

**EKSENTRIK DIGRAF DARI GRAF n -PARTISI KOMPLIT
 $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ DENGAN $\alpha_i \geq 2$ DAN α_i BILANGAN ASLI**

SKRIPSI

Oleh:
NILNA NISWATIN AZIZAH
NIM: 05510025



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009**

**EKSENTRIK DIGRAF DARI GRAF n -PARTISI KOMPLIT $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$
DENGAN $\alpha_i \geq 2$ DAN α_i BILANGAN ASLI**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
NILNA NISWATIN AZIZAH
NIM: 05510025**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2009**

**EKSENTRIK DIGRAF DARI GRAF n -PARTISI KOMPLIT $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$
DENGAN $\alpha_i \geq 2$ DAN α_i BILANGAN ASLI**

SKRIPSI

Oleh:
NILNA NISWATIN AZIZAH
NIM: 05510025

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 15 Juli 2009

Pembimbing I,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 150 327 247

Pembimbing II,

Ahmad Barizi, M.A
NIP. 150 283 991

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

**EKSENTRIK DIGRAF DARI GRAF n -PARTISI KOMPLIT $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$
DENGAN $\alpha_i \geq 2$ DAN α_i BILANGAN ASLI**

SKRIPSI

Oleh:
NILNA NISWATIN AZIZAH
NIM: 05510025

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 27 Juli 2009

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: <u>Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u> NIP. 150 300 415	()
2. Ketua Penguji	: <u>Drs. H. Turmudi, M. Si</u> NIP. 150 209 630	()
3. Sekretaris Penguji	: <u>Abdussakir, M. Pd</u> NIP. 150 327 247	()
4. Anggota Penguji	: <u>Ahmad Barizi, M. A</u> NIP. 150 283 991	()

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : NILNA NISWATIN AZIZAH

NIM : 05510025

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juli 2009

Yang membuat pernyataan

Nilna Niswatin Azizah
NIM. 05510025

Motto

Berusaha menjadi insan "Ulul Albab"

*"Akal terbaik adalah akal yang mampu
membawa pemiliknya
rendah diri di hadapan Allah"
(Dadang Hawari)*



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Penulis Persembahkan

Karya ini untuk orang-orang yang sangat berarti:

Kedua orangtua tercinta yang tanpa lelah memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan tak henti-hentinya mencurahkan kasih sayangnya.

Kakak dan adik tersayang:

Mbak ulin & Mas Imin, "Dek Zidan", Mbak Oci & Mas Dori,

Dek Alwi, Dek Ilma, Dek Uma, Dek Liham,

*Teruslah berjuang untuk berbakti dan membanggakan kedua orangtua.
dan,*

Mas Hamam Alwy tercinta

Yang selalu memberikan semangat, motivasi, dan inspirasi dalam penyelesaian skripsi ini.

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan curahan rahmat, taufiq dan hidayahNya sehingga skripsi yang berjudul "*Eksentrik Digraf dari Graf n -Partisi Komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i Bilangan Asli*" ini dapat terselesaikan. Shalawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada junjungan nabi besar Muhammad SAW yang telah membawa kita dari jalan yang gelap menuju jalan yang terang benderang.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak akan mendapatkan suatu hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, saran serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan ungkapan terima kasih kepada

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdussakir, M.Pd selaku Dosen Pembimbing I, yang senantiasa dengan sabar memberikan bimbingan.
5. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih atas bimbingan yang telah diberikan.

6. Segenap dosen Matematika yang telah berjasa memberikan ilmunya, membimbing dan memberikan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Kedua orangtua dan semua keluarga yang selalu mendoakan dan mendukung setiap langkah penulis.
8. M. Hamam Alwi yang selalu memberikan semangat, motivasi, dan inspirasi dalam penyelesaian skripsi ini.
9. Yunita Wildaniati teman seperjuangan penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
10. Teman-teman matematika angkatan 2005, terima kasih atas dukungan, motivasi, dan kebersamaannya selama ini.
11. Teman-teman kos "Asrama 34" Kerto Pamuji, terima kasih atas keceriaan yang diberikan selama kebersamaan kita.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Kiranya skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun. Akhirnya, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, 15 Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR GAMBAR	v
DAFTAR TABEL	vii
ABSTRAK	viii
 BAB I : PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Batasan Masalah.....	6
1.5 Manfaat Penelitian.....	6
1.6 Metode Penelitian.....	7
1.7 Sistematika Penulisan	8
 BAB II : KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Graf.....	9
2.1.1 Definisi Graf.....	9
2.1.2 Adjacent dan Incident	10
2.1.3 Derajat	13
2.1.4 Graf Beraturan	15
2.1.5 Graf Komplit.....	16

2.1.6 Graf n-Partisi Komplit.....	18
2.2 Operasi pada Graf.....	19
2.2.1 Join.....	19
2.2.2 Operasi Penjumlahan (<i>Sum</i>)	20
2.2.3 Operasi Perkalian Kartesius	20
2.3 Graf Terhubung	21
2.3.1 Jalan (<i>Walk</i>)	22
2.3.2 Sikel	22
2.3.3 Trail.....	25
2.3.4 Lintasan	26
2.3.5 Sirkuit.....	26
2.4 Jarak dalam Graf.....	26
2.4.1 Jarak (<i>Distances</i>).....	26
2.4.2 Eksentrisitas.....	26
2.4.3 Titik Eksentrik	27
2.4.4 Radius dan Diameter.....	28
2.5 Digraf	29
2.5.1 Definisi Digraf.....	29
2.5.2 Adjacent dan Incident	31
2.5.3 Derajat	32
2.6 Eksentrik Digraf	32
2.6.1 Definisi Eksentrik Digraf	32
2.6.2 Contoh Eksentrik Digraf	33

BAB III: PEMBAHASAN

3.1 Eksentrik Digraf dari Graf n-Partisi Komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$	35
--	----

BAB IV: PENUTUP

4.1 Kesimpulan	55
4.2 Saran	55

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Representasi Digraf.....	2
Gambar 2.1	Sebuah Graf	9
Gambar 2.2	Graf dan Multi Graf.....	10
Gambar 2.3	Representasi Adjacent Terhadap Hubungan Orang Tua dengan Anak.....	11
Gambar 2.4	Hubungan Orang Tua dengan Anak.....	11
Gambar 2.5	Graf dengan Derajat Titik.....	12
Gambar 2.6	Jumlah Derajat Titik Graf H	13
Gambar 2.7	Graf G_1 Beraturan-1 dan G_2 Beraturan-2.....	14
Gambar 2.8	Graf Komplit.....	15
Gambar 2.9	Representasi Graf Terhadap Waktu-Waktu Shalat	16
Gambar 2.10	Gabungan Graf.....	17
Gambar 2.11	Penjumlahan Dua Graf	19
Gambar 2.12	Graf Hasil Kali Kartesius.....	20
Gambar 2.13	Graf Terhubung (<i>connected</i>).....	21
Gambar 2.14	Graf dengan Jalan.....	21
Gambar 2.15	Graf Sikel C_3 , C_5 , dan C_7	22
Gambar 2.16	Representasi Graf C_7 Terhadap Proses Penciptaan Manusia	23
Gambar 2.17	Graf Terhubung (<i>connected</i>).....	24
Gambar 2.18	Graf Hubungan Radius G dan Diameter G	27
Gambar 2.19	Gambar Digraf	29
Gambar 2.20	Represetasi Digraf.....	30
Gambar 2.21	Graf Adjacent dan Incident.....	30
Gambar 2.22	Graf yang Akan Dicari Eksentrik Digrafnya	31
Gambar 2.23	Eksentrik Digraf dari Graf G	32
Gambar 2.24	Eksentrik Digraf dari Graf G	34
Gambar 3.1	Graf Bipartisi Komplit $K_{2,4}$	35
Gambar 3.2	Eksentrik Digraf Graf Bipartisi Komplit $K_{2,4}$	36

Gambar 3.3	Graf Tripartisi Komplit $K_{3,4,7}$	37
Gambar 3.4	Eksentrik Digraf Graf Tripartisi Komplit $K_{3,4,7}$	38
Gambar 3.5	Graf Empat Partisi Komplit $K_{6,7,8,9}$	39
Gambar 3.6	Eksentrik Digraf Graf Empat Partisi Komplit $K_{6,7,8,9}$	41
Gambar 3.7	Graf Lima Partisi Komplit $K_{2,3,3,4,5}$	42
Gambar 3.8	Eksentrik Digraf Graf Lima Partisi Komplit $K_{2,3,3,4,5}$	44
Gambar 3.9	Graf Enam Partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6,7}$	45
Gambar 3.10	Eksentrik Digraf Graf Enam Partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6,7}$	47
Gambar 3.11	Graf Tujuh Partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6,7,8}$	48
Gambar 3.12	Eksentrik Digraf Graf Tujuh Partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6,7,8}$	51

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Eksentrisitas Graf G 34

Tabel 3.1 Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit $K_{2,4}$ 36

Tabel 3.2 Eksentrisitas Graf Tripartisi Komplit $K_{3,4,7}$ 38

Tabel 3.3 Eksentrisitas Graf Empat Partisi Komplit $K_{6,7,8,9}$ 40

Tabel 3.4 Eksentrisitas Graf Lima Partisi Komplit $K_{2,3,3,4,5}$ 43

Tabel 3.5 Eksentrisitas Graf Enam Partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6,7}$ 46

Tabel 3.6 Eksentrisitas Graf tujuh Partisi Komplit $K_{2,3,4,5,6,7,8}$ 49

Tabel 3.7 Eksentrisitas Graf52

ABSTRAK

Azizah, Nilna Niswatin. 2009. **Eksentrik Digraf dari Graf n-Partisi Komplit**

$K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i Bilangan Asli. Skripsi, Jurusan

Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: I. Abdussakir, M.Pd.

II. Ahmad Barizi, M.A.

Kata Kunci: Graf n-Partisi Komplit, Jarak, Eksentrisitas, Titik Eksentrik, Eksentrik Digraf.

Salah satu permasalahan dalam topik graf adalah menentukan eksentrik digraf dari suatu graf. Eksentrisitas titik v di graf G dinotasikan $e(v)$ adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(u, v) = e(u)$. Eksentrik digraf dari graf $ED(G)$ didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G atau $V(ED(G)) = V(G)$, dimana arc (sisi berarah) menghubungkan titik u ke titik v jika v adalah titik eksentrik di u . Berdasarkan latar belakang masalah tersebut penelitian dilakukan dengan tujuan untuk: Menentukan bentuk umum eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli.

Metode penelitian dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*library research*) selanjutnya adalah menentukan eksentrik digraf dari beberapa contoh graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli, dengan langkah-langkah sebagai berikut: (1) Menggambar beberapa contoh graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli; (2) Menentukan jarak setiap titik ke titik yang lain; (3) Menentukan eksentrisitas titik dan titik eksentrik pada setiap titik; (4) Eksentrisitas dan titik eksentrik yang diperoleh kemudian digambar eksentrik digrafnya; (5) Contoh eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit tersebut kemudian dicari pola tertentu (*konjektur*). Kemudian merumuskan konjektur sebagai teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa bentuk umum eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli adalah gabungan dari digraf komplit simetri $\overrightarrow{K_{\alpha_1}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_2}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_3}} \cup \dots \cup \overrightarrow{K_{\alpha_n}}$, atau dapat dituliskan dengan: $ED(K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}) = \bigcup_{i=1}^n K\alpha_i$, $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh tidak salah jika dinyatakan bahwa Allah adalah Maha matematis. (Abdusysyagir, 2007:79-80). Maka tidak diragukan lagi bahwa Al-Quran merupakan peletak dasar kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi bagi umat Islam.

Allah berfirman dalam surat Al-Qamar ayat 49 sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

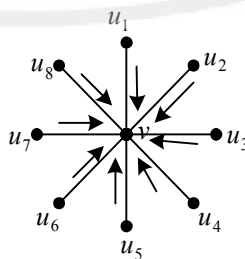
Artinya : “Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”

Masalah yang sering kali muncul di tengah-tengah kehidupan masyarakat sering kali membutuhkan selesaian dari disiplin ilmu, dengan bantuan bahasa lambang pada matematika permasalahan tersebut lebih mudah untuk dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Oleh karena itu suatu permasalahan perlu dikaji dan dianalisis dan kemudian dicari model matematikanya. Salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam

kehidupan sehari-hari adalah teori graf, karena teori-teorinya mudah untuk diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, seperti mencari jarak terdekat untuk tukang pos dalam menyampaikan surat, masalah penjadwalan, jaringan telekomunikasi, ilmu komputer dan lain-lain.

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Quran. Salah satu konsep dari disiplin ilmu matematika yang terdapat dalam Al-Qur'an adalah masalah teori graf. *Graf* G didefinisikan sebagai pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut *sisi* (Miller, 2000:165). Banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya unsur di E disebut *ukuran* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka *order* dan *ukuran* dari G cukup masing-masing ditulis p dan q (Chartrand dan Leniak, 1986:4).

Dalam Islam, arah kiblat pada waktu shalat dapat direpresentasikan dengan menggunakan graf. Misalkan hubungan itu digambarkan dengan sebuah graf sebagai berikut:



Gambar 1.1. Representasi Graf

dimana titik $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8$ adalah "gambaran umat Islam di seluruh penjuru dunia" dan titik v adalah "letak kiblat". Dari gambar graf tersebut titik u_1 sampai titik u_8 dihubungkan dengan titik v , dan arah anak panah u_1 sampai u_8 menuju ke titik v . Misalkan arah anak panah pada gambar di atas diumpamakan dengan arah shalat, maka arah shalat umat Islam di seluruh dunia adalah menghadap ke kiblat. Allah berfirman dalam surat Al-Baqarah ayat 144 sebagai berikut:

قَدْ نَرَى تَقَلُّبَ وَجْهِكَ فِي السَّمَاءِ ط فَلَنُوَلِّيَنَّكَ قِبْلَةً تَرْضَاهَا ۚ فَوَلِّ وَجْهَكَ شَطْرَ الْمَسْجِدِ
الْحَرَامِ ۚ وَحَيْثُ مَا كُنْتُمْ فَوَلُّوا وُجُوهَكُمْ شَطْرَهُ ۚ وَإِنَّ الَّذِينَ أُوتُوا الْكِتَابَ لَيَعْلَمُونَ أَنَّهُ
الْحَقُّ مِنْ رَبِّهِمْ ۗ وَمَا اللَّهُ بِغَفِلٍ عَمَّا يَعْمَلُونَ ﴿١٤٤﴾

Artinya: "Sungguh Kami (sering melihat mukamu menengadah ke langit), maka sungguh Kami akan memalingkan kamu ke kiblat yang kamu sukai. Palingkanlah mukamu ke arahnya. Dan sesungguhnya orang-orang (Yahudi dan Nasrani) yang diberi Al Kitab (Taurat dan Injil) memang mengetahui, bahwa berpaling ke Masjidil Haram itu benar dari tuhannya; dan Allah sekali-kali tidak lengah dari apa yang mereka kerjakan."

Ayat di atas menjelaskan, supaya orang-orang Islam melihat dengan mata kepala dan mata hati (*bashieroh*) bahwa bukti Allah SWT memang ada dan Maha Esa. Bukti kekuasaan Allah yaitu Baitullah Al-Mu'azhzhomah, sebuah bangunan suci yang dimuliakan, bangunan merupakan monumen agung, bangunan peribadatan yang pertama ada di muka bumi (*yadUllahi 'alal ardh*), sebagai tanda benar benar Allah SWT ada dan Mahakuasa. Keberadaan Baitullah supaya semua manusia tahu bahwa Allah SWT mengetahui semua apa yang ada di langit dan

apa yang di bumi dan Allah mengetahui segala sesuatu apa yang nyata dan apa yang tersembunyi, tidak ada yang lepas dari pantauan Allah termasuk seluruh semut di malam gelap, daun-daun, kayu, dan tetumbuhan lain yang berguguran setiap detik semua diketahui dan dilihat Allah SWT. Ketegasan keimanan dan kemurnian akidah Islam seperti itu yang harus lebih dihayati setiap orang Islam ketika melaksanakan shalat.

Pada graf, khususnya graf terhubung dijelaskan mengenai jarak titik ke titik yang lain. Misal G suatu graf serta u dan v titik di G . Jarak dari u ke v di G , ditulis $d(u,v)$, adalah panjang lintasan (*path*) terpendek dari u ke v di G . Jarak terjauh dari titik u ke semua titik yang lain pada graf G disebut eksentrisitas titik u dan ditulis $e(u)$. Jadi $e(u) = \max d(u,v)$, $\forall v \in V(G)$. Titik v disebut titik eksentrik dari titik u , jika $d(u,v) = e(u)$. Perlu dicatat bahwa titik eksentrik tidak harus tunggal. Radius graf G , ditulis $rad G$, adalah eksentrisitas terkecil dari semua titik di G , sedangkan diameter graf G , ditulis $diam G$, adalah eksentrisitas terbesar dari semua titik di G . Jadi, $rad G = \min e(v)$, dan $diam G = \max e(v)$, $\forall v \in V(G)$. Titik v disebut titik sentral dari graf G , jika $e(v) = rad G$. Himpunan titik sentral disebut *zenter* dari G , dan ditulis $Z(G)$. Graf yang hanya memuat satu titik sentral disebut graf unisentral.

Dalam teori graf, bahasan mengenai eksentrik digraf merupakan bahasan yang masih dapat dikatakan sangat baru. Eksentrik digraf diperkenalkan pertama kalinya oleh Fred Buckley pada tahun 90-an. Eksentrik digraf dari suatu graf didefinisikan sebagai berikut. Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan

himpunan sisi $E(G)$. Digraf D dengan $V(D) = V(G)$ dan ada busur dari titik u ke titik v dengan syarat v adalah titik eksentrik dari u , disebut eksentrik digraf dari graf G . Eksentrik digraf dari graf G disimbolkan dengan $ED(G)$.

Permasalahan yang muncul dalam pembahasan mengenai eksentrik digraf dari suatu graf adalah menentukan bentuk umum eksentrik digraf tersebut. Penelitian mengenai eksentrik digraf yang sudah atau sedang dilakukan adalah eksentrik digraf dari graf lintasan, sikel, star, dobel star, komplit, bipartisi komplit. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk meneliti mengenai eksentrik digraf dari graf n -partisi komplit yang dikemas dalam judul penelitian :

”Eksentrik Digraf dari Graf n -Partisi Komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i Bilangan Asli”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimanakah bentuk umum eksentrik digraf dari graf n -partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini yaitu untuk menentukan bentuk umum eksentrik digraf dari graf n -partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli.

1.4 Batasan Masalah

Agar penulisan skripsi ini tidak meluas, maka graf yang akan dicari eksentrik digrafnya adalah graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli. Hal ini dilakukan karena berdasarkan hasil percobaan penulis, ternyata untuk graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$, dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli, memiliki pola yang berbeda dengan pola untuk α_i bilangan asli lainnya yaitu $\alpha_i = 1$.

1.5 Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat, yaitu :

1) Bagi Penulis

Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang teori graf, khususnya tentang eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli.

2) Bagi Lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepastakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

3) Bagi Pengembangan Ilmu

Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan kajian keilmuan untuk menambah wawasan keilmuan.

1.6 Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*Library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau makalah-makalah. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang eksentrik digraf. Langkah selanjutnya adalah menentukan eksentrik digraf dari beberapa contoh graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$, dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli, langkah-langkahnya adalah:

- Gambar beberapa contoh graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli.
- Tentukan jarak setiap titik ke titik-titik yang lain dalam graf tersebut.
- Tentukan eksentrisitas dan titik eksentrik setiap titik.
- Eksentrisitas dan titik eksentrik yang diperoleh, kemudian digambar eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli.
- Melalui beberapa contoh eksentrik digraf dari kedua graf n-partisi komplit tersebut, kemudian dicari pola tertentu. Pola yang didapatkan masih dapat dianggap sebagai dugaan (*konjektur*). Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari 4 bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut :

BAB I. PENDAHULUAN

Dalam bab ini akan diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, graf terhubung, operasi pada graf, digraf, digraf terhubung, eksentrik digraf, dan representasi graf dalam Islam.

BAB III PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan digambarkan beberapa graf n -partisi komplit yang dicari eksentrisitas titik dan titik eksentriknya. Selanjutnya digambarkan eksentrik digraf dari masing-masing graf dan melalui beberapa contoh tersebut, kemudian dicari pola tertentu. Pola yang didapatkan dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturanya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti sehingga diperoleh bentuk umumnya.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1. Graf

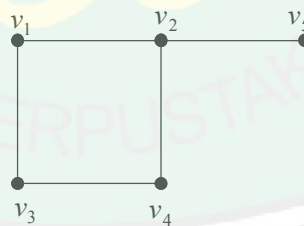
2.1.1. Definisi Graf

Suatu graf G adalah suatu pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan dari pasangan tak terurut dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik di graf G ditulis $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G dilambangkan dengan $E(G)$. (Chartrand dan Lesniak, 1986 : 4).

Contoh :

Misal $G : (V, E)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_5), (v_2, v_4), (v_4, v_3)\}$

Jadi graf G digambar sebagai berikut :

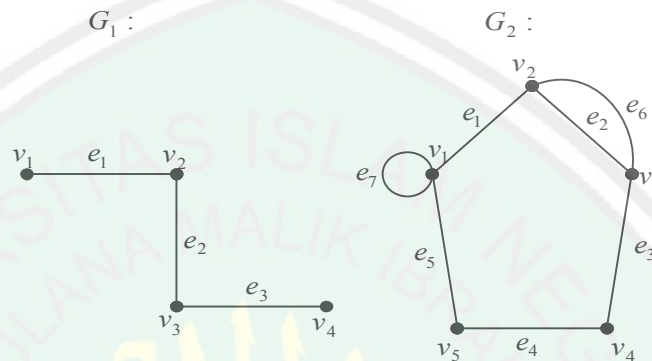


Gambar 2.1. Sebuah Graf

Dari definisi di atas, maka suatu graf sederhana tidak boleh mempunyai sisi rangkap (*multiple edges*) dan loop. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan loop adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri

(Suryanto, 1986:14). Graf yang mempunyai sisi rangkap dan loop disebut multigraf.

Contoh:



Gambar 2.2. Graf dan Multigraf

Pada Gambar 2.2 G_1 merupakan graf, memuat himpunan titik $V(G_1)$ dan sisi $E(G_1)$ yaitu : $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E(G_1) = \{(v_1 v_2), (v_2 v_3), (v_3 v_4)\}$. Graf G_1 mempunyai order 4 atau $p = 4$ dan size 3 atau $q = 3$. Sisi yang menghubungkan dua titik yang sama disebut *loop*. Jika terdapat lebih dari satu sisi yang menghubungkan dua titik, maka sisi tersebut dinamakan *sisi ganda* (*multiple edge*). Suatu graf yang mengandung loop atau sisi ganda dinamakan *multigraf*. Pada Gambar 2.2 di atas graf G_2 adalah contoh multigraf karena mengandung loop, yaitu sisi e_7 dan mengandung sisi ganda yaitu sisi e_2 dan e_6 .

2.1.2. Adjacent dan Incident

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e

serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari definisi di atas, maka dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.3. Adjacent dan Incident

Gambar 2.3 Sisi $e = (u, v)$ yang menghubungkan titik u dan v Karena $e = (u, v)$ sisi di G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), sedangkan e dan u serta e dan v disebut terkait langsung (*incident*).

Dalam Islam, definisi *adjacent* dapat direpresentasikan untuk menggambarkan hubungan antara orang tua dengan anaknya dimana, antara satu dengan yang lainnya terhubung langsung. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut:



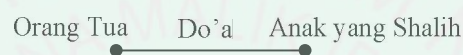
Gambar 2.4. Representasi Adjacent terhadap Hubungan Orang Tua dengan Anak

Berdasarkan gambar 2.4 jika dimisalkan titik pertama adalah "orang tua" dan titik kedua adalah "anak", maka selanjutnya sisi penghubung antara orang tua dengan anak adalah nasab. Dalam sebuah hadis yang diriwayatkan oleh Imam Muslim adalah sebagai berikut:

قَالَ النَّبِيُّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: إِذَا مَاتَ ابْنُ آدَمَ انْقَطَعَ عَمَلُهُ إِلَّا مِنْ ثَلَاثٍ: صَدَقَةٍ جَارِيَةٍ، أَوْ عِلْمٍ يُنْتَفَعُ بِهِ، أَوْ وَلَدٍ صَالِحٍ يَدْعُو لَهُ. (رَوَاهُ مُسْلِمٌ)

Artinya: "Apabila anak Adam meninggal dunia maka akan terputus segala amalannya kecuali tiga perkara: shadaqah jariyah atau ilmu yang bermanfaat atau anak shalih yang mendoakannya" (HR. Muslim).

Berdasarkan hadis di atas dijelaskan bahwa anak shalih baik laki-laki maupun perempuan, anak kandung maupun cucu, akan terus mengalir kemanfaatan mereka kepada para orang tua berkat doa yang baik yang diterima Allah untuk ibu bapak mereka, shadaqah yang dilakukan anak-anak shalih untuk orang tua, bahkan doa yang diucapkan orang yang pernah mendapatkan kebaikan dari anak-anak tersebut. Jika digambarkan yaitu sebagai berikut:



Gambar 2.5. Representasi Adjacent terhadap Hubungan Orang Tua dengan Anak

Dalam hadis di atas juga terdapat anjuran untuk mendidik anak agar menjadi anak yang shalih dan menumbuhkan mereka menjadi generasi yang shalih untuk orang tua mereka yang nantinya mendoakan kebaikan kepada mereka setelah meninggal. Hadis di atas juga menunjukkan bahwa anak disyariatkan mendoakan orang tuanya bersamaan dengan doa untuk dirinya di dalam maupun di luar shalat, dan ini termasuk perbuatan berbakti yang akan terus ada setelah meninggalnya orang tua. Perkara-perkara yang terdapat di dalam hadis di atas adalah inti dari firman Allah SWT dalam surat Yaasiin ayat 12:

إِنَّا نَحْنُ نُحْيِي الْمَوْتَىٰ وَنَكْتُبُ مَا قَدَّمُوا وَآثَرَهُمْ ۚ وَكُلُّ شَيْءٍ أَحْصَيْنَاهُ فِي إِمَامٍ مُّبِينٍ

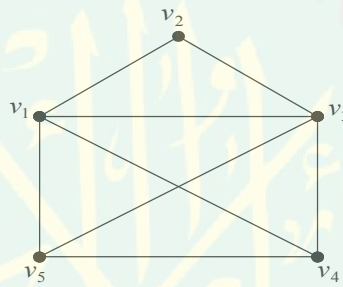


Artinya: "Sesungguhnya Kami menghidupkan orang-orang mati dan Kami menuliskan apa yang mereka kerjakan dan bekas-bekas yang mereka tinggalkan. Dan segala sesuatu Kami kumpulkan dalam Kitab Induk yang nyata (Lauh Mahfuzh)."

2.1.3. Derajat

Derajat suatu titik v pada sebuah graf G , ditulis dengan $\deg(v)$, adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada v . Dengan kata lain, banyaknya sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $\deg(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak 1986: 7, Sutarno 2005: 69).

Contoh :



Gambar 2.6. Graf dengan Derajat Titik

$\deg(v_1) = 4, \deg(v_2) = 2, \deg(v_3) = 4, \deg(v_4) = 3, \deg(v_5) = 3.$

Teorema 1

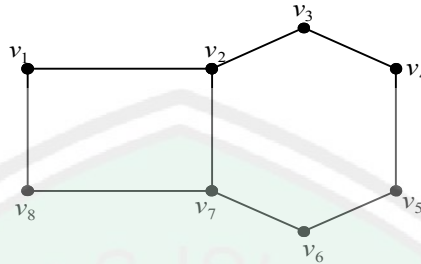
Jika graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

maka $\sum_{i=1}^n \deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7)

Bukti:

Setiap sisi yang terkait langsung dengan 2 titik, bila derajat tiap titik tersebut dijumlahkan maka sisi yang terhubung tersebut dihitung 2 kali.

Contoh:



Gambar 2.7. Jumlah derajat titik Graf H

Pada teorema di atas telah disebutkan bahwa setiap sisi yang terkait langsung dengan 2 titik maka jika sisinya dijumlah maka dihitung 2 kali. Maka pada graf H pada gambar 2.7 mempunyai order 8, sehingga jumlah sisinya adalah 16.

Akibat Teorema 1

Pada sebarang graf, banyaknya titik yang berderajat ganjil adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Bukti:

Misalkan graf G dengan titik sebanyak q , maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil di G serta U yang memuat himpunan titik genap di G . Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap. Sehingga $|G|$ adalah genap.

Contoh :

Pada gambar 2.7 jika kita bagi graf tersebut menjadi dua bagian, yaitu graf W yang memuat himpunan titik ganjil yaitu v_2, v_7 dan U himpunan titik genap yaitu $v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8$. Maka dari akibat teorema dapat diberi contoh :

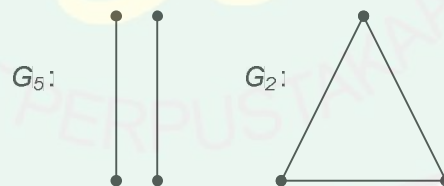
$$\begin{aligned}\sum_{v \in V(H)} \deg_H v &= \sum_{v \in W} \deg_H v + \sum_{v \in U} \deg_H v \\ &= 2.2 + 2.6 \\ &= 16\end{aligned}$$

Maka jumlah derajatnya adalah 16.

2.1.4. Graf Beraturan

Graf beraturan- r adalah graf yang semua titiknya berderajat r , atau $\deg(v) = r, \forall v \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh:

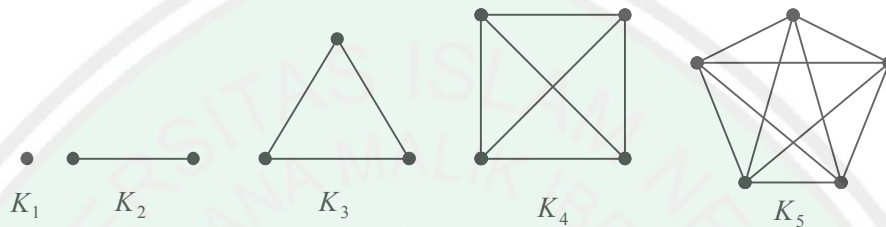


Gambar 2.8. Graf G_1 Beraturan-1 dan G_2 Beraturan-2

Dari Gambar 2.8, graf G_1 disebut graf beraturan-1 karena derajat tiap titiknya adalah 1. Graf G_2 disebut graf beraturan-2 karena derajat tiap titiknya adalah 2.

2.1.5. Graf Komplit

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Purwanto, 1998:21).



Gambar 2.9. Graf Komplit

Dari Gambar 2.9. K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , dan K_5 adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjacent* dengan semua titik yang lain.

Shalat adalah perbuatan rohaniyah dan juga jasmaniyah manusia sebagaimana badan manusia memerlukan makanan, maka jiwa manusia memerlukan makanan pula, shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Shalat wajib disebut juga shalat *maktubah* atau shalat *mafrudhah*, mulai diperlakukan pada malam Isra' tahun 621 M. Shalat wajib dilaksanakan lima kali sehari semalam, yaitu pada waktu: *Dzuhur*, *Ashar*, *Magrib*, *Isya'*, dan *Shubuh*. Shalat wajib yang mula-mula dilakukan Rasulullah SAW. adalah shalat *Dzuhur* pada esoknya malam Isra' tersebut (Depag RI, 1988:833).

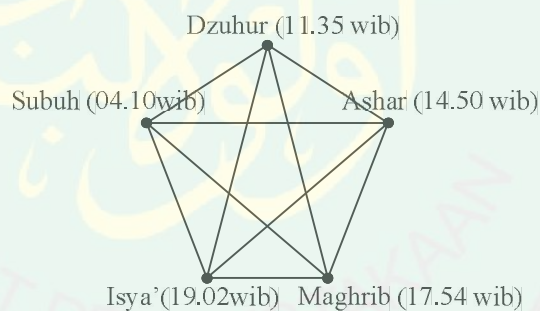
Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al- Nisa' ayat 103:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ الصَّلَاةَ فَادْكُرُوا اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا اطْمَأْنَنْتُمْ فَأَقِيمُوا

الصَّلَاةُ ۚ إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: “Maka apabila kamu telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu telah merasa aman, maka dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah kewajiban yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman”.

Shalat dapat direpresentasikan dalam suatu graf, berdasarkan gambar 2.9 di atas pada graf K_5 menunjukkan lima titik yang dapat diartikan sebagai waktu-waktu shalat.



Gambar 2.10. Representasi Graf terhadap Waktu-Waktu Shalat

Al- Qur'an tidak menerangkan secara terperinci waktu-waktu pelaksanaan shalat fardhu, akan tetapi, di dalam hadis Rasulullah Saw waktu-waktu shalat telah dinyatakan secara terperinci, batas awal sampai batas akhir waktu setiap shalat. Diantara hadis yang menerangkan waktu-waktu shalat tersebut adalah hadis yang diriwayatkan oleh Abu Musa Al-Asy'ari r.a., adalah sebagai berikut:

“Dari Rasulullah saw, bahwasanya ada seorang penanya datang kepada beliau menanyakan waktu shalat, namun beliau tidak menjawab sedikitpun. Kata

Abu Musa: Maka beliau menyuruh Bilal untuk adzan, lalu beliau melakukan shalat Subuh ketika terbit fajar, sedangkan orang yang satu dengan yang lain hampir tidak mengenali (karena agak gelap). Kemudian beliau menyuruh bilal menyaurakan adzan, lalu beliau mendirikan shalat Dzuhur ketika matahari condong sedikit ke arah barat, sedangkan seseorang mengatakan, “sudah tengah hari”, padahal beliau lebih tahu dari mereka. Kemudian beliau menyuruh Bilal menyaurakan adzan, lalu beliau melakukan shalat Ashar ketika matahari masih tinggi. Kemudian beliau menyuruh Bilal menyaurakan adzan, lalu beliau melakukan shalat Maghrib ketika matahari telah terbenam. Kemudian beliau menyuruh Bilal menyerukan adzan lalu beliau melakukan shalat Isya ketika mega merah-merah telah hilang. Kemudian beliau mengakhirkan shalat Subuh dibanding yang kemarin, sehingga setelah shalat ada dua orang berkata, “matahari telah terbit atau hampir terbit.” Kemudian beliau mengakhirkan shalat Dzuhur dibanding yang kemarin hingga mendekati waktu Ashar. Kemudian beliau mengakhirkan shalat Ashar, sehingga se usai shalat ada dua orang berkata “matahari telah memerah”. Kemudian beliau mengakhirkan shalat Maghrib hingga mega merah hampir hilang. Kemudian beliau mengakhirkan shalat Isya hingga sepertiga malam yang pertama. Kemudian beliau melakukan shalat Subuh. Setelah itu beliau memanggil orang yang bertanya (sebelumnya), lalu beliau berabda, “Waktu shalat adalah antara batas-batas tersebut “.

Berdasarkan hadis di atas sudah jelas bahwa waktu-waktu shalat sudah ditentukan sejak zaman Rasulullah SAW, adapun pada saat ini penentuan waktu shalat bisa ditentukan dengan penerapan ilmu astronomi dan falakiah sehingga ketentuan waktu shalat didapatkan berdasarkan satuan waktu yang ada dengan melihat perbedaan waktu GMT yang telah disepakati tanpa harus melihat bayangan suatu benda.

2.1.6. Graf n-Partisi Komplit

Graf n-partisi komplit G didefinisikan sebagai graf n-partisi dengan himpunan partisinya $V_1, V_2, \dots, V_n$ itu mempunyai tambahan sifat yaitu jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$ maka $uv \in e(G)$. Jika $|V_i| = P_i$, maka graf tersebut dinotasikan $K_{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n}$. Graf bipartisi komplit dengan himpunan partisi V_1 dan

V_2 , dimana $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$, dinotasikan $K_{m,n}$ Graf $K_{1,n}$ dinamakan graf star.

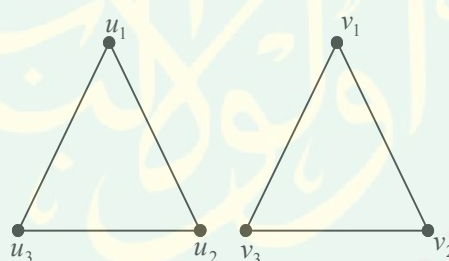
(Chartrand dan Lesniak, 1986:10).

2.2. Operasi pada Graf

2.2.1. Join

Gabungan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G memuat sebanyak $n \geq 2$ graf H , maka dinotasikan dengan $G = nH$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Contoh:



Gambar 2.11. Gabungan Graf

Gambar di atas merupakan contoh gabungan graf G_1 dan G_2 .

$V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_1\}$ dan $E(G) =$

$\{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$. Jika $G = G_1 \cup G_2$. Maka $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) =$

$\{u_1, u_2, u_3\} \cup \{v_1, v_2, v_3\} = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) =$

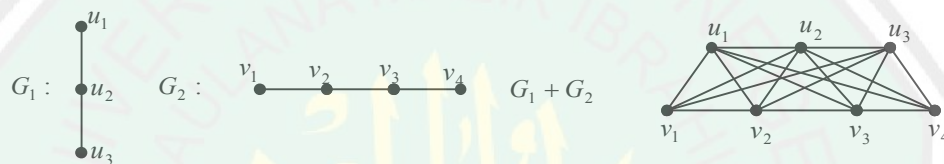
$\{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\} = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1\}$

Karena graf G memuat 2 graf K_3 , maka graf tersebut dapat dinotasikan $2K_3$.

2.2.2. Operasi Penjumlahan (Sum)

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Perhatikan contoh di bawah ini.



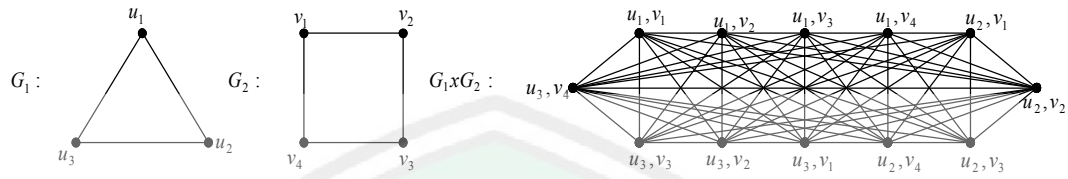
Gambar 2.12. Penjumlahan Dua Graf

Pada contoh di atas, $V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, maka $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{u_1, u_2, u_3\} \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) = \{u_1u_2, u_2u_3\} \cup \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4\} = \{u_1u_2, u_2u_3, v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_1v_4, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3, u_2v_4, u_3v_1, u_3v_2, u_3v_3, u_3v_4\}$.

2.2.3. Operasi Perkalian Kartesius

Hasil kali kartesius dari graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Perhatikan contoh berikut:



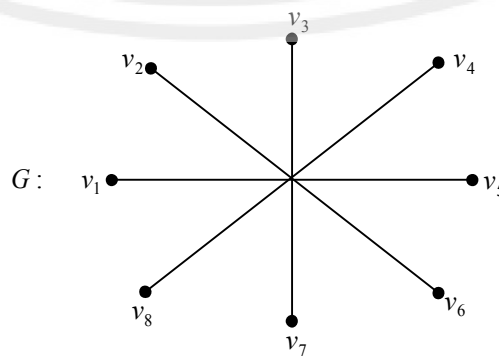
Gambar 2.13. Graf Hasil Kali Kartesius

Pada contoh di atas, $V(G_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, maka $G = G_1 \times G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_1, v_4), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_2, v_3), (u_2, v_4), (u_3, v_1), (u_3, v_2), (u_3, v_3), (u_3, v_4)\}$. (u_1, v_1) dan (u_1, v_2) terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = u_1$ dan $v_1 v_2 \in E(G_2)$.

2.3. Graf Terhubung

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G . Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G . Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



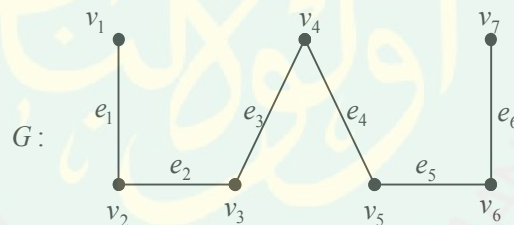
Gambar 2.14. Graf Terhubung (*connected*)

Graf G pada Gambar 2.14 dikatakan terhubung karena setiap titiknya terhubung dengan titik yang lain.

2.3.1. Jalan (*Walk*)

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong). $W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk $0 < i \leq n$. Dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G . v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:



Gambar 2.15. Graf dengan Jalan

Jalan pada graf G di Gambar 2.15 adalah $W: v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5,$

v_6, e_6, v_7 .

2.3.2. Sikel

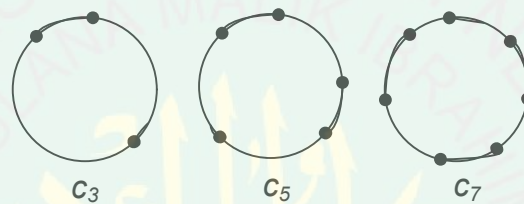
Graf sikel C_n adalah graf terhubung n titik yang setiap titiknya berderajat

2. Misal graf sikel C_n mempunyai himpunan titik $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, maka graf

tersebut mempunyai himpunan sisi $E(C_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ dimana $e_i = v_i v_{i+1} \pmod{n}$ untuk setiap $i=1, 2, \dots, n$ (Gafur, 2008:8).

Sikel dengan panjang n disebut *sikel- n* (C_n). Sikel- n disebut genap atau ganjil bergantung pada n genap atau ganjil. Panjang sikel pada sebuah graf paling kecil adalah 3 (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



Gambar 2.16. Graf Sikel C_3 , C_5 , dan C_7

Gambar di atas menunjukkan contoh dari graf sikel, graf sikel C_3 memiliki 3 titik yang masing-masing titiknya berderajat 2, graf sikel C_5 memiliki 5 titik dan masing-masing titiknya berderajat 2, sedangkan graf sikel C_7 memiliki 7 titik dan masing-masing titiknya juga berderajat 2.

Manusia merupakan makhluk ciptaan Allah SWT yang paling mulia, baik dilihat dari segi bentuk, kepribadian, akal, pikiran, perasaan, dan sebagainya. Berbeda dengan makhluk yang lain, meskipun memiliki sifat-sifat seperti manusia. Sebagai makhluk yang paling mulia, ternyata bahan dasar yang dipakai dalam menciptakan manusia adalah tanah. Maha besar Allah SWT, pencipta yang paling sempurna. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT dalam surat As-Shaad ayat 71-72:

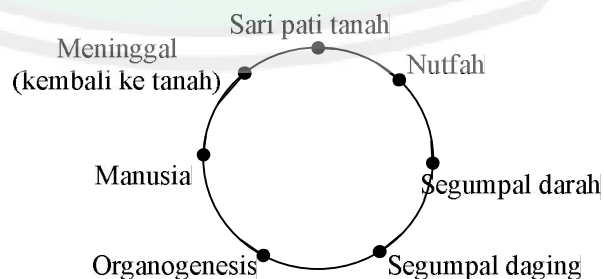
إِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلٰٓئِكَةِ اِنِّیْ خَلِقُ بَشَرًا مِّنْ طِیْنٍ ﴿ۙۛۛ﴾ فَاِذَا سَوَّیْتُهُۥ وَنَفَخْتُ فِیْهِ مِنْ رُّوْحِیْ فَقَعُوْا

لَهٗۤ سَجْدٍ ﴿ۙۛۛ﴾

Artinya: "(Ingatlah) ketika Tuhanmu berfirman kepada malaikat: "Sesungguhnya Aku akan menciptakan manusia dari tanah". Maka apabila Telah Kusempurnakan kejadiannya dan Kutuipkan kepadanya roh (ciptaan)Ku; Maka hendaklah kamu tersungkur dengan bersujud kepadanya".

Graf sikel C_7 dapat menggambarkan tentang proses penciptaan manusia.

Misalkan graf C_7 dinyatakan sebagai proses penciptaan manusia maka titik pertama diumpamakan sebagai "sari pati tanah", titik kedua diumpamakan sebagai "nutfah" yang merupakan percampuran antara setetes mani laki-laki (seperma) dan sel telur (ovum), titik yang ketiga diumpamakan sebagai "segumpal darah", titik yang keempat diumpamakan sebagai "segumpal daging", titik yang kelima diumpamakan sebagai "organogenesis (proses pembentukan organ)", titik yang keenam diumpamakan sebagai "manusia (sempurna)", kemudian titik yang ketujuh diumpamakan sebagai "manusia yang meninggal dunia" (kembali ke tanah). Maka graf C_7 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.17 Representasi Graf C_7 Terhadap Proses Penciptaan Manusia

Allah berfirman di dalam Al-Qur'an surat Al-Mu'minun ayat 12-14 berkenaan dengan tahap-tahap penciptaan manusia sebagai berikut:

وَلَقَدْ خَلَقْنَا الْإِنْسَانَ مِنْ سُلَالَةٍ مِّن طِينٍ ﴿١٢﴾ ثُمَّ جَعَلْنَاهُ نُطْفَةً فِي قَرَارٍ مَّكِينٍ ﴿١٣﴾ ثُمَّ خَلَقْنَا
الْنُّطْفَةَ عَلَقَةً فَخَلَقْنَا الْعَلَقَةَ مُضْغَةً فَخَلَقْنَا الْمُضْغَةَ عِظْمًا فَكَسَوْنَا الْعِظْمَ لَحْمًا ثُمَّ أُنشَأْنَاهُ
خَلْقًا آخَرَ ۖ فَتَبَارَكَ اللَّهُ أَحْسَنُ الْخَالِقِينَ ﴿١٤﴾

Artinya: "Dan sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dari suatu saripati (berasal) dari tanah. Kemudian Kami jadikan saripati itu air mani (yang disimpan) dalam tempat yang kokoh (rahim). Kemudian air mani itu Kami jadikan segumpal darah, lalu segumpal darah itu Kami jadikan segumpal daging, dan segumpal daging itu Kami jadikan tulang belulang, lalu tulang belulang itu Kami bungkus dengan daging. Kemudian Kami jadikan dia makhluk yang (berbentuk) lain. Maka Maha sucilah Allah, Pencipta yang paling baik" .

Dari hasil penelitian bahwa embriologi manusia telah dipelajari ilmuwan selama beberapa abad, tetapi belum dapat menjelaskan secara detail tentang proses terbentuknya manusia, terkadang teori yang dikemukakan bertentangan dengan fakta. Hal ini disebabkan karena keterbatasan ilmu dan pengetahuan yang dimiliki oleh manusia. Jauh sebelum manusia melakukan penelitian, di dalam Al-Qur'an surat Al-Mu'minuun ayat 12-14 telah menjelaskan secara detail tentang bagaimana Allah SWT menciptakan manusia.

2.3.3. Trail

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *Trail* $u - v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

2.3.4. Lintasan

Trail $u - v$ yang semua titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u - v$.

Dengan demikian, semua lintasan adalah *Trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

2.3.5. Sirkuit

Trail tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada graf G disebut Sirkuit G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

2.4. Jarak dalam Graf

2.4.1. Jarak (*Distances*)

Untuk suatu graf terhubung G , maka jarak (*distance*) $d(u, v)$ antara dua titik u dan v di G adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G . Dengan fungsi jarak ini, himpunan $V(G)$ adalah suatu ruang metrik (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

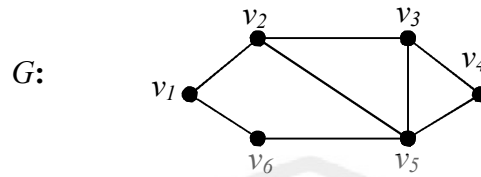
2.4.2. Eksentrisitas

Eksentrisitas $e(v)$ dari suatu titik v pada graf terhubung G merupakan maksimal $d(u, v)$, $\forall u \in v(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

2.4.3. Titik Eksentrik

Titik v adalah titik eksentrik dari u jika jarak dari v ke u sama dengan eksentrisitas dari u atau $d(v, u) = e(u)$ (Gafur, 2007:1).

Contoh:



Gambar 2.18. Graf Terhubung (*connected*)

Jarak pada graf G di Gambar 2.18 adalah :

$$\begin{aligned}
 &d(v_1, v_2) = 1, \quad d(v_1, v_3) = 2, \quad d(v_1, v_4) = 3, \quad d(v_1, v_5) = 2, \quad d(v_1, v_6) = 1, \\
 &d(v_2, v_1) = 1, \quad d(v_2, v_3) = 1, \quad d(v_2, v_4) = 2, \quad d(v_2, v_5) = 1, \quad d(v_2, v_6) = 2, \\
 &d(v_3, v_1) = 2, \quad d(v_3, v_2) = 1, \quad d(v_3, v_4) = 1, \quad d(v_3, v_5) = 1, \quad d(v_3, v_6) = 2, \\
 &d(v_4, v_1) = 3, \quad d(v_4, v_2) = 2, \quad d(v_4, v_3) = 1, \quad d(v_4, v_5) = 1, \quad d(v_4, v_6) = 2, \\
 &d(v_5, v_1) = 2, \quad d(v_5, v_2) = 1, \quad d(v_5, v_3) = 1, \quad d(v_5, v_4) = 1, \quad d(v_5, v_6) = 1, \\
 &d(v_6, v_1) = 1, \quad d(v_6, v_2) = 2, \quad d(v_6, v_3) = 2, \quad d(v_6, v_4) = 2 \text{ dan } d(v_6, v_5) = 1
 \end{aligned}$$

Eksentrisitas pada graf G pada Gambar 2.18 adalah : $e(v_1) = 3$, $e(v_2) = 2$,
 $e(v_3) = 2$, $e(v_4) = 3$, $e(v_5) = 2$ dan $e(v_6) = 2$.

Titik eksentrik pada graf G pada Gambar 2.18 adalah :

titik eksentrik v_1 adalah v_4

titik eksentrik v_2 adalah v_4 dan v_6

titik eksentrik v_3 adalah v_1 dan v_6

titik eksentrik v_4 adalah v_1

titik eksentrik v_5 adalah v_1

titik eksentrik v_6 adalah v_2 , v_3 dan v_4

2.4.4. Radius dan Diameter

Radius $rad\ G$ didefinisikan sebagai minimum dari $e(v)$, sedangkan *diameter* $diam\ G$ adalah maksimum $e(v)$. Suatu titik v dikatakan titik sentral jika $e(v) = rad\ G$ dan $Z(G)$ adalah himpunan titik sentral di G (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Radius pada graf G di Gambar 2.18 adalah : $rad\ G = 2$

Diameter pada graf G di Gambar 2.18 adalah : $diam\ G = 3$

Titik sentral pada graf G di Gambar 2.18 adalah : v_2, v_3, v_5, v_6 .

Teorema 2:

Untuk setiap graf terhubung G , antara radius dan diameter G terdapat hubungan sebagai berikut:

$$rad\ G \leq diam\ G \leq 2\ rad\ G$$

Bukti:

Pertidaksamaan $rad\ G \leq diam\ G$ adalah suatu konsekuensi langsung dari definisi yaitu $rad\ G = \min e(v)$ dan $diam\ G = \max e(v)$. Untuk menunjukkan ketidaksamaan yang kedua, pilih titik u dan v di G , sedemikian hingga $d(u, v) = diam\ G$. Kemudian, misalkan w sebagai titik sentral dari G . Titik u ke v melalui titik sentral w karena jarak $d(u, v)$ di G merupakan panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan u dan v di G jika u ke v melalui titik sentral w . Karena d adalah metrik pada $V(G)$, sedemikian hingga terdapat sifat ketaksamaan segitiga (*triangle inequality*) sebagai berikut,

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq 2 \text{ rad } G$$

Sehingga grafnya dapat digambarkan sebagai berikut



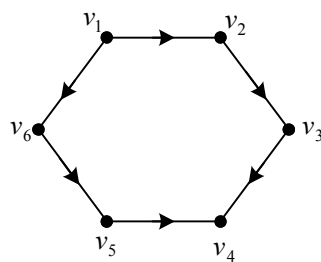
Gambar 2.19. Graf Hubungan Radius G dan Diameter G

2.5. Digraf

2.5.1. Definisi Digraf

Graf berarah (digraf) D adalah struktur yang terdiri dari himpunan yang unsurnya disebut titik (*vertex*), dan himpunan pasangan terurut dua titik yang disebut sisi berarah (*arc*). Himpunan titik pada digraf D dinotasikan dengan $V(D)$, dan himpunan sisi berarahnya dinotasikan dengan $A(D)$. Banyaknya unsur di $V(D)$, $|V(D)|$ disebut *order* dari D dan banyaknya unsur di $A(D)$, $|A(D)|$ disebut *ukuran* dari D . Jika titik v dan w adalah titik $V(D)$, maka sisi berarah (vw) dikatakan berarah dari v ke w , atau menghubungkan v ke w (Wilson dan Watkins, 1990: 81).

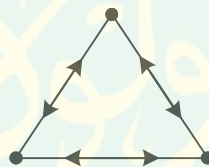
Contoh:



Gambar 2.20. Gambar Digraf

Jadi graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Sisi berarah disebut busur (*arc*). Pada graf berarah (v_j, v_k) dan (v_k, v_j) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain $(v_j, v_k) \neq (v_k, v_j)$. Untuk busur (v_j, v_k) titik v_j dinamakan titik asal (*initial vertex*) dan titik v_k dinamakan titik terminal (*terminal vertex*) (Munir, 2003: 184).

Dalam Islam silaturahmi dapat direpresentasikan dalam suatu digraf. Berdasarkan gambar di bawah menunjukkan titik-titik yang diumpamakan sebagai “orang muslim” yang dihubungkan dengan sisi berarah yang diumpamakan hubungan “silaturahmi” hal ini berarti bahwa antara titik satu dengan titik yang lain terdapat suatu hubungan yaitu silaturahmi. Dapat dilihat dalam sebuah digraf yaitu sebagai berikut:



Gambar 2.21. Represetasi Digraf

Allah SWT berfirman dalam surat Muhammad ayat 22-24:

فَهَلْ عَسَيْتُمْ إِنْ تَوَلَّيْتُمْ أَنْ تُفْسِدُوا فِي الْأَرْضِ وَتُقَطِّعُوا أَرْحَامَكُمْ ۚ أُولَٰئِكَ الَّذِينَ لَعَنَهُمُ

اللَّهُ فَأَصْمُمُوا وَأَعَمُوا أَبْصَرَهُمْ ۚ أَفَلَا يَتَذَكَّرُونَ ۚ أَلْقُرْآنَ أَمْرٌ عَلَىٰ قُلُوبٍ أَفْفَافَهَا ۚ

Artinya: "Maka apakah kiranya jika kamu berkuasa kamu akan membuat kerusakan di muka bumi dan memutuskan hubungan kekeluargaan?. Mereka Itulah orang-orang yang dila'nati Allah dan ditulikan-Nya telinga mereka dan dibutakan-Nya penglihatan mereka. Maka apakah mereka tidak memperhatikan Al Quran ataukah hati mereka terkunci?"

Adapun keutamaan dari silaturahmi disebutkan dalam sebuah hadis yang diriwayatkan oleh Anas bin Malik r.a.:

”dia berkata saya pernah mendengar Rasulullah SAW. bersabda, ”barang siapa ingin dilapangkan rizkinya dan dipanjangkan umurnya maka sambunglah sanak keluarganya” (HR. Muslim).

2.5.2. Adjacent dan Incident

Diberikan v dan w titik-titik dari sebuah digraf. Jika v dan w dihubungkan dengan sebuah sisi berarah (*arc*) e , maka v dan w disebut *adjacent*. Jika sisi berarah e menghubungkan v ke w , maka sisi berarah e dikatakan *incident dari v* dan *incident ke w* (Wilson dan Watkins, 1990:84).

Contoh:



Gambar 2.22. Graf Adjacent dan Incident

Dari Gambar 2.22, titik v dan w adalah *adjacent*, e *incident dari v* , dan e *incident ke w* .

2.5.3. Derajat

Misal v adalah sebuah titik di digraf D . Banyaknya sisi berarah yang menuju ke titik v disebut derajat masuk (*in-degree*) dari v yang dinotasikan dengan $id(v)$, dan banyaknya sisi berarah yang keluar dari titik v disebut derajat keluar (*out-degree*) dari v yang dinotasikan dengan $od(v)$ (Lipschutz, 2002: 103). Pada Gambar 2.20, derajat masuk dari v_3 adalah 1 atau dapat ditulis $id(v_3) = 1$, dan derajat keluar dari v_3 adalah 1, atau dapat ditulis $od(v_3) = 1$.

2.6. Eksentrik Digraf

2.6.1. Definisi Eksentrik Digraf

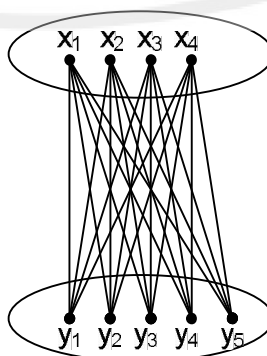
Eksentrik digraf pada graf G ($ED(G)$) didefinisikan sebagai graf yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik di G atau $V(ED(G))=V(G)$ dimana arc menghubungkan titik u ke v , jika v adalah titik eksentrik dari u (Gafur, 2008:1).

Untuk menentukan eksentrik digraf dari suatu graf G , langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Tentukan jarak setiap titik di G ke titik yang lain di G .
2. Tentukan eksentrisitas dan titik eksentrik setiap titik di graf G tersebut.
3. Gambarlah eksentrik digrafnya dengan ketentuan:
 - a. Himpunan titiknya sama dengan himpunan titik di G .
 - b. Jika v adalah titik eksentrik dari u , maka terdapat *arc* (sisi berarah) yang menghubungkan titik u ke v .

2.6.2. Contoh Eksentrik Digraf

Contoh: Misalkan graf G digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.23. Graf yang Akan Dicari Eksentrik Digrafnya

Jarak masing-masing titik ke semua titik yang lain pada graf di atas adalah:

$$d(x_1, x_2) = 2, d(x_1, x_3) = 2, d(x_1, x_4) = 2, d(x_1, y_1) = 1, d(x_1, y_2) = 1,$$

$$d(x_1, y_3) = 1, d(x_1, y_4) = 1, d(x_1, y_5) = 1$$

$$d(x_2, x_1) = 2, d(x_2, x_3) = 2, d(x_2, x_4) = 2, d(x_2, y_1) = 1, d(x_2, y_2) = 1,$$

$$d(x_2, y_3) = 1, d(x_2, y_4) = 1, d(x_2, y_5) = 1$$

$$d(x_3, x_1) = 2, d(x_3, x_2) = 2, d(x_3, x_4) = 2, d(x_3, y_1) = 1, d(x_3, y_2) = 1,$$

$$d(x_3, y_3) = 1, d(x_3, y_4) = 1, d(x_3, y_5) = 1$$

$$d(x_4, x_1) = 2, d(x_4, x_2) = 2, d(x_4, x_3) = 2, d(x_4, y_1) = 1, d(x_4, y_2) = 1,$$

$$d(x_4, y_3) = 1, d(x_4, y_4) = 1, d(x_4, y_5) = 1$$

$$d(y_1, y_2) = 2, d(y_1, y_3) = 2, d(y_1, y_4) = 2, d(y_1, y_5) = 2, d(y_1, x_1) = 1,$$

$$d(y_1, x_2) = 1, d(y_1, x_3) = 1, d(y_1, x_4) = 1$$

$$d(y_2, y_1) = 2, d(y_2, y_3) = 2, d(y_2, y_4) = 2, d(y_2, y_5) = 1, d(y_2, x_1) = 1,$$

$$d(y_2, x_2) = 1, d(y_2, x_3) = 1, d(y_2, x_4) = 1$$

$$d(y_3, y_1) = 2, d(y_3, y_2) = 2, d(y_3, y_4) = 2, d(y_3, y_5) = 2, d(y_3, x_1) = 1,$$

$$d(y_3, x_2) = 1, d(y_3, x_3) = 1, d(y_3, x_4) = 1$$

$$d(y_4, y_1) = 2, d(y_4, y_2) = 2, d(y_4, y_3) = 2, d(y_4, y_5) = 2, d(y_4, x_1) = 1,$$

$$d(y_4, x_2) = 1, d(y_4, x_3) = 1, d(y_4, x_4) = 1$$

$$d(y_5, y_1) = 2, d(y_5, y_2) = 2, d(y_5, y_3) = 2, d(y_5, y_4) = 2, d(y_5, x_1) = 1,$$

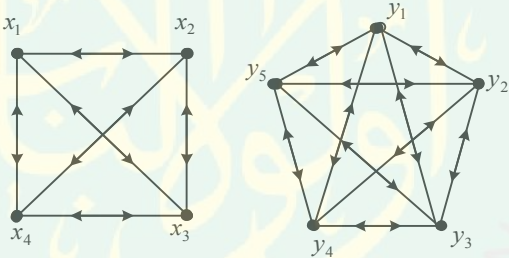
$$d(y_5, x_2) = 1, d(y_5, x_3) = 1, d(y_5, x_4) = 1$$

Berdasarkan jarak masing-masing titik tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentriknya dalam bentuk tabel berikut:

Tabel 2.1. Eksentrisitas Graf G

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
x_1	2	x_2, x_3, x_4
x_2	2	x_1, x_3, x_4
x_3	2	x_1, x_2, x_4
x_4	2	x_1, x_2, x_3
y_1	2	y_2, y_3, y_4, y_5
y_2	2	y_1, y_3, y_4, y_5
y_3	2	y_1, y_2, y_4, y_5
y_4	2	y_1, y_2, y_3, y_5
y_5	2	y_1, y_2, y_3, y_4

Dengan melihat Tabel 2.1 diperoleh bahwa:



Gambar 2.24. Eksentrik Digraf dari Graf G

Berdasarkan gambar eksentrik digraf dari graf G di atas dapat diambil kesimpulan secara umum bahwa:

Misalkan $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $i \neq j$ maka $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$.

BAB III

PEMBAHASAN

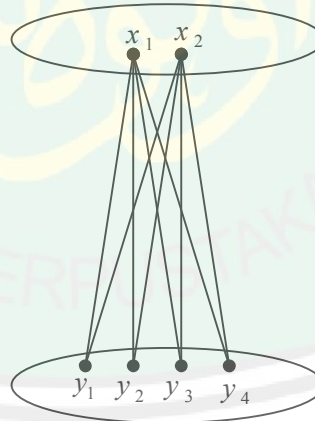
Pada bab III ini dibahas mengenai bentuk umum eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$. Pembahasan eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit dibatasi dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli.

3.1 Eksentrik Digraf dari Graf n-Partisi Komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$

Berikut adalah beberapa contoh eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$, untuk $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

a. Graf Bipartisi Komplit Order 2 dan 4

Graf bipartisi komplit order 2 dan 4 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1. Graf Bipartisi Komplit Order 2 dan 4

Jarak masing-masing titik ke semua titik yang lain pada graf di atas adalah:

$$d(x_1, x_2) = 2, d(x_1, y_1) = 1, d(x_1, y_2) = 1, d(x_1, y_3) = 1, d(x_1, y_4) = 1$$

$$d(x_2, x_1) = 2, d(x_2, y_1) = 1, d(x_2, y_2) = 1, d(x_2, y_3) = 1, d(x_2, y_4) = 1$$

$$d(y_1, x_1) = 1, d(y_1, x_2) = 1, d(y_1, y_2) = 2, d(y_1, y_3) = 2, d(y_1, y_4) = 2$$

$$d(y_2, x_1) = 1, d(y_2, x_2) = 1, d(y_2, y_1) = 2, d(y_2, y_3) = 2, d(y_2, y_4) = 2$$

$$d(y_3, x_1) = 1, d(y_3, x_2) = 1, d(y_3, y_1) = 2, d(y_3, y_2) = 2, d(y_3, y_4) = 2$$

$$d(y_4, x_1) = 1, d(y_4, x_2) = 1, d(y_4, y_1) = 2, d(y_4, y_2) = 2, d(y_4, y_3) = 2$$

Dengan menghitung jarak masing-masing titik tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentriknya dalam bentuk tabel berikut:

Tabel 3.1. Eksentrisitas Graf Bipartisi Komplit Order 2 dan 4

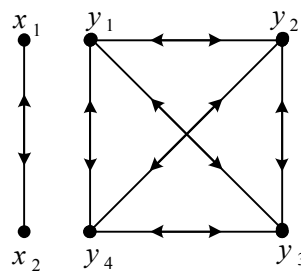
Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
x_1	2	x_2
x_2	2	x_1
y_1	2	y_2, y_3, y_4
y_2	2	y_1, y_3, y_4
y_3	2	y_1, y_2, y_4
y_4	2	y_1, y_2, y_3

Dengan melihat Tabel 3.1 diperoleh kesimpulan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{a_1}\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{a_2}\}$ dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$

dan $i \neq j$ maka $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$.

Berdasarkan keterangan di atas, diperoleh eksentrik digraf dari graf bipartisi komplit order 2 dan 4 yaitu:

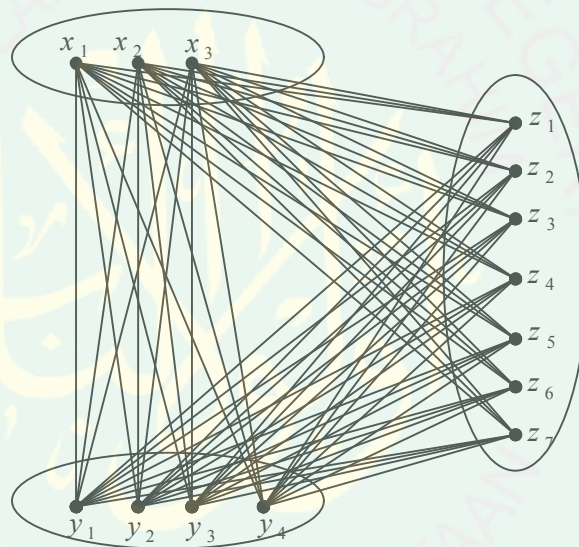


Gambar 3.2. Eksentrik Digraf Graf Bipartisi Komplit Order 2 dan 4

Bentuk eksentrik digraf dari graf bipartisi komplit order 2 dan 4 adalah gabungan dari digraf komplit simetris order 2, dan digraf komplit simetris order 4, dan dapat dituliskan dengan $\overleftrightarrow{K_2} \cup \overleftrightarrow{K_4}$, atau $\overleftrightarrow{K_{\alpha_1}} \cup \overleftrightarrow{K_{\alpha_2}}$, atau juga dapat dituliskan $\bigcup_{i=1}^2 \overleftrightarrow{K_{\alpha_i}}$, dengan $\alpha_1 = 2$, dan $\alpha_2 = 4$.

b. Graf Tripartisi Komplit Order 3, 4, dan 7

Graf tripartisi komplit Order 3, 4, dan 7 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.3. Graf Tripartisi Komplit Order 3, 4, dan 7

Jarak masing-masing titik ke semua titik yang lain pada graf di atas dapat dituliskan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $1 \neq j$ maka: $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(z_i, z_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$, $d(x_i, z_i) = 1$, $d(y_i, z_i) = 1$.

Dengan menghitung jarak masing-masing titik tersebut dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentriknya dalam bentuk tabel berikut:

Tabel 3.2. Eksentrisitas Graf Tripartisi Komplit Order 3, 4, dan 7

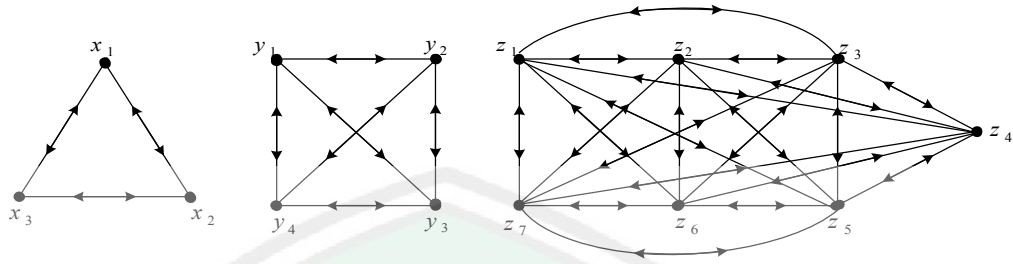
Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
x_1	2	x_2, x_3
x_2	2	x_1, x_3
x_3	2	x_1, x_2
y_1	2	y_2, y_3, y_4
y_2	2	y_1, y_3, y_4
y_3	2	y_1, y_2, y_4
y_4	2	y_1, y_2, y_3
z_1	2	$z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$
z_2	2	$z_1, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$
z_3	2	$z_1, z_2, z_4, z_5, z_6, z_7$
z_4	2	$z_1, z_2, z_3, z_5, z_6, z_7$
z_5	2	$z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, z_7$
z_6	2	$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_7$
z_7	2	$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$

Dengan melihat Tabel 3.2 diperoleh kesimpulan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_1}\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{\alpha_2}\}$, $V_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_{\alpha_3}\}$

dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $i \neq j$ maka $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(z_i, z_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$, $d(x_i, z_i) = 1$, $d(y_i, z_i) = 1$.

Berdasarkan keterangan di atas, diperoleh eksentrik digraf dari graf tripartisi komplit order 3,4, dan 7 yaitu:

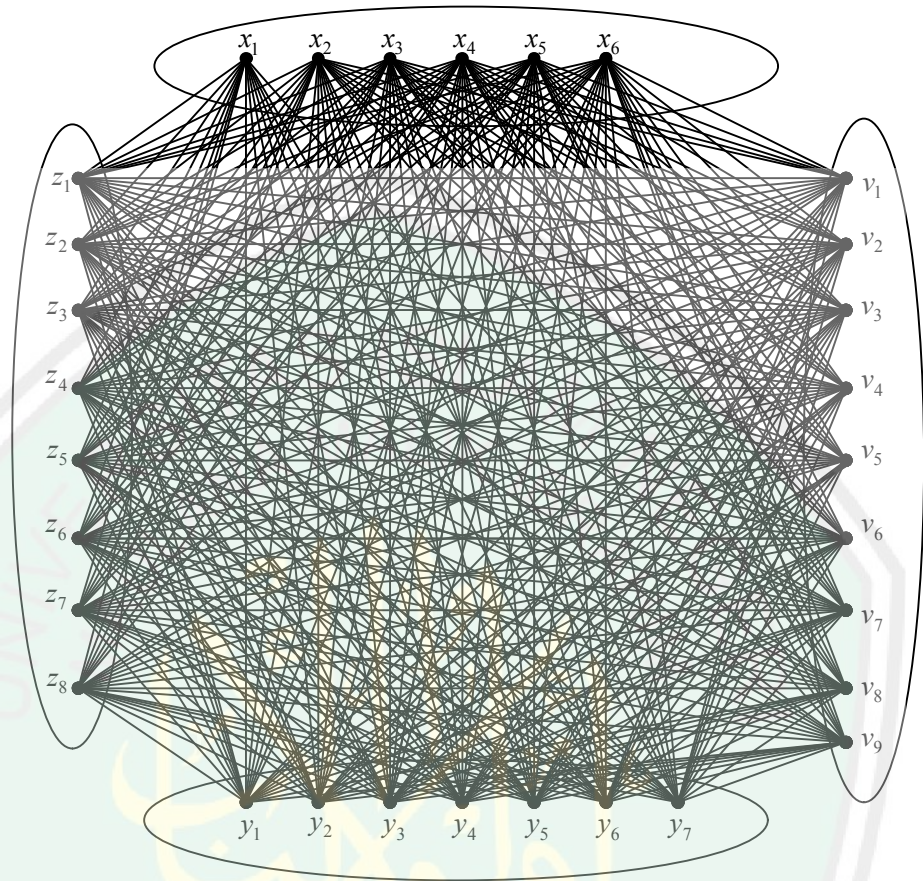


Gambar 3.4. Eksentrik Digraf Graf Tripartisi Komplit Order 3, 4, dan 7

Bentuk eksentrik digraf dari graf tripartisi komplit order 3, 4, dan 7 adalah gabungan dari digraf komplit simetris order 3, digraf komplit simetris order 4, dan digraf komplit simetris order 7, dan dapat dituliskan $\overleftrightarrow{K}_3 \cup \overleftrightarrow{K}_4 \cup \overleftrightarrow{K}_7$, atau $\overleftrightarrow{K}_{\alpha_1} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_2} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_3}$, atau juga dapat dituliskan $\bigcup_{i=1}^3 \overleftrightarrow{K}_{\alpha_i}$ dengan $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4$, dan $\alpha_3 = 7$.

c. Graf Empat Partisi Komplit Order 6, 7, 8, dan 9

Graf empat partisi komplit order 6, 7, 8, dan 9 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5. Graf Empat Partisi Komplit Order 6, 7, 8, dan 9

Jarak masing-masing titik ke semua titik yang lain pada graf di atas dapat dituliskan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $1 \neq j$ maka: $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(z_i, z_j) = 2$, $d(v_i, v_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$, $d(x_i, z_i) = 1$, $d(x_i, v_i) = 1$, $d(y_i, z_i) = 1$, $d(y_i, v_i) = 1$, $d(z_i, v_i) = 1$.

Dengan menghitung jarak masing-masing titik tersebut, dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentriknya dalam bentuk tabel berikut:

Tabel 3.3. Eksentrisitas Graf Empat Partisi Komplit Order 6, 7, 8, dan 9

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
x_1	2	x_2, x_3, x_4, x_5, x_6

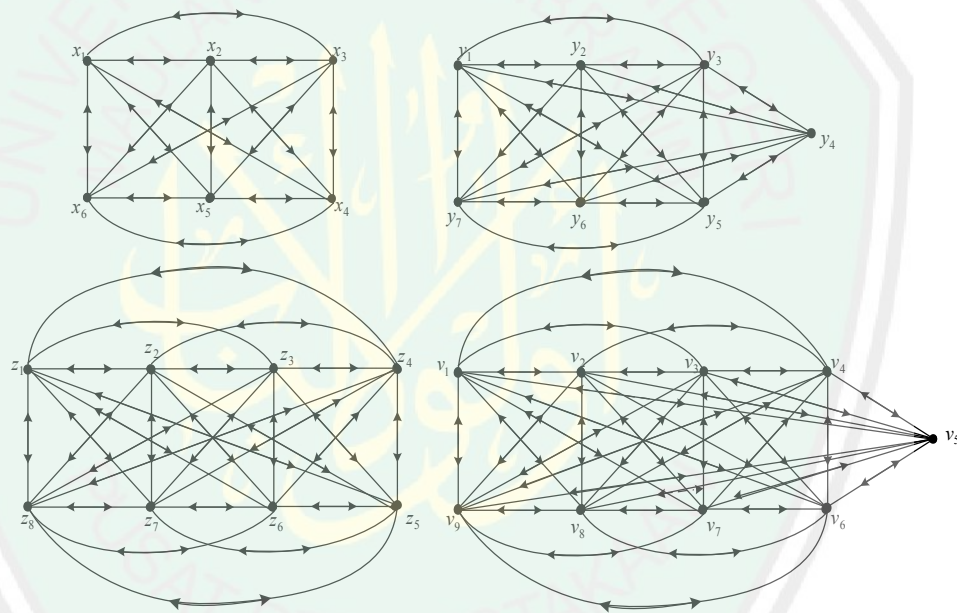
x_2	2	x_1, x_3, x_4, x_5, x_6
x_3	2	x_1, x_2, x_4, x_5, x_6
x_4	2	x_1, x_2, x_3, x_5, x_6
x_5	2	x_1, x_2, x_3, x_4, x_6
x_6	2	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
y_1	2	$y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$
y_2	2	$y_1, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$
y_3	2	$y_1, y_2, y_4, y_5, y_6, y_7$
y_4	2	$y_1, y_2, y_3, y_5, y_6, y_7$
y_5	2	$y_1, y_2, y_3, y_4, y_6, y_7$
y_6	2	$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_7$
y_7	2	$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$
z_1	2	$z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8$
z_2	2	$z_1, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8$
z_3	2	$z_1, z_2, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8$
z_4	2	$z_1, z_2, z_3, z_5, z_6, z_7, z_8$
z_5	2	$z_1, z_2, z_3, z_4, z_6, z_7, z_8$
z_6	2	$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_7, z_8$
z_7	2	$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_8$
z_8	2	$z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$
v_1	2	$v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$
v_2	2	$v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$
”	2	$v_1, v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$
	2	$v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$
v_5	2	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9$
v_6	2	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8, v_9$
v_7	2	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9$
v_8	2	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9$
v_9	2	$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8$

Tabel 3.3 Lanjutan

Dengan melihat Tabel 3.3 diperoleh kesimpulan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_1}\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{\alpha_2}\}$, $V_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_{\alpha_3}\}$,
 $V_4 = \{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha_4}\}$ dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $i \neq j$ maka $d(x_i, x_j) = 2$,
 $d(y_i, y_j) = 2$, $d(z_i, z_j) = 2$, $d(v_i, v_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$, $d(x_i, z_i) = 1$, $d(x_i, v_i) = 1$,
 $d(y_i, z_i) = 1$, $d(y_i, v_i) = 1$, $d(z_i, v_i) = 1$.

Berdasarkan keterangan di atas, diperoleh eksentrik digraf dari graf empat partisi komplit order 6, 7, 8, dan 9 yaitu:



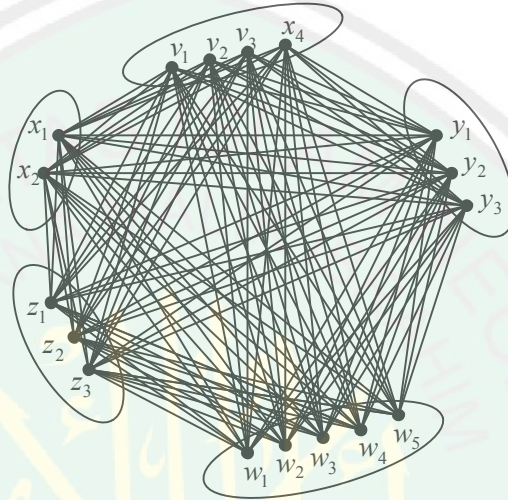
Gambar 3.6. Eksentrik Digraf Graf Empat Partisi Komplit Order 6, 7, 8, dan 9

Bentuk eksentrik digraf dari graf empat partisi komplit order 6, 7, 8, dan 9 adalah gabungan dari digraf komplit simetris order 6, digraf komplit simetris order 7, digraf komplit simetris order 8, dan digraf komplit simetris order 9, dan dapat dituliskan $\overrightarrow{K_6} \cup \overrightarrow{K_7} \cup \overrightarrow{K_8} \cup \overrightarrow{K_9}$, atau $\overrightarrow{K_{\alpha_1}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_2}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_3}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_4}}$, atau dapat

dituliskan $\bigcup_{i=1}^4 \overrightarrow{K_{\alpha_i}}$ dengan $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 7$, $\alpha_3 = 8$, dan $\alpha_4 = 9$.

d. Graf Lima Partisi Komplit Order 2, 3,3, 4, dan 5

Graf lima partisi komplit order 2, 3,3, 4, dan 5 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7. Graf Lima Partisi Komplit Order 2, 3,3, 4, dan 5

Jarak masing-masing titik ke semua titik yang lain pada graf di atas dapat dituliskan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $1 \neq j$ maka: $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(z_i, z_j) = 2$, $d(v_i, v_j) = 2$, $d(w_i, w_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$, $d(x_i, z_i) = 1$, $d(x_i, v_i) = 1$, $d(x_i, w_i) = 1$, $d(y_i, z_i) = 1$, $d(y_i, v_i) = 1$, $d(y_i, w_i) = 1$, $d(z_i, v_i) = 1$, $d(z_i, w_i) = 1$, $d(v_i, w_i) = 1$.

Dengan menghitung jarak masing-masing titik tersebut, dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentriknya dalam bentuk tabel berikut:

Tabel 3.4. Eksentrisitas Graf Lima Partisi Komplit Order 2, 3, 3, 4, dan 5

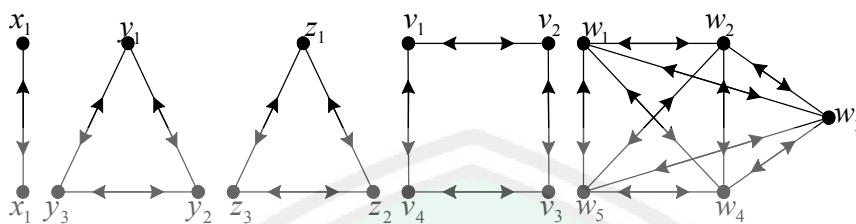
Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
x_1	2	x_2

x_2	2	x_1
y_1	2	y_2, y_3
y_2	2	y_1, y_3
y_3	2	y_1, y_2
z_1	2	z_2, z_3
z_2	2	z_1, z_3
z_3	2	z_1, z_2
v_1	2	v_2, v_3, v_4
v_2	2	v_1, v_3, v_4
v_3	2	v_1, v_2, v_4
v_4	2	v_1, v_2, v_3
w_1	2	w_2, w_3, w_4, w_5
w_2		w_1, w_3, w_4, w_5
w_3	2	w_1, w_2, w_4, w_5
w_4	2	w_1, w_2, w_3, w_5
w_5	2	w_1, w_2, w_3, w_4

Dengan melihat Tabel 3.4 diperoleh kesimpulan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_1}\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{\alpha_2}\}$, $V_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_{\alpha_3}\}$, $V_4 = \{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha_4}\}$, $V_5 = \{w_1, w_2, \dots, w_{\alpha_5}\}$ dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $i \neq j$ maka $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(z_i, z_j) = 2$, $d(v_i, v_j) = 2$, $d(w_i, w_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$, $d(x_i, z_i) = 1$, $d(x_i, v_i) = 1$, $d(x_i, w_i) = 1$, $d(y_i, z_i) = 1$, $d(y_i, v_i) = 1$, $d(y_i, w_i) = 1$, $d(z_i, v_i) = 1$, $d(z_i, w_i) = 1$, $d(v_i, w_i) = 1$.

Berdasarkan keterangan di atas, diperoleh eksentrik digraf dari graf lima partisi komplit order 2, 3, 3, 4, dan 5 yaitu:

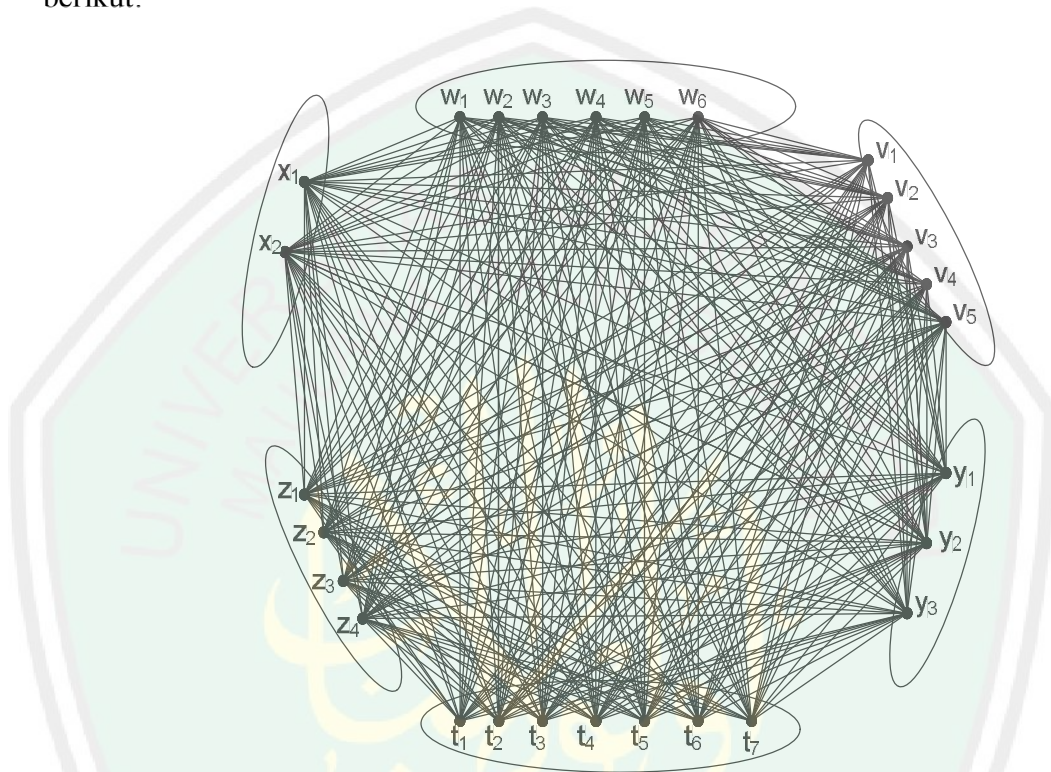


Gambar 3.8. Eksentrik Digraf Graf Lima Partisi Komplit Order 2, 3, 3, 4, dan 5

Bentuk eksentrik digraf dari graf order 2, 3, 3, 4, dan 5 adalah gabungan dari digraf komplit simetris order 2, digraf komplit simetris order 3, digraf komplit simetris order 3, digraf komplit simetris order 4, dan digraf komplit simetris order 5, dan dapat dituliskan $\overleftrightarrow{K}_2 \cup \overleftrightarrow{K}_3 \cup \overleftrightarrow{K}_3 \cup \overleftrightarrow{K}_4 \cup \overleftrightarrow{K}_5$, atau $\overleftrightarrow{K}_{\alpha_1} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_2} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_3} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_4} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_5}$, atau dapat dituliskan $\bigcup_{i=1}^5 \overleftrightarrow{K}_{\alpha_i}$ dengan $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 4$, dan $\alpha_5 = 5$.

c. Graf Enam Partisi Komplit Order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8

Graf enam partisi komplit order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.9. Graf Enam Partisi Komplit Order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8

Jarak masing-masing titik ke semua titik yang lain pada graf di atas dapat dituliskan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $1 \neq j$ maka: $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(z_i, z_j) = 2$, $d(v_i, v_j) = 2$, $d(w_i, w_j) = 2$, $d(t_i, t_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$, $d(x_i, z_i) = 1$, $d(x_i, v_i) = 1$, $d(x_i, w_i) = 1$, $d(x_i, t_i) = 1$, $d(y_i, z_i) = 1$, $d(y_i, v_i) = 1$, $d(y_i, w_i) = 1$, $d(y_i, t_i) = 1$, $d(z_i, v_i) = 1$, $d(z_i, w_i) = 1$, $d(z_i, t_i) = 1$, $d(v_i, w_i) = 1$, $d(v_i, t_i) = 1$, $d(w_i, t_i) = 1$.

Dengan menghitung jarak masing-masing titik tersebut, dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentriknya dalam bentuk tabel berikut:

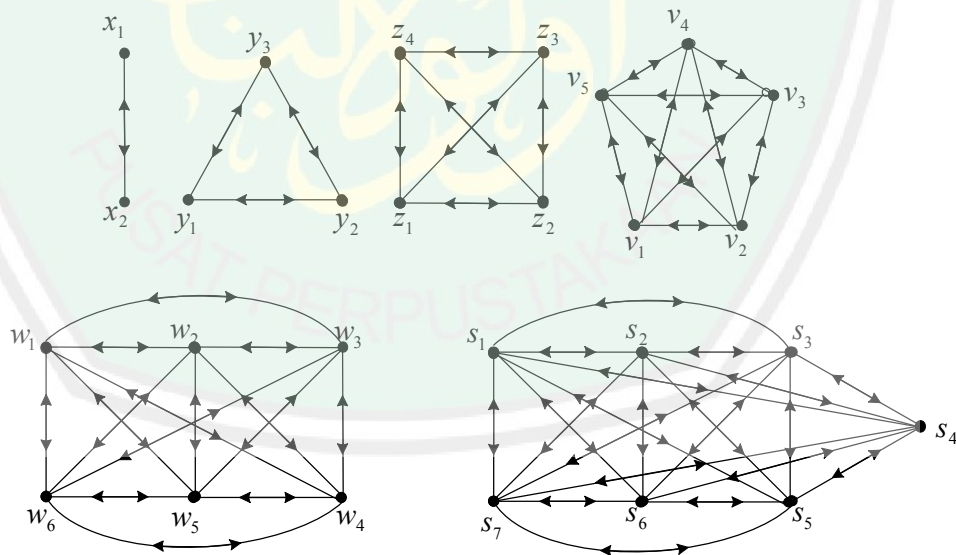
Tabel 3.5. Eksentrisitas Graf Enam Partisi Komplit Order 2, 3, 4, 5, 6, dan 7

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
x_1	2	x_2
x_2	2	x_1
y_1	2	y_2, y_3
y_2	2	y_1, y_3
y_3	2	y_1, y_2
z_1	2	z_2, z_3, z_4
z_2	2	z_1, z_3, z_4
z_3	2	z_1, z_2, z_4
z_4	2	z_1, z_2, z_3
v_1	2	v_2, v_3, v_4, v_5
v_2	2	v_1, v_3, v_4, v_5
v_3	2	v_1, v_2, v_4, v_5
v_4	2	v_1, v_2, v_3, v_5
v_5	2	v_1, v_2, v_3, v_4
w_1	2	w_2, w_3, w_4, w_5, w_6
w_2	2	w_1, w_3, w_4, w_5, w_6
w_3	2	w_1, w_2, w_4, w_5, w_6
w_4	2	w_1, w_2, w_3, w_5, w_6
w_5	2	w_1, w_2, w_3, w_4, w_6
w_6	2	w_1, w_2, w_3, w_4, w_5
t_1	2	$t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$
t_2	2	$t_1, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$
t_3	2	$t_1, t_2, t_4, t_5, t_6, t_7$
t_4	2	$t_1, t_2, t_3, t_5, t_6, t_7$
t_5	2	$t_1, t_2, t_3, t_4, t_6, t_7$
t_6	2	$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_7$
t_7	2	$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$

Dengan melihat Tabel 3.5 diperoleh kesimpulan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_1}\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{\alpha_2}\}$, $V_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_{\alpha_3}\}$, $V_4 = \{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha_4}\}$, $V_5 = \{w_1, w_2, \dots, w_{\alpha_5}\}$, $V_6 = \{t_1, t_2, \dots, t_{\alpha_6}\}$ dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $i \neq j$ maka $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(z_i, z_j) = 2$, $d(v_i, v_j) = 2$, $d(w_i, w_j) = 2$, $d(t_i, t_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$, $d(x_i, z_i) = 1$, $d(x_i, v_i) = 1$, $d(x_i, w_i) = 1$, $d(x_i, t_i) = 1$, $d(y_i, z_i) = 1$, $d(y_i, v_i) = 1$, $d(y_i, w_i) = 1$, $d(y_i, t_i) = 1$, $d(z_i, v_i) = 1$, $d(z_i, w_i) = 1$, $d(z_i, t_i) = 1$, $d(v_i, w_i) = 1$, $d(v_i, t_i) = 1$, $d(w_i, t_i) = 1$.

Berdasarkan keterangan di atas, diperoleh eksentrik digraf dari graf enam partisi komplit order 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 yaitu:



Gambar 3.10. Eksentrik Digraf Graf Enam Partisi Komplit Order 2, 3, 4, 5, 6, dan 7

Bentuk eksentrik digraf dari graf enam partisi komplit order 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 adalah gabungan dari digraf komplit simetris order 2, digraf komplit simetris order 3, digraf komplit simetris order 4, digraf komplit simetris order 5, digraf komplit simetris order 6, dan digraf komplit simetris order 7, dan dapat dituliskan

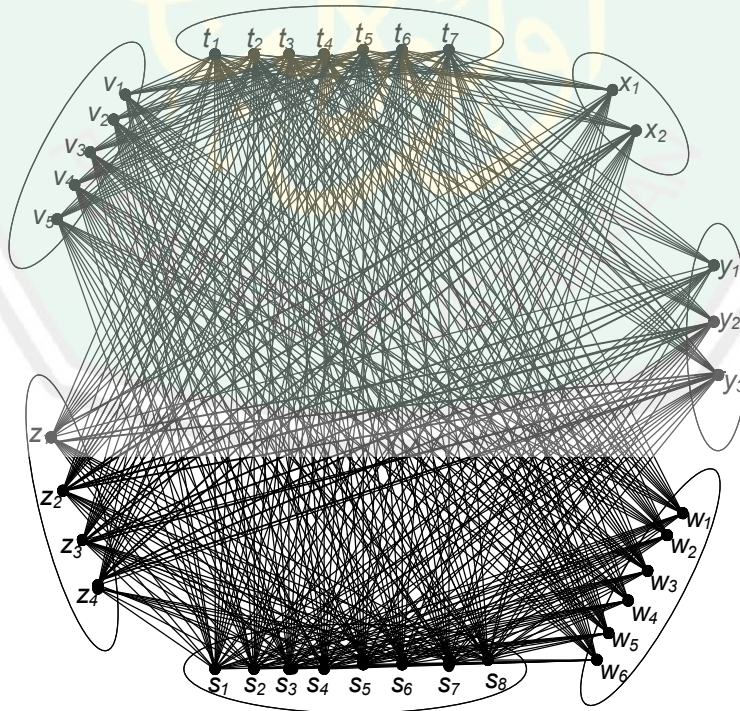
$$\overrightarrow{K_2} \cup \overrightarrow{K_3} \cup \overrightarrow{K_4} \cup \overrightarrow{K_5} \cup \overrightarrow{K_6} \cup \overrightarrow{K_7}, \quad \text{atau}$$

$$\overrightarrow{K_{\alpha_1}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_2}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_3}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_4}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_5}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_6}}, \quad \text{atau dapat dituliskan } \bigcup_{i=1}^6 \overrightarrow{K_{\alpha_i}} \text{ dengan } \alpha_1 =$$

2, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, $\alpha_4 = 5$, $\alpha_5 = 6$, dan $\alpha_6 = 7$.

d. Graf Tujuh Partisi Komplit Order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8

Graf tujuh partisi komplit order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.11. Graf Tujuh Partisi Komplit Order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8

Jarak masing-masing titik ke semua titik yang lain pada graf di atas dapat dituliskan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $1 \neq j$ maka: $d(x_i, x_j) = 2, d(y_i, y_j) = 2, d(z_i, z_j) = 2, d(v_i, v_j) = 2, d(w_i, w_j) = 2, d(t_i, t_j) = 2, d(s_i, s_j) = 2, d(x_i, y_i) = 1, d(x_i, z_i) = 1, d(x_i, v_i) = 1, d(x_i, w_i) = 1, d(x_i, t_i) = 1, d(x_i, s_i) = 1, d(y_i, z_i) = 1, d(y_i, v_i) = 1, d(y_i, w_i) = 1, d(y_i, t_i) = 1, d(y_i, s_i) = 1, d(z_i, v_i) = 1, d(z_i, w_i) = 1, d(z_i, t_i) = 1, d(z_i, s_i) = 1, d(v_i, w_i) = 1, d(v_i, t_i) = 1, d(v_i, s_i) = 1, d(w_i, t_i) = 1, d(w_i, s_i) = 1, d(t_i, s_i) = 1.$

Dengan menghitung jarak masing-masing titik tersebut, dapat ditentukan eksentrisitas dan titik eksentriknya dalam bentuk tabel berikut:

Tabel 3.6. Eksentrisitas Graf tujuh Partisi Komplit Order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8

Titik	Eksentrisitas	Titik Eksentrik
x_1	2	x_2
x_2	2	x_1
y_1	2	y_2, y_3
y_2	2	y_1, y_3
y_3	2	y_2, y_3
z_1	2	z_2, z_3, z_4
z_2	2	z_1, z_3, z_4
z_3	2	z_1, z_2, z_4
z_4	2	z_1, z_2, z_3
v_1	2	v_2, v_3, v_4, v_5
v_2	2	v_1, v_3, v_4, v_5
v_3	2	v_1, v_2, v_4, v_5
v_4	2	v_1, v_2, v_3, v_5
v_5	2	v_1, v_2, v_3, v_4
w_1	2	w_2, w_3, w_4, w_5, w_6
w_2	2	w_1, w_3, w_4, w_5, w_6

Tabel 3.6 Lanjutan

51

w_3	2	w_1, w_2, w_4, w_5, w_6
w_4	2	w_1, w_2, w_3, w_5, w_6
w_5	2	w_1, w_2, w_3, w_4, w_6
w_6	2	w_1, w_2, w_3, w_4, w_5
t_1	2	$t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$
t_2	2	$t_1, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7$
t_3	2	$t_1, t_2, t_4, t_5, t_6, t_7$
t_4	2	$t_1, t_2, t_3, t_5, t_6, t_7$
t_5	2	$t_1, t_2, t_3, t_4, t_6, t_7$
t_6	2	$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_7$
t_7	2	$t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$
s_1	2	$s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$
s_2	2	$s_1, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$
s_3	2	$s_1, s_2, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$
s_4	2	$s_1, s_2, s_3, s_5, s_6, s_7, s_8$
s_5	2	$s_1, s_2, s_3, s_4, s_6, s_7, s_8$
s_6	2	$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_7, s_8$
s_7	2	$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_8$
s_8	2	$s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7$

Dengan melihat Tabel 3.6 diperoleh kesimpulan secara umum yaitu sebagai berikut:

Misalkan $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_1}\}$, $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{\alpha_2}\}$, $V_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_{\alpha_3}\}$,

$V_4 = \{v_1, v_2, \dots, v_{\alpha_4}\}$, $V_5 = \{w_1, w_2, \dots, w_{\alpha_5}\}$, $V_6 = \{t_1, t_2, \dots, t_{\alpha_6}\}$, $V_7 = \{s_1, s_2, \dots, s_{\alpha_7}\}$

dengan $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $i \neq j$ maka $d(x_i, x_j) = 2$, $d(y_i, y_j) = 2$, $d(z_i, z_j) = 2$,

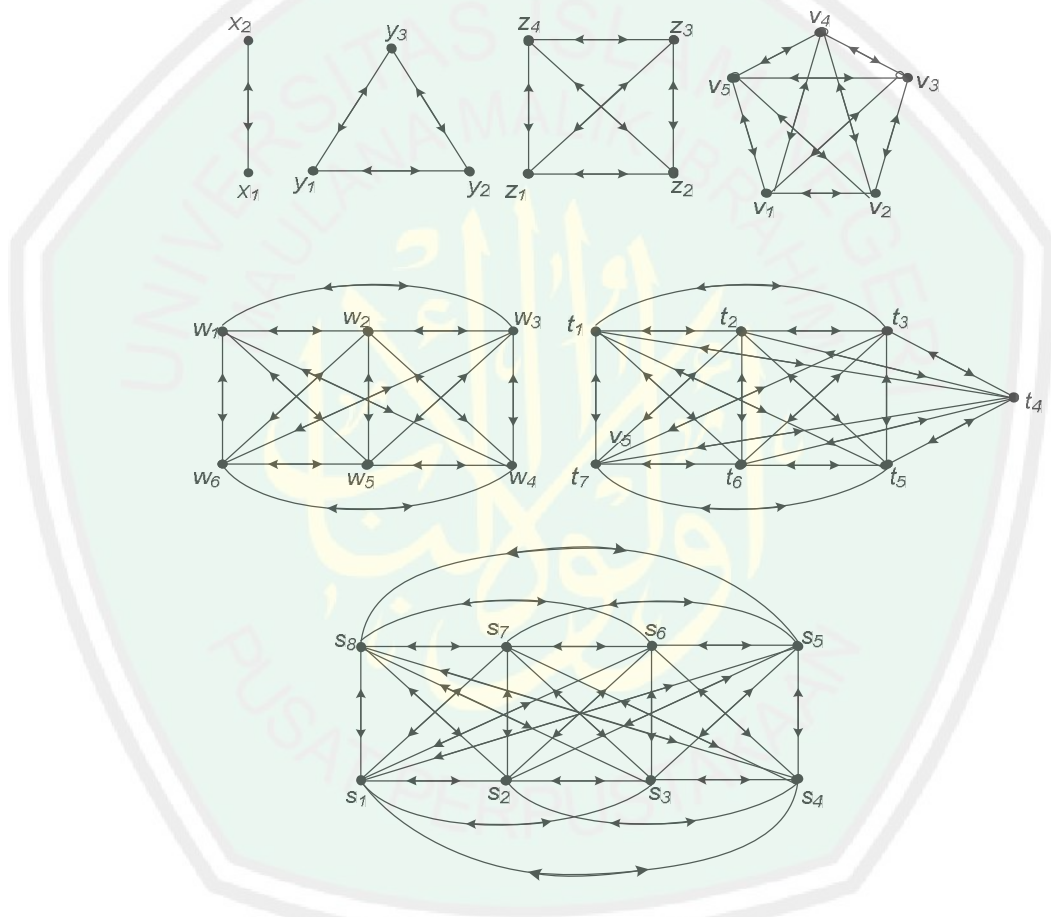
$d(v_i, v_j) = 2$, $d(w_i, w_j) = 2$, $d(t_i, t_j) = 2$, $d(s_i, s_j) = 2$, $d(x_i, y_i) = 1$, $d(x_i, z_i) = 1$,

$d(x_i, v_i) = 1$, $d(x_i, w_i) = 1$, $d(x_i, t_i) = 1$, $d(x_i, s_i) = 1$, $d(y_i, z_i) = 1$, $d(y_i, v_i) = 1$,

$d(y_i, w_i) = 1$, $d(y_i, t_i) = 1$, $d(y_i, s_i) = 1$, $d(z_i, v_i) = 1$, $d(z_i, w_i) = 1$, $d(z_i, t_i) = 1$,

$$d(z_i, s_i) = 1, d(v_i, w_i) = 1, d(v_i, t_i) = 1, d(v_i, s_i) = 1, d(w_i, t_i) = 1, d(w_i, s_i) = 1, \\ d(t_i, s_i) = 1.$$

Berdasarkan keterangan di atas, diperoleh eksentrik digraf dari graf tujuh partisi komplit order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 yaitu:



Gambar 3.12. Eksentrik Digraf Graf Tujuh Partisi Komplit Order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8

Bentuk eksentrik digraf dari graf tujuh partisi komplit order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 adalah gabungan dari digraf komplit simetris order 2, digraf komplit simetris order 3, digraf komplit simetris order 4, digraf komplit simetris order 5, digraf komplit simetris order 6, digraf komplit simetris order 7, dan digraf

komplit simetris order 8, dan dapat

dituliskan $\overrightarrow{K_2} \cup \overrightarrow{K_3} \cup \overrightarrow{K_4} \cup \overrightarrow{K_5} \cup \overrightarrow{K_6} \cup \overrightarrow{K_7} \cup \overrightarrow{K_8}$, atau

$\overrightarrow{K_{\alpha_1}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_2}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_3}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_4}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_5}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_6}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_7}}$ atau dapat dituliskan $\bigcup_{i=1}^7 \overrightarrow{K_{\alpha_i}}$

dengan $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 4, \alpha_4 = 5, \alpha_5 = 6, \alpha_6 = 7$, dan $\alpha_7 = 8$.

Berdasarkan contoh-contoh di atas eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 3.7. Eksentrisitas Graf

Graf	Eksentrik Digraf
Komplit order 2 dan 4	$\overrightarrow{K_2} \cup \overrightarrow{K_4}$
Komplit order 3, 4, dan 7	$\overrightarrow{K_3} \cup \overrightarrow{K_4} \cup \overrightarrow{K_7}$
Komplit order 6, 7, 8, dan 9	$\overrightarrow{K_6} \cup \overrightarrow{K_7} \cup \overrightarrow{K_8} \cup \overrightarrow{K_9}$
Komplit order 2, 3, 3, 4, dan 5	$\overrightarrow{K_2} \cup \overrightarrow{K_3} \cup \overrightarrow{K_3} \cup \overrightarrow{K_4} \cup \overrightarrow{K_5}$
Komplit order 2, 3, 4, 5, 6, dan 7	$\overrightarrow{K_2} \cup \overrightarrow{K_3} \cup \overrightarrow{K_4} \cup \overrightarrow{K_5} \cup \overrightarrow{K_6} \cup \overrightarrow{K_7}$
Komplit order 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8	$\overrightarrow{K_2} \cup \overrightarrow{K_3} \cup \overrightarrow{K_4} \cup \overrightarrow{K_5} \cup \overrightarrow{K_6} \cup \overrightarrow{K_7} \cup \overrightarrow{K_8}$

Berdasarkan beberapa contoh eksentrik digraf komplit di atas, dapat diperoleh bentuk umum yaitu: $ED(K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}) = \overrightarrow{K_{\alpha_1}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_2}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_3}} \cup \dots \cup \overrightarrow{K_{\alpha_n}}$

atau dapat dituliskan $\bigcup_{i=1}^n \overrightarrow{K_{\alpha_i}}$, dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli.

Teorema:

Misalkan $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ adalah suatu graf n-partisi komplit dengan $\alpha_i \geq 2$

dan α_i bilangan asli, maka $e(x_{\alpha_i}) = 2$.

Bukti:

Diketahui $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ graf n-partisi komplit, dan $i \neq j$ maka:

i) Jarak terjauh titik x_i ke semua titik pada komponen lain adalah 1, karena x_i terhubung langsung ke semua titik pada komponen lain tersebut.

Begitu juga berlaku untuk titik $y_i, z_i, \dots, n_i$.

ii) Karena x_i tidak terhubung langsung dengan x_j dalam suatu komponen, sedangkan x_i terhubung langsung dengan $y_i, z_i, \dots, n_i$ dan x_j terhubung langsung dengan $y_j, z_j, \dots, n_j$. Maka jarak terjauh x_i terhadap x_j adalah 2, $\exists e(x_i) = 2$.

iii) Hal itu juga berlaku untuk $y_i, z_i, \dots, n_i$ maka $e(y_i) = e(z_i) = \dots = e(n_i) = 2$.

Teorema 3.1

Misalkan $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ adalah suatu graf n-partisi komplit dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli, maka $ED(K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}) = \bigcup_{i=1}^n \vec{K}_{\alpha_i}$.

Bukti :

Diketahui $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ graf n-partisi komplit, jika $V_1, V_2, \dots, V_n$ adalah himpunan partisi dari $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ maka banyaknya titik tiap komponen adalah $|V_i| = \alpha_i, \forall i = 1, 2, \dots, \alpha_n$. Misalkan $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_{\alpha_1}\}, V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_{\alpha_2}\}, V_3 = \{z_1, z_2, \dots, z_{\alpha_3}\}, \dots, V_n = \{n_1, n_2, \dots, n_{\alpha_n}\}$. Berdasarkan definisi graf n-partisi komplit, panjang jalan (maksimal lintasan terpendek) dari x_i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, \alpha_1$ di V_1 adalah jarak

pada titik di V_1 kecuali dirinya sendiri, demikian juga jarak terjauh y_i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, \alpha_2$ di V_2 adalah jarak pada titik di V_2 kecuali dirinya sendiri, demikian juga jarak terjauh z_i untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, \alpha_3$ di V_3 adalah jarak pada titik di V_3 kecuali dirinya sendiri, hal ini berlaku seterusnya sampai n-partisi.

Berdasarkan teorema sebelumnya, maka eksentrisitas titik x_i pada graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli adalah $e(x_i) = 2$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, \alpha_1$, $e(y_i) = 2$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, \dots, \alpha_2$, dan berlaku seterusnya sampai n-partisi.

Titik eksentrik dari x_i di V_1 adalah x_j di V_1 untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \alpha_1$ dan $j \neq i$, dan titik eksentrik dari y_i di V_2 adalah y_j di V_2 untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \alpha_2$ dan $j \neq i$, dan berlaku seterusnya sampai V_n . Dengan demikian himpunan titik di V_1 membentuk digraf komplit simetris order n dan juga himpunan titik di V_2 membentuk digraf komplit simetris order n dan berlaku seterusnya sampai himpunan titik di V_n membentuk digraf komplit simetris order n, sehingga eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli adalah

$$ED(K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}) = \overrightarrow{K_{\alpha_1}} \cup \overleftarrow{K_{\alpha_2}} \cup \overrightarrow{K_{\alpha_3}} \cup \dots \cup \overleftarrow{K_{\alpha_n}}, \text{ atau dapat dituliskan}$$

$$\text{dengan } ED(K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}) = \bigcup_{i=1}^n \overleftrightarrow{K_{\alpha_i}}, \alpha_i \geq 2 \text{ dan } \alpha_i \text{ bilangan asli.}$$

Berdasarkan pembuktian di atas terbukti bahwa bentuk umum eksentrik digraf dari graf n partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli adalah gabungan dari digraf komplit simetris $\overleftrightarrow{K}_{\alpha_1} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_2} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_3} \cup \dots \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_n}$.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli, maka dapat disimpulkan bahwa: Bentuk umum eksentrik digraf dari graf n-partisi komplit $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli adalah gabungan dari digraf komplit simetris $\overleftrightarrow{K}_{\alpha_1} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_2} \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_3} \cup \dots \cup \overleftrightarrow{K}_{\alpha_n}$, atau dapat dituliskan dengan: $ED(K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}) = \bigcup_{i=1}^n K_{\alpha_i}$, $\alpha_i \geq 2$ dan α_i bilangan asli.

4.2 Saran

Masih banyak jenis graf yang dapat dicari pola eksentrik digrafnya sehingga dapat ditentukan bentuk umum eksentrik digrafnya. Untuk penelitian selanjutnya dapat melanjutkan penelitian mengenai aplikasi dari eksentrik digraf dalam kehidupan atau mengadakan penelitian yang sesuai dengan jenis-jenis graf yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Al-Mundziri, Imam. 1994. *Ringkasan Hadis Shahih Muslim*. Jakarta: Pustaka Amani.
- Ash-Shiddieqy, Teungku Muhammad Hasbi. 2002. *Mutiara Hadits 1-Keimanan*. Semarang: PT. Pustaka Rizki Putra.
- Bondy, J.A, and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory With Applications*. London: MacMillan Press,
- Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth. Inc.
- Gafur, Abdul. 2008. Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit dan Pelabelan Konsektif pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit. (Online): (<http://www. Combinatoric. Com>. Diakses tanggal 15 Juli 2008).
- Kiptiyah. 2007. *ULULALBAB: Jurnal Studi Islam tentang Penciptaan Manuia*. Malang: UIN Malang.
- Muliah, Titin. 2009. *Eksentrik Digraf dari Graf Sikel (C_n) dan Graf Bipartisi Komplit ($K_{m,n}$)*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.
- Munir, Rinaldi. 2003. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.
- Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: Institut Keguruan dan Ilmu Pendidikan Malang.
- Suryanto. 1986. *Materi Pokok Pengantar Teori Graph*. Karunia Universitas Terbuka: Jakarta.
- Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.



DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Nilna Niswatin Azizah
NIM : 05510025
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Eksentrik Digraf Dari Graf n-Partisi Komplit
 $K_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n}$ Dengan $\alpha_i \geq 2$ Dan α_i Bilangan Asli
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	21 April 2009	Konsultasi Masalah	1.	
2	04 Mei 2009	Konsultasi BAB III		2.
3	15 Mei 2009	Revisi BAB III	3.	
4	20 Mei 2009	Konsultasi BAB I, II		4.
5	28 Mei 2009	Revisi BAB I dan II	5.	
6	03 Juni 2009	Konsultasi BAB I, II, dan III		6.
7	17 Juni 2009	Revisi BAB I, II, dan III	7.	
8	25 Juni 2009	Konsultasi Keagamaan BAB I, II		8.
9	03 Juli 2009	Revisi Keagamaan BAB I, II	9.	
10	10 Juli 2009	Konsultasi Keseluruhan		10.
11	14 Juli 2009	Revisi Keseluruhan	11.	
12	15 Juli 2009	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 15 Juli 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321