyaknya jenis ukuran yang dipergunakan oleh manusia untuk melakukan perhitungan dalam segala aspek kehidupan.

Segala ketentuan-ketentuan yang berlaku dalam bilangan angka dihampanan semesta raya merupakan bagian dari master plan penciptaan-Nya dalam hitungan matematis yang teramat tinggi. Oleh karena itu, seluruh karya cipta-Nya sejak dentuman besar hingga saat ini berjalan dalam keteraturan. Dan detik ini tanpa disadari oleh para penggunan teknologi, semua bentuk teknologi yang kita pergunakan dari radio, televisi, komunikasi (handphone, internet, dan lain-lain) dan bahkan teknologi tingkat tinggi dan tercanggih sekalipun menggunakan bahasa yang sama seperti matematika.

Seorang ahli matematika harus mempelajari angka-angka, permutasi, dan sifat-sifatnya. Aspek ini disebut aritmatika atau perhitungan. Ketika berhadapan dengan persamaan atau untuk mengetahui sesuatu yang belum diketahui tetapi dapat disimbolkan dengan rumus dan persamaan, maka lahirlah aljabar. Dan ketika berhadapan dengan format, ukuran, dan posisi, maka lahirlah geometri. Banyak orang berpendapat bahwa antara aritmatika, aljabar, dan geometri adalah tiga hal yang berbeda, padahal sesungguhnya. Semua saling bekerja sama, saling membantu dan terkait satu sama lain, sehingga terbentuk sebuah komposisi alam semesta yang sangat sempurna dan menakjubkan.

Dalam QS. Al-Qamar : 49 sudah dijelaskan bahwa:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ (٤٩)

Artinya:

“Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.”

Dari ayat di atas sudah jelas bahwa Allah menciptakan segala sesuatunya menurut ukuran. Begitu pula dengan zakat, antara hasil sektor pertanian dengan sektor jasa harus sesuai ukuran walaupun sektor jasa lebih sedikit zakat yang dikeluarkan dibandingkan dengan sektor pertanian. Pada ukuran fuzzy, ukuran besar dan kecil itu sangat relatif. Seperti yang telah dikemukakan pada bab I, misalkan ukuran besar memiliki nilai 0 dan ukuran kecil memiliki nilai 1, maka ukuran fuzzy berada di antara besar-kecil atau dalam selang $[0,1]$. Jadi dikaitkan dengan zakat di atas, seorang dokter mengeluarkan zakat sebesar 2,5% atau berkisar Rp 450.000,- dari total penghasilannya sebesar Rp 18.000.000,-. Sedangkan petani, zakatnya sebesar 10% atau berkisar Rp 500.000,- dari total

penghasilannya sebesar Rp 5.000.000,-. Petani harus membanting tulang dan memeras keringat serta berjemur di bawah terik matahari, sedangkan para dokter praktek bekerja di dalam ruangan yang bersih dan sejuk tanpa menguras tenaga, dan waktu yang diperlukan pun relatif pendek dari yang dibutuhkan petani, namun hasilnya jauh lebih besar (Baidan, 2001: 148).

Pada masa-masa mutakhir ini, pemodelan-pemodelan matematika yang dilakukan manusia sebenarnya bukan membuat sesuatu yang baru. Pada hakikatnya, mereka hanya mencari persamaan-persamaan atau rumus-rumus yang berlaku pada suatu fenomena. Bahkan, wabah seperti demam berdarah, malaria, tuberkolosis, bahkan flu burung ternyata mempunyai aturan-aturan yang matematis. Sungguh, segala sesuatu telah diciptakan dengan ukuran, perhitungan, rumus, atau persamaan tertentu yang rapi dan teliti (Abdussakir, 2007:80).

Dari benda yang paling besar hingga benda yang tidak nampak oleh kita telah ditetapkan-Nya dengan beraneka macam. Segala sesuatu diciptakan-Nya menurut ukurannya masing-masing. Dan fenomena ukuran menjadi lebih menarik lagi tatkala ditemukan bahwa banyak struktur materi di alam semesta di bentuk oleh struktur “Proporsi Agung” atau “Golden Ratio” atau “Rasio Emas”, 1.618 yang banyak ditemukan di alam semesta, juga pada manusia (proporsi tubuh, DNA) (Salma, 2007:24).

Dan Stephen Hawking, yang pada awalnya tidak membutuhkan hipotesis Tuhan dalam mempelajari alam semesta, meyakini adanya unsur matematika yang mengagumkan yang melekat di dalam struktur kosmos, sehingga akhirnya

diamengatakan, ”Tuhanlah yang berbicara dengan bahasa itu” (Gholsani, 1995:23).

Beberapa peristiwa akan berakibat fatal pada kehidupan manusia apabila masalah ukuran diabaikan begitu saja. Contohnya yang terjadi pada sebuah pesawat luar angkasa Mars Climate Orbiter (MCO) pada tanggal 30 September 1999, yang sedang melakukan penjelajahan orbit planet Mars mengalami kecelakaan. Setelah diselidiki, ternyata petaka tersebut bukan disebabkan oleh kurang canggihnya teknologi yang dipakai, tapi karena ke tidak sesuai aplikasi sistem satuan antara NASA sebagai operator dengan Lockheed Martin Astronautics pabrik pembuatnya. NASA terbiasa menggunakan satuan internasional (Kilometer, Gram, Newton) sementara Lockheed Martin terbiasa dengan satuan Inggris (Mil, Pound).

Pada abad ke-13, raja Mesir, Ramses II (1290-1224 SM) ketika sedang membangun piramida merasakan kesulitan karena setiap daerah kekuasaannya mengirimkan bantuan dalam ukuran yang berbeda. Hingga akhirnya Ramses II merentangkan lebar tangannya, dan berkata “Sejak saat ini satuan panjang yang dipakai hanyalah satu: jarak dari ujung sikuku hingga ke ujung jari tengahku”. Maka lahirlah standar satuan panjang di Mesir yang dinamakan Kubit, berasal dari bahasa Latin Cubitus yang berarti siku.

Pada abad ke-18, dunia dipenuhi berbagai satuan panjang antara lain: kaki (feet), inci, yard, dan sebagainya. Bahkan sebuah satuan yang sama ternyata diartikan berbeda di masing-masing negara ada yang disebut kaki Belanda, kaki Jerman, kaki Italia, dan lainnya. Lebih membingungkan lagi perbedaan pun terjadi

di dalam setiap negara. Saat itu terdapat 55 buah jenis standar satuan kaki di Belanda, dan 30 buah di Jerman. Untuk mengatasi masalah perbedaan ukuran ini, Mouton, seorang matematikawan Prancis, mengusulkan agar dibuat sebuah standar panjang yang global. Patokan yang akan dipakai adalah dalam ukuran bumi (Salma, 2007:25).

Dengan bantuan pemerintah Prancis sebuah standar satuan panjang diumumkan, yaitu meter (berasal dari bahasa Yunani, metron, yang berarti mengukur). Besarnya nilai satu meter saat itu memiliki dua definisi yaitu sebagai panjang setengah lintasan penduluan yang bergerak selama satu detik dan satu persepuluh juta panjang seperempat keliling bumi (diambil garis lurus yang menghubungkan kutub, melalui Paris, hingga ke garis katulistiwa).

Tahun 1791, setelah meletusnya Revolusi Prancis, Akademi Ilmu Pengetahuan Prancis memilih definisi kedua dengan alasan gaya gravitasi bumi berbeda untuk setiap lokasi. Tahun 1960 pada saat Conference Generale des Poids et Mesures (CGPM) dibuatlah definisi baru tentang satuan meter yang mengacupada panjang gelombang radiasi krypton-86. Di tahun 1983, dalam forum yang sama, definisi tersebut diubah kembali untuk meminimalkan ketidakpastian yaitu 1 meter adalah panjang lintasan yang dilalui cahaya pada ruang hampa selama interval waktu satu per 299.792.458 detik (Salma, 2007:26).

Dari contoh di atas semakin membuktikan bahwa penciptaan-Nya memiliki tujuan dan tidak sekedar bermain dadu (kebetulan seperti salah satu perkataan Einstein yang terkenal "Tuhan tidak sedang bermain dadu". Pernyataan ini sebenarnya telah kadaluarsa bila kita memperhatikan bahwa

1200 tahun sebelum pernyataan Einstein, al-Qur'an sudah mengatakannya dengan tegas (Hought, 2004:27). "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Al-Qomar/54:49).

Matematika itu pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, termasuk teori ukuran Lebesgue, sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut matematika adalah ilmu hitung atau ilmu al – hisab. Dalam urusan hitung menghitung ini, Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti. Kita perhatikan ayat-ayat al-Qur'an yang menjelaskan bahwa Allah sangat teliti.

Aktivitas memperhatikan, memikirkan, memahami, menggunakan akal yang banyak dianjurkan oleh Allah SWT dalam al-Qur'an merupakan sebuah rangkaian metode penelitian ilmiah untuk menghasilkan teori-teori ilmiah untuk menghasilkan teori-teori ilmu pengetahuan, yang semuanya terangkum dalam 2 kegiatan yaitu membaca dan menulis, seperti halnya Allah memberikan al-kitab yang berarti tulisan dan al-Qur'an yang berarti bacaan. Dan dengan Qalam Allah memproses penciptaan dan pengembangan alam semesta beserta isinya, baik yang di langit maupun di bumi, baik yang tampak maupun yang tidak berjalan hingga detik ini dalam keteraturan dan ketentuan-Nya dalam bentuk ukuran, massa, kecepatan, dan seluruh perhitungan di jagad raya dengan ketelitian yang tidak banding dan tidak akan ada yang mampu untuk menandingi-Nya. Semuanya dalam satuan angka.

Allah telah menciptakan segala sesuatu di alam semesta dengan "Ukuran yang tepat", dan jika terlihat penyimpangan ini disebabkan karena ilmu

pengetahuan masih terlalu dini untuk memahaminya. Islam tidak mengenal pertentangan antara sains dan agama. Belum ada kasus seperti kasus Galileo dalam Islam, yang dihukum pancung oleh gereja. Islam terbuka bagi segala macam ilmu. Bukti yang nyata adalah bagaimana al-Qur'an menyebut sekitar 750 ayat yang berkaitan dengan penciptaan alam semesta ($\frac{1}{8}$ dari ayat Al-Qur'an) dan puluhan ayat yang berakhir dengan anjuran dan perintah untuk memperhatikan, memikirkan, menggunakan akal, dan memahami tanda-tanda ciptaan-Nya di alam semesta.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Ukuran fuzzy pada A dalam X adalah fungsi $g: A \rightarrow [0, 1]$ yang memberikan nilai dalam interval $[0, 1]$ untuk setiap himpunan dari A sehingga memenuhi:

1. $X \in A, g(\emptyset) = 0$ dan $g(X) = 1$ yaitu, fungsi g adalah bernorma.
2. fungsi g adalah monoton, yaitu, sebarang A dan B dari A , inklusi $A \subseteq B$

berarti

$$g(A) \leq g(B)$$

3. untuk sebarang barisan non-menurun $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \dots$ dari himpunan A , persamaan berikut ini berlaku sebagai berikut:

$$g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

4. untuk sebarang barisan tak-turun $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq \dots$ dari himpunan A persamaan memenuhi sebagai berikut:

$$g\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(A_n)$$

Jika $A \in A$, maka nilai $g(A)$ di sebutkan ukuran fuzzy

Sifat-sifat ukuran fuzzy

1) *additive* jika untuk sebarang A dan B dari B , persamaan dengan $A \cap B = \emptyset$

harus memenuhi syarat sebagai berikut:

$$\forall A, B \in P(X)$$

$$g(A \cup B) = g(A) + g(B)$$

2) *super-additive* jika untuk sebarang A dan B dari B , persamaan $A \cap B = \emptyset$

harus memenuhi syarat sebagai berikut:

$$\forall A, B \in P(X),$$

$$g(A \cup B) \geq g(A) + g(B)$$

3) *sub-additive* jika untuk sebarang A dan B dari B , persamaan $A \cap B = \emptyset$

harus memenuhi syarat sebagai berikut:

$$\forall A, B \in P(X),$$

$$g(A \cup B) \leq g(A) + g(B)$$

4.2 Saran

Teorema–teorema dan lemma–lemma dalam Ukuran fuzzy dalam interval $[0,1]$ cukup menarik untuk dibuktikan oleh penulis, karena sangat banyak berhubungan dengan teorema–teorema dan lemma–lemma yang telah diperoleh selama di bangku perkuliahan, khususnya di dalam mata kuliah bidang matematika analisis. Selaku penulis dan pengamat, maka dalam hal ini ada beberapa saran yang sifatnya konstruktif yang bisa diberikan demi kemajuan dan perkembangan ilmu matematika di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

1. Bagi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Pada hasil penelitian dalam skripsi yang dilakukan diharapkan dapat menginformasikan dan memberikan ilmu, wawasan, serta pengetahuan kepada lembaga akan pentingnya masalah ukuran fuzzy pada interval $[0,1]$ dan sifat-sifatnya. Karena hal itu di perlukan untuk menyelesaikan masalah integral ukuran fuzzy. Sehingga lembaga dapat memberikan bahasan tersebut di dalam bangku perkuliahan.

2. Bagi Peneliti Selanjutnya.

Mengembangkan dan memperluas tema yang sudah diteliti dalam skripsi studi literatur ini, terutama ditekankan pada pembahasan Ukuran.

DAFTAR PUSTAKA

- Bartle, R.G. & R. Serbert, Donald. (2000). *Introduction to Real analysis*. 3rd.ed.
New York : John Willey and Sons, Inc.
- Burgin, Mark. 2007. *Neoclassical Analysis*
- Chen, Guanrong and Trung Tat Pham. 2000. *Introduction to Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Control Systems*. Londo: CRC Press.
- Ghozi, farid. 2013. *System Dynkin Dan Sifat-sifatnya*. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Gupta. (1976). *Lebesgue Measure and Integration*. New Delhi: Willey Eastern Limited.
- Halmos, Paul R. 1978. *Measure Theory*. New York: Springer-Verlag Toppan Company
- Izutsu, Toshihiko. 1993. *Ethico-Religijs Concepts in the Qur'an*. Terjemahan Agus Fahri Husein. Yogyakarta: PT. Tiara Wacana.
- Klir, George J. And Bo Yuan. 1995. *Fuzzy Set and Fuzzy Logic Theory and Applications*. United States of America: Prentice Hall International, inc.
- Kusumadewi, Sri dan Hari Purnomo. 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu
- Muthmainnah. 2008. *Ukuran lebesgue pada Bilangan Real*. Skripsi tidak diterbitkan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
- Susila, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu
- Sakir, Abdus. 2007. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang : UIN-Malang Press