SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL DENGAN METODE *OPTIMAL TIME STEPPING*

SKRIPSI

Oleh:
FATIMATUZ ZAHROH
NIM. 06510068

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL DENGAN METODE *OPTIMAL TIME STEPPING*

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FATIMATUZ ZAHROH
NIM: 06510068

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL DENGAN METODE *OPTIMAL TIME STEPPING*

SKRIPSI

Oleh:
FATIMATUZ ZAHROH
NIM. 06510068

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 12 Januari 2010

Pembimbing I	Pembimbing II
Usman Pagalay, M.Si	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19650414 200312 1 001	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL DENGAN METODE *OPTIMAL TIME STEPPING*

SKRIPSI

oleh:
FATIMATUZ ZAHROH
NIM. 06510068

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 20 Januari 2011

Penguji Utama	:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	………………………....
Ketua Penguji	:	Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	………………………....
Sekretaris Penguji	:	Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	………………………....
Anggota Penguji	:	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	………………………....

Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fatimatuz Zahroh

NIM : 06510068

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Januari 2010

Yang membuat pernyataan,

Fatimatuz Zahroh

NIM. 06510068

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٥

Artinya: ***"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"***

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini Penulis Persambahkan Teruntuk:

Kedua Orangtua Tercinta

Bunawi dan Maliha

&

Adik-Adik tersayang

Ach. Faqih, Ali Sodiqin, dan Khoirul Qulub al-Kaffa

yang tiada henti selalu memberikan dukungan dan do'a

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Segala puji bagi Allah SWT atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan kepada semua yang terlibat dan telah membantu terselesaikannya skripsi ini, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU.D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Usman Pagalay, M.Si selaku dosen wali sekaligus pembimbing skripsi yang telah bersedia meluangkan waktu, tenaga, pikiran serta memberikan arahan dan masukan yang sangat berguna dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A selaku pembimbing agama yang telah bersedia memberikan pengarahan keagamaan dalam penyelesaian skripsi ini.

6. Segenap dosen dan staf pengajar, terima kasih atas semua ilmu yang telah diberikan.
7. Kedua orangtua tercinta dan segenap keluarga yang tiada henti selalu memberikan dukungan dan do'a.
8. Teman-teman matematika angkatan 2006 terima kasih atas segala pengalaman yang berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
9. Sahabat-sahabat terdekat (Titik Nurindah, Fita Zunaidatus, Mufidatul Hasanah, Siti Munawaroh dan Khoirul Anwar), terima kasih banyak atas motivasi dan semangat yang telah diberikan.
10. Semua pihak yang telah membantu hingga terselesaikannya skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu, penulis selalu terbuka untuk menerima saran dan kritik yang konstruktif dari pembaca yang budiman, untuk perbaikan penulisan selanjutnya.

Wabillahi taufik wal hidayah,

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, 10 Januari 2011

Penulis,

Fatimatuz Zahroh

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Zahroh, Fatimatuz. 2011. ***Solusi Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Optimal Time Stepping***. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Usman Pagalay, M.Si
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci: persamaan diferensial parsial, sistem persamaan diferensial biasa, *optimal time stepping.*

Persamaan diferensial parsial adalah salah satu cabang ilmu matematika yang mempunyai cakupan wilayah penelitian teoritik dan aplikasi luas. Diantaranya adalah dalam fenomena ilmu kimia fisik yang dapat dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial parsial yakni persamaan difusi konfeksi yang bentuk umum persamaannya adalah: $\frac{\partial c}{\partial t} = D_{fus}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x}$ dimana c adalah konsentrasi, D koefisien divusi, v kecepatan aliran, x ruang, dan t adalah waktu.

Dalam penelitian kali ini penulis lebih kepada untuk mengembangkan persamaan difusi konfeksi di atas, yakni dengan menambahkan beberapa variabel sehingga terbentuk persamaan diferensial parsial non linear dengan diberikan beberapa fungsi yang berbeda. Persamaan diferensial parsial yang dimaksud adalah $u_t = u_{xx} - (txu)_x + f$ dimana $u = u(x,t)$ dan $f = f(x,t)$ adalah fungsi yang diberikan. Ada empat fungsi berbeda yang diberikan yakni $f(x,t) = (tx-1)e^{-t}\cos(x-t) + te^{-t}\sin(x-t)$, $f(x,t) = x\tan(x+t) + (x-t)\tan x$, $f(x,t) = xt - x\tan(xt)$ dan $f(x,t) = \sin(x-t) + t^2\cos(x+t)$.

Solusi persamaan diferensial parsial pada dasarnya bisa diselesaikan dengan dua cara, analitik ataupun numerik, akan tetapi dalam praktiknya, solusi analitik dirasa sangat sulit untuk dipecahkan. Karena itu, dalam penelitian ini penulis menggunakan metode numerik yakni metode *optimal time stepping.* Dalam penyelesaian secara numerik ini penulis menggunakan kondisi batas $u(0,t) = u(2\pi,t)$, $t \geq 0$ dan kondisi awal $u(x,0) = \sin x$. Metode *optimal time stepping* adalah salah satu metode numerik yang dalam penerapannya adalah mengubah persamaan diferensial parsial menjadi bentuk sistem persamaan diferensial biasa.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Secara bahasa (*lughawi*), kata "matematika" berasal dari bahasa Yunani yaitu *mathema* atau mungkin juga *mathematikos* yang artinya *hal-hal yang dipelajari* (Abdusysyakir, 2007: 5). Matematika adalah salah satu jenis ilmu pengetahuan yang banyak memberikan landasan teori bagi perkembangan suatu teknologi. Cabang dari matematika modern yang mempunyai cakupan wilayah penelitian teoritik dan aplikasi luas adalah persamaan diferensial.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang di dalamnya terdapat turunan-turunan. Jika terdapat variabel bebas yang tunggal (*single independent varible*), turunannya merupakan turunan biasa dan persamaannya disebut persamaan diferensial biasa/PDB (*ordinary differential equation*). Jika terdapat dua atau lebih variabel bebas, turunannya adalah turunan parsial dan persamaannya disebut sebagai persamaan diferensial parsial/PDP (*partial differential equation*) (Ayres, 1992: 1).

Permasalahan-permasalahan matematika dalam bentuk PDB atau PDP dapat diselesaikan baik secara analitik maupun numerik. Solusi analitik merupakan solusi kontinyu sehingga solusi dari nilai variabel bebas dapat ditemukan, sangat akurat dan tepat. Sedangkan solusi numerik solusi dapat diperoleh pada poin-poin grid terpisah, aproksimasi, kesalahan kwantitatif harus dikendalikan dengan baik untuk ketelitian (Lam, 1994: 20).

Akan tetapi, beberapa persamaan matematis, seperti persamaan diferensial biasa atau persamaan diferensial parsial, pada kenyataaanya relatif sangat sulit untuk dipecahkan secara analitik, karena itulah dikembangkan metode numerik untuk mencari solusinya. Salah satu metode numerik yang bisa digunakan untuk menyelesaikan PDP adalah metode *Optimal Time Stepping.* Selain karena keakuratannya, metode ini juga membutuhkan waktu yang lebih sedikit jika dibandingkan dengan metode lain.

Dalam keterkaitannya dengan Islam, Allah telah berfirman dalam al Quran surat al Furqan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "*Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya*"

Berdasarkan ayat di atas, dapat diketahui bahwa sebenarnya matematika juga ada dalam al Quran, bahkan sebelum matematika itu ada al Quran telah membahasnya. Begitu juga dengan ketika seorang matematikawan harus menentukan solusi dari suatu persamaan matematika, solusi yang didapat harus mendekati solusi sejati dan menghindari eror. Baik solusi analitik atau pun solusi numerik memiliki tingkat ketelitian masing-masing, jika solusi nemerik adalah solusi yang memiliki ketelitian tinggi dengan eror yang relatif kecil, maka solususi analitik adalah solusi akurat dan tingkat ketelitiannya lebih tinggi. Ini sesuai dengan ayat al Quran surat al Furqan di atas dimana Allah telah menetapkan segala sesuatunya dengan ukuran-ukuran dan teliti.

Berdasarkan ilustrasi di atas maka dalam penulisan skripsi kali ini penulis mengambil judul **"Solusi Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode *Optimal Time Stepping*"**

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana solusi persamaan diferensial parsial dengan metode *Optimal Time Stepping*?

1.3 Tujuan Penelitian

Mengetahui solusi persamaan diferensial parsial dengan metode *Optimal Time Stepping.*

1.4 Batasan Masalah

Persamaan diferensial parsial yang dicari solusinya adalah:

$$u_t = u_{xx} - (txu)_x + f$$

dimana:

$$u = u(x,t)$$
$$f = f(x,t)$$

dengan kondisi batas: $u(0,t) = u(2\pi,t),\;\; t \geq 0$

dan kondisi awal: $u(x,0) = \sin x$

kemudian persamaan (3.1) tersebut didiskritisasi membentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa:

$$\mathrm{u}'(t) = M(t)\mathrm{u}(t) + \mathrm{f}(t)$$

dimana:

$$\mathrm{u}(t) = \left(u_0(t)u_1(t)\ldots u_N(t)\right)^T,$$
$$\mathrm{f}(t) = \left(f(x_0,t)\,f(x_1,t)\ldots f(x_N,t)\right)^T,$$
$M(t)$ adalah matriks $n \times n$

1.5 Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini diharapkan nantinya penulis mampu mengetahui, memahami, menelaah dan menganalisa serta memperdalam pengetahuan tentang analisis numerik hususnya dalam memecahkan persamaan diferensial parsial.

Selain itu, penulis juga berharap agar penulisan ini memberikan manfaat bagi para pembaca untuk menambah wawasan tentang analisis numerik.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah studi literatur (kepustakaan). Dalam tahap ini dilakukan kajian sumber-sumber pustaka dengan cara mengumpulkan data atau informasi yang berkaitan dengan permasalahan, mengumpulkan konsep pendukung seperti definisi dan teorema serta membuktikan teorema-teorema yang diperlukan untuk menyelesaikan permasalahan, sehingga didapat suatu ide mengenai bahan dasar pengembangan upaya pemecahan masalah.

Selanjutnya dijelaskan bagaimana langkah-langkah dalam mencari solusi numerik persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode *Optimal Time Stepping*.

1.7 Sistematika Penulisan

1. BAB I PENDAHULUAN. Berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika pembahasan.
2. BAB II KAJIAN PUSTAKA. Mencakup hal-hal yang mendasar dalam teori yang dikaji.
3. BAB III ANALISIS DATA DAN PEMBAHASAN. Memaparkan analisis data dan hasil-hasil kajian penelitian
4. BAB IV PENUTUP. Berisi kesimpulan akhir penelitian dan saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya yang lebih baik.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Al Quran sebagai Paradigma Berpikir

Al Quran adalah sumber agama Islam yang telah banyak memberikan kepada manusia berupa fakta-fakta ilmiah yang kemudian ditemukan dan dibuktikan oleh saintis muslim dalam berbagai eksperimennya. Salah satunya adalah tentang pemodelan yang dalam penerapannya muncul dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial muncul karena adanya suatu proses pemodelan terhadap suatu fenomena-fenomena alam yang terjadi, dengan adanya persamaan tersebut akan mempermudah para peneliti dalam melakukan penelitiannya. Dalam kehidupan manusia sehari-hari, baik disadari atau tidak, sebenarnya banyak terdapat permasalahan-permasalahan yang dapat dimodelkan ke dalam bentuk persamaan.

Allah berfirman dalam surat al Baqarah ayat 261 yang berbunyi:

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمْوَٰلَهُمْ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِى
كُلِّ سُنۢبُلَةٍ مِّا۟ئَةُ حَبَّةٍ ۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُ ۗ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: *"Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah[166] adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha mengetahui."* (Qs. al Baqarah/2:216)

Pada ayat di atas, nampak jelas bahwa Allah menetapkan pahala menafkahkan harta di jalan Allah dengan rumus matematika. Pahala menafkahkan harta adalah tujuh ratus kali secara matematika diperoleh persamaan:

$$y = 7x$$

dengan *x* menyatakan nilai nafkah dan *y* menyatakan nilai pahala yang diperoleh (Abdusysyakir, 2007: 81).

Jika dikaitkan dengan kehidupan manusia sehari-hari, tentunya sebagai seorang hamba Allah, maka persamaan di atas dapat diperumum lagi menjadi:

$$y = ax + b$$

dengan *y* menyatakan nilai pahala yang diperoleh saat ini, *a* kelipatan pahala yang dijanjikan Allah, *x* jenis ibadah yang dilakukan, dan *b* menyatakan prilaku orang tersebut, baik itu prilaku yang positif atau negatif yang telah dikerjakan sebelumnya. Jika *b* positif maka akan menambah nilai *y* dan juga sebaliknya, jika nilai *b* negatif maka akan mengurangi nilai *y.*

Selain itu, al Quran juga mengajarkan kepada manusia untuk berpikir alternatif atau mencari solusi yang lebih variatif, dalam hal ini adalah kaitannya dengan metode numerik sebagai metode alternatif dari metode analitis untuk menyelesaikan suatu persamaan matematika. Misalnya dalam surat al Mai'dah ayat 6 yang berbunyi:

وَإِن كُنتُم مَّرۡضَىٰٓ أَوۡ عَلَىٰ سَفَرٍ أَوۡ جَآءَ أَحَدٞ مِّنكُم مِّنَ ٱلۡغَآئِطِ أَوۡ لَٰمَسۡتُمُ ٱلنِّسَآءَ فَلَمۡ
تَجِدُواْ مَآءٗ فَتَيَمَّمُواْ صَعِيدٗا طَيِّبٗا فَٱمۡسَحُواْ بِوُجُوهِكُمۡ وَأَيۡدِيكُم مِّنۡهُ

Artinya: "*Dan jika kamu sakit atau dalam perjalanan atau kembali dari tempat buang air (kakus) atau menyentuh perempuan, lalu kamu tidak memperoleh air, Maka bertayammumlah dengan tanah yang* *baik (bersih); sapulah mukamu dan tanganmu dengan tanah itu”.* (Qs. al Mai’dah/5: 6)

Ayat di atas dengan jelas menerangkan bahwa tayammum merupakan solusi lain yang harus dilakukan oleh seorang muslim yang berhalangan untuk melakukan wudhu. Allah SWT juga telah memberikan alternatif pada hamba-Nya yang sedang sakit dalam melaksanakan shalat, dengan beberapa alternatif, yaitu: Jika masih mampu berdiri, maka harus shalat dengan berdiri. Jika sudah tidak mampu berdiri, maka boleh shalat dengan duduk. Jika sudah tidak mampu duduk, maka boleh shalat dengan berbaring dan jika sudah tidak mampu berbaring, maka boleh shalat hanya dengan isyarat saja.

Berdasarkan pemaparan di atas, secara tidak langsung bisa diartikan bahwa manusia bukanlah membuat atau menciptakan suatu rumusan baru, melainkan mereka hanya meniru atau hanya mengembangkan sesuatu yang sudah dijelaskan dalam al Quran. Karena pada dasarnya Allah telah menciptakan segala sesuatunya, tinggal bagaimana manusia bisa menemukan dan mengembangkannya.

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas. Persamaan diferensial dapat pula dibeda-bedakan menurut persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial (R.J. Pamuntjak dkk, 1990: 11).

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu peubah bebas. Bentuk umum persamaan diferensial biasa tingkat dua diberikan sebagai:

$$Ay_{xx} + By_x + Cy = G$$

dengan A, B, C dan G adalah fungsi (peubah tak bebas). Sebagai contoh adalah:

1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$

2) $(y'')^2 + (y')^5 + 3y = x^2$

3) $y'' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$

4) $xy' + y = 3$

5) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ (Ayres, 1992: 1).

2.2.1 Order dan Derajat Persamaan Diferensial

Order (tingkat) suatu persamaan diferensial adalah order (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan itu yang tingkatnya paling tinggi (R.J. Pamuntjak dkk, 1990: 13).

Sebagai contoh adalah:

1) $\frac{dy}{dx} = x + 5$, $xy' + y = 3$, $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ (tingkat 1)

2) $\frac{d^2y}{dx2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, $(y'')^2 + (y')^5 + 3y = x^2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

(tingkat 2)

Pangkat (derajat) suatu persamaan deferensial biasa yang berbentuk polinum dalam fungsi (peubah tak bebas) beserta turunan-turunannya adalah pangkat (derajat) polinum itu, yakni pangkat tertinggi dari perkalian peubah tak bebas beserta turunan-turunannya yang terdapat dalam persamaan diferensial itu.

Sebagai contoh:

1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+y^2+x^2=0$ (pangkat 3)

2) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+\dfrac{dy}{dx}y\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2+xy=0$ (pangkat 3)

3) $\dfrac{d^4y}{dx^4}+x^2\dfrac{d^3y}{dx^3}+\sin x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\cos x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2+1$ (pangkat 1)

2.2.2 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2 (Finizio dan Ladas, 1982: 132).

Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan diferensial linear adalah:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2+\cdots+a_{1n}(t)x_n+F_1(t),\\
\frac{dx_2}{dt}&=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2+\cdots+a_{2n}(t)x_n+F_2(t),\\
&\vdots\\
\frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}(t)x_1+a_{n2}(t)x_2+\cdots+a_{nn}(t)x_n+F_n(t),
\end{aligned}\tag{2.1}$$

dimana semua fungsi didefinisikan sebagai $a_{ij}(t),\ i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,n$ dan $F_i(t),\ i=1,2,\dots,n$ adalah kontinyu pada interval $a \le t \le b,$ jika semua nilai $F_i(t)=0,\ i=1,2,\dots,n\ \forall t$, maka sistem persamaan (2.1) disebut sistem persamaan diferensial linear homogen. Dan jika $F_i(t)\neq 0,\ i=1,2,\dots,n\ \forall t$, maka sistem (2.1) non homogen.

Sistem persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j+F_i(t) \qquad (i=1,2,\dots,n) \tag{2.2}$$

dimana matriks A didefinisikan sebagai:

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

dan vektor **F** dan **x** didefinikan sebagai:

$$\mathbf{F}(t)=\begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Sehingga sistem persamaan (2.2) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{F}(t)$$

Contoh:

1) Sistem persamaan:

$$\frac{dx_1}{dt} = 7x_1 - x_2 + 6x_3,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -10x_1 + 4x_2 + 12x_3,$$
$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3,$$

Adalah sistem persamaan linear homogen dengan koefisien konstan dan n = 3, dimana:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sehingga sistem persamaan diferensial tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

2) Sistem persamaan:

$$\frac{dx_1}{dt} = 7x_1 - x_2 + 6x_3 - 5t - 6,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -10x_1 + 4x_2 + 12x_3 - 4t + 23,$$
$$\frac{dx_3}{dt} = -2x_1 + x_2 - x_3 + 2,$$

Adalah sistem persamaan diferensial non homogen, karena pada tiap persamaan terdapat $-5t - 6, \quad -4t + 23,$ dan $2,$ dimana:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} -5t - 6 \\ -4t + 23 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sehingga sistem persamaan diferensial tersebut dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 6 \\ -10 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix} -5t-6 \\ -4t+23 \\ 2 \end{pmatrix}$$ (Ros, 1984: 505-508).

2.2.3 Sistem Persamaan Diferensial Tak Linear

Bentuk sistem persamaan diferensial tak linear dengan dua fungsi tak diketahui adalah:

$$\frac{dx}{dt}=F(x,y,t)$$
$$\frac{dy}{dt}=G(x,y,t)$$

dengan $F(x,y,t)$ dan $G(x,y,t)$ adalah fungsi-fungsi tak linear dari x dan y dan waktu t. Adapun sistem persamaan diferensial tak linear yang tidak tergantung pada waktu atau dikenal juga sebagai sistem autonomous dapat ditulis sebagai:

$$\frac{dx}{dt}=F(x,y)$$
$$\frac{dy}{dt}=G(x,y)$$ (S.B. Waluya, 2006: 175).

Dari tipe-tipe persamaan diferensial tak linier, hanya beberapa tipe yang dapat diselesaikan secara eksplisit, seperti persamaan diferensial homogen dan persamaan diferensial eksak. Demikian juga untuk sistem persamaan diferensial tak linier (Finizio Ladas, 1988: 285).

2.3 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan deferensial parsial (PDP) adalah persamaan-persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan itu haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas. (Ayres, 1992: 231)

Dalam persamaan diferensial parsial perlu diketahui beberapa notasi turunan parsial yang terlibat yaitu:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Sebagai contoh diberikan bentuk kasus dari persamaan diferensial parsial berikut

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$ dimana: $z = f(x,y)$

Dalam hal ini variabel-variabel x dan y adalah variabel bebas, sedangkan z adalah variabel terikat. Untuk mencari nilai $\frac{\partial z}{\partial x}$ yaitu didiferensialkan z terhadap x dengan menjaga y sebagai konstanta, sedangkan untuk memperoleh $\frac{\partial z}{\partial y}$ yaitu didiferensialkan z terhadap y dengan menjaga x sebagai konstanta.

2.3.1 Order Persamaan Diferensial Parsial

Order suatu persamaan diferensial parsial adalah dari turunan parsial tertinggi dalam persamaan tersebut.

Contoh:

a. $u_t = u_x$ (PDP orde 1)

b. $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ (PDP orde 2)

2.3.2 Jumlah Variabel Persamaan Diferensial Parsial

Jumlah variabel dalam persamaan diferensial parsial adalah jumlah variabel bebasnya.

Contoh:

a. $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ (2 variabel)
b. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ (3 variabel)

2.3.3 Persamaan Diferensial Parsial Linear dan Non Linear

Persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan menjadi linear dan non linear. Bentuk umum PDP linear tingkat dua dalam dua variabel bebas adalah:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{2.3}$$

dengan A, B, C, D, E, F, dan G merupakan fungsi dalam *x* dan *y*. Sedangkan suatu PDP dikatakan non linear jika variabel tak bebas *u* dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara tidak linear (dipangkatkan atau dikalikan). Persamaan diferensial parsial orde 2 dalam 2 variabel yang tidak berbentuk persamaan (2.3) disebut persamaan non linier.

Contoh:

a. $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ (PDP linear)
b. $u_{xx} + u_{yy} + u = 4$ (PDP linear)
c. $u_{xx} + yu_y + u = 1$ (PDP non linear)
d. $u_{xx} + u_{yy} + u^2 = 0$ (PDP non linear)

2.3.4 Persamaan Diferensial Parsial Linear Homogen

Persamaan umum diferensial parsial linier (2.3) disebut homogen jika *G* = *0* untuk semua *x* dan *y*, sedangkan jika $G \neq 0$ disebut non homogen. (Roziana, Dewi Farida, 2008: 11-14)

2.3.5 Tipe-Tipe Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial dapat dibedakan menjadi 3 tipe yaitu:

1) Persamaan Ellips jika : $B^2 - 4AC < 0$

   Contoh: Persamaan laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

   Persamaan poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y)$$

2) Persamaan Parabola jika : $B^2 - 4AC = 0$

   Contoh: Persamaan panas satu dimensi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

3) Persamaan Hiperbola jika : $B^2 - 4AC > 0$

   Contoh: Persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ (Triatmojo, 2002: 201)

2.4 Masalah Nilai Batas

Perhatikan persamaan diferensial linear orde 2 berikut:

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x) \tag{2.4}$$

dimana koefisien-koefisien $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$, dan $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinyu di dalam suatu selang $a \le x \le b$ dengan $a_2(x) \ne x$ di dalam selang ini. Sampai sekarang, hanya diperhatikan suatu pencarian suatu penyelesaian dari persamaan diferensial (2.4) yang pada sebuah titik $x = x_0$ di dalam selang $a \le x \le b$ memenuhi dua syarat awal yang diberikan

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{dan} \quad y'(x_0) = y_1 \tag{2.5}$$

Persamaan diferensaial (2.4), bersama-sama dengan syarat awal (2.5), merupakan suatu masalah nilai awal. Dalam masalah nilai awal peubah bebas *x* dari persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu awal dan y_0 dan y_1 menyatakan syarat awal. Tetapi bila peubah *x* bebas merupakan peubah yang menyatakan tempat (*space varible*), biasanya yang ingin dicari adalah suatu penyelesaian dari persamaan diferensial (2.4) yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang $a \le x \le b$. Sebagai contoh,

$$y(a) = A \quad \text{dan} \quad y(b) = B, \tag{2.6}$$

dengan A dan B dua buah konstanta. Syarat (2.6) yang diberikan pada titik akhir (titik batas) dari selang $a \le x \le b$ disebut syarat batas. Persamaan diferensial (2.4), bersama-bersama dengan syarat batas (2.6), merupakan suatu masalah nilai batas (Finizio Ladas,1982: 244).

2.5 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi). Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal, yaitu:

1) Solusi dengan metode numerik selalu berbentuk angka, sedangkan dengan metode analitik biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.

2) Dengan metode numerik hanya diperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan. Akan tetapi, solusi hampiran tersebut dapat dibuat seteliti yang diinginkan. Solusi hampiran tentu tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya, dan selisih tersebut dinamakan sebagai galat (*error*). Sedangkan dengan solusi analitik

sudah pasti dihasilkan solusi sejati yang sesuai dengan kenyataannya (Rinaldi Munir, 2008: 5).

2.5.1 Deret Taylor

Bila suatu fungsi *Y (x)* diketahui nilainya pada kedudukan $x = x_0$ maka nilainya pada kedudukan $x = x_0 + \Delta x$ dapat diramalkan dengan menuliskannya dalam deret taylor sebagai:

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x) + (x - x_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \left.\frac{d^2 y}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \cdots + R_n \qquad (2.7)$$

Bila deret ini dipotong setelah suku turunan pertama, akan diperoleh bentuk:

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x) + (x - x_0)\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} + R_1 \qquad (2.8)$$

atau

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x) + (x - x_0)\, y'(x_0) + R_1 \qquad (2.9)$$

Persamaan ini dapat dipergunakan untuk meramalkan nilai turunan *y* di $x_0 \rightarrow y'(x_0)$:

$$y'(x_0) = \underbrace{\frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{x - x_0}}_{\text{pendekatan orde pertama}} - \underbrace{\frac{R_1}{x - x_0}}_{\text{galat pemotongan}} \qquad (2.10)$$

Suku pertama ruas kanan persamaan (2.10) dapat dipergunakan sebagai hampiran turunan fungsi *y* (*x*). Dengan demikian turunan suatu fungsi *f* (*x*) untuk diferensial maju pada $x = x_0$ didefenisikan sebagai:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.11}$$

ini berarti, jika kita hitung

$$f'(x_0)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.12}$$

Untuk harga Δx yang kecil, akan kita dapatkan pendekatan yang cukup baik untuk $f'(x_0)$. Dengan pendekatan deret taylor pada persamaan (2.10) juga diperoleh perkiraan galat yang terkait dengan hampiran ini. Rumus umum ekspansi deret taylor sampai turunan ke-n, persamaan (2.7) mempunyai galat yang bisa dihampiri sebagai

$$R_n(x_{i+1})=\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}(x_{i+1}-x_i)^{n+1} \tag{2.13}$$

Dengan menggunakan rumus ini, maka R_1 pada persamaan (2.10) dapat dinyatakan oleh

$$\frac{R_1(x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)}=\frac{y''(\xi)}{2}(x_{i+1}-x_i) \tag{2.14}$$

atau

$$\frac{R_1(x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)}=O(x_{i+1}-x_i) \tag{2.15}$$

Dengan demikian, perkiraaan turunan persamaan (2.10), atau suku pertama ruas kanan persamaan (2.13)

$$y'(x_{i+1})=\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{(x_{i+1}-x_i)} \tag{2.16}$$

Persamaan (2.16) dikenal dengan metode numerik sebagai beda terbagi berhingga. Secara umum dapat dinyatakan sebagai:

$$f'(x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} + O(x_{i+1} - x_i) \tag{2.17}$$

atau

$$f'(x_{i+1}) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \tag{2.18}$$

dengan Δf_i disebut beda kedepan pertama dan h disebut ukuran langkah, yaitu panjang selang hampiran.

Terdapat beberapa cara yang dapat dikembangkan dari deret taylor guna mamperoleh turunan secara numerik yaitu:

1) Hampiran Beda ke Belakang (*Backward Difference*)

Deret taylor dapat diekspansi kebelakang untuk menghitung nilai turunan fungsi $y(x)$ berdasarkan nilainya pada titik yang tidak diketahui:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 - \ldots\ldots \tag{2.19}$$

Bila dipotong setelah turunan pertama, dan disusun kembali, diperoleh

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f'(x_{i-1})}{h} - O(h) \tag{2.20}$$

atau

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f'(x_{i-1})}{h} = \frac{\Delta f_i}{h} \tag{2.21}$$

dengan galat sebesar $O(h)$ dan Δf_i dikenal sebagai beda kebelakang pertama.

Rumus turunan kedua untuk *backward difference* adalah:

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2} \tag{2.22}$$

2) Hampiran Beda ke Depan (*Forward Difference*)

Rumus turunan pertama untuk hampiran beda ke depan adalah:

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{(x_{i+1}-x_i)}+O(x_{i+1}-x_i) \tag{2.23}$$

atau

$$f'(x_i)=\frac{\Delta f_i}{h}+o(h) \tag{2.24}$$

dengan Δf_i disebut beda kedepan pertama dan h disebut ukuran langkah, yaitu panjang selang hampiran. Istilah ke depan dipergunakan karena ada hampiran turunan di titik i dipergunakan data pada titik yang bersangkutan dan titik yang di depannya.

Rumus turunan kedua untuk hampiran beda kedepan adalah:

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2} \tag{2.25}$$

3) Hampiran Beda Tengah (*Central Difference*)

Cara ketiga untuk menghitung turunan pertama adalah dengan mengurangkan rumus beda ke belakang (2.21) dari rumus beda ke depan berdasarkan ekspansi deret taylor

$$f(x_{i+1})=f(x_i)-f(x_i)h+\frac{f''(x_i)}{2}h^2-\frac{f'''(x_i)}{6}h^3 \tag{2.26}$$

dan dengan demikian dihasilkan

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + \frac{f'''(x_i)}{3}h^3 \qquad (2.27)$$

dari sini diperoleh

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f'''(x_i)}{6}h^2 + \ldots \qquad (2.28)$$

atau

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \qquad (2.29)$$

atau

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \qquad (2.30)$$

Persamaan (2.29) dikenal sebagai rumus beda tengah dari turunan pertama. Sedangkan rumus untuk turunan keduanya adalah:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} \qquad (2.31)$$

(Harijono Djojodihardjo, 2000: 150-157).

2.5.2 *Truncation Error* (Galat Pemotongan)

Galat pemotongan mengacu pada galat yang ditimbulkan akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Maksudnya, ekspresi matematik yang lebih kompleks "diganti" dengan formula yang lebih sederhana. Tipe galat pemotongan tergantung pada metode komputasi yang digunakan untuk penghampiran sehingga kadang-kadang ia disebut juga galat metode. Misalnya turunan pertama fungsi f di x_i dihampiri dengan formula

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

yang dalam hal ini *h* adalah lebar absis x_{i+1} dengan x_i. Galat yang ditimbulkan dari penghampiran turunan tersebut merupakan galat pemotongan.

Istilah "pemotongan" muncul karena banyak metode numerik yang diperoleh dengan pengahampiran fungsi menggunakan deret taylor. Karena deret taylor merupakan deret yang tak berhingga, maka untuk penghampiran tersebut deret taylor kita hentikan/potong sampai suku orde tertentu saja (Rinaldi Munir, 2005: 25-26)

Suku-suku yang dihilangkan (jumlahnya tak berhingga) meghasilkan suatu galat dalam hasil perhitungan. Galat ini disebut galat "pemotongan" (atau pemenggalan), yaitu yang disebabkan oleh pemotongan suatu proses matematika yang tak berhingga (Harijono Djojorihardjo, 2000: 13).

2.5.3 *Explicit Optimal Time Step Scheme*

Explicit Optimal Time Step Scheme adalah salah satu metode numerik yang dugunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial, baik linear atau tak linear.

Untuk sistem persamaan diferensial linear non homogen:

$$\mathbf{u}'(t) = M(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t) \tag{2.32}$$

dimana *M(t)* adalah matrik yang bergantung terhadap *t* dan **b***(t)* adalah vektor yang bergantung terhadap *t*.

Persamaan (2.32) dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = M(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{b}(t)$$

dimana matriks M adalah:

$$M(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

dan vektor **b** dan **u** adalah:

$$\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$$

Secara umum metode Runge-Kutta orde 2 untuk permasalahan sistem persamaan diferensial linear tak homogen (2.34) adalah:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}(M_n\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_n) + \frac{\Delta t}{2}\left(M_{n+1}\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{b}_{n+1}\right),$$
$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_n + \Delta t(M_n\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_n)$$

dimana $M_n = M(t_n)$ dan $\mathbf{b}_n = \mathbf{b}(t_n)$, dengan mengkombinasikan kedua persamaan tersebut maka didapat:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(M_n\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_n\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(M_{n+1}\left(\mathbf{u}_n + \Delta t\left(M_n\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_n\right)\right) + \mathbf{b}_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(M_n\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_n\right) + \frac{\Delta t}{2}\left(M_{n+1}\left(\mathbf{u}_n + \Delta t M_n\mathbf{u}_n + \Delta t\mathbf{b}_n\right) + \mathbf{b}_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}M_n\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{b}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(M_{n+1}\mathbf{u}_n + \Delta t M_{n+1}M_n\mathbf{u}_n + \Delta t M_{n+1}\mathbf{b}_n + \mathbf{b}_{n+1}\right) \\
&= \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}M_n\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{b}_n + \frac{\Delta t}{2}M_{n+1}\mathbf{u}_n + \frac{\Delta^2 t}{2}M_{n+1}M_n\mathbf{u}_n + \frac{\Delta^2 t}{2}M_{n+1}\mathbf{b}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{b}_{n+1} \\
&= \mathbf{u}_n + \left(\frac{\Delta t}{2}M_n\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}M_{n+1}\mathbf{u}_n\right) + \frac{\Delta^2 t}{2}M_{n+1}M_n\mathbf{u}_n + \left(\frac{\Delta t}{2}\mathbf{b}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{b}_{n+1}\right) + \frac{\Delta^2 t}{2}M_{n+1}\mathbf{b}_n \\
&= \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{u}_n\left(M_n + M_{n+1}\right) + \frac{\Delta^2 t}{2}M_{n+1}M_n\mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(\mathbf{b}_n + \mathbf{b}_{n+1}\right) + \frac{\Delta^2 t}{2}M_{n+1}\mathbf{b}_n \\
&= \mathbf{u}_n + \Delta t\left(\frac{M_n + M_{n+1}}{2}\right)\mathbf{u}_n + \frac{\Delta^2 t}{2}M_{n+1}M_n\mathbf{u}_n + \Delta t\frac{\mathbf{b}_n + \mathbf{b}_{n+1}}{2} + \frac{\Delta^2 t}{2}M_{n+1}\mathbf{b}_n
\end{aligned}
$$

misalkan $J_n = \dfrac{M_n + M_{n+1}}{2}$, maka persamaan di atas menjadi:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t J_n\mathbf{u}_n + \frac{\Delta^2 t}{2}J^2{}_n\mathbf{u}_n + \Delta t\frac{\mathbf{b}_n + \mathbf{b}_{n+1}}{2} + \frac{\Delta^2 t}{2}J_n\mathbf{b}_n + O\left(\Delta t^3\right)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t J_n\mathbf{u}_n + \frac{\Delta^2 t}{2}J^2{}_n\mathbf{u}_n + \Delta t\frac{\mathbf{b}_n + \mathbf{b}_{n+1}}{2} + \frac{\Delta^2 t}{2}J_n\mathbf{b}_n$$

Persamaan di atas ekuivalen dengan:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(J_n\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_n\right),$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\left(J_n\mathbf{u}^{(1)} + \frac{\mathbf{b}_n + \mathbf{b}_{n+1}}{2}\right)$$

Sehingga adapun langkah-langkah *Explicit Optimal Time Step Scheme* untuk menyelesaikan sistem (2.32) adalah:

1) Menentukan kondisi awal $\mathbf{u}_0$ dan ukuran langkah Δt

2) Memisalkan matriks $J_n = \dfrac{M\left(t_n\right) + M\left(t_n + \Delta t\right)}{2}$,

3) Menggunakan rumus:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(J_n\mathbf{u}_n + \mathbf{b}_n\right),$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\left(J_n\mathbf{u}^{(1)} + \frac{\mathbf{b}_n + \mathbf{b}_{n+1}}{2}\right)$$ (Yu, Jui-Ling, 2007: 193-194).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Difusi Konveksi

Difusi adalah gerakan atom atau molekul dalam gas, larutan atau padatan dari daerah konsentrasi yang lebih tinggi ke konsentrasi yang lebih rendah, proses ini sering ditemui dalam ilmu fisika matematika. Dalam hal transport partikel yang berasal dari gerakan aliran fluida, maka difusi yang terjadi disebut sebagai difusi konveksi dimana bentuk umum persamaan difusi konveksi adalah:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_{fus}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - v\frac{\partial c}{\partial x}$$

Persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial linear orde dua, atau bisa ditulis dalam bentuk:

$$c_t = D_{fus}c_{xx} - vc_x$$

dimana c adalah konsentrasi, D koefisien difusi, v kecepatan aliran, x ruang, dan t adalah waktu. Persamaan di atas kemudian dikembangkan lagi menjadi sebuah persamaan diferensial parsial non linear dengan menambahkan beberapa variabel terhadap persamaan difusi konveksi dan mengabaikan koefisien D dan v. Sehingga terbentuk persamaan diferensial parsial yang lebih kompleks yaitu:

$$u_t = u_{xx} - (txu)_x + f \qquad (3.1)$$

dengan:

$$u = u(x,t)$$
$$f = f(x,t)$$

Dalam penulisan skripsi ini, persamaan (3.1) akan diselesaikan dengan menggunakan salah satu metode numerik yaitu metode *optimal time stepping*.

Adapun langkah-langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan persamaan (3.1) dengan menggunakan metode *optimal time stepping* adalah:

1) Diskritisasi persamaan (3.1) dengan menggunakan turunan numerik yaitu *central difference* dan *backward difference* untuk menentukan turunan dari u terhadap variabel bebas x.
2) Membentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa berdasarkan hasil pada tahap ke-1.
3) Menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa dengan program MATLAB.

3.2 Metode *Optimal Time Stepping* Untuk Menentukan Solusi Persamaan Diferensial Parsial

Langkah 1:

Menggunakan turunan numerik yang merupakan pengembangan dari deret taylor yang sudah dijelaskan pada bab sebelumnya yakni menurunkan ruas kanan persamaan (3.1).

Untuk suku pertama ruas kanan persamaan (3.1) menggunakan rumus turunan *central difference* yakni persamaan (2.31) pada bab 2,

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right)$$

misal $z = \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right)$

maka: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z_i - z_{i-1}}{h}$

sehingga $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right) - \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)}{h}$$
$$= \frac{1}{h}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h}\right) - \frac{1}{h}\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)$$
$$= \frac{u_{i+1} - u_i}{h^2} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h^2}$$
$$= \frac{u_{i+1} - u_i - u_i + u_{i-1}}{h^2}$$
$$= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Dengan demikian, diperoleh turunan kedua fungsi u terhadap x pada persamaan (3.1):

$$u_{xx} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \qquad (3.2)$$

Untuk suku kedua ruas kanan persamaan (3.1) menggunakan rumus turunan *backward difference* yakni persamaan (2.21) pada bab 2, sehingga:

$$
\begin{aligned}
(txu)_x &= 0xu + tu + txu_x \\
&= txu_x + tu \\
&= tx\frac{\partial u}{\partial x} + tu \\
&= tx_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + tu_i
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, diperoleh turunan pertama fungsi *txu* terhadap *x* pada persamaan (3.1):

$$
(txu)_x = tx_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + tu_i \tag{3.3}
$$

Setelah diketahui turunan kedua dan turunan pertama fungsi *u* terhadap *x*, kemudian hasil turunan tersebut yakni persamaan (3.2) dan persamaan (3.3) disubstitusikan pada persamaan (3.1), sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} - (txu)_x + f \\
u'(t) &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \left(tx_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + tu_i \right) + f(x_i, t) \\
&= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \left(tx_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right) - tu_i + f(x_i, t) \\
&= \frac{1}{h^2}u_{i+1} - \frac{2}{h^2}u_i + \frac{1}{h^2}u_{i-1} - \frac{tx_i}{h}u_i + \frac{tx_i}{h}u_{i-1} - tu_i + f(x_i, t) \\
&= \frac{1}{h^2}u_{i-1} + \frac{tx_i}{h}u_{i-1} - \frac{2}{h^2}u_i - \frac{tx_i}{h}u_i - tu_i + \frac{1}{h^2}u_{i+1} + f(x_i, t) \\
&= \left(\frac{1}{h^2} + \frac{tx_i}{h} \right) u_{i-1} + \left(\frac{-2}{h^2} - \frac{tx_i}{h} - t \right) u_i + \frac{1}{h^2}u_{i+1} + f(x_i, t)
\end{aligned}
$$

dengan: $i = 0, 1, 2, \ldots, N$

Dengan demikian, diperoleh bentuk terdiskritisasi persamaan (3.1) sebagai berikut:

$$u'(x_i,t)=\left(\frac{1}{h^2}+\frac{tx_i}{h}\right)u_{i-1}+\left(\frac{-2}{h^2}-\frac{tx_i}{h}-t\right)u_i+\frac{1}{h^2}u_{i+1}+f(x_i,t) \qquad (3.4)$$

dengan: $i=0,1,2,...,N$

Langkah 2:

Membentuk suatu pola iterasi pada persamaan (3.4) sehingga terbentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa dalam bentuk matriks tridiagonal.

Misalkan:

$$A=\frac{1}{h^2}+\frac{tx_i}{h}$$

$$B=\frac{-2}{h^2}-\frac{tx_i}{h}-t$$

$$C=\frac{1}{h^2}$$

Persamaan (3.4) dapat dibuat pola perhitungannya sebagai berikut:

Gambar 3.1 Pola Iterasi untuk Persamaan (3.4)

Penerapan persamaan (3.4) pada $i=0,1,2,...,N$ akan memberikan suatu sistem persamaan diferensial biasa yaitu:

$$\begin{aligned}
&i=0, \quad \rightarrow u_0'(t)=Bu_0(t)+Cu_1(t)+f(x_0,t)\\
&i=1, \quad \rightarrow u_1'(t)=Au_0(t)+Bu_1(t)+Cu_2(t)+f(x_1,t)\\
&i=2, \quad \rightarrow u_2'(t)=Au_1(t)+Bu_2(t)+Cu_3(t)+f(x_2,t)\\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots\\
&i=N-1, \quad \rightarrow u_2'(t)=Au_{N-2}(t)+Bu_{N-1}(t)+Cu_N(t)+f(x_{N-1},t)\\
&i=N, \quad \rightarrow u_2'(t)=Au_{N-1}(t)+Bu_N(t)+f(x_N,t)
\end{aligned}$$

Kemudain sistem persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks tridiagonal sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} u_0'(t) \\ u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}'(t) \\ u_N'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0(t) \\ u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_{N-1}(t) \\ u_N(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x_0,t) \\ f(x_1,t) \\ f(x_2,t) \\ f(x_3,t) \\ \vdots \\ f(x_{N-1},t) \\ f(x_N,t) \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Sistem persamaan diferensial (3.5) dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = M(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t)$$

atau

$$\mathbf{u}'(t) = M(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t) \tag{3.6}$$

Dimana: $\mathbf{u}(t) = \left(u_0(t)u_1(t)\ldots u_N(t)\right)^T$,

$\mathbf{f}(t) = \left(f(x_0,t)\, f(x_1,t)\ldots f(x_N,t)\right)^T$,

$$M(t) = \begin{pmatrix} B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B \end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan nilai *A*, *B* dan *C* maka akan didapatkan nilai dari matriks *M* adalah:

$$M(t)=\begin{pmatrix} \frac{-2}{h^2}-\frac{x_0 t}{h}-t & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2}+\frac{x_1 t}{h} & \frac{-2}{h^2}-\frac{x_1 t}{h}-t & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2}+\frac{x_2 t}{h} & \frac{-2}{h^2}-\frac{x_2 t}{h}-t & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2}+\frac{x_{N-1} t}{h} & \frac{-2}{h^2}-\frac{x_{N-1} t}{h}-t & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2}+\frac{x_N t}{h} & \frac{-2}{h^2}-\frac{x_N t}{h}-t \end{pmatrix}$$

Langkah 3:

Memisalkan suatu matriks $J=\frac{M(t_n)+M(t_{n+1})}{2}$. Maka didadapatkan nilai untuk elemen-elemen matriks *J*:

$$\begin{aligned} A &= \frac{M(t_n)+M(t_{n+1})}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{h^2}+\frac{t_n x_i}{h}\right)+\left(\frac{1}{h^2}+\frac{t_{n+1} x_i}{h}\right)}{2} \\ &= \frac{\frac{2}{h^2}+\frac{x_i(t_n+t_{n+1})}{h}}{2} \\ &= \frac{1}{h^2}+\frac{x_i(t_n+t_{n+1})}{2h} \end{aligned}$$

$$B=\frac{M\left(t_n\right)+M\left(t_{n+1}\right)}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{-2}{h^2}-\frac{t_n x_i}{h}-t_n\right)+\left(\frac{-2}{h^2}-\frac{t_{n+1}x_i}{h}-t_{n+1}\right)}{2}$$

$$=\frac{\frac{-4}{h^2}-\frac{x_i\left(t_n+t_{n+1}\right)}{h}-\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2}$$

$$=\frac{-2}{h^2}-\frac{x_i\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2}$$

$$C=\frac{M\left(t_n\right)+M\left(t_{n+1}\right)}{2}$$

$$=\frac{1}{h^2}$$

dengan mensubstitusikan nilai dari *A*, *B* dan *C*, didapatkan nilai matriks *J* sebagai berikut:

$$J=\begin{pmatrix}
\frac{-2}{h^2}-\frac{x_0\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{h^2}+\frac{x_1\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h} & \frac{-2}{h^2}-\frac{x_1\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{h^2}+\frac{x_2\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h} & \frac{-2}{h^2}-\frac{x_2\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2} & \frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2}+\frac{x_2\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h} & \frac{-2}{h^2}-\frac{x_2\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2} & \frac{1}{h^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h^2}+\frac{x_N\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h} & \frac{-2}{h^2}-\frac{x_N\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2h}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2}
\end{pmatrix}$$

Sehingga secara umum, langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan (3.6) adalah:

1. Menentukan Δt dan $\mathbf{u}_0$.
2. Memisalkan matriks *M* sebagai $J=\frac{M\left(t_n\right)+M\left(t_{n+1}\right)}{2}$.

3. Menggunakan rumus:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(J_n \mathbf{u}_n + \mathbf{f}_n\right),$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\left(J_n \mathbf{u}^{(1)} + \frac{\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1}}{2}\right)$$

dengan $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_n(t),\ \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_n(t_n + \Delta t)$.

3.2.1 Solusi Persamaan 3.1 dengan $f(x,t) = (tx-1)e^{-t}\cos(x-t) + te^{-t}\sin(x-t)$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.1) dengan fungsi *f(x,t)* diberikan sebagai $f(x,t) = (tx-1)e^{-t}\cos(x-t) + te^{-t}\sin(x-t)$, maka digunakan asumsi sebagi berikut:

1. Kondisi batas $u(0,t) = u(2\pi, t),\ \ t \geq 0$
2. Kondisi awal $u(x,0) = \sin x$
3. Panjang selang $h = \dfrac{2\pi}{N}$
4. $x_i = ih,\ \ i = 0,1,2,\ldots, N$ dan N=5
5. $\Delta t = 0,025$ dengan $0 \leq t \leq 1$.

Setelah mengetahui asumsi-asumsi yang telah diberikan, maka selanjutnya akan dihitung solusi persamaan (3.1) berdasarkan langkah-langkah yang telah dijelaskan sebelumnya, yaitu diskritisasi persamaan (3.1) dengan nilai *h* dan N yang telah diberikan. Berdasarkan persamaan (3.4) maka didapatkan bentuk diskritisasi persamaan (3.1) adalah:

$$u'(x_i,t)=\left(\frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{tx_i}{\left(2\pi/5\right)}\right)u_{i-1}+\left(\frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{tx_i}{\left(2\pi/5\right)}-t\right)u_i+\frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}u_{i+1}+f(x_i,t)$$

dengan: $i=0,1,2,\ldots,5$

Bentuk terdiskritisasi tersebut kemudian diterapkan pada pola iterasi $i=0,1,2,\ldots,5$ sehingga membentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa dalam bentuk matriks tridiagonal. Sehingga berdasarkan sistem persamaan (3.5) didapatkan:

$$\begin{pmatrix} u_0'(t)\\ u_1'(t)\\ u_2'(t)\\ u_3'(t)\\ u_4'(t)\\ u_5'(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & C & 0 & 0 & 0 & 0\\ A & B & C & 0 & 0 & 0\\ 0 & A & B & C & 0 & 0\\ 0 & 0 & A & B & C & 0\\ 0 & 0 & 0 & A & B & C\\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0(t)\\ u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\\ u_4(t)\\ u_5(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f(x_0,t)\\ f(x_1,t)\\ f(x_2,t)\\ f(x_3,t)\\ f(x_4,t)\\ f(x_5,t)\end{pmatrix}$$

Sistem persamaan diferensial tersebut dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}=M(t)\mathbf{u}(t)+\mathbf{f}(t)$$

atau

$$\mathbf{u}'(t)=M(t)\mathbf{u}(t)+\mathbf{f}(t)$$

dimana:

$$\mathbf{u}(t)=\left(u_0(t)u_1(t)\ldots u_5(t)\right)^T,$$

$$\mathbf{f}(t)=\left(f(x_0,t)\,f(x_1,t)\ldots f(x_5,t)\right)^T,$$

$$M(t)=\begin{pmatrix} B & C & 0 & 0 & 0 & 0\\ A & B & C & 0 & 0 & 0\\ 0 & A & B & C & 0 & 0\\ 0 & 0 & A & B & C & 0\\ 0 & 0 & 0 & A & B & C\\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & B\end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan nilai *A*, *B* dan *C*

$$A=\frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{tx_i}{\left(2\pi/5\right)}$$

$$B=\frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{tx_i}{\left(2\pi/5\right)}-t$$

$$C=\frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}$$

Maka akan diperoleh nilai dari matrik *M* adalah:

$$M(t)=\begin{pmatrix}
\frac{-2}{\left(\pi/5\right)^2}-\frac{x_0t}{\pi/5}-t & \frac{1}{\left(\pi/5\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\left(\pi/5\right)^2}+\frac{x_1t}{\pi/5} & \frac{-2}{\left(\pi/5\right)^2}-\frac{x_2t}{\pi/5}-t & \frac{1}{\left(\pi/5\right)^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\left(\pi/5\right)^2}+\frac{x_2t}{\pi/5} & \frac{-2}{\left(\pi/5\right)^2}-\frac{x_3t}{\pi/5}-t & \frac{1}{\left(\pi/5\right)^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\left(\pi/5\right)^2}+\frac{x_3t}{\pi/5} & \frac{-2}{\left(\pi/5\right)^2}-\frac{x_4t}{\pi/5}-t & \frac{1}{\left(\pi/5\right)^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\left(\pi/5\right)^2}+\frac{x_4t}{\pi/5} & \frac{-2}{\left(\pi/5\right)^2}-\frac{x_5t}{\pi/5}-t & \frac{1}{\left(\pi/5\right)^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\left(\pi/5\right)^2}+\frac{x_5t}{\pi/5} & \frac{-2}{\left(\pi/5\right)^2}-\frac{x_6t}{\pi/5}-t
\end{pmatrix}$$

kemudian dimisalkan suatu matriks *J* sebagai $J=\frac{M\left(t_n\right)+M\left(t_{n+1}\right)}{2}$.

Maka didadapatkan nilai untuk setiap elemen matriks J:

$$A=\frac{M(t_n)+M(t_{n+1})}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{t_n x_i}{\left(2\pi/5\right)}\right)+\left(\frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{t_{n+1}x_i}{\left(2\pi/5\right)}\right)}{2}$$

$$=\frac{\frac{2}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{x_i\left(t_n+t_{n+1}\right)}{\left(2\pi/5\right)}}{2}$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{x_i\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)}$$

$$B=\frac{M(t_n)+M(t_{n+1})}{2}$$

$$=\frac{\left(\frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{t_n x_i}{\left(2\pi/5\right)}-t_n\right)+\left(\frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{t_{n+1}x_i}{\left(2\pi/5\right)}-t_{n+1}\right)}{2}$$

$$=\frac{\frac{-4}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{x_i\left(t_n+t_{n+1}\right)}{\left(2\pi/5\right)}-\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2}$$

$$=\frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{x_i\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2}$$

$$C=\frac{M(t_n)+M(t_{n+1})}{2}$$

$$=\frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}$$

Sehingga diperoleh nilai dari matriks J :

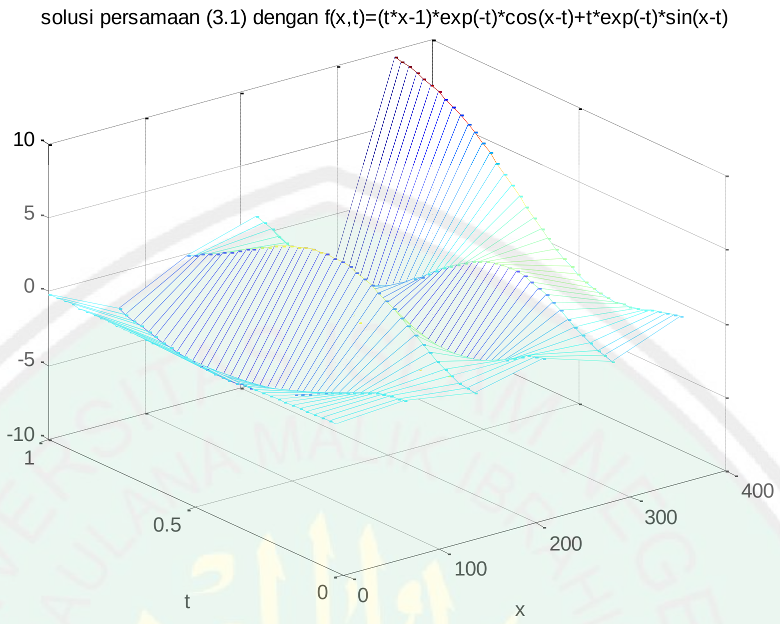
$$J=\begin{pmatrix}
\frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{x_0\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2} & \frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{x_1\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(\pi/5\right)} & \frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{x_1\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2} & \frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{x_2\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)} & \frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{x_2\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2} & \frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{x_3\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(\pi/5\right)} & \frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{x_3\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2} & \frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{x_4\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)} & \frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{x_4\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2} & \frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\left(2\pi/5\right)^2}+\frac{x_5\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)} & \frac{-2}{\left(2\pi/5\right)^2}-\frac{x_5\left(t_n+t_{n+1}\right)}{2\left(2\pi/5\right)}-\frac{t_n+t_{n+1}}{2}
\end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan nilai $\Delta t = 0,025$ akan dihitung nilai $u(x,t)$ untuk $0 \le t \le 1$, sehingga didapatkan nilai $u(x,t)$ sebagai berikut (berbantuan program MATLAB):

Tabel 3.1 Hasil komputasi nilai $u(x,t)$ dengan fungsi yang diberikan adalah $f\left(x,t\right)=\left(tx-1\right)e^{-t}\cos\left(x-t\right)+te^{-t}\sin\left(x-t\right)$

Waktu (t)	$i=0$ **x = 0**	$i=1$ **x = 72**	$i=2$ **x = 144**	$i=3$ **x = 216**	$i=4$ **x = 288**	$i=5$ **x = 360**
0	0	0.25382	-0.49102	0.69606	-0.8555	0.95892
0.025	-0.02467	0.25611	-0.47349	0.66557	-0.822	0.93427
0.05	-0.048562	0.21597	-0.38075	0.54353	-0.70236	0.85348
0.075	-0.071531	0.1365	-0.22026	0.34131	-0.51059	0.73132
0.1	-0.09344	0.021168	-0.00031803	0.07128	-0.26156	0.58277
0.125	-0.11417	-0.12624	0.27005	-0.25341	0.029483	0.42255
0.15	-0.1336	-0.30168	0.58134	-0.61921	0.34721	0.26478
0.175	-0.15165	-0.50093	0.92375	-1.0125	0.67664	0.12259
0.2	-0.16824	-0.71962	1.2874	-1.4198	1.0035	0.0078193
0.225	-0.1833	-0.95334	1.6625	-1.8283	1.3147	-0.069318
0.25	-0.19679	-1.1977	2.0396	-2.226	1.5983	-0.1004
0.275	-0.20869	-1.4484	2.4097	-2.602	1.844	-0.078968

0.3	-0.21898	-1.7012	2.7645	-2.9464	2.0435	-0.00062002
0.325	-0.22767	-1.9523	3.0966	-3.2513	2.1901	0.137
0.35	-0.23479	-2.1978	3.3993	-3.5099	2.2793	0.33426
0.375	-0.24038	-2.4343	3.6671	-3.7172	2.3082	0.58964
0.4	-0.24448	-2.6587	3.8955	-3.87	2.2762	0.89996
0.425	-0.24718	-2.8684	4.081	-3.9664	2.1839	1.2606
0.45	-0.24853	-3.0609	4.2212	-4.0063	2.034	1.6656
0.475	-0.24863	-3.2342	4.3151	-3.9909	1.8301	2.1083
0.5	-0.24757	-3.387	4.3622	-3.9225	1.577	2.5811
0.525	-0.24545	-3.5179	4.3633	-3.8047	1.2806	3.0765
0.55	-0.24237	-3.6261	4.3201	-3.6419	0.94699	3.5864
0.575	-0.23842	-3.7114	4.2347	-3.4391	0.58291	4.1032
0.6	-0.23373	-3.7736	4.1101	-3.2018	0.19508	4.6195
0.625	-0.22838	-3.813	3.9499	-2.9359	-0.20984	5.1286
0.65	-0.22248	-3.8301	3.758	-2.6471	-0.62549	5.6243
0.675	-0.21613	-3.8258	3.5384	-2.3413	-1.0459	6.1011
0.7	-0.20942	-3.801	3.2954	-2.0239	-1.4657	6.5547
0.725	-0.20243	-3.757	3.0336	-1.7002	-1.88	6.9812
0.75	-0.19525	-3.6951	2.7572	-1.3749	-2.2848	7.3779
0.775	-0.18795	-3.6169	2.4703	-1.0521	-2.6766	7.7426
0.8	-0.18059	-3.5238	2.1771	-0.73553	-3.0526	8.074
0.825	-0.17324	-3.4175	1.8812	-0.42813	-3.4106	8.3716
0.85	-0.16595	-3.2996	1.5859	-0.13234	-3.7491	8.635
0.875	-0.15876	-3.1717	1.2945	0.14998	-4.067	8.8649
0.9	-0.15171	-3.0353	1.0095	0.41751	-4.3638	9.062
0.925	-0.14485	-2.8921	0.73315	0.66945	-4.6393	9.2275
0.95	-0.13818	-2.7435	0.46748	0.9054	-4.8935	9.3628
0.975	-0.13173	-2.5908	0.21397	1.1253	-5.1268	9.4693
1	-0.12552	-2.4354	-0.026206	1.3296	-5.3396	9.5489



Gambar 3.2 Grafik Solusi PDP dengan
$f(x,t) = (tx-1)e^{-t}\cos(x-t) + te^{-t}\sin(x-t)$

Gambar 3.2 merupakan gambar hasil solusi numerik persamaan (3.1) yaitu pada tabel 3.1 dengan kondisi awal $u(x,0) = \sin x$ dan kondisi batas $u(0,t) = u(2\pi,t),\ t \geq 0$ serta fungsi yang diberikan adalah $f(x,t) = (tx-1)e^{-t}\cos(x-t) + te^{-t}\sin(x-t)$

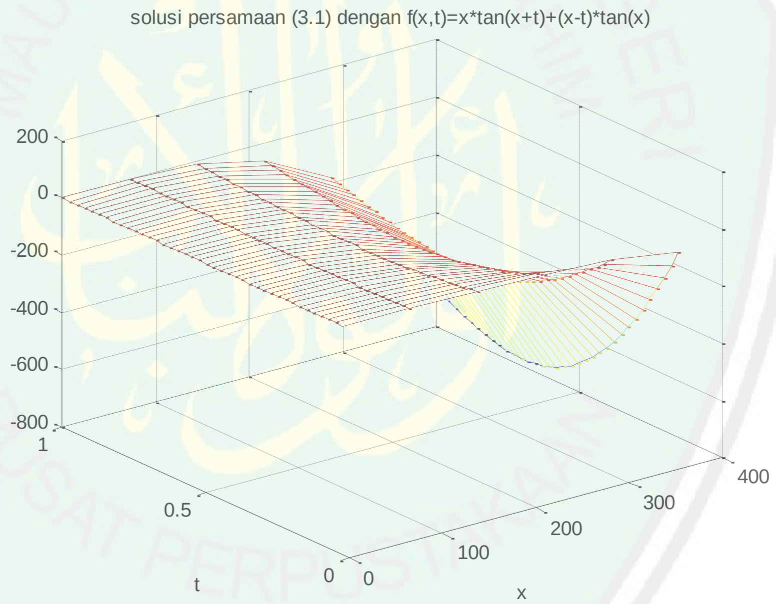
3.2.2 Solusi Persamaan 3.1 dengan $f(x,t) = x\tan(x+t) + (x-t)\tan x$

Dengan menggunakan asumsi-asumsi dan langkah-langkah yang sama pada sub bab sebelumnya (3.1.1), maka penyelesaian persamaan (3.1) dengan fungsi *f(x,t)* diberikan sebagai $f(x,t) = x\tan(x+t) + (x-t)\tan x$ adalah:

Tabel 3.2 Hasil komputasi nilai $u(x,t)$ dengan fungsi yang diberikan adalah $f(x,t) = x\tan(x+t) + (x-t)\tan x$

Waktu (t)	$i = 0$ $x = 0$	$i = 1$ $x = 72$	$i = 2$ $x = 144$	$i = 3$ $x = 216$	$i = 4$ $x = 288$	$i = 5$ $x = 360$
0	0	0.25382	-0.49102	0.69606	-0.8555	0.95892
0.025	-1.0562e-006	-0.6665	-4.4863	-9.6414	-24.308	-58.558
0.05	-6.4087e-006	-1.5333	-8.3391	-19.68	-47.022	-115.39
0.075	-1.5722e-005	-2.3409	-12.029	-29.381	-68.941	-169.6
0.1	-2.8593e-005	-3.0844	-15.539	-38.707	-90.004	-221.19
0.125	-4.456e-005	-3.7594	-18.849	-47.622	-110.15	-270.15
0.15	-6.3118e-005	-4.3623	-21.946	-56.092	-129.34	-316.46
0.175	-8.3723e-005	-4.8905	-24.814	-64.086	-147.51	-360.06
0.2	-0.00010581	-5.342	-27.441	-71.577	-164.61	-400.92
0.225	-0.00012882	-5.7159	-29.817	-78.54	-180.62	-438.99
0.25	-0.00015216	-6.0118	-31.935	-84.954	-195.48	-474.24
0.275	-0.0001753	-6.2304	-33.789	-90.802	-209.18	-506.63
0.3	-0.00019771	-6.3731	-35.375	-96.07	-221.69	-536.16
0.325	-0.0002189	-6.4419	-36.692	-100.75	-233	-562.82
0.35	-0.00023842	-6.4396	-37.742	-104.83	-243.1	-586.62
0.375	-0.0002559	-6.3696	-38.529	-108.32	-251.98	-607.59
0.4	-0.00027101	-6.2356	-39.057	-111.21	-259.65	-625.75
0.425	-0.00028347	-6.0421	-39.334	-113.52	-266.13	-641.17
0.45	-0.0002931	-5.7937	-39.371	-115.25	-271.43	-653.9
0.475	-0.00029975	-5.4951	-39.177	-116.42	-275.58	-664.03
0.5	-0.00030336	-5.1516	-38.765	-117.05	-278.62	-671.63
0.525	-0.00030392	-4.7681	-38.151	-117.15	-280.56	-676.82
0.55	-0.00030148	-4.3498	-37.347	-116.76	-281.47	-679.69
0.575	-0.00029614	-3.9018	-36.37	-115.89	-281.37	-680.37
0.6	-0.00028805	-3.4288	-35.237	-114.58	-280.34	-678.98
0.625	-0.00027739	-2.9356	-33.964	-112.86	-278.41	-675.65
0.65	-0.00026439	-2.4266	-32.568	-110.76	-275.65	-670.5
0.675	-0.00024929	-1.9058	-31.064	-108.31	-272.12	-663.69
0.7	-0.00023234	-1.3769	-29.471	-105.55	-267.87	-655.34
0.725	-0.00021383	-0.8434	-27.802	-102.51	-262.97	-645.61
0.75	-0.00019403	-0.30813	-26.074	-99.225	-257.49	-634.61
0.775	-0.00017322	0.2263	-24.301	-95.735	-251.49	-622.5

0.8	-0.00015165	0.75777	-22.496	-92.069	-245.03	-609.41
0.825	-0.00012959	1.2845	-20.671	-88.261	-238.18	-595.47
0.85	-0.00010727	1.8053	-18.838	-84.34	-230.99	-580.81
0.875	-8.4909e-005	2.319	-17.006	-80.337	-223.52	-565.55
0.9	-6.27e-005	2.8251	-15.183	-76.278	-215.84	-549.8
0.925	-4.0816e-005	3.3234	-13.379	-72.189	-207.99	-533.68
0.95	-1.9404e-005	3.8141	-11.597	-68.094	-200.03	-517.3
0.975	1.4162e-006	4.2974	-9.8449	-64.012	-192.01	-500.75
1	2.1547e-005	4.7741	-8.1249	-59.964	-183.97	-484.12



Gambar 3.3 Grafik Solusi PDP dengan
$f(x,t) = x\tan(x+t) + (x-t)\tan x$

Gambar 3.3 merupakan gambar hasil solusi numerik persamaan (3.1) yaitu pada tabel 3.2 dengan kondisi awal $u(x,0) = \sin x$ dan kondisi batas $u(0,t) = u(2\pi,t)$, $t \geq 0$ serta fungsi yang diberikan adalah $f(x,t) = x\tan(x+t) + (x-t)\tan x$

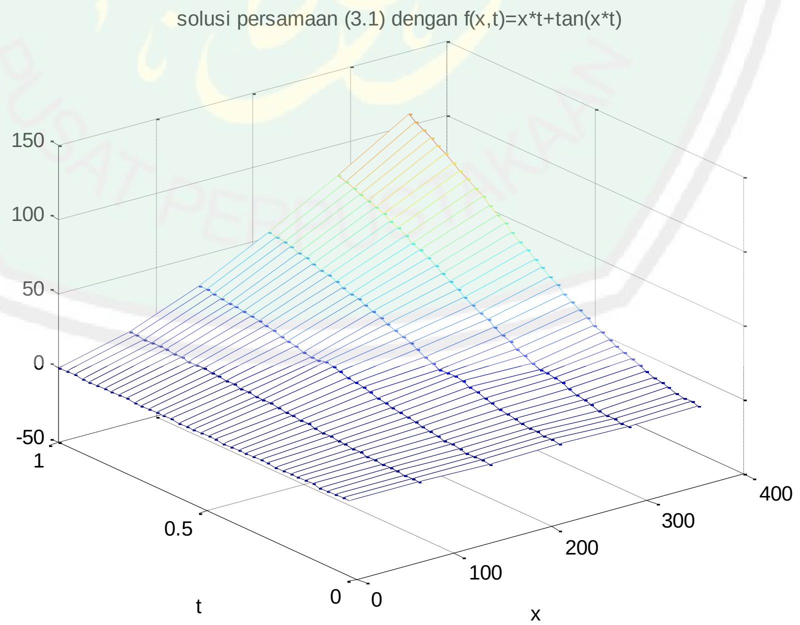
3.2.3 Solusi Persamaan 3.1 dengan $f(x,t) = xt + \tan(xt)$

Dengan menggunakan asumsi-asumsi dan langkah-langkah yang sama pada sub bab sebelumnya (3.1.1), maka penyelesaian persamaan (3.1) dengan fungsi *f(x,t)* diberikan sebagai $f(x,t) = xt + \tan(xt)$ adalah:

Tabel 3.3 Hasil komputasi nilai $u(x,t)$ dengan fungsi yang diberikan adalah $f(x,t) = xt + \tan(xt)$

Waktu	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
(t)	**x = 0**	**x = 72**	**x = 144**	**x = 216**	**x = 288**	**x = 360**
0	0	0.25382	-0.49102	0.69606	-0.8555	0.95892
0.025	-0.02467	0.25611	-0.47349	0.66557	-0.822	0.93427
0.05	-0.048562	0.21597	-0.38075	0.54353	-0.70236	0.85348
0.075	-0.071531	0.1365	-0.22026	0.34131	-0.51059	0.73132
0.1	-0.09344	0.021168	-0.00031803	0.07128	-0.26156	0.58277
0.125	-0.11417	-0.12624	0.27005	-0.25341	0.029483	0.42255
0.15	-0.1336	-0.30168	0.58134	-0.61921	0.34721	0.26478
0.175	-0.15165	-0.50093	0.92375	-1.0125	0.67664	0.12259
0.2	-0.16824	-0.71962	1.2874	-1.4198	1.0035	0.0078193
0.225	-0.1833	-0.95334	1.6625	-1.8283	1.3147	-0.069318
0.25	-0.19679	-1.1977	2.0396	-2.226	1.5983	-0.1004
0.275	-0.20869	-1.4484	2.4097	-2.602	1.844	-0.078968
0.3	-0.21898	-1.7012	2.7645	-2.9464	2.0435	-0.00062002
0.325	-0.22767	-1.9523	3.0966	-3.2513	2.1901	0.137
0.35	-0.23479	-2.1978	3.3993	-3.5099	2.2793	0.33426
0.375	-0.24038	-2.4343	3.6671	-3.7172	2.3082	0.58964
0.4	-0.24448	-2.6587	3.8955	-3.87	2.2762	0.89996
0.425	-0.24718	-2.8684	4.081	-3.9664	2.1839	1.2606
0.45	-0.24853	-3.0609	4.2212	-4.0063	2.034	1.6656
0.475	-0.24863	-3.2342	4.3151	-3.9909	1.8301	2.1083
0.5	-0.24757	-3.387	4.3622	-3.9225	1.577	2.5811
0.525	-0.24545	-3.5179	4.3633	-3.8047	1.2806	3.0765
0.55	-0.24237	-3.6261	4.3201	-3.6419	0.94699	3.5864
0.575	-0.23842	-3.7114	4.2347	-3.4391	0.58291	4.1032

0.6	-0.23373	-3.7736	4.1101	-3.2018	0.19508	4.6195
0.625	-0.22838	-3.813	3.9499	-2.9359	-0.20984	5.1286
0.65	-0.22248	-3.8301	3.758	-2.6471	-0.62549	5.6243
0.675	-0.21613	-3.8258	3.5384	-2.3413	-1.0459	6.1011
0.7	-0.20942	-3.801	3.2954	-2.0239	-1.4657	6.5547
0.725	-0.20243	-3.757	3.0336	-1.7002	-1.88	6.9812
0.75	-0.19525	-3.6951	2.7572	-1.3749	-2.2848	7.3779
0.775	-0.18795	-3.6169	2.4703	-1.0521	-2.6766	7.7426
0.8	-0.18059	-3.5238	2.1771	-0.73553	-3.0526	8.074
0.825	-0.17324	-3.4175	1.8812	-0.42813	-3.4106	8.3716
0.85	-0.16595	-3.2996	1.5859	-0.13234	-3.7491	8.635
0.875	-0.15876	-3.1717	1.2945	0.14998	-4.067	8.8649
0.9	-0.15171	-3.0353	1.0095	0.41751	-4.3638	9.062
0.925	-0.14485	-2.8921	0.73315	0.66945	-4.6393	9.2275
0.95	-0.13818	-2.7435	0.46748	0.9054	-4.8935	9.3628
0.975	-0.13173	-2.5908	0.21397	1.1253	-5.1268	9.4693
1	-0.12552	-2.4354	-0.026206	1.3296	-5.3396	9.5489



Gambar 3.4 Grafik Solusi PDP dengan $f(x,t) = xt + \tan(xt)$

Gambar 3.4 merupakan gambar hasil solusi numerik persamaan (3.1) yaitu pada tabel 3.3 dengan kondisi awal $u(x,0)=\sin x$ dan kondisi batas $u(0,t)=u(2\pi,t),\ t\geq 0$ serta fungsi yang diberikan adalah $f(x,t)=xt+\tan(xt)$

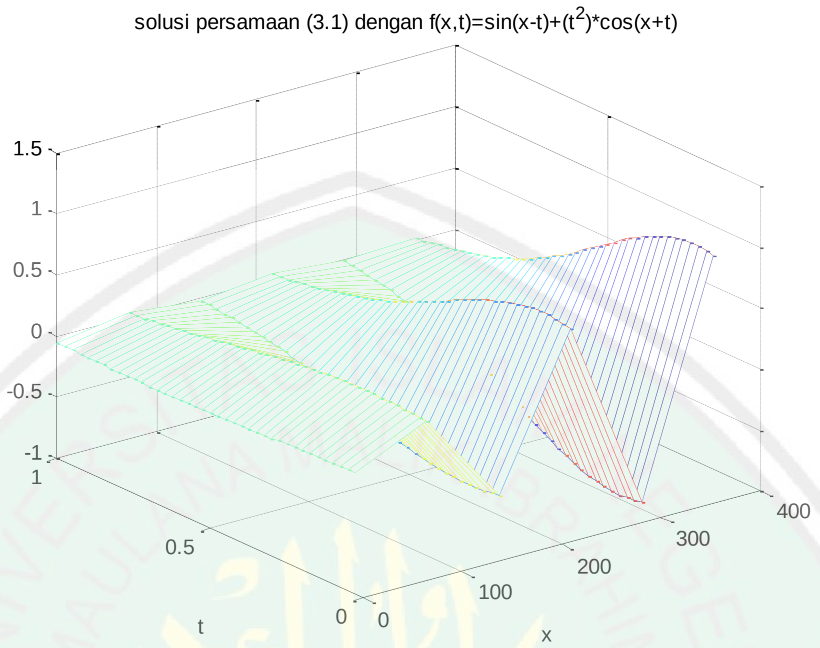
3.2.4 Solusi Persamaan 3.1 dengan $f(x,t)=\sin(x-t)+t^2\cos(x+t)$

Dengan menggunakan asumsi-asumsi dan langkah-langkah yang sama pada sub bab sebelumnya (3.1.1), maka penyelesaian persamaan (3.1) dengan fungsi *f(x,t)* diberikan sebagai $f(x,t)=\sin(x-t)+t^2\cos(x+t)$ adalah:

Tabel 3.4 Hasil komputasi nilai *u*(*x*,*t*) dengan fungsi yang diberikan adalah $f(x,t)=xt+\tan(xt)$

Waktu (*t*)	$i=0$ **x = 0**	$i=1$ **x = 72**	$i=2$ **x = 144**	$i=3$ **x = 216**	$i=4$ **x = 288**	$i=5$ **x = 360**
0	0	0.25382	-0.49102	0.69606	-0.8555	0.95892
0.025	-0.00030342	0.25998	-0.50222	0.71157	-0.87431	0.97979
0.05	-0.0011969	0.2657	-0.51118	0.72318	-0.88781	0.9943
0.075	-0.0026389	0.27091	-0.51777	0.73074	-0.89585	1.0023
0.1	-0.0045818	0.27552	-0.5219	0.73418	-0.89836	1.0037
0.125	-0.006973	0.27946	-0.52352	0.73348	-0.8954	0.9987
0.15	-0.0097557	0.28264	-0.52259	0.72871	-0.8871	0.98741
0.175	-0.01287	0.285	-0.51914	0.72	-0.87368	0.97017
0.2	-0.016254	0.28649	-0.5132	0.70752	-0.85546	0.94741
0.225	-0.019844	0.28703	-0.50486	0.69153	-0.83283	0.91962
0.25	-0.023578	0.28661	-0.49424	0.67232	-0.80623	0.88737
0.275	-0.027395	0.28519	-0.48148	0.65024	-0.77616	0.8513
0.3	-0.031234	0.28276	-0.46676	0.62564	-0.74314	0.81204
0.325	-0.035039	0.27932	-0.45027	0.59893	-0.70773	0.77027
0.35	-0.038758	0.27488	-0.43223	0.57051	-0.67049	0.72667

0.375	-0.042342	0.26948	-0.41288	0.5408	-0.63196	0.68189
0.4	-0.045748	0.26315	-0.39246	0.5102	-0.59266	0.63653
0.425	-0.048938	0.25595	-0.37121	0.47911	-0.55309	0.59118
0.45	-0.051882	0.24794	-0.34938	0.44789	-0.51371	0.54635
0.475	-0.054553	0.2392	-0.32722	0.41689	-0.47492	0.5025
0.5	-0.056933	0.2298	-0.30496	0.38641	-0.43707	0.46001
0.525	-0.059007	0.21984	-0.28281	0.35672	-0.40047	0.4192
0.55	-0.060769	0.20941	-0.26099	0.32805	-0.36535	0.38032
0.575	-0.062217	0.1986	-0.23967	0.30059	-0.3319	0.34356
0.6	-0.063354	0.18751	-0.21902	0.27446	-0.30024	0.30903
0.625	-0.06419	0.17623	-0.19918	0.24977	-0.27045	0.27679
0.65	-0.064738	0.16486	-0.18026	0.22659	-0.24258	0.24685
0.675	-0.065014	0.15348	-0.16234	0.20493	-0.21662	0.21919
0.7	-0.06504	0.14218	-0.14551	0.18479	-0.19252	0.19373
0.725	-0.064839	0.13103	-0.12979	0.16612	-0.17022	0.17038
0.75	-0.064436	0.12011	-0.11521	0.14888	-0.14965	0.14901
0.775	-0.063859	0.10947	-0.10178	0.13298	-0.13069	0.1295
0.8	-0.063136	0.099169	-0.089459	0.11833	-0.11324	0.11169
0.825	-0.062298	0.08925	-0.078233	0.10482	-0.097174	0.095431
0.85	-0.061373	0.07975	-0.068051	0.092364	-0.08239	0.080584
0.875	-0.060393	0.070696	-0.058858	0.080843	-0.068768	0.067
0.9	-0.059384	0.062109	-0.05059	0.070155	-0.056203	0.054539
0.925	-0.058376	0.053999	-0.04318	0.060201	-0.044594	0.043069
0.95	-0.057396	0.046373	-0.036555	0.05089	-0.033847	0.032468
0.975	-0.05647	0.03923	-0.030644	0.042137	-0.023881	0.022624
1	-0.055622	0.032563	-0.025375	0.033869	-0.014619	0.013436



Gambar 3.5 Grafik Solusi PDP dengan $f(x,t)=\sin(x-t)+t^2\cos(x+t)$

Gambar 3.5 merupakan gambar hasil solusi numerik persamaan (3.1) yaitu pada tabel 3.4 dengan kondisi awal $u(x,0)=\sin x$ dan kondisi batas $u(0,t)=u(2\pi,t),\ t\geq 0$ serta fungsi yang diberikan adalah $f(x,t)=\sin(x-t)+t^2\cos(x+t)$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari uraian dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa dalam pencarian solusi persamaan diferensial parsial non linear dengan menggunakan metode *optimal time stepping* digunakan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Diskritisasi persamaan diferensial parsial.

b. Membentuk pola iterasi terhadap persamaan yang telah didiskritisasi sehingga membentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa.

c. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa menggunakan rumus:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2}\left(J_n \mathbf{u}_n + \mathbf{f}_n\right),$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\left(J_n \mathbf{u}^{(1)} + \frac{\mathbf{f}_n + \mathbf{f}_{n+1}}{2}\right)$$

dengan $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_n(t),\ \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_n(t_n + \Delta t)$

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, metode *optimal time stepping* bisa diterapkan dalam pencarian solusi sistem persamaan diferensial biasa non linear baik yang homogen atau non homogen, atau bisa juga diterapkan pada sistem persamaan diferensial parsial.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. M. Pd. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press.

Anton, H. dan Rorres C. 2004. *Aljabar Linear Elementer.* Terjemahan Revina Indrisari dan Irzam H. Jakarta: Erlangga.

Ayres, Frank. 1992. *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric.* Terjemahan Lily Ratna. Jakarta: Erlangga.

Djojodihardjo, Harijono. 2000. *Metode Numerik.* Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Finizio, N. dan Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferential Dengan Penerapan Modern.* Terjemahan Widiarti Santosa. Jakarta: Erlangga.

Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

Pamuntjak, dkk. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa.* Bandung: ITB.

Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations.* Third Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc.

Roziana, Dewi Farida. 2008. Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Divusi Konfeksi. *Skripsi* Tidak diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika F.Saintek UIN Maliki.

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offest.

Waluya, Stevanus Budi. 2006. *Persamaan Diferensial.* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Yu, Jui-Ling, 2007. *An Optimal Adaptive Time-Stepping Scheme For Solving Reaction-Diffusion-Chemotaxis Systems*. Mathematical Biosciences And Engineering.
http://www.mbejournal.org/
(diakses pada tanggal 25 September 2010)

Lampiran 1
Program MATLAB Untuk Menyelesaikan PDP (Persamaan (3.1)) dengan Metode *Optimal Time Stepping*, $f(x,t)=(tx-1)e^{-t}\cos(x-t)+te^{-t}\sin(x-t)$

```
clc,clear
tic;
disp('=================================================================')
disp('Program menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Optimal
        Time Stepping')
disp('    fungsi yang diberikan adalah f(x,t)=(t*x-1)*exp(-t)*cos(x-t)+t*exp(-t)*sin(x-t)        ')
disp('                    Fatimatuz Zahroh (06510068)                                 ')
disp('================================================================')

format short g

f=@(x,T) (T.*x-1).*exp(-T).*cos(x-T)+T.*exp(-T).*sin(x-T);

dt=0.025;
t=0:dt:1;
X=linspace(0,360,6);
dx=abs(X(2)-X(1));

m=size(t,2);
n=size(X,2);

u=sin(X);
for i=1:m-1
   for j=1:n
      A=threeD(n,dx,t(i),t(i+1),X(j));
      F1=f(X,t(i))';
      F2=f(X,t(i+1))';
   end
   ua=u+(dt/2)*(A*u'+F1)';
   u=u+dt*(A*ua'+(F1+F2)/2)';
   U(i,:)=u;
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
disp('hasil komputasi');
disp('');
disp('baris = t, kolom = x');

disp(U);
waktu=0.025:dt:1;
mesh(X,waktu,U);xlabel('x');ylabel('t');
title('solusi persamaan (3.1) dengan f(x,t)=(t*x-1)*exp(-t)*cos(x-t)+t*exp(-t)*sin(x-t)')
```

Lampiran 2
Program MATLAB Untuk Menyelesaikan PDP (Persamaan (3.1)) dengan Metode *Optimal Time Stepping*, $f(x,t) = x\tan(x+t) + (x-t)\tan x$

```
clc,clear
tic;
disp('=============================================================')
disp('Program menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Optimal
     Time Stepping')
disp('            fungsi yang diberikan adalah f(x,t)=x*tan(x+t)+(x-t)*tan(x)                  ')
disp('                         Fatimatuz Zahroh (06510068)                                     ')
disp('=============================================================')

format short g

f=@(x,T) x.*tan(x+T)+(x-T).*tan(x);

dt=0.025;
t=0:dt:1;
X=linspace(0,360,6);
dx=abs(X(2)-X(1));

m=size(t,2);
n=size(X,2);

u=sin(X);
for i=1:m-1
   for j=1:n
      A=threeD(n,dx,t(i),t(i+1),X(j));
      F1=f(X,t(i))';
      F2=f(X,t(i+1))';
   end
   ua=u+(dt/2)*(A*u'+F1)';
   u=u+dt*(A*ua'+(F1+F2)/2)';
   U(i,:)=u;
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
disp('hasil komputasi');
disp('');
disp('baris = t, kolom = x');

disp(U);
waktu=0.025:dt:1;
mesh(X,waktu,U);xlabel('x');ylabel('t');
title('solusi persamaan (3.1) dengan f(x,t)=x*tan(x+t)+(x-t)*tan(x)')
```

Lampiran 3
Program MATLAB Untuk Menyelesaikan PDP (Persamaan (3.1)) dengan Metode *Optimal Time Stepping*, $f(x,t) = xt + \tan(xt)$

```
clc,clear
tic;

disp('=================================================== ============')
disp('Program Menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Optimal
     Time Stepping     ')
disp('                    fungsi yang diberikan adalah f(x,t)=x*t+tan(x*t)                    ')
disp('                         Fatimatuz Zahroh (06510068)                         ')
disp('=============================================================')

format short g

f=@(x,T) x.*T+tan(x.*T);

dt=0.025;
t=0:dt:1;
X=linspace(0,360,6);
dx=abs(X(2)-X(1));

m=size(t,2);
n=size(X,2);

u=sin(X);
for i=1:m-1
   for j=1:n
      A=threeD(n,dx,t(i),t(i+1),X(j));
      F1=f(X,t(i))';
      F2=f(X,t(i+1))';
   end
   ua=u+(dt/2)*(A*u'+F1)';
   u=u+dt*(A*ua'+(F1+F2)/2)';
   U(i,:)=u;
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
disp('hasil komputasi');
disp('');
disp('baris = t, kolom = x');

disp(U);
waktu=0.025:dt:1;
mesh(X,waktu,U);xlabel('x');ylabel('t');
title('solusi persamaan (3.1) dengan f(x,t)=x*t+tan(x*t)')
```

Lampiran 4
Program MATLAB Untuk Menyelesaikan PDP (Persamaan (3.1)) dengan Metode *Optimal Time Stepping*, $f(x,t)=\sin(x-t)+t^2\cos(x+t)$

```
clc,clear
tic;
disp('=================================================================')
disp('Program menyelesaikan Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode Optimal
     Time Stepping')
disp('    fungsi yang diberikan adalah f(x,t)=sin(x-t)+(t^2)*cos(x+t)                ')
disp('                          Fatimatuz Zahroh (06510068)')
disp('=================================================================')
format short g

f=@(x,T) sin(x-T)+(T^2).*cos(x+T);

dt=0.025;
t=0:dt:1;
X=linspace(0,360,6);
dx=abs(X(2)-X(1));

m=size(t,2);
n=size(X,2);

u=sin(X);
for i=1:m-1
    for j=1:n
        A=threeD(n,dx,t(i),t(i+1),X(j));
        F1=f(X,t(i))';
        F2=f(X,t(i+1))';
    end
    ua=u+(dt/2)*(A*u'+F1)';
    u=u+dt*(A*ua'+(F1+F2)/2)';
    U(i,:)=u;
end
disp(['Waktu Komputasi=',num2str(toc)])
disp('hasil komputasi');
disp('');
disp('baris = t, kolom = x');

disp(U);
waktu=0.025:dt:1;
mesh(X,waktu,U);xlabel('x');ylabel('t');
title('solusi persamaan (3.1) dengan f(x,t)=sin(x-t)+(t^2)*cos(x+t)')
```

```
function A=threeD(n,dx,t1,t2,x)

A1=@(h) 1/h^2;
A2=@(h,t1,t2,x) -2/h^2-(x*(t1+t2))/(2*h)-(t1+t2)/2;
A3=@(h,t1,t2,x) 1/h^2+x*(t1+t2)/(2*h);

for i=1:n
   if i<n
      A(i,i+1)=A1(dx);
      A(i+1,i)=A3(dx,t1,t2,x);
   end
   A(i,i)=A2(dx,t1,t2,x);
end
```

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang
(0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fatimatuz Zahroh
NIM : 06510068
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Solusi Persamaan Diferensial Parsial dengan Metode *Optimal Time Stepping*
Pembimbing I : Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	3 September 2010	Seminar proposal skripsi (BAB I dan BAB II)	1.	
2	4 Oktober 2010	Revisi BAB I dan konsultasi BAB II		2.
3	18 Oktober 2010	Revisi BAB II konsultasi BAB III	3.	
4	21 Oktober 2010	ACC BAB I dan BAB II, Konsultasi BAB III		4.
5	1 November 2010	Revisi BAB III, konsultasi BAB IV	5	
6	11 November 2010	Revisi BAB III		6.
7	11 Januari 2011	Revisi Keseluruhan	7.	
8	14 Desember 2011	Konsultasi Keagamaan		8.
9	12 Januari 2011	ACC Keagamaan	9.	
10	12 Januari 2011	ACC Keseluruhan		10.

Malang,12 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Nama : Fatimatuz Zahroh
Tempat/Tgl. Lahir : Pamekasan, 15 Mei 1988
Agama : Islam
Tempat Tinggal : Dsn. Sumber Tengah, Lebbek, Pakong, Pamekasan. 69352.
E-mail : f4zz4h_m4th@yahoo.com

PENDIDIKAN FORMAL:

1. Sekolah Dasar Negeri (SDN) Bandungan II, Pakong, Pamekasan. Tamat Tahun 2000.
2. Madrasah Tsanawiyah Negeri (MTsN) Model Sumber Bungur, Pakong Pamekasan. Tamat Tahun 2003.
3. Madrasah Aliyah (MA) Al-Amien Prenduan, Pragaan, Sumenep. Tamat Tahun 2006.
4. S1 Fakultas Sains dan Teknologi (Jurusan Matematika), Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

PENGALAMAN ORGANISASI

1. Pengelola Tabloid GEMA (Reporter) Unit Informasi dan Publikasi (Infopub) UIN Maliki Malang.
2. Pengelola KALEIDOSKOP (Reporter) Unit Informasi dan Publikasi (Infopub) UIN Maliki Malang.
3. Devisi Humas Azzam Islamic Research (AIR) UIN Maliki Malang.

Demikian daftar riwayat hidup ini saya buat dengan sebenar-benarnya.

Malang, 10 Januari 2011

Fatimatuz Zahroh