MENYELESAIKAN KONGRUENSI LINIER SIMULTAN SATU VARIABEL

SKRIPSI

Oleh:
MADINATUZ ZUHROH
NIM. 07610004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

MENYELESAIKAN KONGRUENSI LINIER SIMULTAN SATU VARIABEL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MADINATUZ ZUHROH
NIM. 07610004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

MENYELESAIKAN KONGRUENSI LINIER SIMULTAN SATU VARIABEL

SKRIPSI

Oleh:
MADINATUZ ZUHROH
NIM. 07610004

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 22 Pebruari 2011

Dosen Pembimbing I,	**Dosen Pembimbing II,**
Abdussakir, M.Pd	**Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag**
NIP. 19751006 200312 1 001	**NIP. 19720420 200212 1 003**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

MENYELESAIKAN KONGRUENSI LINIER SIMULTAN SATU VARIABEL

SKRIPSI

Oleh:
MADINATUZ ZUHROH
NIM. 07610004

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 24 Maret 2011

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	( )
2. Ketua	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	( )
3. Sekretaris	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
4. Anggota	: Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Madinatuz Zuhroh

NIM : 07610004

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 22 Pebruari 2011

Yang membuat pernyataan

Madinatuz Zuhroh

NIM. 07610004

MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ

Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri

(Q.S. Ar.Ra'd : 11)

PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan untuk
Orang-orang yang telah memberikan arti bagi hidup penulis
Dengan pengorbanan, kasih sayang dan ketulusannya.

Kepada kedua orang tua penulis yang paling berjasa dalam hidup dan selalu menjadi motivator dan penyemangat dalam setiap langkah untuk terus berproses menjadi insan kamil, Ibunda tersayang (Sumini) dan Ayah tersayang (Tri Subagio) serta Adik tercinta (Dwi Ira Qibtiyah) yang selalu memberikan dukungan moral dan spiritual.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus dosen pembimbing I yang telah memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
4. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku dosen pembimbing II, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
5. Sri Harini, M.Si, selaku dosen wali yang telah memberikan pengarahan-pengarahan dan nasihat-nasihat yang sangat penulis butuhkan.

6. Seluruh dosen jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, terima kasih atas seluruh ilmu dan bimbingannya.
7. Ayah (Tri Subagiyo) dan Ibu (Sumini) tercinta serta Adik (Dwi Ira Qibtiyah), yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Abah (H. Qurthubi Alm) dan Umi' (Hj. Nur Lathifah) tercinta serta aby (Tri Wahyu Wibisono), yang senantiasa memberikan kasih sayang serta do'a restunya.
9. Teman-teman penulis Isrokhotul Adhimah, Khoirul Haniyah, Ariesta Desiana Fithri, Lutfiatul Aini, yang selalu memberikan bantuan, semangat dan do'a dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2007, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
11. Teman-teman PKPBA C-2 angkatan 2007, terima kasih atas segala kebersamaan dan kenangan yang kalian berikan.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spritual penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. Amin.

Malang, 22 Pebruari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III: PEMBAHASAN

BAB IV: PENUTUP

ABSTRAK

Zuhroh, Madinatuz. 2011. **Menyelesaikan Kongruensi Linier Simultan Satu Variabel**. Skripsi, Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: 1. Abdussakir, M.Pd
2. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Kongruensi Linier, Kongruensi Linier Simultan, Rekursif, Teorema Sisa China

Sebagai bahasan yang berkaitan dengan aljabar, kongruensi linier serupa dengan persamaan linier, tetapi dengan semesta pembicaraan himpunan bilangan modulo. Berbeda dengan persamaan linier satu variabel yang tidak bisa digabung dengan persamaan linier satu variabel yang lain, dua atau lebih kongruensi linier dapat digabung dan gabungannya disebut kongruensi linier simultan. Kongruensi linier simultan merupakan suatu sistem yang terdiri dari beberapa kongruensi linier satu variabel dan dengan nilai modulo yang berbeda. Sistem kongruensi linier simultan dalam penggunaannya dapat diselesaikan secara rekursif dan teorema sisa China. Adapun bentuk umum dari kongruensi linier simultan adalah sebagai berikut:

$$x \equiv a_1 (mod\ n_1)$$

$$x \equiv a_2 (mod\ n_2)$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_r (mod\ n_r)$$

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode kepustakaan, yaitu metode yang dilakukan dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan masalah pada penulisan skripsi.

Dalam kajian ini, penulis mengkaji sistem kongruensi linier simultan yang mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian dengan menggunakan konsep keterbagian. Berdasarkan penyelesaian yang dilakukan dengan menggunakan cara rekursif dan teorema sisa China terdapat perbedaan dari kedua cara tersebut. Menyelesaikan kongruensi linier simultan secara rekursif dan teorema sisa China menghasilkan penyelesaian akhir yang sama. Akan tetapi teorema sisa China merupakan cara yang lebih efisien dalam menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel.

ABSTRACT

Zuhroh, Madinatuz. 2011. **Solving Simultaneous Linear Congruence of One Variable**. Thesis, Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, Islamic State University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: 1. Abdussakir, M.Pd
2. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Key Words: Linear Congruence, Simultaneous Linear Congruence, Recursive, Chinese Remainder Theorem.

As the discussions related to the algebra, linear congruence is similar to linear equations, but by the scope of discussion of a set numbers of modulo. Unlike the single variable linear equations which cannot be combined with equation linear one variable and others, two or more linear congruence can be combined and the combination is called simultaneous linear congruencies. Simultaneous linear congruence is a system consisted several linear congruence of one variable and with different values of modulo. System of simultaneous linear congruence in its use can be solved recursively and the Chinese remainder theorem. The general forms of simultaneous linear congruencies are as follows:

$$x \equiv a_1 (mod\ n_1)$$

$$x \equiv a_2 (mod\ n_2)$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_r (mod\ n_r)$$

The method used in writing this thesis is a literature method, namely the method by studying books related to the problems in thesis writing.

In this study, the author examines the simultaneous linear congruencies which have a settlement and do not have a settlement by using the concept of divisible. Based on the settlement made by using a recursive manner and the Chinese remainder theorem have a difference of those two methods. Solving simultaneous linear congruencies recursively and the Chinese remainder theorem produce the same final resolution. But the Chinese remainder theorem represents more efficient way in solving simultaneous linear congruencies of one variable.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al Qur'an adalah kalam Allah yang Maha Kuasa, pencipta segala sesuatu dari ketiadaan. Dialah Tuhan yang ilmunya meliputi segala sesuatu. Sungguh banyak hadits-hadits yang menunjukkan kelebihan-kelebihan Al Qur'an dan keagungannya. Banyak diantara ilmu pengetahuan modern yang mengungkap keajaiban Al Qur'an (Shabuny, 1984:18). Diantara ilmu tersebut, salah satunya adalah ilmu pengetahuan matematika. Dalam firman Allah Q.S. Maryam ayat 94 dijelaskan :

لَّقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾ وَكُلُّهُمْ ءَاتِيهِ يَوْمَ ٱلْقِيَـٰمَةِ فَرْدًا ﴿٩٥﴾ إِنَّ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ وَعَمِلُوا۟ ٱلصَّـٰلِحَـٰتِ سَيَجْعَلُ لَهُمُ ٱلرَّحْمَـٰنُ وُدًّا ﴿٩٦﴾

Artinya: *Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti.Dan tiap-tiap mereka akan datang kepada Allah pada hari kiamat dengan sendiri-sendiri. Sesungguhnya orang-orang yang beriman dan beramal saleh kelak Allah yang Maha Pemurah akan menanamkan dalam hati mereka rasa kasih sayang (Q.S Maryam: 94).*

Ayat tersebut menjelaskan bahwa sesungguhnya Allah, Dia yang maha Esa itu telah mengetahui keadaan baik yang terjangkau oleh makhluk maupun yang mereka tidak dapat terjangkau kebutuhan dan keinginan mereka dengan rinci sebelum hadir dipentas jagad raya dan telah menghitung mereka dengan hitungan yang teliti sehingga semua Dia penuhi kebutuhannya. Dengan demikian Allah adalah pembuat hitungan yang paling teliti (Shihab, 2002:307-309).

Matematika sebagai salah satu cabang keilmuan yang digunakan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan persoalan manusia. Dalam hubungannya dengan berbagai ilmu pengetahuan, matematika berfungsi sebagai bahasa ilmu dengan lingkup universal, sebab dengan menggunakan matematika dapat dilakukan abstraksi dari kenyataan-kenyataan yang sangat rumit menjadi suatu model sehingga dicapai ketajaman dalam memberikan deskripsi, mempermudah untuk mengadakan klasifikasi dan kalkulasi (Roziana, 2008:1). Oleh karena itu dengan semakin berkembangnya teknik-teknik penganalisaan maka peranan peralatan matematis dalam menganalisa semakin bertambah penting.

Matematika sebagai *Queen of Sciences* mempunyai dua fungsi penting dalam perkembangan keilmuan. *Pertama*, matematika berfungsi sebagai ilmu aplikasi, artinya konsep-konsep matematika dapat di aplikasikan secara riil dalam bidang ilmu-ilmu yang lain. Sebagai contoh dalam bidang Ekonomi, persamaan linier digunakan dalam menentukan tingkat penawaran dan permintaan (Dumairy, 1999:40). Selain itu penganalisaan ekonomi sering dibutuhkan peralatan-peralatan yang bersifat model-model matematis untuk memudahkan melihat permasalahan dan penganalisaannya.

Kedua, matematika sebagai ilmu itu sendiri, artinya adanya keterkaitan konsep antara suatu materi pembahasan tentang sistem persamaan linier (SPL) dengan kongruensi modulo yang akhirnya terbentuk sistem kongruensi linier (SKL) dengan modulo.

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori bilangan merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari. Selain itu teori bilangan juga merupakan salah satu dari beberapa cabang matematika klasik yang sudah lama dipelajari dan dikembangkan oleh banyak matematikawan. Pada awalnya teori bilangan dipelajari dan dikembangkan sebagai kesenangan dan pemenuhan rasa ingin tahu belaka, tetapi saat ini beberapa cabang dari teori bilangan telah mendapatkan tempat sebagai alat dari teknologi modern, misalnya dalam konstruksi kriptografi.

Kongruensi merupakan bahasa teori bilangan karena pembahasan teori bilangan bertumpu kongruensi. Bahasa kongruensi ini diperkenalkan dan dikembangkan oleh Karl Friedrich Gauss, matematisi paling terkenal dalam sejarah pada awal abad sembilan belas, sehingga sering disebut sebagai Pangeran Matematisi (*The Prince of Mathematicians*). Berbicara tentang kongruensi berarti tidak terlepas dari masalah keterbagian. Karena membahas konsep keterbagian dan sifat-sifatnya merupakan pengkajian secara lebih dalam dengan menggunakan konsep kongruensi. Sehingga kongruensi merupakan cara lain untuk mengkaji keterbagian dalam himpunan bilangan bulat. Sedangkan untuk sistem kongruensi linier merupakan suatu sistem yang terdiri lebih dari satu kongruensi dan variabel dan mempunyai modulo yang sama.

Salah satu pokok bahasan dalam teori bilangan adalah kongruensi linier yang mencakup sistem kongruensi linier simultan. Sistem kongruensi linier simultan didefinisikan sebagai suatu sistem yang terdiri dari beberapa kongruensi linier satu variabel dengan nilai modulo yang berbeda atau diberikan bentuk umum sistem kongruensi linier simultan sebagai berikut:

$$x \equiv a_1 (mod\, n_1)$$

$$x \equiv a_2 (mod\, n_2)$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_r (mod\, n_r)$$

Beberapa kajian terdahulu tentang menyelesaikan kongruensi linier telah dibahas pada karya tulis ilmiah lain, misal Kurnia Era Wati (2009) dengan judul Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linier dan Siti Ika Novita Salima (2004) dengan judul Menentukan Selesaian Sistem Kongruensi Linier n-Peubah. Dari karya tulis tersebut belum ada yang membahas penyelesaian dari beberapa kongruensi linier satu variabel yang disebut dengan sistem kongruensi linier simultan. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang menyelesaikan kongruensi linier simultan. Sehingga penulis merumuskan judul untuk skripsi ini “Menyelesaikan Kongruensi Linier Simultan Satu Variabel”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan permasalahan yang telah terpaparkan pada latar belakang, maka dapat dirumuskan permasalahan yaitu:

Bagaimana cara menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel?

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan pada rumusan masalah, maka tujuan dari penulisan ini adalah menjelaskan cara menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel.

1.4 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat dilakukannya penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis
   a. Menambah wawasan dan ilmu pengetahuan tentang teori bilangan dan terapannya.
   b. Mengetahui penyelesaian kongruensi linier simultan satu variabel.
   c. Mengetahui teknik-teknik dalam menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel.
2. Bagi Lembaga

   Untuk menambah bahan kepustakaan yang dijadikan referensi dan kajian pustaka.
3. Bagi Peneliti dan Mahasiswa

   Sebagai bahan informasi untuk penelitian dan kajian pustaka.

1.5 Metode Penelitian

Metode merupakan cara utama yang akan ditempuh untuk menemukan jawaban dari suatu masalah. Dalam bahasa Yunani kata metode bertuliskan "*Methods*" yang berarti cara atau jalan. Sedangkan bila dihubungkan dengan upaya ilmiah, maka metode menyangkut masalah cara kerja, yaitu cara untuk dapat memahami objek yang menjadi sasaran ilmu yang bersangkutan. Berdasarkan hal tersebut, maka dalam penulisan penelitian ini, penulis menggunakan metode penelitian perpustakaan (*Library Research*) atau kajian literatur yaitu penelitian yang dilakukan dengan tujuan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat diruang perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen, dan sumber-sumber lain yang relevan. Data yang digunakan penulis dalam rangka penyusunan penelitian ini adalah data-data yang meliputi kongruensi linier satu variabel dan teknik-teknik dalam menyelesaikannya, serta data-data lain yang sesuai.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah.
2. Mengumpulkan bahan atau sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan kongruensi linier simultan.
3. Mengumpulkan teorema-teorema tentang sifat-sifat kongruensi linier simultan.
4. Memberikan deskripsi tentang kongruensi linier simultan.
5. Menganalisis
   a. Memberikan bentuk umum kongruensi linier simultan.
   b. Membuat prosedur dalam menyelesaikan kongruensi linier simultan.
6. Memberikan contoh soal mengenai kongruensi linier simultan satu variabel yang dikerjakan secara rekursif dan teorema sisa China.
7. Memberikan kesimpulan akhir.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan disini adalah gambaran singkat mengenai skripsi ini, dengan tujuan memberikan gambaran secara garis besar pembahasan-pembahasan dalam skripsi ini. Dengan kata lain sistematika penulisan adalah kerangka pembahasan skripsi yang disusun mulai dari yang pertama sampai akhir. Adapun sistematika penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut :

BAB I: Pendahuluan

Bab ini merupakan bab pengantar yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: Kajian Pustaka

Bab ini berisi tentang studi teoritis dari berbagai literatur dan sumber-sumber yang relevan dengan masalah yang diteliti. Bab ini membahas tentang kongruensi linier.

BAB III: Pembahasan

Bab ini memaparkan pembahasan tentang kongruensi linier simultan serta teknik-teknik dalam menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel secara rekursif dan teorema sisa China serta perbandingan dari kedua metode tersebut.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Bilangan bulat

Sistem bilangan bulat terdiri atas himpunan bilangan bulat $Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$. Untuk setiap a, b, dan c bilangan-bilangan bulat sebarang, maka sistem ini mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

1. Sifat tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian

   $\forall a, b \in Z$, maka berlaku $a + b \in Z$ dan $a \times b \in Z$.

2. Sifat komutatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian

   $\forall a, b \in Z$, maka berlaku $a + b = b + a$ dan $a \times b = b \times a$.

3. Sifat assosiatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian

   $\forall a, b \in Z$, maka berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

4. Sifat distribusi kiri dan kanan perkalian terhadap penjumlahan

   $\forall a, b \in Z$, maka berlaku $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ dan $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

5. Identitas penjumlahan

   Untuk setiap a dalam Z, ada elemen 0 dalam Z, sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, 0 dinamakan elemen identitas penjumlahan.

6. Invers penjumlahan

   Untuk setiap a dalam Z, ada elemen –a dalam Z, sehingga a + −a = −a + a = 0, −a dinamakan invers penjumlahan dari a.

7. Identitas perkalian

   Untuk setiap a dalam Z, ada elemen 1 dalam Z, sehingga a × 1 = 1 × a = a, 1 dinamakan elemen identitas perkalian.

8. Perkalian dengan nol

   Jika a dalam Z, maka 0 × a = a × 0 = 0.

   (Marhan, 2001:6)

2.2 Keterbagian dalam Bilangan Bulat

Sifat-sifat yang berkaitan dengan keterbagian telah dipelajari oleh Euclid 350 SM (Niven, 1999:4). Pengembangan selanjutnya telah banyak dikembangkan oleh beberapa ahli matematika yang lain, misalnya yang berkaitan dengan bilangan komposit, perkalian dalam usaha untuk mengembangkan teori bilangan. Karena pentingnya sifat keterbagian maka akibatnya konsep tersebut sering muncul dalam Aljabar Modern dan Struktur Aljabar.

Definisi 2.2.1

Bilangan $b \in$ Z habis dibagi bilangan bulat $a \neq 0$, ditulis $a|b$, jika suatu bilangan $x \in$ Z sedemikian sehingga $b = ax$.

Ungkapan lain untuk menyatakan $a|b$ adalah 'a *habis membagi* b', 'a adalah pembagi b' dan 'b adalah kelipatan a'. Jika a tidak membagi b, yaitu jika pernyataan $a|b$ adalah salah, maka ditulis $a \nmid b$ (Erawati, 2009:7).

Contoh :

1. $3|12$, sebab ada bilangan bulat 4 sedemikian sehingga $12 = (4)3$.
2. $3 \nmid 5$ karena tidak ada bilangan bulat x sedemikian sehingga

   $5 = (x)3$.

Teorema: untuk setiap bilangan bulat a, b, c berlaku

1. $a|b$, maka $a|bc$ untuk suatu bilangan bulat c;
2. $a|b$ dan $b|c$, maka $a|c$;
3. $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(bx + cy)$ untuk suatu bilangan bulat x dan y;
4. $a|b$ dan $b|a$, maka $a = \pm b$;
5. $a|b$, $a > 0$, $b > 0$, maka $a \leq b$;
6. bilangan bulat $m \neq 0$, $a|b$ jika dan hanya jika $ma|mb$

Bukti:

1. Misalkan $a|b$ dan $c \in Z$

   $a|b$ maka $b = ax$ untuk suatu $x \in Z$

   $$bc = (ax)c = a(xc) \text{ dimana } c \in Z$$

   Jadi terbukti bc dapat dibagi oleh a. Akibatnya $a|bc$
2. Misalkan $a|b$ dan $b|c$

   $a|b$ maka $b = ax$ untuk suatu $x \in Z$

   $b|c$ maka $c = by$ untuk suatu $y \in Z$

   $$c = by = (ax)y = a(xy)$$

   Jadi terbukti c dapat dibagi oleh a. Akibatnya $a|c$

3. Misalkan $a|b$ dan $a|c$

   $a|b$ maka $b = ar$ untuk suatu $r \in Z$

   $a|c$ maka $c = as$ untuk suatu $s \in Z$

   Jika $x \in Z$ sebarang, maka $bx = (ar)x = a(rx)$, $rx \in Z$. Jika $y \in Z$ sebarang, maka $cy = (as)y = a(sy)$, $sy \in Z$. Akibatnya $bx + cy = a(rx) + a(sy) = a(rx + sy)$, yang berarti $bx + cy$ dapat dibagi oleh a. Oleh karena itu, $a|(bx + cy)$.

4. Misalkan $a|b$ dan $b|a$

   $a|b$ maka $b = ax$ untuk suatu $x \in Z$

   $b|a$ maka $a = by$ untuk suatu $y \in Z$

   $$a = x(ya) = (xy)a$$

   Akibatnya x dan y masing-masing adalah bilangan bulat, maka agar hasil kalinya sama dengan 1, maka $x = y = \pm 1$. Jadi $b = \pm a$.

5. Misalkan $b|a$, $a > 0$, $b > 0$

   Anggap $a > b$. Karena $a|b$ maka $b = ka$ untuk suatu $k \in$ Z. Akibatnya $a > ka$ yang selanjutnya akan mengakibatkan $-ka > 0$: $a(ka) > 0$. Karena diketahui $a > 0$, maka $1 - k > 0$ atau $k < 1$.

   Karena $k \in$ Z, dan $k < 1$, maka $k \leq 0$……………………….$(*)$

   Padahal $b = ka$

   Karena $b > 0$, dan $a > 0$ maka $k > 0$……………………….(&)

   Tampak $(*)$ bertentangan dengan (&). Oleh karena itu, anggapan $a > b$ adalah salah. Yang benar adalah $a \leq b$.

6. Misalkan $m \neq 0$ dan $a|b$

   $a|b$ maka $b = ka$ untuk suatu $k \in \mathrm{Z}$

   $mb = m(ka) = (mk)a = (km)a = k(ma)$.

   Karena $a|b$ maka menurut definisi 1, $a \neq 0$.

   Karena $m \neq 0$ (diketahui), maka $ma \neq 0$. Akibatnya, $ma|mb$.

Definisi 2.2.2:

Jika $p, q \in \mathrm{Z}$ dan $p > 0$, maka ada bilangan-bilangan $r, s \in \mathrm{Z}$ yang masing-masing tunggal sehingga jika $q = rp + s$ dengan $0 \leq s < p$, maka:

q disebut bilangan yang dibagi (*devidend*)

p disebut bilangan pembagi (*divisor*)

r disebut bilangan hasil bagi (*quotient*)

s disebut bilangan sisa (*remainder*) (Muhsetyo, 1997:6).

Suatu algoritma adalah metode atau prosedur matematis untuk memperoleh hasil tertentu, yang dilakukan menurut sejumlah langkah berurutan yang terhingga. Teorema ini sebenarnya telah bersifat eksistensi (keujudan) dari adanya bilangan-bilangan r dan s pada suatu algoritma. Namun demikian, uraian tentang pembuktiannya dapat memberikan gambaran adanya suatu metode, cara, atau prosedur matematis untuk memperoleh bilangan-bilangan bulat r dan s sehingga $q = rp + s$.

Untuk lebih jelas, maka penulis akan memberikan contoh sebagai berikut:

Menurut teorema algoritma pembagian, nyatakan sebagai $q = rp + s$, $0 \leq s < p$, jika:

a. $p = 7$ dan $q = -100$

b. $p = 12$ dan $q = -150$

Jawab:

a. $-100 = (-15)(7) + 5, 0 \leq 5 < 7$

b. $-150 = (-13)(12) + 6, 0 \leq 6 < 12$

Teorema algoritma pembagian dapat digunakan untuk memilahkan atau memisahkan himpunan bilangan bulat menjadi n himpunan bagian yang saling lepas (*disjoint*) dengan $n \in \{2, 3, 4, \cdots\}$.

Jika $p = 2$ dan q adalah sebarang bilangan bulat, maka menurut teorema algoritma pembagian, q dapat dinyatakan sebagai:

$$q = 2p + s, 0 \leq s < 2$$

Karena $r \in \mathrm{Z}$ dan $0 \leq r < 2$, maka kemungkinan nilai-nilai s adalah $s = 0$ dan $s = 1$.

untuk $s = 0, q = 2p + s = 2p + 0 = 2p$

untuk $s = 1, q = 2p + s = 2p + 1$

$q = 2p$ dengan $p \in \mathrm{Z}$ disebut bilangan bulat genap (*even integer*) dan $q = 2p + 1$ dengan $p \in \mathrm{Z}$ disebut bilangan bulat ganjil atau gasal (*odd integer*). Dengan demikian himpunan bilangan bulat dapat dipisahkan menjadi dua himpunan bagian yang lepas, yaitu himpunan bilangan bulat genap dan himpunan bilangan bulat ganjil. Dengan kata lain, setiap bilangan bulat selalu dapat dinyatakan sebagai salah satu dari:

$q = 2p$ atau $q = 2p + 1, p \in \mathrm{Z}$

Dengan jalan lain yang sama, setiap bilangan bulat selalu dapat dinyatakan sebagai berikut:

1. $q = 3p, q = 3p + 1, q = 3p + 2, p \in$ Z.
2. $q = 4p, q = 4p + 1, q = 4p + 2, q = 4p + 3, p \in$ Z.
3. $q = 5p, q = 5p + 1, q = 5p + 2, q = 5p + 3, q = 5p + 4, p \in$ Z.

dan seterusnya.

Disinilah sebenarnya letak dari konsep algoritma pembagian, suatu konsep mendasar yang dapat digunakan untuk membantu pembuktian sifat-sifat tertentu (Muhsetyo, 1997:9-10).

Contoh:

Diketahui n adalah bilangan bulat, buktikan bahwa $2|n^3 - n$ untuk sebarang $n \in$ Z.

Jawab:

Menurut dalil Algoritma pembagian, setiap bilangan bulat n dapat dinyatakan sebagai $n = 2p$ atau $n = 2p + 1$.

Untuk $n = 2p$, dapat ditentukan:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1)$$
$$= n(n-1)(n+1)$$
$$= 2p(2p-1)(2p+1)$$

Jadi, $2|n^3 - n$

Untuk $n = 2p + 1$, dapat ditentukan

$$n^3 - n = n(n^2 - 1)$$
$$= n(n-1)(n+1)$$

$$= (2p + 1)(2p + 1 - 1)(2p + 1 + 1)$$

$$= (2p + 1)(2p)(2p + 2)$$

$$= 2\{p(2p + 1)(2p + 2)\}$$

Jadi, $2|n^3 - n$

Dengan demikian $2|n^3 - n$ untuk semua $n \in$ Z

2.3 Keprimaan

Menurut buku "*An Introduction to the Theory of Numbers*" suatu bilangan bulat $p > 1$ disebut bilangan prima jika tidak ada pembagi d dari p sedemikian hingga $1 < d < p$. Jika suatu bilangan bulat $p > 1$ bukan bilangan prima, maka bilangan tersebut dinamakan bilangan komposit (Everest, 1963:7).

Karena bilangan prima harus lebih dari 1, maka barisan bilangan prima dimulai dari 2, yaitu: $2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$. Seluruh bilangan prima adalah bilangan ganjil kecuali bilangan 2 yang merupakan bilangan genap.

Bilangan prima berbeda dengan bilangan komposit (*composite*) yang mempunyai faktor positif lebih dari dua. Misalnya 20 adalah bilangan komposit karena 20 dapat dibagi oleh $2, 4, 5$ dan 10, selain 1 dan 20 itu sendiri.

Bilangan 1 adalah bilangan asli yang hanya mempunyai satu faktor positif yaitu 1 itu sendiri. Kalau di lihat dari pengertian bilangan prima dan komposit, 1 bukan termasuk dari keduanya.

2.4 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Definisi 2.4.1:

Ditentukan $x, y \in$ Z, x dan y keduanya sama-sama bernilai 0.

$p \in$ Z disebut pembagi (faktor) persekutuan (*common divisor*, *common factor*) dari x dan y jika $p|x$ (p membagi x) dan $p|y$ (p membagi y).

$p \in$ Z disebut pembagi (faktor) persekutuan terbesar (*greatest common divisor*) dari x dan y jika p adalah bilangan bulat positif terbesar yang membagi x (yaitu $p|x$) dan membagi y (yaitu $p|y$) (Muhsetyo, 1997:60-61).

Contoh:

Himpunan semua faktor 12 adalah $\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Himpunan semua faktor 18 adalah $\{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Himpunan semua faktor persekutuan 12 dan 18 adalah $\{-6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6\}$

Jadi, $(12, 18) = 6$.

Teorema 2.4.1:

Jika $(x, y) = z$ maka $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \left(\frac{x}{(x,y)}, \frac{y}{(x,y)}\right) = 1$

(Marhan, 2001:114)

Bukti:

Ambil $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \geq 1$

Misal $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = w$

Maka $w \left| \frac{x}{z} \right.$ sehingga $kw = \frac{x}{z}$ (definisi 2.2.1)

$(kw) = x$ (definisi 2.2.1)

$k(kw) = x$ (sifat assosiatif)

$wz|x$ (definisi 2.2.1)

$wz|x$ dan $wz|y$ maka w adalah faktor dari x dan y (definisi 2.2.1)

Dan $z = (x, y)$

$wz \leq z$

$w \leq \frac{z}{z}$

$w \leq 1$

$\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \leq 1$

Karena $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \geq 1$ dan $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \leq 1$ maka $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 1$.

Teorema 2.4.2:

Jika $y = qx + r$ maka FPB (y, x) = FPB (x, r)

(Marhan, 2001:115)

Bukti:

$(x, y) = z$ (Teorema 2.4.1)

Maka $(x, y) = z$

$z|y$ dan $z|x$ (definisi 2.4.1)

$z|y$ maka $pz = y, p \in \mathrm{Z}$ (definisi 2.2.1)

$z|x$ maka $pz = x, p \in \mathrm{Z}$ (definisi 2.2.1)

Karena $y = qx + r$

$y - qx = r$

$r = y - qx$

Karena $z|y$ dan $z|x$, $q \in \mathrm{Z}$ maka $z|r$

$z|y$, $z|x$ dan $z|r$ maka $z = (y, x) = (y, r) = (x, r)$ jadi $(y, x) = (x, r) = z$ (teorema terbukti).

Contoh:

$y = qx + r$

$15 = 3 \cdot 4 + 3$

$(15, 4) = (4, 3) = 1$ maka $(15, 4) = 1$

Teorema 2.4.3 (Algoritma Euclides)

JIka x dan y bilangan-bilangan bulat positif, dengan menerapkan algoritma pembagian berulang-ulang maka akan diperoleh persamaan berikut ini:

$y = qx + r$ dengan $0 < r < x$

$x = q_1 r + r_1$ dengan $0 < r_1 < r$

$r = q_2 r_1 + r_2$ dengan $0 < r_2 < r_1$

$r_1 = q_3 r_2 + r_3$ dengan $0 < r_3 < r_2$

$\vdots \qquad \vdots$

$r_{j-2} = q_j r_{j-1} + r_j$ dengan $0 < r_j < r_{j-1}$

$r_{j-1} = q_j + 1 r_j$

Maka $(x, y) = r_j$

(Marhan, 2001:116)

Bukti:

$y = qx + r$	maka $(x, y) = (x, r)$	(Teorema 2.4.2)
$x = q_1 r + r_1$	maka $(x, r) = (x, r_1)$	
$r = q_2 r_1 + r_2$	maka $(r, r_1) = (r_1, r_2)$	

$r_1 = q_3 r_2 + r_3$ maka $(r_1, r_2) = (r_2, r_3)$

$\vdots$ $\vdots$

$r_{j-2} = q_j r_{j-1} + r_j$ maka $(r_2, r_3) = r_{j-1}, r_j$

$r_{j-1} = q_j + 1 r_j$ maka $(r_{j-1}, r_j) = r_j$

Dari proses pengulangan tersebut diperoleh $(x, y) = (y, r) = (x, r) = (r, r_1)$

$$= (r_1, r_2) = (r_2, r_3)$$

$$= (r_{j-2}, r_{j-1}) = (r_{j-1}, r_j)$$

Sekarang akan dibuktikan $(y, x) = r_j$

Persamaan yang berulang-ulang tersebut akan terhenti jika sisanya nol.

Jika $r = 0$ maka persamaan menjadi $y = qx$

$y = qx + r$ maka $(y, x) = (x, r)$

$y = qx$ maka $(y, x) = (x)$

$(r_{j-1}, r_j) = r_j$

Contoh:

Nyatakan FPB dari 172 dan 324 sebagai kombinasi linier dari bilangan-bilangan tersebut.

Jawab:

Melakukan pembagian dengan menggunakan Algoritma Euclides untuk mendapatkan FPB $(172, 324)$:

$324 = 1(172) + 152$ (i)

$172 = 1(152) + 20$ (ii)

$152 = 7(20) + 12$ (iii)

$20 = 1(12) + 18$ (iv)

$12 = 1(8) + 4$ (v)

$8 = 1(4) + 0$ (vi)

Sisa pembagian sebelum 0 adalah 4, maka FPB $(172, 324) = 4$. Kemudian melakukan proses subtitusi dari persamaan-persamaan di atas:

$$4 = 12 - 1(8)$$
$$= 12 - (20 - 12)$$
$$= -20 + 2(12)$$
$$= -20 + 2\big(152 - 7(20)\big)$$
$$= 2(152) + (-15)(20)$$
$$= 2(152) + (-15)(172 - 152)$$
$$= -15(172) + (17)(152)$$
$$= -15(172) + (17)(324 - 172)$$
$$= 17(324) + (-32)(172)$$

Jadi, FPB $(172, 324)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$4 = 17(324) + (-32)(172)$$

Teorema 2.4.4:

Jika FPB $(x, y) = r_j$ maka ada bilangan-bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $mx + ny = r_j$ (Marhan, 2001:119).

Bukti:

Dari teorema 2.4.3 diketahui bahwa

$r_{j-4} = q_{j-2}r_{j-3} + r_{j-2}\ maka\ r_{j-2} = r_{j-4}q_{j-2}r_{j-3}$..............................(i)

$r_{j-3} = q_{j-1}r_{j-2} + r_{j-1}\ maka\ r_{j-3} = r_{j-3}q_{j-1}r_{j-2}$..............................(ii)

$r_{j-2} = q_jr_{j-1} + r_j\ maka\ r_jr_{j-2}q_jr_{j-1}$..(iii)

Menurut teorema 2.4.3 $(y, x) = r_j$, jika distribusi pada persamaan (iii) maka diperoleh

$$(x, y) = r_j = r_{j-2} - q_j r_{j-1}$$

$$= r_{j-2} - q_j\left(r_{j-3} - q_{j-1} r_{j-2}\right)$$

$$= r_{j-2} - q_j r_{j-3} + q_j q_{j-1} 1 r_{j-2}$$

$$= \left(1 + q_j q_{j-1}\right) r_{j-2} - q_j r_{j-3}$$

$$= \left(1 + q_j q_{j-1}\right)\left(r_{j-4} - q_{j-2} r_{j-3}\right) - q_j r_{j-3}$$

$$= r_{j-4} - q_{j-2} r_{j-3} + q_j q_{j-1} r_{j-4} - q_j q_{j-1} q_j r_{j-3} - q_j r_{j-3}$$

$$= \left(1 + q_j q_{j-1}\right) r_{j-4} - \left(q_{j-2} + q_j q_{j-1} q_j\right) r_{j-3} - q_j r_{j-3}$$

$$= \left(1 + q_j q_{j-1}\right) r_{j-4} + \left(-q_{j-2} - q_j q_{j-1} q_{j-2} r_{j-3} q_j\right) r_{j-3}$$

$$r_j = \left(1 + q_j q_{j-1}\right) r_{j-4} + \left(-q_{j-2} - q_j q_{j-1} q_{j-2} r_{j-3} q_j\right)\left(r_{j-5} - q_{j-3} r_{j-4}\right)$$

$$= \left(\frac{1 + q_j q_{j-1} + 1 + q_j q_{j-3} + q_{j-2} q_{j-3} + q_j q_{j-1} q_{j-2} q_{j-3}}{m}\right) \frac{r_{j-4}}{x} + \left(\frac{-q_{j-2} - q_j q_{j-1} q_{j-2} r_{j-3} q_j}{n}\right) \frac{r_{j-5}}{y}$$

Sehingga dapat ditulis

$$r_j = mx + ny$$

Dimana m dan n adalah bilangan bulat.

Khususnya jika $(x, y) = 1$ maka adalah bilangan-bilangan bulat m dan n sedemikian hingga $mx + ny = 1$.

Contoh:

Tentukan FPB dari 180 dan 55

Jawab:

180 = 3 · 55 + 15

55 = 3 · 15 + 10

15 = 1 · 10 + 5

10 = 2 · 5

5 = 15 − 1· 10

= 15 – 1(55 – 3 · 15)

= 4 · 15 − 1· 55

= 4 (180 −3· 35) − 1· 55

= 4 · 180 − 13· 55

= 720 – 615

Jadi (180, 55) = 5

Teorema 2.4.5:

Jika $y|px$ dan $(x, y) = 1$ maka $y|p$

(Marhan, 2001:67)

Bukti:

$(x, y) = 1$ maka $mx + ny = 1$ (teorema 2.4.4)

$p(mx + ny) = p$ (dikalikan p)

$pmx + pny = p$ (perkalian)

$mpx + npy = p$ (sifat assosiatif)

$(mx)p + (ny)p = p$ (sifat assosiatif)

$m(xp) + n(yp) = p$ (sifat assosiatif)

$m(px) + n(py) = p$ (sifat assosiatif)

$y|px$ maka $ky = px; k \in \mathrm{Z}$ (definisi 2.2.1)

$m(ky) = m(px)$ (dikalikan dengan m)

$(mk)y = (mp)x$ (sifat assosiatif)

$y|m(px)$ (definisi 2.2.1)

$y|m(px)$ dan $y|px$ berarti

$y|(mpx + npy)x$ maka $y|npy$

Karena $y|m(px)$ dan $y|npy$ maka $y|p(mx + ny)$

$y|p - 1$

$y|p$ (teorema terbukti)

Contoh:

$2|12$ berarti $2|4 \cdot 3$

$(3, 2) = 1$ maka $2|4$

Teorema 2.4.6:

Jika $z|x$ dan $w|x$, $(z, w) = 1$ maka $zw|x$

(Marhan, 2001:68)

Bukti:

$z|x$ maka $pz = x; p \in \mathrm{Z}$..........................(i) (definisi 2.2.1)

$w|x$ maka $qw = x; q \in \mathrm{Z}$........................(ii) (definisi 2.2.1)

Dari (i) dan (ii) diperoleh

$x = x$

$pz = qw; p, q \in \mathrm{Z}$

$z|qw$ atau $w|pz$ (definisi 2.2.1)

$(z, w) = 1$ maka $w|p$ (teorema 2.4.5)

$w|p$ maka $kw = p$ (definisi 2.2.1)

$x = pz$ (persamaan i)

$x = (kw)z$ (nilai p disubtitusikan)

$x = k(wz)$ (sifat assosiatif)

$k(wz) = x$ (sifat komutatif)

$wz|x$ (definisi 2.2.1 dan $k \in$ Z)

Jadi teorema terbukti.

Teorema 2.4.7:

Jika $m \in$ Z dan $m > 0$, maka $(mx, my) = m(x, y)$ (Muhsetyo, 1997:64).

Bukti:

Misalkan $(ma, mb) = g$ maka $g = max + mby$ dengan $x, y \in$ Z

$(a, b) = t$ maka $t = ra + sb$

$mt = mra + msb$

$(a, b) = t$ maka $t|a$ dan $t|b$

$t|a$ maka $mt|ma$ sehingga $mt|max$

$t|b$ maka $mt|mb$ sehingga $mt|mby$

$mt|max$ dan $mt|mby$ maka $mt|(max + mby)$

$mt|(max + mby)$ dan $(max + mby) = g$ maka $m|g$

$(ma, mb) = g$ maka $g|ma$ dan $g|mb$ maka $g|mra$ dan $g|msb$

$g|(mra + msb)$

$g|mt$

Karena $mt|g$ dan $g|mt$ maka $g = mt$

$g = mt$ maka $(ma, mb) = m(a, b)$

Jadi, $(ma, mb) = m(a, b)$

Contoh:

Tentukan FPB dari 10 dan 5

Jawab:

Misal $m = 5$ maka dalam bentuk (mx, my)

(mx, my) maka $(5 \cdot 10, 5 \cdot 5)$

$m \cdot 10 + m \cdot 5$

(x, y) maka $(10,5)$

(tx, ty) maka $(5 \cdot m \cdot 10, 5 \cdot m \cdot 5)$

$5\ (m10, m5)$

$5\ (10, 5)$

2.5 Kongruensi (Aritmetika Modulo)

Teori kongruensi pertama kali ditemukan oleh Carl Friedrich Gauss (1777-1855) salah seorang matematikawan besar Jerman pada akhir abad ke-19 (Salima dalam Rosen, 1991:113). Sistem matematika aritmetika modulo atau kongruensi menekankan adanya kenyataan bahwa dua bilangan bulat mempunyai selisih (beda) sama dengan kelipatan bilangan asli, bilangan-bilangan yang mempunyai selisih sama dengan kelipatan suatu bilangan asli disebut kongruen modulo bilangan asli itu (Salima dalam Muhsetyo, 1985:245).

Dalam hitungan modular kita diberikan bilangan positif m, disebut *modulus* dan dua bilangan bulat sebarang yang selisihnya adalah kelipatan bulat modulus itu dipandang sebagai “sama” atau “setara” terhadap modulus (Salima dalam Rorres, 1988:200).

Definisi 2.5.1:

Jika suatu bilangan bulat m suatu bilangan positif, maka a kongruen dengan b modulo m (di tulis $a \equiv b \ (mod \ m)$) bila m membagi $(a - b)$ Jika m tidak membagi $(a - b)$ maka dikatakan a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \not\equiv b \ (mod \ m)$) (Muhsetyo, 1997:138).

Contoh:

$18 \equiv 6 (mod \ 4)$ karena $4 | 18 - 6$

$19 \not\equiv 5 (mod \ 6)$ karena $6 \nmid 19 - 5$

Teorema 2.5.1:

$x \equiv y (mod \ n)$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sedemikian sehingga $x = nk + y$ (Marhan, 2001:144).

Bukti:

$(\Rightarrow)$ $x \equiv y (mod \ n)$

$n | (x - y)$

$x - y = nk$

$x = nk + y$

$(\Leftarrow)$ $x = nk + y$

$nk = x - y$

$n | (x - y)$

$x \equiv y (mod \ n)$

Teorema 2.5.2:

Misalkan $x \equiv x'(mod\ n)$ dan $y \equiv y'(mod\ n)$ maka

a) $x + y \equiv x' + y'(mod\ n)$

b) $x - y \equiv x' - y'(mod\ n)$

c) $xy \equiv x' + y'(mod\ n)$

d) $px + qy \equiv px' - py'(mod\ n)$, p, q bilangan-bilangan bulat

e) $kx \equiv kx'(mod\ n)$, k sebarang bilangan bulat tak negatif

Bukti:

a) $x \equiv x'(mod\ n)$ maka $n|(x - x')$ (definisi 2.5.1)

$y \equiv y'(mod\ n)$ maka $n|(y - y')$ (definisi 2.5.1)

$n|(x - x')$ dann$|(y - y')$ maka $n|(x - x') + (y - y')$ (teorema 2.1)

$n|[(x + y) - (x' + y')]$

$x + y \equiv x' + y'(mod\ n)$ (definisi 2.5.1)

b) $x \equiv x'(mod\ n)$ maka $n|(x - x')$ (definisi 2.5.1)

$y \equiv y'(mod\ n)$ maka $n|(y - y')$ (definisi 2.5.1)

$n|(x - x')$ dan $n|(y - y')$ maka $n|(x - x') - (y - y')$ (teorema 2.5.1)

$n|[(x - y) - (x' - y')]$

$x - y \equiv x' - y'(mod\ n)$ (definisi 2.5.1)

c) $x \equiv x'(mod\ n)$ maka $n|(x - x')$ (definisi 2.5.1)

$pn = (x - x')$ (definisi 2.5.1)

$y(pn) = y(x - x')$ (dikalikan dengan y; $y \in$ Z)

$(yp)n = y(x - x')$ (sifat assosiatif)

$n|y(x - x')$ (definisi 2.5.1; $y \in$ Z)

$y \equiv y'(mod\ n)$ maka $n|(y - y')$ (definisi 2.5.1)

$qn = (y - y')$ (definisi 2.2.1)

$x'(qn) = x'(y - y')$ (dikalikan dengan x', $x' \in$ Z)

$(x'p)n = x'(y - y')$ (sifat assosiatif)

$n|x'(y - y')$ (definisi 2.2.1; $x \in$ Z)

Dari $n|y(x - x')$ dan $n|x'(y - y')$

Maka $n|[y(x - x') + x'(y - y')]$ (teorema 2.2.1)

$n|yx - yx' + x'y - x'y$ (perkalian)

$n|yx - x'y$ (sifat assosiatif)

$xy \equiv x'y'(mod\ n)$ (definisi 2.5.1)

d) $x \equiv x'(mod\ n)$ maka $n|(x - x')$ (definisi 2.5.1)

$pn = (x - x')$ (definisi 2.5.1)

$p(pn) = p(x - x')$ (dikalikan dengan p; $p \in$ Z)

$(pp)n = p(x - x')$ (sifat assosiatif)

$n|p(x - x')$ (definisi 2.5.1; $p \in$ Z)

$y \equiv y'(mod\ n)$ maka $n|(y - y')$ (definisi 2.5.1)

$qn = (y - y')$ (definisi 2.2.1)

$q(qn) = q(y - y')$ (dikalikan dengan q; $q \in$ Z)

$(qq)n = q(y - y')$ (sifat assosiatif)

$n|q(y - y')$ (definisi 2.2.1; $q \in$ Z)

Dari $n|p(x - x')$dan $n|q(y - y')$

Maka $n|[p(x - x') + q(y - y')]$ (definisi 2.1)

$n|px - px' + qy - qy'$ (sifat assosiatif)

$n|(px + qy) - (px + qy)$

$px + qy \equiv px' - qy'(mod\ n)$

e) $x \equiv x'(mod\ n)$ maka $n|(x - x')$ (definisi 2.5.1)

$pn = (x - x')$ (definisi 2.2.1)

$k(pn) = k(x - x')$ (dikalikan dengan k; $k \in$ Z)

$(kp)n = k(x - x')$ (sifat assosiatif)

$n|k(x - x')$ (definisi 2.2.1; $kp \in$ Z)

$n|kx - kx'$

$kx \equiv kx'$ (definisi 2.2.1)

Contoh:

$19 \equiv 7(mod\ 3)$ dan $5 \equiv 14(mod\ 3)$ maka

a. $19 + 5 \equiv 7 + 14(mod\ 3)$

$24 \equiv 21(mod\ 3)$

b. $19 - 5 \equiv 7 - 14(mod\ 3)$

$14 \equiv -7(mod\ 3)$

c. $19 \cdot 5 \equiv 7 \cdot 14(mod\ 3)$

$95 \equiv 98(mod\ 3)$

d. Misal $p = 2$ dan $q = 3$ maka

$2 \cdot 9 + 3 \cdot 5 = 2 \cdot 7 + 3 \cdot 14(mod\ 3)$

$53 \equiv 56(mod\ 3)$

e. Misal $k = 4$ maka

$4 \cdot 9 \equiv 4 \cdot 7(mod\ 3)$

$76 \equiv 28(mod\ 3)$

Teorema 2.5.3:

a. Jika $mx \equiv my(mod\ n)$ dan $(m,n) = 1$ maka $x \equiv y(mod\ n)$

b. Jika $mx \equiv my(mod\ n)$ dan $(m,n) = k$ maka $x \equiv y\left(mod\ \frac{n}{k}\right)$

Bukti:

a. FPB $(m,n) = 1$ maka $am + bn = 1$ (teorema 2.4.4)

$(x-y)am + (x-y)bn = (x-y)$

$mx \equiv my(mod\ n)$ maka $n|m(x-y)$ (definisi 2.5.1)

$pn = m(x-y)$ (definisi 2.2.1)

$a(pn) = am(x-y)$ (dikalikan dengan a)

$(ap)n = am(x-y)$ (sifat assosiatif)

$n|am(x-y)$ (definisi 2.2.1)

$n|am(x-y)$ berarti $n|am$ dan $n|(x-y)$ (definisi 2.2.1)

$n|(x-y)am + (x-y)bn$

$n|am + bn(x-y)$ (sifat assosiatif)

$n|(x-y)$ (nilai $am + bn = 1$)

$x \equiv y\ (mod\ n)$ (definisi 2.5.1)

b. $(m,n) = k$ maka $\left(\frac{n}{k}, \frac{m}{k}\right) = 1$ (teorema 2.4.1)

$mx \equiv my(mod\ n)$ maka $n|m(x-y)$ (definisi 2.5.1)

$\frac{n}{k}\Big|\frac{m}{k}(x-y)$ (dibagi dengan k)

$\frac{m}{k}x \equiv \frac{m}{k}y\left(mod\ \frac{n}{k}\right)$ (definisi 2.5.1)

$x \equiv y\left(mod\ \frac{n}{k}\right)$ (teorema 2.5.3)

Contoh:

a. $28 \equiv 48 (mod\ 5)$

$4 \cdot 7 \equiv 4 \cdot 12 (mod\ 5)$

FPB $(4, 5) = 1$ maka $7 \equiv 12\ (mod\ 5)$

b. $56 \equiv 104 (mod\ 6)$

$8 \cdot 7 \equiv 8 \cdot 13 (mod\ 6)$

FPB $(8, 6) = 2$

$7 \equiv 13 \left(mod\ \frac{6}{2}\right)$

$7 \equiv 13 (mod\ 3)$

2.6 Kongruensi Linier

Kongruensi linier adalah suatu kongruensi yang variabelnya berpangkat paling tinggi satu. Bentuk umum kongruensi linier adalah $ax \equiv b (mod\ m)$, dengan $a \not\equiv 0 (mod\ m)$.

Teorema 2.6.1:

Jika $(a, m) \nmid b$ maka kongruensi linier $ax \equiv b (mod\ m)$ tidak memiliki selesaian (Era Wati dalam Sukirman, 2005:108).

Bukti:

Akan dibuktikan kontraposisi teorema tersebut, yaitu jika $ax \equiv b (mod\ m)$ memiliki selesaian maka $(a, m)|b$. Misalkan r adalah selesaian dari $ax \equiv b (mod\ m)$ maka $ar \equiv b (mod\ m)$ sehingga $ar - b = km$ untuk suatu bilangan bulat. Perhatikan $ar - b = km$. Karena $(a, m)|a$ dan $(a, m)|km$ maka

$(a, m)|b$. Jadi terbukti kontraposisi teorema tersebut, sehingga terbukti pula teorema itu.

Contoh:

$6x \equiv 7(mod\ 8)$, karena $(6, 2) = 2$ dan $2 \nmid 7$ maka kongruensi linier $6x \equiv 7(mod\ 8)$ tidak mempunyai selesaian.

Teorema 2.6.2:

Jika $(a, m) = 1$, maka kongruensi linier $ax \equiv b(mod\ m)$ memiliki tepat satu selesaian (Era Wati dalam Sukirman, 2005:108).

Bukti:

Karena $(a, m) = 1$ maka ada bilangan bulat r dan s sehingga $ar + ms = 1$. Jika kedua ruas dari persamaan ini dikalikan b, diperoleh:

$$(ar)b + (ms)b = b$$

$$a(rb) + m(sb) = b$$

$$a(rb) - b = -(sb)m$$

persamaan terakhir ini berarti bahwa $a(rb) - b$ adalah kelipatan m. Jika $a(rb) \equiv b(mod\ m)$, maka residu terkecil dari rb modulo m adalah selesaian dari kongruensi linier itu.

Selanjutnya tinggal menunjukkan bahwa penyelesaian itu tunggal. Dengan mengandaikan selesaian kongruensi linier itu tunggal, misalkan r dan s masing-masing selesaian dari $ax \equiv b(mod\ m)$, maka

$ar \equiv b(mod\ m)$ dan $as \equiv b(mod\ m)$, dengan sifat transitif diperoleh $ar \equiv as(mod\ m)$, karena $(a, m) = 1$, maka $r \equiv s\ (mod\ m)$. Ini berarti $m|(r - s)$. Akan tetapi karena r dan s adalah selesaian dari kongruensi itu, maka r dan s

masing-masing residu terkecil modulo m, sehingga $0 \leq s < m$. Dari kedua pertidaksamaan ini diperoleh bahwa $-m < r - s < m$, tetapi karena $m|(r - s)$ maka $r - s = 0$ atau $r = s$. Ini berarti bahwa selesaian dari kongruensi linier tunggal (terbukti).

Salah satu menyelesaikan kongruensi linier adalah memanipulasi koefisien atau konstanta pada pengkongruenan itu, sehingga memungkinkan untuk melakukan kanselasi (penghapusan).

Contoh:

Selesaikan $4x \equiv 1\ (mod\ 15)$

Jawab:

$$4x \equiv 1\ (mod\ 15)$$

$$4x \equiv 16\ (mod\ 15)$$

$$x \equiv 4\ (mod\ 15)$$

Karena $(4, 15) = 1$ maka kemungkinan dilakukan kanselasi 4 pada kongruensi $4x \equiv 16\ (mod\ 15)$ sehingga diperoleh $x \equiv 4\ (mod\ 15)$. Selesaian dari kongruensi $4x \equiv 1\ (mod\ 15)$ adalah 4.

Teorema 2.6.3:

Sesuai teorema 2.6.2 diatas, jika $(a, m) = 1$, maka kongruensi $ax \equiv 1(mod\ m)$ mempunyai tepat satu selesaian, pada selesaian kongruensi itu disebut *invers* dari *a modulo* yang diberi simbol a^{-1} (Era Wati dalam Sukirman, 2005:110).

Contoh:

Carilah $2^{-1}(mod\ 13)$

Jawab:

Untuk mencari $2^{-1}(mod\ 13)$, perlu menyelesaikan kongruensi $2x \equiv 1(mod\ 13)$.

$2x \equiv 1(mod\ 13)$

$2x \equiv 14(mod\ 13)$

$x \equiv 7(mod\ 13)$

Jadi $2^{-1}(mod\ 13)$ adalah 7.

2.7 Sifat-sifat Kongruensi

Definisi 2.7.1:

Misalkan $a, b, m \in$ Z

a disebut kongruen dengan b modulo m, ditulis dengan $a \equiv b(mod\ m)$. Jika $a - b$ habis dibagi m, yaitu $m|a - b$, jika $a - b$ tidak habis dibagi m, yaitu $m \nmid a - b$, maka ditulis $a \not\equiv b(mod\ m)$ dibaca a tidak kongruen dengan b modulo m.

Karena $a - b$ habis dibagi oleh m jika dan hanya jika $a - b$ habis dibagi oleh $-m$, maka $a \equiv b(mod\ m)$ jika dan hanya jika $a \equiv b(mod - m)$, sehingga akan diambil nilai modulo m yang positif (Salima dalam Muhsetyo, 1995:77).

Teorema 2.7.1:

Misalkan $a, b, c, m, x \in \mathrm{Z}, m \neq 0$

Kongruensi memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Simetris

   Jika $a \equiv b(mod\ m)$ maka $b \equiv a(mod\ m)$

2. Reflektif

   $a \equiv a(mod\ m)$ untuk semua $a \in \mathrm{Z}$

3. Transitif

   Jika $a \equiv b(mod\ m)$ dan $b \equiv c(mod\ m)$, maka $a \equiv c(mod\ m)$

4. Jika $a \equiv b(mod\ m)$ maka $ax \equiv bx(mod\ m)$
5. Jika $a \equiv b(mod\ m)$ dan $c \equiv d(mod\ m)$, maka $a + b \equiv c + d(mod\ m)$
6. Jika $a \equiv b(mod\ m)$ dan $c \equiv d(mod\ m)$, maka $a \cdot c \equiv b \cdot d(mod\ m)$
7. Jika $a \equiv b(mod\ m)$ dan $d|m$, $d > 0$, maka $a \equiv b(mod\ d)$
8. Jika $a \equiv b(mod\ m)$ maka $ac \equiv bc(mod\ mc)$ untuk $c > 0$

   (Muhsetyo, 1997:140-141)

Bukti:

1. Sesuai dengan definisi 2.7.1 jika $a \equiv b(mod\ m)$ maka $m|(a - b)$ sehingga $m|-(b - a)$ menjadi $m|(b - a)$.

   Jadi $b \equiv a(mod\ m)$

2. $m \neq 0$ maka $m|0$ sehingga $m|(a - a)$ sesuai definisi 2.7.1 maka $a \equiv a(mod\ m)$ untuk semua bilangan bulat a dan $m \neq 0$.

3. Sesuai dengan definisi 2.7.1 jika

   $a \equiv b(mod\ m)$ maka $m|(a-b)$................(1)

   $b \equiv c(mod\ m)$ maka $m|(b-c)$.................(2)

   Dari (1) dan (2) karena $m|(a-b)$ dan $m|(b-c)$ maka $m|(a-b)+(b-c)$ atau $m|(b-c)$.

   Sesuai dengan definisi 2.7.1 $m|(a-c)$ maka $a \equiv c(mod\ m)$.

4. Sesuai dengan definisi 2.7.1 jika $a \equiv b(mod\ m)$ maka $m|(a-b)$ sehingga $m|(a-b)x$. Karena $m|ax-bx$ maka $ax \equiv bx(mod\ m)$.

5. Sesuai dengan definisi 2.7.1 jika

   $a \equiv b(mod\ m)$ maka $m|(a-b)$................(1)

   $c \equiv d(mod\ m)$ maka $m|(c-d)$................(2)

   Dari (1) dan (2) karena $m|(a-b)$ maka $m|(c-d)$ maka $m|(a-b)+(c-d)$ atau $m|(c+a)-(b+d)$. Sesuai dengan definisi 2.7.1 maka $a+c=b+d(mod\ m)$.

6. Sesuai dengan definisi 2.7.1 jika

   $a \equiv b(mod\ m)$ maka $m|(a-b)$ dan $m|(a-b)c$ atau $m|(ac-bc)$, untuk $c \in$ Z.

   $c \equiv d(mod\ m)$ maka $m|(c-d)$ dan $m|b(c-d)$ atau $m|(bc-bd)$

   $m|(ac-bc)$ dan $m|(bc-bd)$ maka $m|(ac-bc+bc-bd)$ atau $m|(ac-bd)$. Sesuai definisi 2.7.1 maka $ac \equiv bd(mod\ m)$.

7. Sesuai dengan definisi 2.7.1 jika $a \equiv b(mod\ m)$ maka $m|(a-b)$. Dan jika $d|m$ maka $d|(a-b)$.Sesuai definisi 2.7.1 $a \equiv b(mod\ d)$.

8. $a \equiv b(mod\ m)$

Sesuai dengan definisi 2.7.1 maka $m|(a-b)$ dan untuk $c < 0$ maka kedua ruas dikalikan dengan c menjadi $mc|(a-b)c$, maka $mc|(ca-bc)$ dan sesuai definisi 2.7.1 $ac \equiv bc(mod\ mc)$.

2.8 Kajian Kongruensi Linier Simultan dalam Surat An Nahl Ayat 11

Al Qur'an adalah kitabullah terbesar yang banyak menyimpan rahasia-rahasia baik dalam dunia nyata maupun ghaib. Al Qur'an merupakan kitab yang mengandung berbagai ilmu dan sumber seluruh ilmu pengetahuan, salah satunya adalah matematika.

Dalam menyelesaikan kongruensi linier simultan ini dapat dikerjakan secara bertahap (rekursif) dan teorema sisa China. Jika direlevansikan dengan kajian agama sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa banyak hal-hal yang ditunjukkan Allah SWT sebagai tanda kebesarannya. Demikianlah sebagaimana yang tertera pada surat An Nahl ayat 11:

يُنۢبِتُ لَكُم بِهِ ٱلزَّرۡعَ وَٱلزَّيۡتُونَ وَٱلنَّخِيلَ وَٱلۡأَعۡنَٰبَ وَمِن كُلِّ ٱلثَّمَرَٰتِۚ إِنَّ فِي
ذَٰلِكَ لَأٓيَةٗ لِّقَوۡمٖ يَتَفَكَّرُونَ ١١

Artinya: Dia menumbuhkan bagi kamu dengan air hujan itu tanaman-tanaman; zaitun, korma, anggur, dan segala macam buah-buahan. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar ada tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang memikirkannya (Q.S An Nahl:11).

Ayat diatas menyebutkan beberapa yang paling bermanfaat atau popular dalam masyarakat Arab tempat dimana turunnya Al Qur'an, dengan menyatakan bahwa Dia yakni Allah SWT menumbuhkan bagi kamu dengannya yakni dengan air hujan itu tanaman-tanaman, dari yang paling layu sampai dengan yang paling panjang usianya dan paling banyak manfaatnya. Dia menumbuhkan zaitun, kurma, anggur yang dapat kamu jadikan makanan yang halal atau minuman yang haram dan dari segala macam atau sebagian buah-buahan selain itu. Sesungguhnya yang demikian itu benar-benar ada tanda yang sangat jelas bahwa yang mengaturnya seperti itu adalah Allah yang Maha Esa lagi Maha Kuasa (Shihab, 2002:195). Jadi dalam surat An Nahl ayat 11 menceritakan bahwa untuk mengetahui kekuasaan Allah SWT terdapat banyak tanda-tanda yang diberikan Allah SWT.

Dalam surat Al Baqoroh juga menegaskan bahwa kebaikan dapat ditemukan dalam berbagai macam cara:

لَّيْسَ ٱلْبِرَّ أَن تُوَلُّوا۟ وُجُوهَكُمْ قِبَلَ ٱلْمَشْرِقِ وَٱلْمَغْرِبِ وَلَٰكِنَّ ٱلْبِرَّ مَنْ ءَامَنَ بِٱللَّهِ
وَٱلْيَوْمِ ٱلْءَاخِرِ وَٱلْمَلَٰٓئِكَةِ وَٱلْكِتَٰبِ وَٱلنَّبِيِّـۧنَ وَءَاتَى ٱلْمَالَ عَلَىٰ حُبِّهِۦ ذَوِى
ٱلْقُرْبَىٰ وَٱلْيَتَٰمَىٰ وَٱلْمَسَٰكِينَ وَٱبْنَ ٱلسَّبِيلِ وَٱلسَّآئِلِينَ وَفِى ٱلرِّقَابِ وَأَقَامَ
ٱلصَّلَوٰةَ وَءَاتَى ٱلزَّكَوٰةَ وَٱلْمُوفُونَ بِعَهْدِهِمْ إِذَا عَٰهَدُوا۟ ۖ وَٱلصَّٰبِرِينَ فِى ٱلْبَأْسَآءِ
وَٱلضَّرَّآءِ وَحِينَ ٱلْبَأْسِ ۗ أُو۟لَٰٓئِكَ ٱلَّذِينَ صَدَقُوا۟ ۖ وَأُو۟لَٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُتَّقُونَ ١٧٧

Artinya: Bukanlah menghadapkan wajahmu ke arah timur dan barat itu suatu kebajikan, akan tetapi sesungguhnya kebajikan itu ialah beriman kepada Allah, hari kemudian, malaikat-malaikat, kitab-kitab, nabi-nabi dan memberikan harta yang dicintainya kepada kerabatnya, anak-anak yatim, orang-orang miskin, musafir (yang memerlukan pertolongan) dan orang-orang yang meminta-minta, dan memerdekakan hamba sahaya, mendirikan sholat, dan menunaikan zakat, dan orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji, dan orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan, mereka ialah orang-orang yang benar (imannya), dan mereka itulah orang-orang yang bertaqwa (Q.S. Al Baqoroh:177).

Ayat diatas menceritakan bahwa Allah menjelaskan menghadap kiblat secara tertentu itu bukan mencakup pilar-pilar yang agung, kaidah-kaidah yang umum dan aqidah yang lurus. Sesungguhnya kebajikan itu ialah orang-orang yang beriman kepada Allah SWT.

Di dalam Al Qur'an terdapat potongan ayat yang artinya: *Hai orang-orang yang beriman, taatilah Allah dan Rasulnya dan Ulil Amri diantara kamu*… Menurut Musthafa Al Maraghi ayat tersebut memerintahkan kepada orang-orang yang beriman agar mematuhi Allah dan mengamalkan kitabnya (Al Qur'an), serta mematuhi Rasul (Al Sunnah) karena Dia-lah yang menjelaskan kandungan kitab tersebut kepada umat manusia, juga mematuhi Ulil Amri yang meliputi pemerintah, para hakim, para ulama', panglima perang, tokoh-tokoh terkemuka dan lainnya. Al Qur'an dan Al Sunnah yang selanjutnya menjadi sumber rujukan utama ajaran Islam itu mengandung nilai-nilai luhur yang harus ditegakkan. Penegakan atas nilai-nilai luhur dalam berbagai aspek kehidupan itu selanjutnya menjadi cita-cita Islam. Hasil studi mendalam yang dilakukan para ahli tentang cita-cita Islam yang terdapat dalam Al Qur'an dan Al Sunnah dalam hubungannya dengan berbagai aspek kehidupan umat manusia menunjukkan sebagai berikut:

Pertama, dalam bidang sosial, Islam mencita-citakan suatu masyarakat yang egaliter, yaitu masyarakat yang didasarkan atas kesetaraan atau kesederajatan sebagai makhluk Tuhan. Atas dasar ini kedudukan dan kehormatan manusia di hadapan Tuhan dan manusia lainnya bukan didasarkan atas perbedaan suku bangsa, golongan, bahasa, warna kulit, pangkat, keturunan, harta benda, tempat tinggal, dan lain sebagainya, melainkan ketakwaannya kepada Tuhan dan darma baktinya bagi kemanusiaan.

Kedua, dalam bidang politik, Islam mencita-citakan suatu pemerintahan yang dipimpin oleh orang yang adil, jujur, amanah, demokratis, dan kredibel, sehingga yang bersangkutan tidak menyalahgunakan kekuasaannya, dan terus berupaya menciptakan kemakmuran bagi masyarakat.

Ketiga, dalam bidang ekonomi, Islam mencita-citakan keadaan ekonomi yang didasarkan pada pemerataan, anti monopoli, saling menguntungkan, tidak saling merugikan seperti menipu, mencuri, dan lainnya.

Keempat, dalam bidang hubungan sosial antara umat Islam dan makhluk lainnya, Islam mencita-citakan suatu keadaan masyarakat yang didasarkan pada ukhuwah yang kokoh, yakni ukhuwah Islamiyah, yang memungkinkan terjadinya hubungan yang harmonis dan saling membantu antara sesama makhluk Tuhan lainnya.

Kelima, dalam bidang hukum, Islam mencita-citakan tegaknya supremasi hukum yang didasarkan pada keadilan, tidak pilih kasih, manusiawi, konsisten, dan obyektif yang diarahkan kepada melindungi seluruh aspek hak asasi manusia yang meliputi hak untuk hidup, hak untuk beragama, hak untuk memiliki dan memanfaatkan harta, hak untuk memiliki keturunan.

Keenam, dalam bidang pendidikan dan ilmu pengetahuan, islam mencita-citakan pendidikan yang merata bagi seluruh masyarakat (*education for all*), berlangsung seumur hidup *(long life education*) dan dilakukan untuk tujuan agar manusia menjadi khalifah dimuka bumi dalam rangka ibadah kepada Allah SWT.

Jika keterangan tersebut diatas diamati secara seksama, tampak bahwa cita-cita Islam dalam berbagai aspek kehidupan tersebut pada intinya adalah menginginkan terciptanya suatu kehidupan masyarakat dalam berbagai bidang yang didasarkan pada nilai-nilai akhlak yang luhur, yang pada intinya bertumpu pada keimanan dan tanggung jawab kepada Allah dan kasih sayang, serta tanggung jawab kepada manusia. Cita-cita Islam itulah yang sekaligus menjadi cita-cita Al Qur'an (Nata, 2001:1-4).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Kongruensi Linier Simultan

Kongruensi linier simultan didefinisikan sebagai suatu sistem yang terdiri dari beberapa kongruensi linier satu variabel dan dengan nilai modulo yang berbeda untuk mencari suatu selesaian dari beberapa kongruensi linier yang memenuhi masing-masing kongruensi linier pembentuknya. Adapun bentuk umum dari kongruensi linier simultan adalah sebagai berikut:

$$x \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$$

$$x \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_r \ (mod\ n_r)$$

Berikut penulis memberikan beberapa contoh dari kongruensi linier simultan satu variabel adalah sebagai berikut:

Contoh:

a. $x \equiv 4\ (mod\ 11)$

$x \equiv 3\ (mod\ 17)$

b. $x \equiv 1\ (mod\ 2)$

$x \equiv 2\ (mod\ 3)$

$x \equiv 3\ (mod\ 5)$

c. $x \equiv 6\ (mod\ 7)$

$x \equiv 4\ (mod\ 9)$

d. $x \equiv 0\ (mod\ 2)$

$x \equiv 0\ (mod\ 3)$

$x \equiv 1\ (mod\ 5)$

$x \equiv 6\ (mod\ 7)$

Untuk mengetahui apakah kongruensi linier simultan satu variabel mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian maka akan diselidiki terlebih dahulu dengan menggunakan kemungkinan sebagai berikut:

$x \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$

$x \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$

mempunyai selesaian jika dan hanya jika $d|a_2 - a_1$; $d = (n_1, n_2)$.

Bukti:

(⇒) Misalkan:

$x \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$

$x \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$

mempunyai selesaian, sebut x_0 maka

$x_0 \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$

$x_0 \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$

Diketahui $d = (n_1, n_2)$

$n_1|x_0 - a_1$

$n_2|x_0 - a_2$

Selanjutnya

$d|x_0 - a_1$

$d|x_0 - a_2$

Sehingga

$d|x_0 - a_1 - (x - a_2)$

$d|a_2 - a_1$

(⇐) $d|a_2 - a_1$

$d|x_0 - a_1 - (x - a_2)$

Sehingga

$d|x_0 - a_2$

$d|x_0 - a_1$

Selanjutnya

$n_2|x_0 - a_2$

$n_1|x_0 - a_1$

Diketahui $d = (n_1, n_2)$

$x_0 \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$

$x_0 \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$

mempunyai selesaian, sebut x_0 maka

$x \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$

$x \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$

Contoh:

1. $x \equiv 3 \ (mod\ 8)$

   $x \equiv 7 \ (mod\ 10)$

   Jawab:

   Diketahui $d = (8, 10) = 2$

   Karena $2|(7 - 3)$, maka dua kongruensi linier simultan tersebut mempunyai selesaian.

2. $x \equiv 3 \ (mod\ 8)$

   $x \equiv 6 \ (mod\ 10)$

   Jawab:

   Diketahui $d = (8, 10) = 2$

   Karena $2 \nmid (6 - 3)$, maka dua kongruensi linier simultan tersebut tidak mempunyai selesaian.

   Sehingga:

   $x \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$

   $x \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$

   tidak mempunyai selesaian jika dan hanya jika $d \nmid a_2 - a_1$; $d = (n_1, n_2)$.

3.2 Cara Menyelesaikan Kongruensi Linier Simultan Satu Variabel secara Rekursif

Diberikan bentuk umum dari kongruensi linier simultan satu variabel adalah sebagai berikut:

$$x \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$$
$$x \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$$
$$\vdots$$
$$x \equiv a_r \ (mod\ n_r)$$

dimana a_1, a_2, a_3,..., a_r adalah sebarang r bilangan bulat.

Adapun cara menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel tersebut adalah sebagai berikut:

$x \equiv a_1 (mod\ n_1)$............................ (i)

$x \equiv a_2 (mod\ n_2)$............................ (ii)

Dari kongruensi (i) dan (ii)

$$\begin{array}{l|l|l} x \equiv a_1 (mod\ n_1) & xn_2 & n_2 x \equiv a_1 n_2 (mod\ n_1 n_2) \\ x \equiv a_2 (mod\ n_2) & xn_1 & n_1 x \equiv a_2 n_1 (mod\ n_1 n_2) \\ \hline \end{array} +$$

Sehingga diperoleh

$(n_2 + n_1)x \equiv a_1 n_2 + a_2 n_1 (mod\ n_1 n_2)$ .... (*)

$(n_2 + n_1)^{-1}(n_2 + n_1)x \equiv (n_2 + n_1)^{-1} \cdot a_1 n_2 + a_2 n_1 (mod\ n_1 n_2)$

$x \equiv (n_2 + n_1)^{-1} \cdot a_1 n_2 + a_2 n_1 (mod\ n_1 n_2)$

Jika dikerjakan secara keterbagian maka diperoleh sebagai berikut

$(n_2 + n_1)x \equiv a_1 n_2 + a_2 n_1 (mod\ n_1 n_2)$

$n_1 | (n_2 + n_1)x - a_1 n_2 + a_2 n_1$

$n_2 | (n_2 + n_1)x - a_1 n_2 + a_2 n_1$

Jika $(n_1, n_2) = d$, maka

$d | (n_2 + n_1)x - a_1 n_2 + a_2 n_1$

$d \big| \big((n_2 + n_1)x - a_1 n_2 + a_2 n_1\big)(n_2 + n_1)^{-1}$

$d | x - (n_2 + n_1)^{-1} \cdot a_1 n_2 + a_2 n_1$

$x \equiv (n_2 + n_1)^{-1} \cdot a_1 n_2 + a_2 n_1 (mod\ n_1 n_2)$

$x \equiv a_3 (mod\ n_3)$ .... (iii)

Dari kongruensi (*) dan (iii)

$$\begin{array}{r|l|} (n_2 + n_1)x \equiv a_1 n_2 + a_2 n_1 (mod\ n_1 n_2) & xn_3 \\ x \equiv a_3 (mod\ n_3) & xn_1 n_2 \end{array}$$

Sehingga diperoleh

$$(n_2n_3 + n_1n_3)x \equiv a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3(mod\ n_1n_2n_3)$$

$$\underline{\qquad\qquad(n_1n_2)x \equiv a_3n_1n_2(mod\ n_1n_2n_3)\qquad\qquad} +$$

$(n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)x \equiv a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2(mod\ n_1n_2n_3)$..........(**)

$(n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)^{-1}(n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)x \equiv (n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)^{-1} \cdot a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2(mod\ n_1n_2n_3)$

$x \equiv (n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)^{-1} \cdot a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2(mod\ n_1n_2n_3)$

Jika dikerjakan secara keterbagian maka diperoleh sebagai berikut

$(n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)x \equiv a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2(mod\ n_1n_2n_3)$

$n_1|(n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)x - a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2$

$n_2|(n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)x - a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2$

$n_3|(n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)x - a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2$

Jika $(n_1, n_2, n_3) = d$, maka

$d|(n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)x - a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2$

$d|\big((n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)x - a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2\big)(n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)^{-1}$

$d|x - (n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)^{-1} \cdot a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2$

$x \equiv (n_2n_3 + n_1n_3 + n_1n_2)^{-1} \cdot a_1n_2n_3 + a_2n_1n_3 + a_3n_1n_2(mod\ n_1n_2n_3)$

$$\vdots$$

$x \equiv a_r(mod\ n_r)$

Dari pembuktian di atas, terlihat barisan polanya yaitu $\sum_{i=1}^{r} \frac{n_1n_2n_3n_4 \ldots n_r}{n_i} x \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1n_2n_3n_4 \ldots n_r}{n_i} a_i(\text{mod } n_1n_2n_3n_4 \ldots n_r)$.

Selanjutnya, penulis memisalkan ruas kiri dengan a dan ruas kanan dengan $b\ (mod\ m)$ maka didapat $ax \equiv b\ (mod\ m)$. Dengan nilai-nilai a, b, dan m yang relatif besar dilakukan dengan menyederhanakan kongruensi, yaitu mengganti kongruensi semula dengan kongruensi lain yang mempunyai bilangan modulo lebih kecil. Prosedur ini bisa di ulangi sampai diperoleh suatu kongruensi yang selesaiannya mudah ditentukan.

Diketahui:

$\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}\right)x \equiv \sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}a_i(\text{mod } n_1n_2n_3n_4\dots n_r)$

maka $n_1n_2n_3n_4\dots n_r \left|\left(\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}\right)x - \sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}a_i\right)\right.$

sehingga $\left(\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}\right)x - \sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}a_i\right) = (n_1n_2n_3n_4\dots n_r)y,$

untuk suatu $y \in \mathbb{Z}$.

berarti $(n_1n_2n_3n_4\dots n_r)y + \sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}a_i = \left(\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}\right)$

akibatnya $(n_1n_2n_3n_4\dots n_r)y \equiv -\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}a_i\left(mod\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}\right)$.

Sampai tahap ini jelas bahwa kongruensi linier semula $\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}\right)x \equiv \sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}a_i(\text{mod } n_1n_2n_3n_4\dots n_r)$ berubah menjadi kongruensi linier $(n_1n_2n_3n_4\dots n_r)y \equiv -\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}a_i\left(mod\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}\right)$ yang lebih sederhana. Dengan demikian $(n_1n_2n_3n_4\dots n_r)y + \sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}a_i = \left(\sum_{i=1}^{r}\frac{n_1n_2n_3n_4\dots n_r}{n_i}\right)x$ sehingga bentuk umumnya adalah:

$$x = \frac{(n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r)y + \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i} a_i}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i}}$$

Adapun jika nilai a, b, dan m merupakan bilangan yang besar, maka proses di atas dapat diperluas dengan jalan yang sama dan variabel yang berbeda sehingga dapat diperoleh suatu selesaian.

Contoh:

Untuk 2 kongruensi linier

1. Selesaikanlah kongruensi linier simultan berikut ini.

   $x \equiv 1\ (mod\ 3)$............................. (i)

   $x \equiv 2\ (mod\ 4)$............................. (ii)

   Jawab:

   Dapat ditentukan bahwa $(3, 4) = 1$, sehingga kongruensi tersebut dapat diselesaikan.

   Dari kongruensi (i) dan (ii)

   $$\begin{array}{l|l|l} x \equiv 1\ (mod\ 3) & \text{x4} & 4x \equiv 4\ (mod\ 12) \\ x \equiv 2\ (mod\ 4) & \text{x3} & \underline{3x \equiv 6\ (mod\ 12)}\ + \end{array}$$

   Sehingga diperoleh

   $(4 + 3)x \equiv 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 (mod\ 12)$

   $7x \equiv 10\ (mod\ 12)$

   $7 \cdot 7x \equiv 7 \cdot 10\ (mod\ 12)$

   $x \equiv 70\ (mod\ 12)$

   $x \equiv 10\ (mod\ 12)$

Jika dikerjakan secara keterbagian maka diperoleh sebagai berikut:

$7x \equiv 10 \ (mod\ 12)$

$12|(7x - 10)$

$12|\big((7x - 10) \cdot 7\big)$

$12|(x - 7 \cdot 10)$

$x \equiv 7 \cdot 10 (mod\ 12)$

$x \equiv 70 (mod\ 12)$

$x \equiv 10 (mod\ 12)$

Untuk mengecek apakah jawaban tersebut benar, maka nilai x yang telah diperoleh disubtitusikan pada kongruensi semula yaitu:

$x \equiv 1\ (mod\ 3) \equiv 10 \equiv 1\ (mod\ 3)$

$x \equiv 2\ (mod\ 4) \equiv 10 \equiv 2\ (mod\ 4)$

2. Selesaikanlah kongruensi linier simultan berikut ini.

$x \equiv 1\ (mod\ 3)$............................. (i)

$x \equiv 2\ (mod\ 4)$............................. (ii)

Jawab:

Dapat ditentukan bahwa $(3, 4) = 1$, sehingga kongruensi tersebut dapat diselesaikan.

$$x = \frac{(n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r)y + \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i} a_i}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i}}$$

$$= \frac{(n_1 n_2)y + a_1 n_2 + a_2 n_1}{n_2 + n_1}$$

$$= \frac{(3 \cdot 4)y + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{4 + 3}$$

$$x = \frac{(12)y+10}{7}$$

$$7x = 12y + 10$$

$$7x - 10 = 12y$$

$$12y = -10\ (mod\ 7)$$

$$12y = -3\ (mod\ 7)$$

$$12y = 4\ (mod\ 7)$$

$$5y = 4\ (mod\ 7)$$

$$3 \cdot 5y = 3 \cdot 4\ (mod\ 7)$$

$$y = 12\ (mod\ 7)$$

$$y = 5\ (mod\ 7)$$

$$y = 5$$

Jadi $y = 5$, selanjutnya disubtitusikan pada persamaan

$$7x = 12y + 10$$

$$7x = 12 \cdot 5 + 10$$

$$7x = 70$$

$$x = 10$$

Sehingga selesaiannya adalah $x \equiv 10\ (mod\ 12)$.

Atau dapat dikerjakan sebagai berikut:

$$x = \frac{(12)y+10}{7}$$

$$7x = 12y + 10$$

$$7x = 10\ (mod\ 12)$$

$$7 \cdot 7x = 7 \cdot 10\ (mod\ 12)$$

$$x = 70 \ (mod\ 12)$$

$$x = 10 \ (mod\ 12)$$

Sehingga selesaiannya adalah $x \equiv 10\ (mod\ 12)$.

<u>Untuk 3 kongruensi linier</u>

1. Selesaikanlah kongruensi linier simultan berikut ini.

   $x \equiv 2\ (mod\ 3)$............................. (i)

   $x \equiv 3\ (mod\ 4)$............................. (ii)

   $x \equiv 4\ (mod\ 5)$............................. (iii)

   Jawab:

   Dapat ditentukan bahwa

   $(3,4) = 1$, $(3,5) = 1$, dan $(4,5) = 1$ sehingga kongruensi tersebut dapat diselesaikan.

   Dari kongruensi (i) dan (ii)

   $$\begin{array}{l|l|l} x \equiv 2\ (mod\ 3) & x4 & 4x \equiv 8\ (mod\ 12) \\ x \equiv 3\ (mod\ 4) & x3 & \underline{3x \equiv 9\ (mod\ 12)}\ + \end{array}$$

   Sehingga diperoleh

   $(4+3)x \equiv 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3\ (mod\ 12)$

   $$7x \equiv 17\ (mod\ 12)$$

   $$7 \cdot 7x \equiv 7 \cdot 17\ (mod\ 12)$$

   $$x \equiv 119\ (mod\ 12)$$

   $x \equiv 11\ (mod\ 12)$............................. (*)

Jika dikerjakan secara keterbagian maka diperoleh sebagai berikut:

$7x \equiv 17 \ (mod\ 12)$

$12|(7x - 17)$

$12|\big((7x - 17) \cdot 7\big)$

$12|(x - 7 \cdot 17)$

$x \equiv 7 \cdot 17 \ (mod\ 12)$

$x \equiv 119 \ (mod\ 12)$

$x \equiv 11 \ (mod\ 12)$

$x \equiv 4 \ (mod\ 5)$.............................. (iii)

Dari kongruensi (*) dan (iii)

$$\begin{array}{l|l|l}
x \equiv 11 \ (mod\ 12) & \text{x5} & 5x \equiv 55 \ (mod\ 60) \\
x \equiv 4 \ (mod\ 5) & \text{x12} & \underline{12x \equiv 48 \ (mod\ 60)} \ +
\end{array}$$

Sehingga diperoleh

$(5 + 12)x \equiv 11 \cdot 5 + 4 \cdot 12 \ (mod\ 60)$

$17x \equiv 55 + 48 \ (mod\ 60)$

$17x \equiv 103 \ (mod\ 60)$

$53 \cdot 17x \equiv 53 \cdot 103 \ (mod\ 60)$

$x \equiv 5459 \ (mod\ 60)$

$x \equiv 59 \ (mod\ 60)$

Jika dikerjakan secara keterbagian maka diperoleh sebagai berikut:

$17x \equiv 103 \ (mod\ 60)$

$60|(17x - 103)$

$60|\big((17x - 103) \cdot 53\big)$

$60|(x - 53 \cdot 103)$

$x \equiv 53 \cdot 103 \ (mod\ 60)$

$x \equiv 5459 \ (mod\ 60)$

$x \equiv 59 \ (mod\ 60)$

Untuk mengecek apakah jawaban tersebut benar, maka nilai x yang telah diperoleh disubtitusikan pada kongruensi semula yaitu:

$x \equiv 2 \ (mod\ 3) \equiv 59 \equiv 2 \ (mod\ 3)$

$x \equiv 3 \ (mod\ 4) \equiv 59 \equiv 3 \ (mod\ 4)$

$x \equiv 4 \ (mod\ 5) \equiv 59 \equiv 4 \ (mod\ 5)$

2. Selesaikanlah kongruensi linier simultan berikut ini.

$x \equiv 2 \ (mod\ 3)$............................. (i)

$x \equiv 3 \ (mod\ 4)$............................. (ii)

$x \equiv 4 \ (mod\ 5)$............................. (iii)

Jawab:

Dapat ditentukan bahwa

$(3,4) = 1$, $(3,5) = 1$, dan $(4,5) = 1$ sehingga kongruensi tersebut dapat diselesaikan.

$$x = \frac{(n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots n_r)y + \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots n_r}{n_i} a_i}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots n_r}{n_i}}$$

$$= \frac{(n_1 n_2 n_3)y + a_1 n_2 n_3 + a_2 n_1 n_3 + a_3 n_1 n_2}{n_2 n_3 + n_1 n_3 + n_2 n_3}$$

$$= \frac{(3 \cdot 4 \cdot 5)y + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4}$$

$x = \frac{(60)y+133}{47}$

$47x = 60y + 133$

$47x - 133 = 60y$

$60y = -133\ (mod\ 47)$

$60y = 8\ (mod\ 47)$

$13y = 8\ (mod\ 47)$

Karena kesulitan menentukan invers dari $13\ (mod\ 47)$, maka penulis mereduksi kongruensi tersebut dengan variabel yang berbeda sehingga dapat diperoleh suatu selesaian.

$13y = 8\ (mod\ 47)$

Terlebih dahulu perlu dicari $(13, 47)$ dengan Algoritma Euclides

$47 = 3 \cdot 13 + 8$

$13 = 1 \cdot 8 + 5$

$8 = 1 \cdot 5 + 3$

$5 = 1 \cdot 3 + 2$

$3 = 1 \cdot 2 + 1$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

Jadi, $(13, 47) = 1$, maka kongruensi linier tersebut mempunyai satu selesaian.

$47a = -8\ (mod\ 13)$

$8a = -8\ (mod\ 13)$

$13b = 8\ (mod\ 8)$

$5b = 8\ (mod\ 8)$

$8c = -8\ (mod\ 5)$

$$3c = -8 \ (mod\ 5)$$

$$2 \cdot 3c = 2 \cdot -18 \ (mod\ 5)$$

$$c = -16 \ (mod\ 5)$$

$$c = 4 \ (mod\ 5)$$

Jadi, $c = 4$

$$b = \frac{8 \cdot c + 8}{5} = \frac{8 \cdot 4 + 8}{5} = 8$$

$$a = \frac{13 \cdot b - 8}{8} = \frac{13 \cdot 8 - 8}{8} = 12$$

$$y = \frac{47 \cdot a + 8}{13} = \frac{47 \cdot 12 + 8}{13} = 44$$

Jadi $y = 44$, selanjutnya disubtitusikan pada persamaan

$$47x = 60y + 133$$

$$47x = 60 \cdot 44 + 133$$

$$47x = 2773$$

$$x = 59 \ (mod\ 60)$$

Sehingga selesaiannya adalah $x \equiv 59 \ (mod\ 60)$.

Atau dapat dikerjakan sebagai berikut:

$$x = \frac{(60)y + 133}{47}$$

$$47x = 60y + 133$$

$$47x = 133 \ (mod\ 60)$$

$$47x = 13 \ (mod\ 60)$$

$$60a = -13 \ (mod\ 47)$$

$$13a = -13 \ (mod\ 47)$$

$$47b = 13 \ (mod\ 13)$$

$$8b = 13 \ (mod \ 13)$$

$$13c = -13 \ (mod \ 8)$$

$$5c = -13 \ (mod \ 8)$$

$$3 \cdot 5c = 3 \cdot (-13) \ (mod \ 8)$$

$$-c = -39 \ (mod \ 8)$$

$$c = 39 \ (mod \ 8)$$

$$c = 7 \ (mod \ 8)$$

Jadi, $c = 7$

$$b = \frac{13 \cdot c + 13}{8} = \frac{13 \cdot 7 + 13}{8} = 13$$

$$a = \frac{47 \cdot b - 13}{13} = \frac{47 \cdot 13 - 13}{13} = 46$$

$$x = \frac{60 \cdot a + 13}{47} = \frac{60 \cdot 46 + 13}{47} = 59$$

Jadi $x = 59$

Sehingga selesaiannya adalah $x \equiv 59 \ (mod \ 60)$.

<u>Untuk 4 kongruensi linier</u>

1. Selesaikanlah kongruensi linier simultan berikut ini.

   $x \equiv 2 \ (mod \ 5)$.............................. (i)

   $x \equiv 3 \ (mod \ 7)$.............................. (ii)

   $x \equiv 4 \ (mod \ 9)$.............................. (iii)

   $x \equiv 5 \ (mod \ 11)$.............................(iv)

Jawab:

Dapat ditentukan bahwa

$(5,7) = 1$, $(5,9) = 1$, $(5,11) = 1$

$(7,9) = 1$, $(7,11) = 1$, $(9,11) = 1$

sehingga kongruensi tersebut dapat diselesaikan.

Dari kongruensi (i) dan (ii)

$$\begin{array}{l|l|l} x \equiv 2 \ (mod\ 5) & \text{x7} & 7x \equiv 14 \ (mod\ 35) \\ x \equiv 3 \ (mod\ 7) & \text{x5} & 5x \equiv 15 \ (mod\ 35) \\ \hline \end{array} +$$

Sehingga diperoleh

$(7 + 5)x \equiv 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \ (mod\ 35)$

$12x \equiv 29 \ (mod\ 35)$

$3 \cdot 12x \equiv 3 \cdot 29 \ (mod\ 35)$

$x \equiv 87 \ (mod\ 35)$.............................. (*)

Jika dikerjakan secara keterbagian maka diperoleh sebagai berikut:

$12x \equiv 29 \ (mod\ 35)$

$35 | (12x - 29)$

$35 | ((12x - 29) \cdot 3)$

$35 | (x - 3 \cdot 29)$

$x \equiv 3 \cdot 29 \ (mod\ 35)$

$x \equiv 87 \ (mod\ 35)$

$x \equiv 4 \ (mod\ 9)$.............................. (iii)

Dari kongruensi (*) dan (iii)

$$\begin{array}{l|l|l} x \equiv 87 \ (mod\ 35) & x9 & 9x \equiv 783 \ (mod\ 315) \\ x \equiv 4 \ (mod\ 9) & x35 & 35x \equiv 140 \ (mod\ 315) \\ \hline \end{array} +$$

Sehingga diperoleh

$(9+35)x \equiv 87 \cdot 9 + 4 \cdot 35 \ (mod\ 315)$

$44x \equiv 923 \ (mod\ 315)$

$179 \cdot 44x \equiv 179 \cdot 923 \ (mod\ 315)$

$x \equiv 165217 \ (mod\ 315)$

$x \equiv 157 \ (mod\ 315)$.............................. (**)

Jika dikerjakan secara keterbagian maka diperoleh sebagai berikut:

$44x \equiv 923 \ (mod\ 315)$

$315|(44x - 923)$

$315|((44x - 923) \cdot 179)$

$315|(x - 179 \cdot 923)$

$x \equiv 179 \cdot 923 \ (mod\ 315)$

$x \equiv 165217 \ (mod\ 315)$

$x \equiv 157 \ (mod\ 315)$

$x \equiv 5 \ (mod\ 11)$............................(iv)

Dari kongruensi (**) dan (iv)

$$\begin{array}{l|l|l} x \equiv 157 \ (mod\ 315) & x11 & 11x \equiv 1727 \ (mod\ 3465) \\ x \equiv 5 \ (mod\ 11) & x315 & 315x \equiv 1575 \ (mod\ 3465) \\ \hline \end{array} +$$

Sehingga diperoleh

$$(11 + 315)x \equiv 157 \cdot 11 + 5 \cdot 315 \; (mod\; 3465)$$

$$326x \equiv 3302 \; (mod\; 3465)$$

$$1031 \cdot 326x \equiv 1031 \cdot 3302 \; (mod\; 3465)$$

$$x \equiv 3404362 \; (mod\; 3465)$$

$$x \equiv 1732 \; (mod\; 3465)$$

Jika dikerjakan secara keterbagian maka diperoleh sebagai berikut:

$$326x \equiv 3302 \; (mod\; 3465)$$

$$3465|(326x - 3302)$$

$$3465\big|\big((326x - 3302) \cdot 1031\big)$$

$$3465|(x - 1031 \cdot 3302)$$

$$x \equiv 1031 \cdot 3302 \; (mod\; 3465)$$

$$x \equiv 3404362 \; (mod\; 3465)$$

$$x \equiv 1732 \; (mod\; 3465)$$

Untuk mengecek apakah jawaban tersebut benar, maka nilai x yang telah diperoleh disubtitusikan pada kongruensi semula yaitu:

$$x \equiv 2 \; (mod\; 5) \equiv 1732 \equiv 2 \; (mod\; 5)$$

$$x \equiv 3 \; (mod\; 7) \equiv 1732 \equiv 3 \; (mod\; 7)$$

$$x \equiv 4 \; (mod\; 9) \equiv 1732 \equiv 4 \; (mod\; 9)$$

$$x \equiv 5 \; (mod\; 11) \equiv 1732 \equiv 5 \; (mod\; 11)$$

2. Selesaikanlah kongruensi linier simultan berikut ini.

   $x \equiv 2\ (mod\ 5)$.............................. (i)

   $x \equiv 3\ (mod\ 7)$.............................. (ii)

   $x \equiv 4\ (mod\ 9)$.............................. (iii)

   $x \equiv 5\ (mod\ 11)$.............................(iv)

   Jawab:

   Dapat ditentukan bahwa

   $(5,7) = 1$, $(5,9) = 1$, $(5,11) = 1$

   $(7,9) = 1$, $(7,11) = 1$, $(9,11) = 1$

   sehingga kongruensi tersebut dapat diselesaikan.

$$x = \frac{(n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r)y + \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i} a_i}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i}}$$

$$= \frac{(n_1 n_2 n_3 n_4)y + a_1 n_2 n_3 n_4 + a_2 n_1 n_3 n_4 + a_3 n_1 n_2 n_4 + a_4 n_1 n_2 n_3}{n_2 n_3 n_4 + n_1 n_3 n_4 + n_1 n_2 n_4 + n_1 n_2 n_3}$$

$$= \frac{(5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11)y + 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 + 3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11 + 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{7 \cdot 9 \cdot 11 + 5 \cdot 9 \cdot 11 + 5 \cdot 7 \cdot 11 + 5 \cdot 7 \cdot 9}$$

$$x = \frac{(3465)y + 5986}{1888}$$

$$1888x = 3465y + 5986$$

$$1888x - 5986 = 3465y$$

$$3465y = -5986\ (mod\ 1888)$$

$$3465y = 1566\ (mod\ 1888)$$

$$1577y = 1566\ (mod\ 1888)$$

Karena kesulitan menentukan invers dari $1577\ (mod\ 1888)$, maka penulis mereduksi kongruensi tersebut dengan variabel yang berbeda sehingga dapat diperoleh suatu selesaian.

$1577y \equiv 1566\ (mod\ 1888)$

Terlebih dahulu perlu dicari $(1577, 1888)$ dengan Algoritma Euclides

$1888 = 1 \cdot 1577 + 311$

$1577 = 5 \cdot 311 + 22$

$311 = 1 \cdot 22 + 3$

$22 = 7 \cdot 3 + 1$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

Jadi, $(1577, 1888) = 1$, maka kongruensi linier tersebut mempunyai satu selesaian.

$1888a \equiv -1566\ (mod\ 1577)$

$311a \equiv -1566\ (mod\ 1577)$

$1577b \equiv 1566\ (mod\ 311)$

$22b \equiv 1566\ (mod\ 311)$

$311c \equiv -1566\ (mod\ 22)$

$3c \equiv -1566\ (mod\ 22)$

$7 \cdot 3c \equiv 7 \cdot (-1566)\ (mod\ 22)$

$21c \equiv -10962\ (mod\ 22)$

$-c \equiv -10962\ (mod\ 22)$

$c \equiv 10962\ (mod\ 22)$

$c \equiv 6\ (mod\ 22)$

Jadi, $c = 6$

$$b = \frac{311 \cdot c + 1566}{22} = \frac{311 \cdot 6 + 1566}{22} = 156$$

$$a = \frac{1577 \cdot b - 1566}{311} = \frac{1577 \cdot 156 - 1566}{311} = 786$$

$$y = \frac{1888 \cdot a + 1566}{1577} = \frac{1888 \cdot 786 + 1566}{1577} = 942$$

Jadi $y = 942$, selanjutnya disubtitusikan pada persamaan

$$1888x = 3465y + 5986$$

$$1888x = 3465 \cdot 942 + 5986$$

$$1888x = 3270016$$

$$x = 1732 \ (mod\ 3465)$$

Sehingga selesaiannya adalah $x \equiv 1732 \ (mod\ 3465)$.

Atau dapat dikerjakan sebagai berikut:

$$x = \frac{(3465)y + 5986}{1888}$$

$$1888x = 3465y + 5986$$

$$1888x = 5986 \ (mod\ 3465)$$

$$1888x = 2521 \ (mod\ 3465)$$

$$3465a = -2521 \ (mod\ 1888)$$

$$1577a = -2521 \ (mod\ 1888)$$

$$1888b = 2521 \ (mod\ 1577)$$

$$311b = 2521 \ (mod\ 1577)$$

$$1577c = -2521 \ (mod\ 311)$$

$$22c = -2521 \ (mod\ 311)$$

$$311d = 2521 \ (mod\ 22)$$

$$3d = 2521 \ (mod\ 22)$$

$$7 \cdot 3d = 7 \cdot 2521 \ (mod\ 22)$$

$$-d = 17647 \ (mod\ 22)$$

$$d = -17647 \ (mod\ 22)$$

$$d = 19 \ (mod\ 22)$$

Jadi, $d = 19$

$$c = \frac{311 \cdot d - 2521}{22} = \frac{311 \cdot 19 - 2521}{22} = 154$$

$$b = \frac{1577 \cdot c + 2521}{311} = \frac{1577 \cdot 154 + 2521}{311} = 789$$

$$a = \frac{1888 \cdot b - 2521}{1577} = \frac{1888 \cdot 789 - 2521}{1577} = 943$$

$$x = \frac{3465 \cdot a + 2521}{1888} = \frac{3465 \cdot 943 + 2521}{1888} = 1732$$

Jadi $x = 1732$

Sehingga selesaiannya adalah $x \equiv 1732 \ (mod\ 3465)$.

3.3 Cara Menyelesaikan Kongruensi Linier Simultan dengan Teorema Sisa China (*Chinese Remainder Theorem*)

Jika $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdots n_r \in$ Z, dan $(n_i, n_j) = 1$ untuk $i \neq j$, maka kongruensi linier simultan adalah sebagai berikut:

$$x \equiv a_1 (mod\ n_1)$$

$$x \equiv a_2 (mod\ n_2)$$

$$\vdots$$

$$x \equiv a_r (mod\ n_r)$$

dimana a_1, a_2, a_3,..., a_r adalah sebarang r bilangan bulat.

Mempunyai selesaian persekutuan yang tunggal :

$$x \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i} a_i b_i (mod\ [n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r])$$

Diketahui:

Misal $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdots n_r$

Karena $\frac{n}{n_i}(i = 1, 2, 3, \dots, r)$ adalah bilangan bulat yang tidak memuat n_i, serta $(n_i, n_j) = 1$ untuk $i \neq j$ maka $\left(\frac{n}{n_i}\right)b_i = 1$. Menurut dalil jika $\left(\frac{n}{n_i}, n_i\right) = 1$, maka kongruensi linear $\left(\frac{n}{n_i}\right)b_j \equiv 1 \text{ (mod } n_i)$ mempunyai 1 selesaian. Karena $\frac{n}{n_i}$ masih memuat n_i, maka untuk $i \neq j$ berlaku $\left(\frac{n}{n_i}\right)b_i \equiv 0 \text{ (mod } n_i)$. Dengan memilih

$$t = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{n_i} a_i b_i, \text{ maka:}$$

$$t = \frac{n}{n_1}a_1b_1 + \frac{n}{n_2}a_2b_2 + \dots + \frac{n}{n_i}a_ib_i + \dots + \frac{n}{n_r}a_rb_r$$

Dalam modulo $m_i(i = 1, 2, 3, \dots, r)$ t dapat dinyatakan dengan

$$t \equiv \left(\frac{n}{n_1}a_1b_1 + \frac{n}{n_2}a_2b_2 + \dots + \frac{n}{n_i}a_ib_i + \dots + \frac{n}{n_r}a_rb_r\right) \text{ (mod } n_i)$$

$$t \equiv \frac{n}{n_1}a_1b_1 \text{ (mod } n_i) + \frac{n}{n_2}a_2b_2 \text{ (mod } n_i) + \dots + \frac{n}{n_i}a_ib_i \text{ (mod } n_i) + \dots + \frac{n}{n_r}a_rb_r\text{) (mod } n_i)$$

Karena $\left(\frac{n}{n_i}\right)b_i \equiv 1 \pmod{n_i}$ dan untuk $i \neq j$ berlaku $\left(\frac{n}{n_i}\right)b_i \equiv 0 \pmod{n_i}$ maka diperoleh:

$$\frac{n}{n_1}b_1 \equiv 0 \pmod{n_i}$$

$$\frac{n}{n_2}b_2 \equiv 0 \pmod{n_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{n}{n_i}b_i \equiv 0 \pmod{n_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{n}{n_r}b_r \equiv 0 \pmod{n_i} \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \dots, r$$

Sehingga:

$$\frac{n}{n_1}a_1b_1 \equiv 0 \pmod{n_i}$$

$$\frac{n}{n_2}a_2b_2 \equiv 0 \pmod{n_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{n}{n_i}a_ib_i \equiv 0 \pmod{n_i}$$

$$\vdots$$

$$\frac{n}{n_r}a_rb_r \equiv 0 \pmod{n_i}$$

Jadi $t \equiv 0\ (mod\ n_i) + 0\ (mod\ n_i) + \cdots + a_i\ (mod\ n_i) + \cdots + 0\ (mod\ n_i)$

$t \equiv a_i\ (mod\ n_i)$

Karena $i = 1, 2, 3, \dots, r$ maka

$$t \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$$

$$t \equiv a_2 \ (mod\ n_2)$$

$$t \equiv a_3 \ (mod\ n_3)$$

$$\vdots$$

$$t \equiv a_r \ (mod\ n_r)$$

Hal ini berarti t memenuhi semua kongruensi $x \equiv a_i \ (mod\ n_i)$. Dengan kata lain t merupakan selesaian persekutuan dari semua kongruensi linear simultan tersebut.

Contoh:

1. $x \equiv 1 \ (mod\ 3)$............................ (i)

   $x \equiv 2 \ (mod\ 4)$............................ (ii)

   Jawab:

   Untuk menyelesaikan kongruensi di atas maka dicari nilai dari

   $$a_1 = 1, a_2 = 2$$

   $$n_1 = 3, n_2 = 4$$

   $$n = n_1 \cdot n_2 = 3 \cdot 4 = 12$$

   Maka dapat diketahui bahwa:

   $$(n_1, n_2) = (3,4) = 1$$

   Kemudian $\frac{n}{n_1} = \frac{12}{3} = 4 \in Z$

   $$\frac{n}{n_2} = \frac{12}{4} = 3 \in Z$$

Karena $\left(\frac{n}{n_1}, n_1\right) = (4,3) = 1$, maka ada $b_1 \in Z$ sehingga

$\left(\frac{n}{n_1}, n_1\right) = b_1 \,(\bmod\, n_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$4b_1 \equiv 1\ (mod\ 3)$

$b_1 \equiv 1\ (mod\ 3)$

Karena $\left(\frac{n}{n_2}, n_2\right) = (3,4) = 1$, maka ada $b_2 \in Z$ sehingga

$\left(\frac{n}{n_2}, n_2\right) = b_2 \,(\bmod\, n_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$3b_2 \equiv 1\ (mod\ 4)$

$b_2 \equiv 3\ (mod\ 4)$

Jika t dinyatakan dalam modulo n_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$\frac{n}{n_1} a_1 b_1 \equiv 4 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 4\ (mod\ 3) \equiv 1\ (mod\ 3)$

$\frac{n}{n_2} a_2 b_2 \equiv 3 \cdot 2 \cdot 3 \equiv 18\ (mod\ 3) \equiv 0\ (mod\ 3)$

$\equiv 1\ (mod\ n_1) + 0\ (mod\ n_1)$

$\equiv 1\ (mod\ n_1)$

$t \equiv a_1\ (mod\ n_1)$

Jika t dinyatakan dalam modulo n_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$\frac{n}{n_1} a_1 b_1 \equiv 4 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 4\ (mod\ 4) \equiv 0\ (mod\ 4)$

$\frac{n}{n_2} a_2 b_2 \equiv 3 \cdot 2 \cdot 3 \equiv 18\ (mod\ 4) \equiv 2\ (mod\ 4)$

$\equiv 0\ (mod\ n_2) + 2\ (mod\ n_2)$

$\equiv 2 \ (mod \ n_2)$

$t \equiv a_2 \ (mod \ n_2)$

Ternyata t memenuhi kongruensi linier pertama dan kedua, sehingga t merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Jadi, $x \equiv \frac{n}{n_1} \cdot a_1 \cdot b_1 + \frac{n}{n_2} \cdot a_2 \cdot b_2 \ (mod \ 12)$

$\equiv 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3 \ (mod \ 12)$

$\equiv 4 + 18 \ (mod \ 12)$

$\equiv 22 \ (mod \ 12)$

$\equiv 10 \ (mod \ 12)$

2. $x \equiv 2 \ (mod \ 3)$............................ (i)

   $x \equiv 3 \ (mod \ 4)$............................ (ii)

   $x \equiv 4 \ (mod \ 5)$............................ (iii)

   Jawab:

   Untuk menyelesaikan kongruensi di atas maka dicari nilai dari

   $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4$

   $n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 5$

   $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$

   Maka dapat diketahui bahwa:

   $(n_1, n_2) = (3,4) = 1$

   $(n_1, n_3) = (3,5) = 1$

   $(n_2, n_3) = (4,5) = 1$

Kemudian $\frac{n}{n_1} = \frac{60}{3} = 20 \in Z$

$\frac{n}{n_2} = \frac{60}{4} = 15 \in Z$

$\frac{n}{n_3} = \frac{60}{5} = 12 \in Z$

Karena $\left(\frac{n}{n_1}, n_1\right) = (20,3) = 1$, maka ada $b_1 \in Z$ sehingga

$\left(\frac{n}{n_1}, n_1\right) = b_1 (\bmod n_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$20b_1 \equiv 1 \ (mod\ 3)$

$b_1 \equiv 2 \ (mod\ 3)$

Karena $\left(\frac{n}{n_2}, n_2\right) = (15,4) = 1$, maka ada $b_2 \in Z$ sehingga

$\left(\frac{n}{n_2}, n_2\right) = b_2 (\bmod n_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$15b_2 \equiv 1 \ (mod\ 4)$

$b_2 \equiv 3 \ (mod\ 4)$

Karena $\left(\frac{n}{n_3}, n_3\right) = (12,5) = 1$, maka ada $b_3 \in Z$ sehingga

$\left(\frac{n}{n_3}, n_3\right) = b_3 (\bmod n_3)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$12b_3 \equiv 1 \ (mod\ 5)$

$b_3 \equiv 3 \ (mod\ 5)$

Jika t dinyatakan dalam modulo n_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$\frac{n}{n_1}a_1b_1 \equiv 20 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 80\ (mod\ 3) \equiv 2\ (mod\ 3)$

$\frac{n}{n_2}a_2b_2 \equiv 15 \cdot 3 \cdot 3 \equiv 135\ (mod\ 3) \equiv 0\ (mod\ 3)$

$\frac{n}{n_3}a_3b_3 \equiv 12 \cdot 3 \cdot 4 \equiv 144\ (mod\ 3) \equiv 0\ (mod\ 3)$

$\equiv 2\ (mod\ n_1) + 0\ (mod\ n_1) + 0(mod\ n_1)$

$\equiv 2\ (mod\ n_1)$

$t \equiv a_1\ (mod\ n_1)$

Jika t dinyatakan dalam modulo n_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$\frac{n}{n_1}a_1b_1 \equiv 20 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 80\ (mod\ 3) \equiv 0\ (mod\ 4)$

$\frac{n}{n_2}a_2b_2 \equiv 15 \cdot 3 \cdot 3 \equiv 135\ (mod\ 3) \equiv 3\ (mod\ 4)$

$\frac{n}{n_3}a_3b_3 \equiv 12 \cdot 3 \cdot 4 \equiv 144\ (mod\ 3) \equiv 0\ (mod\ 3)$

$\equiv 0\ (mod\ n_2) + 3\ (mod\ n_2) + 0(mod\ n_2)$

$\equiv 3\ (mod\ n_2)$

$t \equiv a_2\ (mod\ n_2)$

Jika t dinyatakan dalam modulo n_3, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$\frac{n}{n_1}a_1b_1 \equiv 20 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 80\ (mod\ 3) \equiv 0\ (mod\ 5)$

$\frac{n}{n_2}a_2b_2 \equiv 15 \cdot 3 \cdot 3 \equiv 135\ (mod\ 3) \equiv 0\ (mod\ 5)$

$\frac{n}{n_3}a_3b_3 \equiv 12 \cdot 3 \cdot 4 \equiv 144\ (mod\ 3) \equiv 4\ (mod\ 5)$

$\equiv 0\ (mod\ n_3) + 0\ (mod\ n_3) + 4\ (mod\ n_3)$

$\equiv 4\ (mod\ n_3)$

$t \equiv a_3\ (mod\ n_3)$

Ternyata t memenuhi kongruensi linier pertama dan kedua, sehingga t merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Jadi, $x \equiv \frac{n}{n_1} \cdot a_1 \cdot b_1 + \frac{n}{n_2} \cdot a_2 \cdot b_2 + \frac{n}{n_3} \cdot a_3 \cdot b_3 \ (mod\ 60)$

$\equiv 20 \cdot 2 \cdot 2 + 15 \cdot 3 \cdot 3 + 12 \cdot 3 \cdot 4 \ (mod\ 60)$

$\equiv 80 + 135 + 144 \ (mod\ 60)$

$\equiv 359 \ (mod\ 60)$

$\equiv 59 \ (mod\ 60)$

3. $x \equiv 2 \ (mod\ 5)$.............................. (i)

   $x \equiv 3 \ (mod\ 7)$.............................. (ii)

   $x \equiv 4 \ (mod\ 9)$.............................. (iii)

   $x \equiv 5 \ (mod\ 11)$............................(iv)

   Jawab:

   Untuk menyelesaikan kongruensi di atas maka dicari nilai dari

   $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5$

   $n_1 = 5, n_2 = 7, n_3 = 9, n_4 = 11$

   $n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 3465$

   Maka dapat diketahui bahwa:

   $(n_1, n_2) = (5,7) = 1$ $\quad$ $(n_2, n_3) = (7,9) = 1$

   $(n_1, n_3) = (5,9) = 1$ $\quad$ $(n_2, n_4) = (7,11) = 1$

   $(n_1, n_4) = (5,11) = 1$ $\quad$ $(n_3, n_4) = (9,11) = 1$

Kemudian $\frac{n}{n_1} = \frac{3465}{5} = 693 \in Z$ $\quad \frac{n}{n_3} = \frac{3465}{9} = 385 \in Z$

$\frac{n}{n_2} = \frac{3465}{7} = 495 \in Z$ $\quad \frac{n}{n_4} = \frac{3465}{11} = 315 \in Z$

Karena $\left(\frac{n}{n_1}, n_1\right) = (693, 5) = 1$, maka ada $b_1 \in Z$ sehingga

$\left(\frac{n}{n_1}, n_1\right) = b_1 (\bmod n_1)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$693 b_1 \equiv 1 \ (mod\ 5)$

$3 b_1 \equiv 1 \ (mod\ 5)$

$b_1 \equiv 2 \ (mod\ 5)$

Karena $\left(\frac{n}{n_2}, n_2\right) = (495, 7) = 1$, maka ada $b_2 \in Z$ sehingga

$\left(\frac{n}{n_2}, n_2\right) = b_2 (\bmod n_2)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$495 b_2 \equiv 1 \ (mod\ 7)$

$5 b_2 \equiv 1 \ (mod\ 7)$

$b_2 \equiv 3 \ (mod\ 7)$

Karena $\left(\frac{n}{n_3}, n_3\right) = (385, 9) = 1$, maka ada $b_3 \in Z$ sehingga

$\left(\frac{n}{n_3}, n_3\right) = b_3 (\bmod n_3)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$385 b_3 \equiv 1 \ (mod\ 9)$

$7 b_3 \equiv 1 \ (mod\ 9)$

$b_3 \equiv 4 \ (mod\ 9)$

Karena $\left(\frac{n}{n_4}, n_4\right) = (315,11) = 1$, maka ada $b_4 \in Z$ sehingga

$\left(\frac{n}{n_4}, n_4\right) = b_4 (\text{mod}\, n_4)$ mempunyai satu selesaian yaitu

$315b_4 \equiv 1 \ (mod\ 11)$

$7b_4 \equiv 1 \ (mod\ 11)$

$b_4 \equiv 8 \ (mod\ 11)$

Jika t dinyatakan dalam modulo n_1, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$\frac{n}{n_1} a_1 b_1 \equiv 693 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 2772 \ (mod\ 5) \equiv 2 \ (mod\ 5)$

$\frac{n}{n_2} a_2 b_2 \equiv 495 \cdot 3 \cdot 3 \equiv 4455 \ (mod\ 5) \equiv 0 \ (mod\ 5)$

$\frac{n}{n_3} a_3 b_3 \equiv 385 \cdot 4 \cdot 4 \equiv 6160 \ (mod\ 5) \equiv 0 \ (mod\ 5)$

$\frac{n}{n_4} a_4 b_4 \equiv 315 \cdot 8 \cdot 5 \equiv 12600 \ (mod\ 5) \equiv 0 \ (mod\ 5)$

$\equiv 2 \ (mod\ n_1) + 0 \ (mod\ n_1) + 0 \ (mod\ n_1) + 0 (mod\ n_1)$

$\equiv 2 \ (mod\ n_1)$

$t \equiv a_1 \ (mod\ n_1)$

Jika t dinyatakan dalam modulo n_2, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$\frac{n}{n_1} a_1 b_1 \equiv 693 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 2772 \ (mod\ 7) \equiv 0 \ (mod\ 7)$

$\frac{n}{n_2} a_2 b_2 \equiv 495 \cdot 3 \cdot 3 \equiv 4455 \ (mod\ 7) \equiv 3 \ (mod\ 7)$

$\frac{n}{n_3} a_3 b_3 \equiv 385 \cdot 4 \cdot 4 \equiv 6160 \ (mod\ 7) \equiv 0 \ (mod\ 7)$

$\frac{n}{n_4} a_4 b_4 \equiv 315 \cdot 8 \cdot 5 \equiv 12600 \ (mod\ 7) \equiv 0 \ (mod\ 7)$

$\equiv 0\ (mod\ n_2) + 3\ (mod\ n_2) + 0\ (mod\ n_2) + 0\ (mod\ n_2)$

$\equiv 3\ (mod\ n_2)$

$t \equiv a_2\ (mod\ n_2)$

Jika t dinyatakan dalam modulo n_3, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$\frac{n}{n_1} a_1 b_1 \equiv 693 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 2772\ (mod\ 9) \equiv 0\ (mod\ 9)$

$\frac{n}{n_2} a_2 b_2 \equiv 495 \cdot 3 \cdot 3 \equiv 4455\ (mod\ 9) \equiv 0\ (mod\ 9)$

$\frac{n}{n_3} a_3 b_3 \equiv 385 \cdot 4 \cdot 4 \equiv 6160\ (mod\ 9) \equiv 4\ (mod\ 9)$

$\frac{n}{n_4} a_4 b_4 \equiv 315 \cdot 8 \cdot 5 \equiv 12600\ (mod\ 9) \equiv 0\ (mod\ 9)$

$\equiv 0\ (mod\ n_3) + 0\ (mod\ n_3) + 4\ (mod\ n_3) + 0\ (mod\ n_3)$

$\equiv 4\ (mod\ n_3)$

$t \equiv a_3\ (mod\ n_3)$

Jika t dinyatakan dalam modulo n_4, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$\frac{n}{n_1} a_1 b_1 \equiv 693 \cdot 2 \cdot 2 \equiv 2772\ (mod\ 11) \equiv 0\ (mod\ 11)$

$\frac{n}{n_2} a_2 b_2 \equiv 495 \cdot 3 \cdot 3 \equiv 4455\ (mod\ 11) \equiv 0\ (mod\ 11)$

$\frac{n}{n_3} a_3 b_3 \equiv 385 \cdot 4 \cdot 4 \equiv 6160\ (mod\ 11) \equiv 0\ (mod\ 11)$

$\frac{n}{n_4} a_4 b_4 \equiv 315 \cdot 8 \cdot 5 \equiv 12600\ (mod\ 11) \equiv 5\ (mod\ 11)$

$\equiv 0\ (mod\ n_4) + 0\ (mod\ n_4) + 0\ (mod\ n_4) + 5\ (mod\ n_4)$

$\equiv 5\ (mod\ n_4)$

$t \equiv a_4\ (mod\ n_4)$

Ternyata t memenuhi kongruensi linier pertama dan kedua, sehingga t merupakan selesaian persekutuan yang secara simultan memenuhi semua kongruensi.

Jadi, $x \equiv \frac{n}{n_1} \cdot a_1 \cdot b_1 + \frac{n}{n_2} \cdot a_2 \cdot b_2 + \frac{n}{n_3} \cdot a_3 \cdot b_3 + \frac{n}{n_4} \cdot a_4 \cdot b_4 (mod\ 3465)$

$$\equiv 693 \cdot 2 \cdot 2 + 495 \cdot 3 \cdot 3 + 385 \cdot 4 \cdot 4 + 315 \cdot 8 \cdot 5\ (mod\ 3465)$$

$$\equiv 2772 + 4455 + 6160 + 12600\ (mod\ 3465)$$

$$\equiv 25987\ (mod\ 3465)$$

$$\equiv 1732\ (mod\ 3465)$$

1.4 Perbandingan Menyelesaikan Kongruensi Linier Simultan Satu Variabel secara Rekursif dan Teorema Sisa China (*Chinese Remainder Theorem*)

Rekursif:

a. Selesaian mempunyai bentuk umum

$$x = \frac{(n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r)y + \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i} a_i}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i}}$$

b. Memuat adanya langkah atau proses berulang.

c. Tanpa mencari KPK dari semua kongruensi.

d. Lebih sulit dalam menentukan invers suatu kongruensi.

e. Menjadi semakin sulit dan tidak efisien jika banyaknya kongruensi linier bertambah banyak dengan bilangan yang besar.

f. Mempunyai syarat setiap dua modulo dari kongruensi linier harus relatif prima.

Teorema Sisa China:

a. Selesaian mempunyai bentuk umum

$$x \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i} a_i b_i (mod\ [n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r])$$

b. Tidak memuat adanya langkah atau proses berulang.

c. Mencari KPK dari semua kongruensi.

d. Lebih mudah dalam menentukan invers.

e. Tetap efisien jika banyaknya kongruensi linier bertambah banyak meskipun dengan bilangan yang besar.

g. Mempunyai syarat setiap dua modulo dari kongruensi linier harus relatif prima.

Dari beberapa perbedaan di atas dapat disimpulkan bahwa teorema sisa China adalah metode yang lebih efisien dalam menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel daripada secara rekursif.

3.5 Kongruensi Linier Simultan dalam Pandangan Islam

Islam adalah agama yang mengatasi dan melintasi waktu, karena sistem nilai yang ada di dalamnya adalah mutlak. Kebenaran nilai Islam bukan hanya untuk masa dahulu, tetapi juga untuk masa sekarang bahkan masa yang akan datang, sehingga nilai-nilai dalam Islam berlaku sepanjang masa. Dalam penelitian ini, juga terdapat beberapa kajian ilmu matematika khususnya ilmu Teori Bilangan, yaitu mengenai kajian kongruensi linier simultan satu variabel. Berdasarkan pembahasan, dapat diketahui bahwa terdapat beberapa tahapan atau proses dalam menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel adalah bertujuan untuk mempermudah dalam menyelesaikan kongruensi linier tersebut. Jika dikaitkan dengan agama Islam, hal ini dapat direlevansikan dengan Al Qur'an yang menyebutkan bahwa Al Qur'an diturunkan untuk mempermudah. Sebagaimana yang tertera pada surat At Thaahaa ayat 2-3:

مَآ أَنزَلۡنَا عَلَيۡكَ ٱلۡقُرۡءَانَ لِتَشۡقَىٰٓ ﴿٢﴾ إِلَّا تَذۡكِرَةٗ لِّمَن يَخۡشَىٰ ﴿٣﴾

Artinya: Kami tidak menurunkan Al Quran ini kepadamu agar kamu menjadi susah. Tetapi sebagai peringatan bagi orang yang takut (kepada Allah) (Q.S At Thaahaa:2-3).

Ayat di atas menceritakan bahwa Allah SWT tidaklah membuat kesusahan dengan diturunkannya Al Qur'an, tetapi Allah SWT menurunkan Al Qur'an sebagai kemudahan untuk memberi peringatan kepada manusia. Seperti yang telah dijelaskan dalam bab-bab sebelumnya bahwa dalam menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel terdapat banyak tahapan. Allah berfirman dalam surat Al Baqarah ayat 177:

لَّيۡسَ ٱلۡبِرَّ أَن تُوَلُّواْ وُجُوهَكُمۡ قِبَلَ ٱلۡمَشۡرِقِ وَٱلۡمَغۡرِبِ وَلَٰكِنَّ ٱلۡبِرَّ مَنۡ ءَامَنَ بِٱللَّهِ وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِ وَٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ وَٱلۡكِتَٰبِ وَٱلنَّبِيِّـۧنَ وَءَاتَى ٱلۡمَالَ عَلَىٰ حُبِّهِۦ ذَوِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡيَتَٰمَىٰ وَٱلۡمَسَٰكِينَ وَٱبۡنَ ٱلسَّبِيلِ وَٱلسَّآئِلِينَ وَفِي ٱلرِّقَابِ وَأَقَامَ ٱلصَّلَوٰةَ وَءَاتَى ٱلزَّكَوٰةَ وَٱلۡمُوفُونَ بِعَهۡدِهِمۡ إِذَا عَٰهَدُواْۖ وَٱلصَّٰبِرِينَ فِي ٱلۡبَأۡسَآءِ وَٱلضَّرَّآءِ وَحِينَ ٱلۡبَأۡسِۗ أُوْلَٰٓئِكَ ٱلَّذِينَ صَدَقُواْۖ وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمُ ٱلۡمُتَّقُونَ ﴿١٧٧﴾

Artinya: Bukanlah menghadapkan wajahmu ke arah timur dan barat itu suatu kebajikan, akan tetapi sesungguhnya kebajikan itu ialah beriman kepada Allah, hari kemudian, malaikat-malaikat, kitab-kitab, nabi-nabi dan memberikan harta yang dicintainya kepada kerabatnya, anak-anak yatim, orang-orang miskin, musafir (yang memerlukan pertolongan) dan orang-orang yang meminta-minta, dan memerdekakan hamba sahaya, mendirikan sholat, dan menunaikan zakat, dan orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji, dan orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan, mereka ialah orang-orang yang benar (imannya), dan mereka itulah orang-orang yang bertaqwa (Q.S. Al Baqoroh:177).

Adapun yang dimaksud orang-orang beriman dalam ayat tersebut adalah sebagai berikut:

1. Beriman kepada hari kemudian, malaikat-malaikat, kitab-kitab, dan nabi-nabi.
2. Memberikan harta yang dicintainya kepada kerabatnya, anak-anak yatim, orang-orang miskin, musafir, dan orang-orang yang meminta-minta.
3. Mendirikan sholat, artinya menyempurnakan pelaksanaan amalan shalat secara tepat waktu dengan rukun sesuai dengan yang disyari'atkan dan diridhai.
4. Menunaikan zakat, artinya penyucian diri dari akhlak tercela.
5. Orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji.
6. Orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan, dan dalam peperangan.

Dari ayat diatas dapat diambil sebuah pelajaran penting tentang Allah SWT itu Maha Kuasa lagi Maha Pengasih. Untuk menjadi seorang yang beriman, Allah SWT memberi kesempatan bahwa banyak jalan untuk menuju menjadi orang yang beriman. Allah SWT juga menunjukkan bermacam-macam tanda-

tanda kekuasaan-Nya. Dan segala macam-macam tanda-tanda itu akan berguna bagi kaum yang memikirkannya.

Jika tanda-tanda orang beriman tersebut diaplikasikan pada kongruensi linier simultan adalah sebagai berikut:

$x \equiv$ Beriman kepada hari kemudian, malaikat-malaikat, kitab-kitab, dan nabi-nabi.

$x \equiv$ Menunaikan zakat, artinya penyucian diri dari akhlak tercela.

$x \equiv$ Orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji.

⋮

$x \equiv$ Orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan, dan dalam peperangan.

Maka x akan memiliki solusi bersama yaitu orang yang masuk surga satu sama lain.

Dalam suatu hadits yang diriwayatkan oleh Bukhari dan Muslim menjelaskan bahwa:

عَنْ أَبِي عَبْدِ الرَّحْمَنِ عَبْدِ اللهِ بنِ مَسْعُوْدٍ رَضِيَ اللهُ عَنْهُ قَالَ : حَدَّثَنَا رَسُوْلُ اللهِ صلى الله عليه وسلم وَهُوَ الصَّادِقُ الْمَصْدُوْقُ : إِنَّ أَحَدَكُمْ يُجْمَعُ خَلْقُهُ فِي بَطْنِ أُمِّهِ أَرْبَعِيْنَ يَوْماً نُطْفَةً، ثُمَّ يَكُوْنُ عَلَقَةً مِثْلَ ذَلِكَ، ثُمَّ يَكُوْنُ مُضْغَةً مِثْلَ ذَلِكَ، ثُمَّ يُرْسَلُ إِلَيْهِ الْمَلَكُ فَيَنْفُخُ فِيْهِ الرُّوْحَ، وَيُؤْمَرُ بِأَرْبَعِ كَلِمَاتٍ: بِكَتْبِ رِزْقِهِ وَأَجَلِهِ وَعَمَلِهِ وَشَقِيٌّ أَوْ سَعِيْدٌ. فَوَ اللهِ الَّذِي لاَ إِلَهَ غَيْرُهُ إِنَّ أَحَدَكُمْ لَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ الْجَنَّةِ حَتَّى مَا يَكُوْنُ بَيْنَهُ وَبَيْنَهَا إِلاَّ ذِرَاعٌ فَيَسْبِقُ عَلَيْهِ الْكِتَابُ فَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ النَّارِ فَيَدْخُلُهَا، وَإِنَّ أَحَدَكُمْ لَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ النَّارِ حَتَّى مَا يَكُوْنُ بَيْنَهُ وَبَيْنَهَا إِلاَّ ذِرَاعٌ فَيَسْبِقُ عَلَيْهِ الْكِتَابُ فَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ الْجَنَّةِ فَيَدْخُلُهَا.

Artinya: Dari Abu Abdurrahman Abdullah bin Mas'ud radiallahuanhu beliau berkata: Rasulullah Shallallahu'alaihi wasallam menyampaikan kepada kami dan beliau adalah orang yang benar dan dibenarkan: Sesungguhnya setiap kalian dikumpulkan penciptaannya di perut ibunya sebagai setetes mani selama empat puluh hari, kemudian berubah menjadi setetes darah selama empat puluh hari, kemudian menjadi segumpal daging selama empat puluh hari. Kemudian di utus kepadanya seorang malaikat lalu ditiupkan padanya ruh dan dia diperintahkan untuk menetapkan empat perkara: menetapkan rizkinya, ajalnya, amalnya dan kecelakaan atau kebahagiaannya. Demi Allah yang tidak ada Ilah selain-Nya, sesungguhnya di antara kalian ada yang melakukan perbuatan ahli surga hingga jarak antara dirinya dan surga tinggal sehasta akan tetapi telah ditetapkan baginya ketentuan, dia melakukan perbuatan ahli neraka maka masuklah dia ke dalam neraka. sesungguhnya di antara kalian ada yang melakukan perbuatan ahli neraka hingga jarak antara dirinya dan neraka tinggal sehasta akan tetapi telah ditetapkan baginya ketentuan, dia melakukan perbuatan ahli surga maka masuklah dia ke dalam surga (HR. Bukhori dan Muslim).

Hadits ini sangat agung, memuat kondisi manusia mulai dari awal penciptaannya, kehidupannya di dunia hingga kondisinya yang terakhir di negeri keabadian akhirat, baik di kampung kebahagiaan (surga) maupun di kampung penderitaan (neraka). Semuanya berjalan sesuai ketentuan Allah.

Jadi dalam surat An Nahl ayat 11 dan surat At Thaahaa ayat 2-3 serta hadits tersebut sangat relevan jika dikaitkan dengan menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel. Begitu juga dengan Allah SWT yang menunjukkan banyak hal untuk menunjukkan kekuasaan-Nya dan banyak hal juga untuk menjadi orang yang beriman disisi Allah SWT.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

a. Cara Rekursif

Secara bertahap kongruensi linier pertama dan kedua diselesaikan terlebih dahulu sehingga diperoleh selesaian dari dua kongruensi tersebut. Berikutnya kongruensi linier ketiga diselesaikan dengan selesaian dari kongruensi pertama dan kedua. Demikian seterusnya sehingga pada tahapan tertentu dapat diperoleh suatu selesaian, dan dari selesaian yang diperoleh dapat diproses mundur sehingga diperoleh selesaian dari kongruensi linier simultan secara rekursif yaitu

$$x = \frac{(n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r)y + \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i} a_i}{\sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \dots n_r}{n_i}}$$

b. Teorema Sisa China

Mencari KPK dari masing-masing kongruensi linier. Jika banyaknya kongruensi linier dalam sistem yang simultan lebih dari dua, maka penyelidikan dapat dilakukan untuk semua pasangan kongruensi. Demikian pula dapat ditentukan, jika $(n_1, n_2) = 1$, maka sistem kongruensi linier simultan dapat diselesaikan. Sehingga selesaian dari kongruensi linier simultan dengan teorema sisa china yaitu

$$x \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots n_r}{n_i} a_i b_i (mod\ [n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots n_r])$$

Dari kedua cara tersebut, teorema sisa china adalah cara yang lebih efisien dalam menyelesaikan kongruensi linier simultan daripada cara rekursif.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan menyelesaikan kongruensi linier simultan satu variabel secara rekursif dan teorema sisa china serta perbandingan dari kedua metode tersebut. Maka dari itu, untuk penulis selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji menyelesaikan kongruensi simultan satu variabel non linier atau menyelesaikan kongruensi linier simultan yang modulonya tidak relatif prima.

DAFTAR PUSTAKA

Dumairy. 1999. *Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: Anggota IKAPI.

Erawaty, Nur. 2009. *Teori Bilangan*. Makassar: Univ. Hasanuddin Press.

Era Wati, Kurnia. 2009. *Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linier*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Everest. 1963. *An Introduction to the Theory of Numbers*. New York: University of New Hampshire.

Marhan, Taufik. 2001. *Pengantar Teori Bilangan*. Malang: UMM Press.

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Dasar-dasar Teori Bilangan*. Malang: IKIP Malang.

Nata, Abuddin. 2001. *Peta Keragaman Pemikiran Islam di Indonesia*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada.

Niven, I, Zuckerman, HS Montgomery, HL. 1999. *An Introduction to The Theory of Number*. Canada: John Willey & Sun Inc.

Roziana, Dewi Farida. 2008. *Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Difusi Konveksi*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Salima, Siti Ika Novita. 2004. *Menentukan Selesaian Sistem Kongruensi Linier n-Peubah*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Shabuny, AlyAsh. 1984. *Pengantar Study Al-Qur'an*. Bandung: PT Al Ma'arif.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al Misbah*. Ciputat: Lentera Hati.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345
Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Madinatuz Zuhroh**
Nim : **07610004**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi : **Menyelesaikan Kongruensi Linier Simultan Satu Variabel**
Pembimbing I : **Abdussakir, M.Pd**
Pembimbing II : **Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag**

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan	
1	04 Oktober 2010	Konsultasi Masalah	1.	
2	06 Oktober 2010	Konsultasi BAB I, II		2.
3	13 Oktober 2010	Konsultasi Agama BAB I, II	3.	
4	22 Oktober 2010	Revisi BAB I, II		4.
5	27 Oktober 2010	Revisi Agama BAB I, II	5.	
6	04 Nopember 2010	Konsultasi BAB III		6.
7	08 Nopember 2010	Kosultasi Agama BAB III	7.	
8	16 Nopember 2010	Revisi Agama BAB III		8.
9	10 Desember 2010	Revisi BAB III	9.	
10	05 Pebruari 2011	Revisi BAB III		10.
11	21 Pebruari 2011	Konsultasi BAB I, II, III, IV	11.	
12	22 Pebruari 2011	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 22 Pebruari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001