KAJIAN ISOMORFISME GRUP PADA SUBGRUP NORMAL

SKRIPSI

Oleh:
SITI MASLAHATUL UMAH
NIM: 04510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2009

KAJIAN ISOMORFISME GRUP PADA SUBGRUP NORMAL

SKRIPSI

Oleh:
SITI MASLAHATUL UMAH
NIM: 04510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2009

KAJIAN ISOMORFISME GRUP PADA SUBGRUP NORMAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri(UIN)
Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SITI MASLAHATUL UMAH
NIM 04510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2009

KAJIAN ISOMORFISME GRUP PADA SUBGRUP NORMAL

SKRIPSI

Oleh:
SITI MASLAHATUL UMAH
NIM 04510006

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 25 Juli 2009

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
<u>Evawati Alisah, M.Pd</u>	**<u>Munirul Abidin, M.Ag</u>**
NIP: 150 291 271	**NIP. 150 321 634**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M. Si</u>
NIP 150 318 321

KAJIAN ISOMORFISME GRUP PADA SUBGRUP NORMAL

SKRIPSI

Oleh:
SITI MASLAHATUL UMAH
NIM 04510006

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

28 Juli 2009

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: **Usman Pagalay, M.Si** **NIP: 150 327 240**	( )
2. Ketua	: **Wahyu H. Irawan, M. Pd** **NIP: 150 300 415**	( )
3. Sekretaris	: **Evawati Alisah, M.Pd** **NIP: 150 291 271**	( )
4. Anggota	: **Munirul Abidin M. Ag** **NIP: 150 321 634**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harina, M.Si
NIP: 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : SITI MASLAHATUL UMAH

NIM : 04510006

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juli 2009

Yang membuat pernyataan

Siti Maslahatul Umah

NIM. 04510006

Motto:

"Menjadi Orang Penting Itu Baik, Tetapi Lebih Penting Menjadi Orang Baik."

PERSEMBAHAN

Karya besar ini kupersembahkan kepada:

Ayahanda Achmad Fauzan dan ibunda Siti Iftichah tercinta. Ayah, karena perasan keringatmulah ananda bisa memperoleh kesempatan untuk menjelajahi dunia keilmuan setinggi ini. Dan karena doamu Ibu, ananda bisa mewujudkan cita-cita ananda. ananda sangat berterimakasih kepada kalian berdua.

Suamiku, Choirul Mufatichin yang memberikanku warna-warni kehidupan, terima kasih. Jadilah sahabat tuk seumur hidupku. Dambaan hatiku. Penggerak jiwaku yang kaku.

Puteraku Achmad Rizqy Maulana yang menjadi buah hatiku, mutiara hatiku, belahan jiwaku. Harapan hidupku. Masa depan jiwaku.

Kakak-kakakku; Mas Dol, Mba' Saroh, Mba' Mud, Mas Gufron Lek Muh, Mbak bibah n mbak luluk. Yang selalu memberiku motivasi tulus agar aku dapat mengasihi diri sendiri dan menatap lebih baik n seluruh keluargaku…

Orang-orang yang menyayangiku tanpa jera atas segala kasihnya

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Ibu Evawati Alisah, M.Pd yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang matematika.
5. Bapak Munirul Abidin, M.Ag yang telah bersedia memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang agama.
6. Segenap dosen pengajar terutama bapak Henky, atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
7. Kedua orang tua tercinta. Achmad Fauzan dan Siti Iftichah yang selalu mendidik, mencintai serta selalu menjadi motivator terbaik bagi penulis baik materi maupun spiritual.

8. Achmad Rizqy Maulana Puteraku dan Choirul Mufatichin suamiku, kalian berdualah lentera hati yang selalu menerangi dan menemani di setiap langkah perjalanan hidupku
9. Mas Dol, Mbk Saroh, Mbak Mud, Mas Gufron dan Segenap keluarga yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.
10. Bapak dan Ibu Narko yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.
11. Lutfi, Nurul Aminah, Ella, dan Ningsih atas kebersamaan, tawa dan kebahagiaan serta semangatnya.
12. Dian, ririn dan denok yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.
13. Teman-teman Matematika, terutama angkatan 2004, atas pengalaman berharga dan hal-hal baru, semoga kita selalu diberikan jalan yang terbaik.
14. Tidak ketinggalan pula semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amien.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 25 Juli 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Umah, Siti Maslahatul. 2009. ***Kajian Isomorfisme Grup Pada Subgrup Normal.*** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (1) Evawati Alisah, M.Pd
(2) Munirul Abidin, M.Ag

Kata kunci: *Grup, Isomorfisme Grup, Graf, Subgrup Normal.*

Aljabar Abstrak merupakan salah satu cabang matemátika yang di dalamnya terdapat bahasan mengenai grup. Grup adalah sistem aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Grup G isomorfik dengan $G^{'}$ jika terdapat suatu pemetaan $\phi : G \rightarrow G^{'}$ yang bersifat homomorfisma dan bijektif. Salah satu Isomorfisme grup yang menarik yaitu isomorfisme grup pada subgrup normal. Berdasarkan latar belakang tersebut, maka dalam skripsi ini penulis akan membahas tentang isomorfisme grup pada subgrup normal.

Dalam pembahasan skripsi ini, penulis mendeskripsikan tentang subgrup normal dan isomorfisme grup pada subgrup normal. Dari hasil pembahasan, diperoleh bahwa irisan dari dua buah subgrup normal adalah normal, yakni dengan menggunakan contoh M_{12}.

Hal-hal yang dibahas dalam skripsi ini hanya sebagian kecil dari isomorfisme grup pada subgrup normal. Oleh karena itu, diharapkan kepada para penulis yang lain untuk mengadakan penelitian secara lebih mendalam mengenai isomorfisme grup pada subgrup normal dengan mencari sifat-sifat yang lain.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Catatan dari usaha manusia secara c*ontinue* untuk merumuskan konsep-konsep dan unsur-unsur dalam bidang ilmu pengetahuan agar dapat diuraikan ke dalam dunia nyata adalah sebagian dari sejarah ilmu pengetahuan alam. Berbicara tentang ilmu pengetahuan, Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Hal itu menunjukkan keluasan suatu ilmu. Dalam Al-Qur'an hal tersebut telah dijelaskan oleh Allah SWT dengan firman-Nya dalam surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:

قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي وَلَوۡ
جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ مَدَدٗا ١٠٩

Artinya: "Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(Q. S. Al-Kahfi:109)

Ayat tersebut menjelaskan bahwa hendaknya manusia memahami akan kewajiban untuk menuntut ilmu serta mempelajarinya. Dalam mempelajari ilmu tidak hanya berbekal kemampuan intektual semata saja, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Sehingga apabila ia telah mampu memahami suatu ilmu, maka ia dapat menyampaikan ilmu yang telah ia miliki kepada orang yang belum mengetahui dengan disertai metode yang baik, sehingga apa yang disampaikan mudah dipahami oleh orang lain. Sebagaimana firman Allah S.W.T yang memerintahkan Rasulullah s.a.w untuk menyampaikan kepada manusia tentang suatu ilmu kepada umat manusia. Firman Allah tersebut terletak pada surat Al-Maidah ayat 99:

مَّا عَلَى ٱلرَّسُولِ إِلَّا ٱلْبَلَٰغُ ۗ وَٱللَّهُ يَعْلَمُ مَا تُبْدُونَ وَمَا تَكْتُمُونَ ﴿٩٩﴾

Artinya: "Kewajiban Rasul tidak lain hanyalah menyampaikan (ilmu), dan Allah mengetahui apa yang kamu lahirkan dan apa yang kamu sembunyikan "(Q. S. Al-Maidah: 99).

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, yang dalam penyelesaiannya diperlukan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasan matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998:1).

Menurut Abdul Aziz (2006), matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami.

Sedangkan mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdussakir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Shaad ayat 29:

كِتَٰبٌ أَنزَلْنَٰهُ إِلَيْكَ مُبَٰرَكٌ لِّيَدَّبَّرُوٓا۟ ءَايَٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٢٩﴾

Artinya: *"Ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka meerhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran (Q. S. Shaad: 29).*

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam, adalah konsep tauhid, yaitu ke-Esaan Allah (Rahman, 1992:92). Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992:15).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qamar: 49).

Ayat di atas menjelaskan bahwa alam dan isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran, takaran, dan hitungan yang seimbang. Jadi matematika sebenarnya telah ada sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Shihab (2003:482) menafsirkan bahwa kata *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk hidup ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akalpun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah swt. Demikian juga Allah telah menetapkan *sistem* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.

Dalam ayat lain juga disebutkan:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدًا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىۡءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan *serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan: 2).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 1997:80).

Ilmu Aljabar (Abstrak) merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Ilmu Aljabar (Abstrak) yang merupakan bagian dari Ilmu matematika, pada dasarnya berkembang pesat karena dia berhubungan dengan himpunan, operasi dan sifat struktur-struktur di dalamnya.

Teori tentang grup, dimana definisi dari grup sendiri adalah suatu strukur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong $(G \neq \phi)$ dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas dan ada invers dalam grup tersebut. Seperti halnya teori graf himpunan-himpunan dalam grup mempunyai elemen atau anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Quran. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam Alquran surat Al-Fatihah ayat 7 disebutkan:

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya: *"(yaitu) jalan orang-orang yang Telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat" (Q. S. Al-Fatihah: 7)*

Yang dimaksud ayat tersebut yaitu manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yangmendapat nikmat dari Allah, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2006: 47).

Berbicara tentang himpunan selain himpunan manusia, juga disebutkan dalam Al-Quran himpunan-himpunan yang lain. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Fathir ayat 1.

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ جَاعِلِ ٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُوْلِيٓ أَجۡنِحَةٖ مَّثۡنَىٰ
وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَۚ يَزِيدُ فِي ٱلۡخَلۡقِ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ ١

Artinya: *"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang* *dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu" (Q. S. Al-Fathir: 1).*

Dalam ayat 1 surat Al-Fathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan, atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki (Abdussakir, 2006: 48).

Kembali pada definisi grup yang merupakan himpunan tak kosong dengan operasi biner yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers. Setelah membicarakan himpunan dalam konsep islam, sekarang mengkaji operasi biner dalam konsep islam. Misal º adalah operasi pada elemen-elemen S maka ia disebut biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka (a º b) $\in$ S. Jadi jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga anggota S. Dalam dunia nyata operasi biner dansifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi yang terjadi antara sesama makhluk. Jadi sekalipun makhluk-makhluk tersebut berinteraksi dengan berbagai macam pola akan tetapi berda dalam himpunan tersebut yaitu himpunan ciptaan-Nya.

Sistem aljabar merupakan salah satu materi pada bagian aljabar abstrak yang mengandung operasi biner. Himpunan dengan satu atau lebih operasi biner disebut sistem aljabar. Sistem aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu ang disebut grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 11.

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِن نُّطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَٰجًا ۚ وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أُنثَىٰ وَلَا تَضَعُ إِلَّا بِعِلْمِهِۦ ۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٍ وَلَا يُنقَصُ مِنْ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِى كِتَٰبٍ ۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: "Dan Allah menciptakan kamu dari tanah Kemudian dari air mani, Kemudian dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam Kitab (Lauh mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah" (Q. S. Al-Faathir: 11)

Dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan.

Terkait dengan pernyataan di atas, mencari isomorfisme grup merupakan salah satu dari materi pada ilmu aljabar (abstrak) yang berkembang dan mendapat perhatian. Dengan mengkaji dan menganalisis grup, akan didapat suatu perumusan yang akan lebih memudahkan proses pengaplikasiannya ke dunia nyata.

Seperti yang dijelaskan bahwa pada grup dibahas tentang isomorfisme grup dan salah satu topik menariknya adalah isomorfisme grup pada subgrup normal. Oleh karena itu, maka penulis tertarik untuk mengkaji tentang isomorfisme grup pada subgrup normal, dengan judul **"Kajian Isomorfisme Grup Pada Subgrup Normal".**

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan di atas, maka penulis akan membahas tentang isomorfisme grup dan graf. Oleh karena itu, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah sebagai berikut :

"Bagaimanakah sifat-sifat yang terkait dengan isomorfisme pada subgrup normal?"

1.3. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis di atas, maka tujuan dari pembahasan skripsi ini adalah:

"Untuk menjelaskan bagaimana sifat-sifat yang terkait dengan isomorfisme pada subgrup normal."

1.4. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian yang berupa pembahasan masalah ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi :

1. Bagi penulis
    a. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan isomorfisme grup pada subgrup normal.
    b. Mengembangkan wawasan keilmuan tentang pendeskripsian tentang isomorfisme grup pada subgrup normal.
2. Bagi lembaga
    a. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran aljabar abstrak.

b. Sebagai tambahan bahan kepustakaan

3. Bagi mahasiswa: Sebagai bahan informasi untuk kajian lebih lanjut mengenai aljabar abstrak pada subgrup normal.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (library research) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang di jadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang aljabar abstrak karangan Raisinghania yang diterbitkan tahun 1980.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep isomorfisme grup pada subgroup normal.

4. Menerapkan konsep isomorfisme grup pada subgroup normal untuk menjelaskan sifat-sifat yang terkait dengan isomorfisme pada subgrup normal dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan definisi yang berkaitan dengan isomorfisme grup pada subgrup normal, kemudian memberikan contoh dari definisi tersebut.
   b. Menentukan teorema yang berkaitan dengan isomorfisme grup pada subgroup normal, kemudian membuktikan teorema tersebut.
   c. Menjelaskan sifat-sifat isomorfisme grup pada subgrup normal kemudian memberikan contoh.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar dalam membaca hasil penelitian ini pembaca mudah memahami dan tidak menemukan kesulitan, maka dalam penyajiannya ditulis berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian grup, sifat-sifat grup, homomorfisme grup, isomorfisme grup, dan kajian grup dalam Islam.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang definisi subgrup normal, sifat-sifat subgrup normal, isomorfisme grup pada subgrup normal, dan sifat-sifat yang terkait dengan isomorfisme grup pada subgrup normal, serta kajian isomorfisme dalam Islam.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan disajikan tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Grup

Salah satu sistem aljabar yang paling sederhana hádala grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, diantaranya tertutup, assosiatif, memiliki eleven identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi maka bukan grup.

Sistem aljabar $(G,\cdot)$ dengan himpunan tak kosong di G dan operasi biner $\cdot$ di definisikan di G hádala grupoid. Grupoid juga disebut semigrup jira operasi biner $\cdot$ di G hádala assosiatif. Sedangkan semigrup yang mempunyai eleven identitas di G disebut monoid (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 32)

Sebagai contoh, misalkan himpunan **N** adalahbilangan asli dengan operasi penjumlahan hádala semigrup, karena operasi biner di **N** adalah penjumlahan, maka **N** bersifat assosiaif. Jadi (**N**,+) hádala semigrup. Tetapi (**N**,+) bukan monoid, karena operasi penjumlahan tidak mempunyai identitas di **N**, jadi (**N**,+) bukan grup.

Definisi grup secara aljabar dapat dilihat sebagai berikut:

2.1.1 Definisi Grup

Definisi 2.1.1

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \phi$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a*b)*c = a*(b*c)$, untuk semua $a,b,c \in G$ (yaitu $*$ assosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a*e = e*a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$ (a^{-1} di sebut invers dari a) (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 31 dan Dummit dan Foote, 1991:17-18).

Untuk syarat tertutup, sudah terpenuhi pada operasi biner.

Contoh:

Selidiki apakah (Z, +) merupakan grup

Jawab

i. Ambil $a,b \in \mathrm{Z}$ maka $a+b \in \mathrm{Z}$. jadi Z tertutup pada operasi penjumlahan.

ii. Ambil $a,b,c \in \mathrm{Z}$ maka $(a+b)+c = a+(b+c)$. Jadi operasi penjumlahan bersifat assosiatif di Z

iii. $\exists\ 0 \in Z$ sehingga $a+0 = 0+a = a$, $\forall a \in Z$. Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

iv. Untuk masing-masing $a \in Z$ ada $(-c) \in Z$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Jadi invers dari a adalah –a.

Dari (i),(ii),(iii),dan (iv) maka (Z, +) adalah grup

2.1.2 Definisi Grup Komutatif

Definisi 2.1.2

Grup $(G,*)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14).

Contoh:

Selidiki apakah (Z, +) dengan Z adalah himpunan bilangan bulat dan + operasi penjumlahan merupakan grup abelian.

Jawab:

Misalkan $a, b, c \in \mathrm{Z}$ dan + adalah operasi biner, (Z, +) adalah grup abelian jika memenuhi:

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$, untuk semua $a, b, c \in Z$ (yaitu + assosiatif).

   Untuk semua $a \in \mathrm{Z}$ ada suatu element 0 di Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ (0 disebut identitas di Z).

2. Untuk setiap $a \in \mathrm{Z}$ ada suatu elemen $-a$ di Z sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ di sebut invers dari a).

3. Untuk semua $a, b \in Z$ maka $a + b = b + a$ (komutatif)

Jadi (Z, +) adalah grup abelian.

2.1.3 Grup Simetri

Misal Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat semua permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi "$\circ$" atau ($S_\Omega, \circ$) adalah grup. Perhatikan bahwa "$\circ$" adalah operasi biner pada S_Ω karena jika $\sigma : \Omega \to \Omega$ dan $\tau : \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\sigma \circ \tau$ juga fungsi bijektif. Selanjutnya operasi "$\circ$" yang merupakan komposisi fungsi adalah bersifat assosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 yang didefinisikan oleh 1(a) = a, $\forall$ $a \in \Omega$. Untuk setiap $\sigma : \Omega \to \Omega$ maka ada fungsi invers yaitu $\sigma^{-1} : \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_Ω dengan operasi $\circ$. Grup ($S_\Omega, \circ$) disebut sebagai *grup simetri* pada himpunan Ω (Dummit dan Foote:1991, 28).

Pada kasus khusus dengan Ω = {1, 2, 3, ... , *n*} merupakan grup simetri pada Ω yang dinotasikan dengan S_n, yaitu *grup simetri dengan derajat n* (Dummit dan Foote:1991, 28).

Perhatikan bahwa S_n mempunyai order *n*!, dengan S_n = {1, 2, 3, ... , *n*}. Untuk menggambarkan suatu permutasi $\sigma : S \to S$, ada *n* macam-macam pilihan untuk $\sigma(1)$. Untuk menentukan bahwa σ fungsi satu-satu, ditunjukkan bahwa $\sigma(2) \neq \sigma(1)$ sehingga hanya ada *n* – 1 macam-macam pilihan untuk $\sigma(2)$. Selanjutnya dari analisis ini terlihat bahwa ada total dari $n\cdot(n-1)\cdots(2)\cdot(1) = n!$ kemungkinan permutasi yang berbeda dari S (Beachy dan Blair:1990, 93).

Contoh:

Misal $\Omega = \{1,2,3\}$, tentukan grup simetri dari S_3 tersebut.

Jawab:

Grup S_3 adalah permutasi yang memuat $3! = 6$ elemen, dengan $\Omega = \{1,2,3\}$maka diperoleh:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) = 1$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23) = (23)$$

$$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)(2) = (13)$$

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3) = (12)$$

Jadi grup simetri $S_3 = \{1, (123), (132), (23), (13), (12)\}$

2.1.4 Grup Dihedral

Definisi 2.1.3

Grup dihedral adalah grup dari himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan D_{2n}, untuk setiap *n* adalah anggota bilangan bulat positif, $n \geq 3$. Dalam buku lain ada yang menuliskan grup dihedral dengan D_n (Dummit dan Foote, 1991: 24-25).

Misalkan D_{2n} suatu grup yang didefinisikan oleh *st* untuk $s, t \in D_{2n}$ yang diperoleh dari simetri (simetri sebagai fungsi pada segi-*n*, sehingga *st* adalah fungsi komposisi). Jika *s*, *t* akibat permutasi titik berturut-turut σ, τ, maka *st* akibat dari $\sigma \circ \tau$. Operasi biner pada D_{2n} adalah assosiatif karena fungsi komposisi adalah assosiatif. Identitas dari D_{2n} adalah identitas dari simetri (yang meninggalkan semua titik tetap), dinotasikan dengan 1, dan invers dari $s \in D_{2n}$ adalah kebalikan semua putaran dari simetri *s* (jadi jika *s* akibat permutasi pada titik σ, s^{-1} akibat dari σ^{-1}) (Dummit dan Foote, 1991: 24-25).

Karena grup dihedral akan digunakan secara ektensif dalam seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

(1) $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$

(2) $|s| = 2$,

(3) $s \neq r^i$ untuk semua *i*.

(4) $sr^i \neq sr^j$ untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, jadi

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$$

Yaitu setiap elemen dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk $k = 0$ atau 1 dan $0 \le i \le n-1$.

(5) $sr = r^{-1}s$.

(6) $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \le i \le n$ (Dummit dan Foote, 1991: 26).

Definisi 2.1.4

Misal G suatu grup dan misalkan A subset dari G dengan A adalah himpunan berhingga $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ akan ditulis $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ dari pada ditulis $\langle \{a_1, a_2, ..., a_n\} \rangle$ untuk grup yang di bangkitkan oleh $a_1, a_2, ..., a_n$, maka A disebut generator (pembangkit) (Dummit dan Foote, 1991: 61-62).

Contoh:

Diberikan S adalah generator dengan S = $\langle r, s \rangle$. S adalah subset dari D_6. Tunjukkan bahwa D_6 dapat dibangkitkan oleh S dengan operasi komposisi $\circ$.

Jawab:

D_6 adalah himpunan simetri-simetri dari segitiga yaitu $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Akan ditunjukkan D_6 dapat dibangkitkan oleh S = $\langle r, s \rangle$.

1. $r \circ r = r^2$
2. $r^2 \circ r = 1$
3. $1 \circ r = r$
4. $r \circ s = sr^2$

5. $r^2 \circ s = sr$

6. $1 \circ s = s$

Dari hasil generator S = $\langle r, s \rangle$ yang dioperasikan dengan komposisi $\circ$ diperoleh $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Jadi D_6 dapat dibangkitkan oleh S = $\langle r, s \rangle$

2.1.5 Sifat-sifat Grup

2.1.5.1 Identitas Grup

Teorema 2.1.5.1

Unsur identitas dalam suatu grup adalah tunggal. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 76)

Bukti:

Misalkan $(G, \cdot)$ adalah grup, andaikan e dan h adalah unsure identitas di G dengan $e \neq h$. Maka berlaku:

i. $e \cdot h = h \cdot e = \text{h}$…………………e sebagai identitas

ii. $e \cdot h = h \cdot e = \text{e}$…………………..h sebagai identitas

Karena $e \cdot h$ dan $h \cdot e$ adalah unsure tunggal pada G maka dari (i) dan (ii) berakibat e = h (kontradiksi dengan pengandaian). Ini berarti bahwa unsur identitas adalah tunggal.

2.1.5.2 Invers Grup

Teorema 2.1.5.2

Setiap unsur dari suatu grup memiliki invers yang tunggal. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 75)

Bukti:

Misalkan $(G,\cdot)$ adalah grup, andaikan invers dari $a \in G$ tidak tunggal yaitu a_1^{-1} dan a_2^{-1} dengan $a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$

Misal e adalah unsur identitas di G, maka berlaku:

$a_1^{-1} = a_1^{-1}$

$= a_1^{-1} \cdot \left(a \cdot a_2^{-1}\right)$

$= \left(a_1^{-1} \cdot a\right) \cdot a_2^{-1}$

$= e \cdot a_2^{-1}$

$= a_2^{-1}$

Jadi, $a_1^{-1} = a_2^{-1}$

Kontradiksi dengan pengandaian. Ini berarti bahwa setiap unsur di G memiliki invers yang tunggal di G.

Teorema 2.1.5.3

Invers dari invers dari suatu unsur grup adalah unsur itu sendiri. Misal $(G,\cdot)$ grup dan $a \in G$, maka $(a^{-1})^{-1} =$ a. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 75)

Bukti:

$a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a =$ e

i. $a \cdot a^{-1} =$ e

$\left(a \cdot a^{-1}\right) \cdot \left(a^{-1}\right)^{-1} = e \cdot \left(a^{-1}\right)^{-1}$

$$a \cdot \left(a^{-1} \cdot \left(a^{-1}\right)^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)^{-1}$$

$$a \cdot e = \left(a^{-1}\right)^{-1}$$

$$a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$$

ii. $a \cdot a^{-1} = \mathrm{e}$

$$\left(a^{-1}\right)^{-1} \cdot \left(a \cdot a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right)^{-1} \cdot e$$

$$\left(a^{-1} \cdot \left(a^{-1}\right)^{-1}\right) \cdot a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$$

$$e \cdot a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$$

$$a = \left(a^{-1}\right)^{-1}$$

Teorema 2.1.5.4

Dalil kanselasi berlaku pada suatuu grup. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 76)

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa pada grup berlaku dalil kanselasi kiri maupun kanselasi kanan.

Misal $(G,\cdot)$ adalah grup dan $\forall a,b \in G$ berlaku:

i. Jika $b \cdot a = c \cdot a$ maka $b = c$ (kanselasi kanan)

ii. Jika $a \cdot b = a \cdot c$ maka $b = c$ (kanselasi kiri)

Misal $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ (a punya invers yaitu a^{-1} di G)

i. $b \cdot a = c \cdot a$

$$(b \cdot a) \cdot a^{-1} = (c \cdot a) \cdot a^{-1}$$

$b \cdot (a \cdot a^{-1}) = c \cdot (a \cdot a^{-1})$

$b = c$

ii. $a \cdot b = a \cdot c$

$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot (a \cdot c)$

$(a^{-1} \cdot a) \cdot b = (a^{-1} \cdot a) \cdot c$

$b = c$

Jadi, dalil kanselasi berlaku pada sebarang grup.

Teorema 2.1.5.5

Jika a, b dua unsur dari suatu grup $(G, \cdot)$, maka persamaan $a \cdot x = b$ dan $y \cdot a = b$ mempunyai selesaian tunggal di G.(Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 77)

Bukti:

1. Pertama akan ditunjukkan bahwa $a \cdot x = b$ mempunyai selesaian di G. $a, b \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$ dan $a^{-1} \cdot b \in G$

   Selanjutnya $a \cdot x = b$

   $a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot b$

   $(a^{-1} \cdot a) \cdot x = a^{-1} \cdot b$

   $e \cdot x = a^{-1} \cdot b$

   $x = a^{-1} \cdot b$ ………..(1)

   Persamaan (1) disubtitusikan ke persamaan $a \cdot x = b$

   $a \cdot x = b$

$$a \cdot (a^{-1} \cdot b) = b$$

$$(a \cdot a^{-1}) \cdot b = b$$

$$e \cdot b = b$$

$$b = b$$

Jadi, $a \cdot x = b$ punya selesaian di G, yaitu $x = a^{-1} \cdot b$. Selanjutnya akan ditunkukkan bahwa selesaian tersebut adalah tunggal. Andaikan $a \cdot x = b$ memiliki selesaian tak tunggal yaitu x_1 dan x_2 dengan $x_1 \neq x_2$ maka $a \cdot x_1 = b$ dan $a \cdot x_2 = b$

Diperoleh $a \cdot x_1 = a \cdot x_2$ dengan hukum kanselasi kiri diperoleh $x_1 = x_2$. Terjadi kontradiksi, berarti $a \cdot x = b$ mempunyai selesaian tunggal.

2. Kedua akan ditunjukkan bahwa $y \cdot a = b$ mempunyai selesaian di G.

$a, b \in G$ maka ada $a^{-1} \in G$, $b^{-1} \in G$ dan $a^{-1} \cdot b \in G$

$$y \cdot a = b$$

$$y \cdot a \cdot (a^{-1}) = b \cdot a^{-1}$$

$$y \cdot (a \cdot a^{-1}) = b \cdot a^{-1}$$

$$y \cdot c = b \cdot a^{-1}$$

$$y = b \cdot a^{-1} \text{..................(1)}$$

Persamaan (1) disubtitusikan ke persamaan $y \cdot a = b$

$$y \cdot a = b$$

$$(b \cdot a^{-1}) \cdot a = b$$

$$b \cdot (a^{-1} \cdot a) = b$$

$$b \cdot e = b$$

$$b = b$$

Jadi, $y \cdot a = b$ punya selesaian di G, yaitu $y = b \cdot a^{-1}$. Selanjutnya akan ditunkukkan bahwa selesaian tersebut adalah tunggal. Andaikan $y \cdot a = b$ memiliki selesaian tidak tunggal yaitu y_1 dan y_2 dengan $x_1 \neq x_2$ maka $y_1 \cdot a = b$ dan $y_2 \cdot a = b$

Diperoleh $y_1 \cdot a = y_2 \cdot a$ dengan hukum kanselasi kiri diperoleh $y_1 = y_2$.Terjadi kontradiksi, berarti $a \cdot x = b$ mempunyai selesaian tunggal.

2.2 Subgrup

Definisi 2.2

Misalkan G adalah grup. Maka subset H dari G adalah subgrup dari G jika H adalah himpunan tidak kosong dan H adalah tertutup terhadap hasil operasi dan inversnya ($x, y \in H$, berarti $x^{-1} \in H$ dan $xy \in H$). Jika H adalah subgrup dari G maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Dummit dan Foote, 1991:45).

Contoh:

$(B,+)$ adalah grup bilangan bulat dengan penjumlahan dan $(K,+)$ adalah suatu grup dan karena $K \subset B$, maka K subgrup dari B. Secara umum jika m suatu bilangan bulat dan $B_m = \{km | k \in B\}$, maka B_m adalah subgroup dari B.

Teorema 2.2

Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup dan H adalah himpunan bagian dari G yang tidak kosong. H subgroup dari G jika dan hanya jika memenuhi:

i) $a * b \in H$ untuk semua $a, b \in H$

ii) $a^{-1} \in H$ untuk semua $a \in H$

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Misalkan H adalah suatu subgroup dari G. Akan dibuktikan (i) dan (ii). Karena $(H,*)$ subgroup, maka $(H,*)$ juga merupakan grup. Sehingga H bersifat tertutup terhadap operasi $*$ dan setiap elemennya memiliki invers. Dengan kata lain terbukti bahwa i) $a * b \in H$ untuk semua $a, b \in H$

i) $a^{-1} \in H$ untuk semua $a \in H$

$(\Leftarrow)$

Sebaliknya diketahui (i) dan (ii). Akan dibuktikan H subgrup dari G. Berdasarkan (i) dan (ii), maka $\exists a^{-1} \in H \ni a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \in H$. Jadi H memiliki elemen identitas. Ambil sebarang $a, a^{-1}, e \in H$ sehingga berlaku

$$(a * a^{-1}) * e = a(a^{-1} * e)$$

$$e * e = a * a^{-1}$$

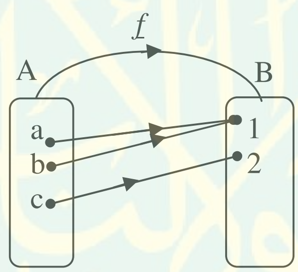
$$e = e$$

2.3 Fungsi Surjektif

Definisi 2.3

Misalkan *A* dan *B* adalah himpunan, dan *f* adalah fungsi dari *A* ke *B*. Fungsi f disebut *fungsi pada* jika $R(f) = B$. Jadi, $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi pada jika untuk masing-masing $y \in B$ dan $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Fungsi pada sering disebut juga dengan *fungsi surjektif* atau *fungsi onto*. Jika *f* fungsi surjektif, maka *f* disebut *surjeksi* (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

Contoh:



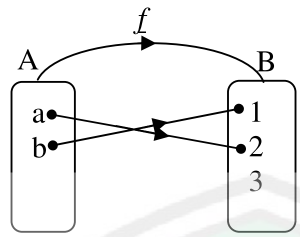
Gambar 2.1 *Fungsi Surjektif*.

2.4 Fungsi Injektif

Definisi 2.4

Misalkan *f* adalah fungsi dari *A* ke *B*. *f* disebut *fungsi satu-satu* jika $x, y \in A$, dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$. Selain itu, dapat juga dinyatakan f fungsi satu-satu jika $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Fungsi satu-satu sering juga disebut dengan *fungsi injektif*. Jika *f* fungsi injektif, maka f disebut *injeksi* (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

Contoh:



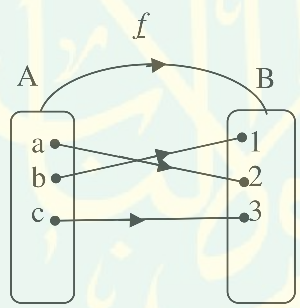
Gambar 2.2 *Fungsi Injektif.*

2.5 Fungsi Bijektif

Definisi 2.5

Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan surjektif disebut *fungsi bijektif.* Jika *f* fungsi bijektif, maka f disebut *bijeksi* (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

Contoh:



Gambar 2.3 *Fungsi Bijektif.*

2.6 Homomorfisma Grup

Definisi 2.6.1

Diketahui $(G,\circ)$ dan $(G^{'},*)$ merupakan grup. Pemetaan $\varphi : G \to G^{'}$ disebut homomorfisma jika dan hanya jika untuk setiap $a,b \in G$ berlaku $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 252 dan Dummit dan Foote, 1991:35).

Contoh:

Diketahui G merupakan grup terhadap operasi penjumlahan bilangan bulat. Maka, $\varphi : G \to G^{'}$ dengan $\varphi(a) = -a$, untuk setiap $a \in G$ merupakan homomorfisma grup.

Teorema 2.6.1

Diketahui $G, G^{'}$ grup dan $\varphi : G \to G^{'}$ merupakan homomorfisma grup, maka keempat sifat berikut berlaku:

(i). Jika e merupakan elemen identitas di G, maka $\varphi(e)$ merupakan elemen identitas $e^{'}$ di $G^{'}$

(ii). Jika $a \in G$, maka $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

(iii). Jika H merupakan subgrup pada G, maka $\varphi(H)$ merupakan subgrup pada $G^{'}$

(iv). Jika $K^{'}$ merupakan subgrup pada $G^{'}$, maka $\varphi^{'}(K^{'})$ merupakan subgroup pada G. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 255 dan Dummit dan Foote, 1991:75).

Definisi 2.6.2 (Kernel)

Diketahui $G, G^{'}$ grup dan $\varphi : G \to G^{'}$ homomorfisma grup. Himpunan $\{a \in G | \varphi(a) = e^{'}\}$ dinamakan kernel dari φ dan dinotasikan $\ker(\varphi)$ (Dummit dan Foote, 1991:75).

Teorema 2.6.2

Diketahui $G, G^{'}$ grup dan $\varphi : G \to G^{'}$ merupakan homomorfisma grup. Pemetaan φ merupakan pemetaan injektif jika dan hanya jika $\ker(\varphi) = \{e\}$..(Dummit dan Foote, 1991:75).

Bukti:

$(\Rightarrow)$

Menurut Teorema 2.6.1 (i) berakibat $\varphi(e) = e^{'}$ dan karena φ merupakan pemetaan injektif maka hanya elemen e di G yang dipetakan ke elemen $e^{'}$ di $G^{'}$. Jadi, $\ker(\varphi) = \{e\}$

$(\Leftarrow)$

Diandaikan pemetaan φ bukan pemetaan injektif, yaitu terdapat $a, b \in G$ dengan $a \neq b$ dan $\varphi(a) = \varphi(b)$=. Karena $\varphi(a) = \varphi(b)$, maka $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e^{'}$.Menurut Teorema 2.6.1 (ii) diperoleh $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}) = e^{'}$. Karena diketahui $\ker(\varphi) = \{e\}$, akibatnya $ab^{-1} = e$ dan dengan kata lain $a = b$. Muncul kontradiksi dengan pengandaian bahwa $a \neq b$. Jadi, pengandaian diingkar dan terbukti φ merupakan pemetaan injektif.

Definisi 2.6.3 (Subgrup Normal)

Diketahui G grup dan H subgrup pada G . Subgrup H disebut subgrup normal jika dan hanya jika $gH = Hg$ untuk setiap $g \in G$. (Dummit dan Foote, 1991:75).

Contoh

Diketahui G merupakan grup terhadap operasi penjumlahan bilangan bulat. Setiap subgrup nG dengan $n \in G$ pada G merupakan subgrup normal.

Toerema 2.6.3

Diketahui $G, G^{'}$ grup dan $\varphi : G \to G^{'}$ homomorfisma grup, maka $\ker(\varphi)$ merupakan subgrup normal pada G. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 261 dan Dummit dan Foote, 1991:82).

Bukti:

Pertama, akan ditunjukkan bahwa $\ker(\varphi)$ merupakan subgrup pada *G*. Diambil sebarang $a, b \in \ker(\varphi)$, dan dengan demikian $\varphi(a) = \varphi(b) = e^{'}$ atau dengan kata lain $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e^{'}$. Karena $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = e^{'}$, maka menurut Teorema 2.6.1 (ii) diperoleh $\varphi(a)\varphi(b)^{-1} = \varphi(a)\varphi(b^{-1}) = \varphi(ab^{-1}) = e^{'}$. Jadi,diperoleh $a, b^{-1} \in \ker(\varphi)$ dan dengan demikian $\ker(\varphi)$ merupakan subgrup pada *G*.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa $H = \ker(\varphi)$ merupakan subgrup normal pada *G*.

Diambil sebarang $g \in G$ dan dibentuk $gH = \{gh | h \in H = \ker(\varphi)\}$. Diambil sebarang $a \in gG$, maka $a = gH_1$ untuk suatu $h_1 \in H$. Diperhatikan bahwa $\phi(a) = \phi(gh_1) = \phi(g)\phi(h_1) = \phi(g)e^{'} = \phi(g)$ atau dengan demikian $\phi(gh_1) = \phi(g)$. Karena $\phi(gh_1) = \phi(g)$, diperoleh $\phi(gh_1 g^{-1}) = e^{'}$ atau dengan kata lain $gh_1 g^{-1} \in H$ yaitu $gh_1 g^{-1} = h$ untuk suatu $h \in H$. Karena $gh_1 g^{-1} = h$ dan $a = gh_1$ maka diperoleh $a = gh_1 = hg \in Hg$. Jadi, berlaku $gH \subseteq Hg$ dan dengan cara serupa dapat ditunjukkan berlaku pula $Hg \subseteq gH$. Karena $gH \subseteq Hg$ dan $Hg \subseteq gH$, maka $gH = Hg$ dan terbukti $H = \ker(\phi)$ merupakan subgrup normal.

Teorema 2.6.4

Diketahui $\phi : G \to G'$ homomorfisma grup dengan $H = \ker(\phi)$. Maka $G|H = \{gH | g \in H\}$ merupakan grup terhadap operasi biner $(aH)(bH) = (ab)H$ untuk setiap $(aH),(bH) \in G|H$. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 255)

Teorema 2.6.5

Diketahui $\phi : G \to G'$ homomorfisma grup dengan $H = \ker(\phi)$. Maka pemetaan $\gamma : G \to G|N$ yang didefinisikan $\gamma(a) = aH$ untuk setiap $a \in G$ merupakan homomorfisma surjektif. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 256)

Bukti:

Diambil sebarang $a, b \in G$, diperhatikan bahwa

$\gamma(ab) = (ab)H = (aH)(bH) = \gamma(a)\gamma(b)$.

Jadi, terbukti bahwa γ merupakan homomorfisma. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa γ pemetaan surjektif. Diambil sebarang $y \in G|H$, maka $y = gH$ untuk suatu $g \in G$ dan dengan demikian dapat dipilih $x = g$ sehingga $\gamma(x) = y$. Jadi, γ merupakan homomorfisma surjektif.

Teorema 2.6.6

Diketahui $\phi : G \to G^{'}$ homomorfisma grup dan N subgrup normal pada G, maka $G|N = \{gN | g \in N\}$ merupakan grup terhadap operasi biner $(aN)(bN) = (ab)N$ untuk setiap $(aN),(bN) \in G|N$.(Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 257)

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa $G|N$ merupakan grup, terlebih dahulu ditunjukkan bahwa operasi $(aN)(bN) = (ab)N$ terdefinisi dengan baik. Misalkan $aN = cN$ dan $bN = dN$ untuk suatu $a, b, c, d \in N$,akan ditunjukkan bahwa $(aN)(bN) = (cN)(dN)$ yaitu $(ab)N = (cd)N$.

Karena $aN = cN$ dan $a \in aN$, maka $a = cn_1$ untuk suatu $n_1 \in N$. Dengan cara serupa diperoleh juga $b = dn_2$ untuk suatu $n_2 \in N$. Diperhatikan bahwa $n_1 d \in Nd$ Karena N subgrup normal berakibat $Nd = dN$. Dengan demikian diperoleh $n_1 d \in Nd = dN$ atau dengan kata lain $n_1 d = dn_3$ untuk suatu $n_3 \in N$. Diperhatikan bahwa

$ab = (cn_1)(dn_2) = c(n_1 d)n_2 = c(dn_3)n_2 = (cd)n_3 n_2 = (cd)n_4$ dengan $n_4 = n_3 n_2 \in N$.

Dengan demikian diperoleh $ab \in (cd)N$. Akibatnya $(ab)N \subseteq (cd)N$ dan dengan cara serupa dapat ditunjukkan $(cd)N \subseteq (ab)N$ dan dengan demikian berlaku $(ab)N = (cd)N$. Jadi, operasi $(aN)(bN) = (ab)N$ terdefinisi dengan baik.

Teorema 2.6.7

Diketahui $\phi : G \to G'$ homomorfisma grup dan N subgrup normal pada G, maka pemetaan $\gamma : G \to G|N$ yang didefinisikan $\gamma(a) = aN$ untuk setiap $a \in G$. merupakan homomorfisma surjektif dan $\ker(\gamma) = N$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 257)

Bukti:

Pembuktian bahwa γ merupakan homomorfisma surjektif serupa dengan pembuktian Teorema 2.6.5. Akan ditunjukkan bahwa $\ker(\gamma) = N$. Karena $aN = N$ jika dan hanya jika $a \in N$, maka jelas bahwa $\ker(\gamma) = N$

Teorema 2.6.8

Diketahui H sebarang subgrup pada G dan N subgrup normal pada G, maka HN merupakan subgrup pada G. Lebih lanjut jika H subgrup normal, maka HN merupakan subgrup normal pada G. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 257)

Bukti:

Diperhatikan bahwa $HN = \{hn | h \in H, n \in N\}$. Jelas bahwa operasi biner pada HN terdefinisi dengan baik, karena operasi biner pada HN juga merupakan operasi biner pada G. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa operasi biner pada HN tertutup. Diambil sebarang $h_1n_1, h_2n_2 \in HN$. Karena N subgrup normal, maka $n_1h_2 = h_2n_3$ untuk suatu $n_3 \in N$. Diperhatikan bahwa

$(h_1n_1)(h_2n_2) = h_1(n_1h_2)n_2 = h_1(h_2n_3)n_2 = (h_1h_2)(n_3n_2) \in HN$. Jadi, operasi biner pada HN tertutup dan dengan demikian sifat asosiatif juga berlaku pada HN. Karena $e \in N$ dan $e \in H$, jelas bahwa $e = ee \in HN$. Diambil sebarang $hn \in HN$. Karena $h \in H$ dan $n \in N$, maka berlaku $n^{-1}h^{-1} = (hn^{-1})$. Karena N subgroup normal, berlaku $n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n_1$ untuk suatu $n_1 \in N$ dan dengan demikian $(hn)^{-1} \in HN$. Jadi, terbukti bahwa HN merupakan subgrup pada G.

Misalkan H merupakan subgrup normal, akan ditunjukkan bahwa HN merupakan subgrup normal. Diambil sebarang $g \in G$ dan sebarang $x \in gHN$, maka $x = gh_1n_1$ untuk suatu $h_1 \in H$ dan $n_1 \in N$. Karena N subgrup normal, maka $gh_1n_1 = n_2gh_2$ untuk suatu $n_2 \in N$. Karena H subgrup normal, maka $n_2gh_1 = h_2n_2g$ untuk suatu $h_2 \in H$. Dengan demikian diperoleh, $x = h_2n_2g \in HNg$ dan berlaku $gHN \subseteq HNg$. Dengan cara serupa dapat ditunjukkan berlaku $HNg \subseteq gHN$. Jadi, diperoleh $gHN \subseteq HNg$ untuk sebarang $g \in G$, yaitu HN merupakan subgrup normal pada G.

2.7 Isomorfisme Grup

.Definisi 2.7.1

Diketahui G, G' grup dan $\phi : G \to G'$ merupakan homomorfisma grup. Pemetaan ϕ disebut isomorfisma grup jika dan hanya jika ϕ merupakan pemetaan bijektif.(Dummit dan Foote, 1991:35)

Contoh:

Misalkan G adalah himpunan semua bilangan real positif dengan operasi perkalian, dan G' adalah himpunan semua bilangan real dengan operasi penjumlahan. Pemetaan $\phi : G \to G'$ dengan $\phi(x) = \log x$ yaitu fungsi logaritma dengan dasar $b > 0$ dan $b \neq 0$.

Jawab:

Misalkan m_1 dan $m_2 \in G$ dan $a_1, a_2 \in G'$ dengan ${}^b\log\, m_1 = a_1$ dan ${}^b\log\, m_2 = a_2$, maka ${}^b\log(m_1 m_2) = {}^b\log\, m_1 + {}^b\log\, m_2 = a_1 + a_2$.

Jadi, $\phi(m_1 * m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)$

Pemetaan $\phi(x) = \log x$ dengan $b > 0$ dan $b \neq 0$ merupakan isomorfisma.

Teorema 2.7.1

Diketahui $\phi : G \to G'$ homomorfisma grup dengan $\ker(\phi) = H$. Maka pemetaan $\mu : G|H \to \phi(G)$ yang didefinisikan $\mu(aH) = \phi(a)$ untuk setiap $aH \in G|H$ merupakan isomorfisma grup. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 263)

Bukti:

Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa μ merupakan pemetaan. Diambil sebarang $(aH),(bH)\in G|H$ dengan $aH = bH$ dan akan ditunjukkan bahwa $\mu(aH)=\mu(bH)$. Karena $aH = bH$, akibatnya $ab^{-1}\in H$ dan dengan demikian $\phi(ab^{-1})=e'$. Karena $\phi(ab^{-1})=e'$, maka menurut Teorema 2.6.1 (ii) diperoleh $\phi(ab^{-1})=\phi(a)\phi(b^{-1})=\phi(a)\phi(b)^{-1}=e'$ atau dengan kata lain $\phi(a)=\phi(b)$. Karena sesuai definisi μ berlaku $\mu(aH)=\phi(a)$ dan $\mu(bH)=\phi(b)$, dengan demikian berlaku $\mu(aH)=\mu(bH)$. Jadi, μ merupakan pemetaan.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa μ merupakan homomorfisma grup. Diambil sebarang $(aH),(bH)\in G|H$, diperhatikan bahwa

$\mu((aH)(bH))=\mu((ab)H)=\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)=\mu(aH)\mu(bH)$.

Jadi, terbukti bahwa μ merupakan homomorfisma grup.

Diambil sebarang $y\in\phi(G)$, maka $y=\phi(a)$ untuk suatu $a\in G$ dan dengan demikian dapat dipilih $x=aH\in G|H$ sehingga $\mu(x)=y$. Jadi, μ merupakan pemetaan surjektif.

Diambil sebarang $x\in\ker(\mu)$. Karena $\ker(\mu)\subseteq G|H$, maka $x=aH$ untuk suatu $a\in G$. Karena $\mu(x)=\mu(aH)=\phi(a)=e'$ dan karena $\ker(\phi)=H$ berakibat $a\in H$. Karena $a\in H$, berakibat $aH=H$ dan dengan demikian $x=H$. Jadi, diperoleh $\ker(\mu)=\{H\}$ dan menurut definisi 2.6.2 berakibat μ merupakan pemetaan injektif. Jadi, karena μ merupakan homomorfisma grup yang surjektif sekaligus injektif, maka μ merupakan isomorfisma grup.

Teorema 2.7.2

Diketahui $\phi : G \rightarrow G^{'}$ homomorfisma grup, maka terdapat suatu ismomorfisma dari $G|\ker(\phi)$ ke $\phi(G)$ (Dummit dan Foote, 1991:97).

Teorema 2.7.3

Diketahui $\phi : G \rightarrow G^{'}$ homomorfisma grup yang surjektif, maka terdapat suatu ismomorfisma dari $G|\ker(\phi)$ ke $G^{'}$.(Dummit dan Foote, 1991:97).

2.8 Grup dalam Pandangan Islam

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Quran, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam Al-Quran diantaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, teori graf, teori tentang grup, dan lain-lain. Teori tentang grup, dimana definisi dari grup sendiri adalah suatu strukur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \phi$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas dan ada invers dalam grup tersebut. Himpunan-himpunan dalam grup mempunyai elemen atau anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Alquran. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam Alquran surat Al-fatihah ayat 7 disebutkan:

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ﴿٧﴾

Artinya: *"(yaitu) jalan orang-orang yang Telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat" (Q. S. Al-Fatihah: 7)*

Yang dimaksud ayat tersebut yaitu manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2006: 47).

Berbicara tentang himpunan selain himpunan manusia, juga disebutkan dalam Al-Quran himpunan-himpunan ang lain. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Fathir ayat 1.

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ جَاعِلِ ٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُوْلِيٓ أَجۡنِحَةٖ مَّثۡنَىٰ وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَۚ يَزِيدُ فِي ٱلۡخَلۡقِ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ ﴿١﴾

Artinya: *"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu" (Q. S. Al-Fathir: 1).*

Dalam ayat 1 surat Al-Fathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan, atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki (Abdussakir, 2006: 48).

Kembali pada definisi grup yang merupakan himpunan tak kosong dengan operasi biner yang memenuhi sifst-sifst assosiatif, ada identitas, dan ada invers. Setelah membicarakan himpunan dalam konsep islam, sekarang mengkaji operasi biner dalam konsep islam. Misal º adalah operasi pada elemen-elemen S maka ia disebut biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka (a º b) $\in$ S. Jadi jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga anggota S. Dalam dunia nyata operasi biner dansifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi yang terjadi antara sesama makhluk. Jadi sekalipun makhluk-makhluk tersebut berinteraksi dengan berbagai macam pola akan tetapi berda dalam himpunan tersebut yaitu himpunan ciptaan-Nya.

Sistem aljabar merupakan salah satu materi pada bagian aljabar abstrak yang mengandung operasi biner. Himpunan dengan satu atau lebih operasi biner disebut sistem aljabar. Sistem aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu ang disebut grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 11.

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِن نُّطۡفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمۡ أَزۡوَٰجًاۚ وَمَا تَحۡمِلُ مِنۡ أُنثَىٰ وَلَا تَضَعُ إِلَّا بِعِلۡمِهِۦۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٍ وَلَا يُنقَصُ مِنۡ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِي كِتَٰبٍۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٞ ١١

Artinya: "Dan Allah menciptakan kamu dari tanah Kemudian dari air mani, Kemudian dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam Kitab (Lauh mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah" (Q. S. Al-Faathir: 11)

Dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan, sehingga laki-laki dan perempuan harus berpasangan, dan dengan berpasangan (menikah) manusia dapat mengandung dan melahirkan seorang anak dan kemudian anak tersebut juga akan berpasangan dengan anak yang lain.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas mengenai sifat-sifat yang terkait dengan isomorfisme pada subgrup normal. Pembahasan dimulai dengan menguraikan atau menjabarkan definisi subgrup normal sehingga menjadi ssuai dengan perumusan masalah.

3.1 Subgrup Normal

3.1.1 Definisi Subgrup Normal

Definisi 3.1.1

Diberikan $(G,*)$ grup dan $(H,*)$ subgrup dari $(G,*)$. Subgrup $(H,*)$ disebut subgrup normal jika dan hanya jika $g*H = H*g$ untuk setiap $g \in G$ dengan kata lain koset kiri sama dengan koset kanan. (Raisinghania, 1980: 209).

Contoh:

Misal $(P_3,\circ)$ adalah grup dengan anggota permutasi sebagai berikut:

i = (1) (2) (3)	c = (2 3)
a = (1 2 3)	d = (1 3)
b = (1 3 2)	e = (1 2)

Jawab:

Misal $N = \{i, a, b\}$ dan $(N, \circ)$ adalah subgrup dari P_3, maka

$\circ$	i	a	b	c	d	e
i	i	a	b	c	d	e
a	a	b	i	d	e	c
b	b	i	a	e	c	d
c	c	e	d	i	b	a
d	d	c	e	a	i	b
e	e	d	c	b	a	i

Tabel 3.1 P_3

Dari tabel di atas, maka dapat diperoleh:

koset kanan dari N dalam P_3 adalah

$N \circ i = \{i, a, b\}$ $\quad$ $N \circ c = \{i \circ c, a \circ c, b \circ c\} = \{c, e, d\}$

$N \circ a = \{a, b, i\}$ $\quad$ $N \circ d = \{i \circ d, a \circ d, b \circ d\} = \{d, c, e\}$

$N \circ b = \{b, i, a\}$ $\quad$ $N \circ e = \{i \circ e, a \circ e, b \circ e\} = \{e, d, c\}$

Dengan demikian diperoleh himpunan koset kanan dari N dalam P_3 adalah $= \{\{i, a, b\}, \{c, d, e\}\}$

Koset kiri dari N dalam P_3 adalah

$i \circ N = \{i, a, b\}$ $\quad$ $c \circ N = \{c \circ i, c \circ a, c \circ b\} = \{c, d, e\}$

$a \circ N = \{a, b, i\}$ $\quad$ $d \circ N = \{d \circ i, d \circ a, d \circ b\} = \{d, e, c\}$

$b \circ N = \{b, i, a\}$ $\quad$ $e \circ N = \{e \circ i, e \circ a, e \circ b\} = \{e, c, d\}$

Begitu juga dengan himpunan Koset kiri dari N dalam P_3 adalah $=\{\{i,a,b\},\{c,d,e\}\}$

$\forall x \in G$ memenuhi $x \circ N = N \circ x$

Jadi, $N = \{i,a,b\}$ subgrup normal

3.1.2 Teorema Tentang Irisan Subgrup Normal

Teorema 3.1.2.1

Misal $(G,*)$ adalah Grup.

Misal $(H_1,*) \subseteq (G,*)$, dengan H_1 adalah normal

Misal $(H_2,*) \subseteq (G,*)$, dengan H_2 adalah normal

Maka $(H \cap k,*) \subseteq (G,*)$; dengan $H \cap k$ normal

Sebelum memahami teorema di atas, penulis akan memberikan contoh tentang irisan dalam subgroup normal sebagai berikut:

Contoh:

Misal $(M_{12},+)$ adalah grup

Misal $H_1 = \{0,2,4,6,8,10\} \subset M_{12}$ maka $(H_1,+)$ adalah subgrup dari $(M_{12},+)$

Misal $H_2 = \{0,3,6,9\} \subset M_{12}$ maka $(H_2,+)$ adalah subgrup dari $(M_{12},+)$

Jawab:

❖ **Sifat normal pada** $(H_1,+)$

Selanjutnya akan diselidiki sifat normal pada $(H_1,+)$ yaitu dengan menentukan koset kiri dan koset kanan dari H_1 di M_{12}

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	12	o	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	12	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	12	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	12	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	12	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Tabel 3.2 M_{12}

Dari table di atas diperoleh bahwa

Untuk koset kiri: $g + H_1$ dengan $g \in M_{12}$

$0 + H_1 = \{0,2,4,6,8,10\}$ $\quad$ $6 + H_1 = \{0,2,4,6,8,10\}$

$1 + H_1 = \{1,3,5,7,9,11\}$ $\quad$ $7 + H_1 = \{1,3,5,7,9,11\}$

$2 + H_1 = \{0,2,4,6,8,10\}$ $\quad$ $8 + H_1 = \{0,2,4,6,8,10\}$

$3 + H_1 = \{1,3,5,7,9,11\}$ $\quad$ $9 + H_1 = \{1,3,5,7,9,11\}$

$4 + H_1 = \{0,2,4,6,8,10\}$ $\quad$ $10 + H_1 = \{0,2,4,6,8,10\}$

$5+H_1=\{1,3,5,7,9,11\}$ $\qquad$ $11+H_1=\{1,3,5,7,9,11\}$

Dengan demikian diperoleh bahwa:

$\{0+H_1=2+H_1=4+H_1=6+H_1=8+H_1=10+H_1\}=H_1$ dan

$\{1+H_1=3+H_1=5+H_1=7+H_1=9+H_1=11+H_1\}=M_{12}-H_1$

Sedangkan untuk koset kanan, karena penjumlahan bersifat assosiatif yaitu $g+h=h+g$; untuk setiap $g\in M_{12}$ dan untuk setiap $h\in H_1$. sehingga diperoleh:

$0+H_1=H_1+0$ $\qquad$ $6+H_1=H_1+6$

$1+H_1=H_1+1$ $\qquad$ $7+H_1=H_1+7$

$2+H_1=H_1+2$ $\qquad$ $8+H_1=H_1+8$

$3+H_1=H_1+3$ $\qquad$ $9+H_1=H_1+9$

$4+H_1=H_1+4$ $\qquad$ $10+H_1=H_1+10$

$5+H_1=H_1+5$ $\qquad$ $11+H_1=H_1+11$

Dengan demikian diperoleh juga

$\{H_1+0=H_1+2=H_1+4=H_1+6=H_1+8=H_1+10\}=H_1$ dan

$\{H_1+1=H_1+3=H_1+5=H_1+7=H_1+9=H_1+11\}=M_{12}-H_1$

Karena $g+H_1=H_1+g$

Koset kiri = koset kanan

Maka, $(H_1,+)$ adalah subgrup normal.

❖ **Sifat normal pada** $(H_2,+)$

Selanjutnya akan diselidiki sifat normal pada $(H_2,+)$ yaitu dengan menentukan koset kiri dan koset kanan dari H_2 di M_{12}

Dari table M_{12} di atas diperoleh bahwa

Untuk koset kiri: $g+H_2$ dengan $g \in M_{12}$

$0+H_2=\{0,3,6,9\}$

$1+H_2=\{1,4,7,,10\}$

$2+H_2=\{0,3,6,9\}$

$3+H_2=\{1,4,7,10\}$

$4+H_2=\{0,3,6,9\}$

$5+H_2=\{1,4,7,10\}$

$6+H_2=\{0,3,6,9\}$

$7+H_2=\{1,4,7,10\}$

$8+H_2=\{0,3,6,9\}$

$9+H_2=\{1,4,7,10\}$

$10+H_2=\{0,3,6,9\}$

$11+H_2=\{1,4,7,10\}$

Dengan demikian diperoleh bahwa:

$\{0+H_2=2+H_2=4+H_2=6+H_2=8+H_2=10+H_2\}=H_2$ dan

$\{1+H_2=3+H_2=5+H_2=7+H_2=9+H_2=11+H_2\}=M_{12}-H_2$

Sedangkan untuk koset kanan, karena penjumlahan bersifat assosiatif yaitu $g+h=h+g$; untuk setiap $g \in M_{12}$ dan untuk setiap $h \in H_2$. sehingga diperoleh:

$0+H_2=H_2+0$

$1+H_2=H_2+1$

$2+H_2=H_2+2$

$6+H_2=H_2+6$

$7+H_2=H_2+7$

$8+H_2=H_2+8$

$3+H_2=H_2+3$ $\quad$ $9+H_2=H_2+9$

$4+H_2=H_2+4$ $\quad$ $10+H_2=H_2+10$

$5+H_2=H_2+5$ $\quad$ $11+H_2=H_2+11$

Dengan demikian diperoleh juga

$\{H_2+0=H_2+2=H_2+4=H_2+6=H_2+8=H_2+10\}=H_2$ dan

$\{H_2+1=H_2+3=H_2+5=H_2+7=H_2+9=H_2+11\}=M_{12}-H_2$

Karena $\quad g+H_2=H_2+g$

Koset kiri = koset kanan

Maka, $(H_2,+)$ adalah subgrup normal.

❖ $H_1 \cap H_2$ **adalah normal**

Selanjutnya, akan diselidiki bahwa untuk $H_1 \cap H_2$ adalah juga normal.

$H_1=\{0,2,4,6,8,10\}\subset M_{12}$

$H_2=\{0,3,6,9\}\subset M_{12}$

$H_1 \cap H_2=\{0,6\}$

Misal $(H_1 \cap H_2,+)$ adalah subgroup dari $(M_{12},+)$, maka akan ditentukan koset kiri dan koset kanannya dari $(H_1 \cap H_2,+)$ terlebih dahulu, sebagaimana berikut:

$0+(H_1 \cap H_2)=\{0,6\}$ $\quad$ $6+(H_1 \cap H_2)=\{0,6\}$

$1+(H_1 \cap H_2)=\{1,7\}$ $\quad$ $7+(H_1 \cap H_2)=\{1,7\}$

$2+(H_1 \cap H_2)=\{2,8\}$ $\quad$ $8+(H_1 \cap H_2)=\{2,8\}$

$3+(H_1 \cap H_2)=\{3,9\}$ $9+(H_1 \cap H_2)=\{3,9\}$

$4+(H_1 \cap H_2)=\{4,10\}$ $10+(H_1 \cap H_2)=\{4,10\}$

$5+(H_1 \cap H_2)=\{5,11\}$ $11+(H_1 \cap H_2)=\{5,11\}$

Sehingga, himpunan koset kiri dari $H_1 \cap H_2$ dalam M_{12} adalah:

$=\{\{0,6\},\{1,7\},\{2,8\},\{3,9\},\{4,10\},\{5,11\}\}$

Sedangkan untuk koset kanan dari $H_1 \cap H_2$ dalam M_{12}, karena penjumlahan bersifat komutatif maka diperoleh

$0+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+0$ $6+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+6$

$1+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+1$ $7+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+7$

$2+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+2$ $8+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+8$

$3+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+3$ $9+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+9$

$4+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+4$ $10+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+10$

$5+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+5$ $11+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+11$

Dengan demikian diperoleh:

$g+(H_1 \cap H_2)=(H_1 \cap H_2)+g$; untuk setiap $g \in M_{12}$

koset kiri = koset kanan

Jadi, $(H_1 \cap H_2,+)$ adalah subgrup normal dari $(M_{12},+)$.

Dari contoh-contoh tersebut di atas, selanjutnya penulis akan membuktikan teorema tentang irisan subgrup normal sebagai berikut:

Teorema 3.1.2.1

Misal $(G,*)$ adalah Grup.

Misal $(H_1,*) \subseteq (G,*)$, dengan H_1 adalah normal

Misal $(H_2,*) \subseteq (G,*)$, dengan H_2 adalah normal

Maka $(H \cap k,*) \subseteq (G,*)$; dengan $H \cap k$ normal

Bukti:

Untuk H_1, karena $(H_1,*) \subseteq (M_{12},*)$, dengan H_1 adalah normal, maka $g * H_1 = H_1 * g$, sehingga $g * H_1 * g^{-1} = H_1$. Demikian juga dengan H_2, karena $(H_2,*) \subseteq (G,*)$, dengan H_2 adalah normal, maka $g * H_2 = H_2 * g$, sehingga $g * H_2 * g^{-1} = H_2$.

Dengan demikian, maka akan ditunjukkan bahwa $g * (H_1 \cap H_2) * g^{-1} = H_1 \cap H_2$.

Ambil $x \in (H_1 \cap H_2)$ maka itu berarti $x \in H_1$ dan $x \in H_2$. Karena H_1 dan H_2 adalah normal maka dengan demikian dapat diasumsikan bahwa:

$g * H_1 * g^{-1} = H_1$ dan $g * H_2 * g^{-1} = H_2$

$g * x * g^{-1} \in H_1$ dan $g * x * g^{-1} \in H_2$

Sehingga, dari pernyataan di atas dapat disimpulkan bahwa $g * x * g^{-1} \in (H_1 \cap H_2)$ untuk setiap $x \in (H_1 \cap H_2)$.

Hal ini mengakibatkan, $g*(H_1 \cap H_2)*g^{-1} = H_1 \cap H_2$. Jadi dengan demikian terbukti bahwa $(H_1 \cap H_2, *)$ adalah normal.

3.1.2 Sifat-sifat Subgrup Normal

Teorema 3.1.2.1

Misal $(G,*)$ adalah grup. Misal $(H,*)$ adalah subgrup normal dari $(G,*)$ jika dan hanya jika $g*H*g^{-1} = H$ untuk setiap $g \in G$ (Raisinghania, 1980: 213).

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Akan dibuktikan: H subgrup Normal maka $\forall g \in G, g*H*g^{-1} = H$ jika $g \in G$, maka $g^{-1} \in G$.

H subgrup normal dari G berarti $\forall g \in G$ berlaku hubungan $g*H = H*g$.

Sehingga,

$$g*H = H*g$$

$(g*H)*g^{-1} = (H*g)*g^{-1}$ ………………… (dioperasikan dengan g^{-1} dari sebelah kanan)

$g*H*g^{-1} = H*(g*g^{-1})$ …………………..($*$ Assosiatif)

$g*H*g^{-1} = H*I$ ………………….. (Sifat Invers)

$g*H*g^{-1} = H$ …………………. (Sifat Identitas)

$(\Leftarrow)$ Akan dibuktikan: $\forall g \in G, g * H * g^{-1} = H \Rightarrow H$ subgroup normal.

H subgrup normal dari G berarti $\forall g \in G$ berlaku hubungan $g * H * g^{-1} = H$.

Sehingga,

$$g * H * g^{-1} = H$$

$(g * H * g^{-1}) * g = H * g$ ………………….(dioperasikan dengan g dari sebelah kiri)

$(g * H) * (g^{-1} * g) = H * g$ ……………….. ($*$ Assosiatif)

$(g * H) * I = H * g$ ……………….. (Sifat Invers)

$g * H = H * g$ ……………….. (Sifat Identitas)

Koset kiri = koset kanan

Jadi, H subgrup normal

Dari $(\Rightarrow)$ dan $(\Leftarrow)$ diperoleh bahwa H subgrup normal jika dan hanya jika $g * H * g^{-1} = H$

Teorema 3.1.2.2

Jika N suatu subgrup dari G, maka N adalah subgrup normal dari G jika dan hanya jika hasil operasi dua koset kanan dari N dalam G adalah koset kanan dari N dalam G pula (Raisinghania, 1980: 213).

Bukti:

Misal $(G, \circ)$ adalah grup normal

Misal $(N, \circ)$ adalah subgrup dari $(G, \circ)$

1) Akan dibuktikan: N subgrup normal dari $G \Rightarrow (N \circ a) \circ (N \circ b) = N \circ (a \circ b)$ untuk setiap $a, b \in G$. N subgrup normal dari G maka $N \circ a = a \circ N$ untuk setiap $a \in G$. Untuk setiap $a, b \in G$,

$$
\begin{aligned}
(N \circ a) \circ (N \circ b) &= N \circ (a \circ N) \circ b \\
&= N \circ (N \circ a) \circ b \\
&= (N \circ N) \circ (a \circ b) \\
&= N \circ (a \circ b)
\end{aligned}
$$

$a, b \in G$ dan $(G, \circ)$ adalah suatu grup, maka $(G, \circ) \in G$, berarti $N \circ (a \circ b)$ adalah koset kanan dari N dalam G. Jadi, hasil operasi dua koset kanan dari N adalah koset kanan dari N dalam G pula.

2) Akan dibuktikan: untuk $a, b, c \in G$, $(N \circ a) \circ (N \circ b) = N \circ c \Rightarrow N$ subgroup normal dari G.

Misal $i \in N$, karena $(N \circ a) \circ (N \circ b) = N \circ c$ maka $(i \circ a) \circ (i \circ b) = i \circ c \Rightarrow a \circ b = c$

Sehingga dari ketentuan $(N \circ a) \circ (N \circ b) = N \circ c$ diperoleh $(N \circ a) \circ (N \circ b) = N \circ (a \circ b)$ untuk setiap $a, b \in G$.

Ambil $b = a^{-1}$, maka

$$
\begin{aligned}
(N \circ a) \circ (N \circ a^{-1}) &= N \circ (a \circ a^{-1}) \\
&= N \circ i
\end{aligned}
$$

$(N \circ a) \circ (N \circ a^{-1}) = N$, karena $N = N \circ N$

$(N \circ a) \circ (N \circ a^{-1}) = N \circ N$

$$a \circ (N \circ a^{-1}) \ = N \text{ untuk setiap } a \in G$$

Ini berarti bahwa N adalah subgrup normal dari G .

3.2 Isomorfisme Subgrup Normal

3.2.1 Definisi Isomorfisme Subgrup Normal

Definisi 3.2.1

Diberikan fungsi ϕ, misal $(G,\circ)$ adalah grup. Misal $H_1 \in G \Rightarrow (H_1,\circ)$ dan $H_2 \in G \Rightarrow (H_2,\circ)$ adalah subgrup normal. Misal fungsi $\phi : H_1 \to H_2$. Pemetaan ϕ disebut isomorfisma subgrup normal jika dan hanya jika:

1) ϕ merupakan Homomorfisme

2) ϕ merupakan pemetaan bijektif

(Dummit dan Foote, 1991:35).

3.2.2 Sifat-sifat Yang Terkait Dengan Isomorfisme Subgrup Normal

Teorema 3.2.2.1

Diketahui H subgrup pada G dan N merupakan subgrup normal pada G, maka terdapat suatu ismomorfisma dari $HN|N$ ke $H|(H \cap N)$ (Dummit dan Foote, 1991:97).

Bukti:

Menurut Teorema 2.6.6, Teorema 2.6.8, dan Teorema 2.6.9, diperoleh $HN|N$ dan $H|(H \cap N)$ merupakan grup. Pembuktian adalah dengan menggunakan Teorema 2.7.2, yaitu dengan menjalankan langkah (i) sampai (vi) sebagai berikut:

(i). Dibentuk $G = HN$ dan $G^{'} = H|(H \cap N)$ merupakan grup

(ii). Dibentuk pengaitan $\phi : G \to G^{'}$ dengan $\phi(hn) = h(H \cap N)$ untuk setiap $hn \in HN$.

Akan ditunjukkan bahwa ϕ merupakan pemetaan. Misalkan $hn = h_1 n_1$ untuk suatu $h, h_1 \in H$ dan $n, n_1 \in H$. Dengan demikian diperoleh $h_1^{-1}h = n_1 n^{-1} \in N$ Karena $h_1^{-1}h \in H$ dan $h_1^{-1}h \in N$, diperoleh $h_1^{-1}h \in H \cap N$ dan dengan demikian $h_1(H \cap N) = h(H \cap N)$ atau dengan kata lain $\phi(hn) = \phi(h_1 n_1)$.

Jadi, terbukti bahwa ϕ merupakan pemetaan.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa ϕ merupakan homomorfisma. Diambil sebarang $h_1 n_1, h_2 n_2 \in HN$. Karena N merupakan subgrup normal, maka $n_1 h_2 = h_2 n_2$ untuk suatu $n_3 \in N$ dan dengan demikian

$(h_1 n_1)(h_2 n_2) = h_1(n_1 h_2)n_2 = h_1(h_2 n_3)n_2 = (h_1 h_2)(n_3 n_2)$.

Diperhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
\phi((h_1 n_1)(h_2 n_2)) &= \phi((h_1 n_1)(h_2 n_2)) \\
&= (h_1 h_2)(H \cap N) \\
&= (h_1(H \cap N))(h_2(H \cap N)) \\
&= \phi(h_1 n_1)\phi(h_2 n_2)
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa ϕ merupakan homomorfisma.

(iii). Diketahui $\phi(G) \subseteq G^{'}$

(iv). Dari Teorema 2.6.4, diperoleh $G|\ker(\phi)$ merupakan grup.

Jika $hn \in \ker(\phi)$, berakibat $\phi(hn) = (H \cap N)$atau dengan kata lain $h \in H \cap N$. Sehingga diperoleh $\ker(\phi) = \{hn | h \in H \cap N, n \in N\}$. Karena untuk sebarang $hn \in \ker(\phi)$, berlaku $h \in N$ dan $n \in N$ akibatnya $hn \in N$ dan dengan demikian $\ker(\phi) \subseteq N$. Jika dipilih $h = e$, maka untuk sebarang $n \in N$ berlaku $n = en \in \ker(\phi)$ dan dengan demikian $N \subseteq \ker(\phi)$. Jadi, karena berlaku $\ker(\phi) \subseteq N$ dan $N \subseteq \ker(\phi)$ maka dapat disimpulkan

bahwa $\ker(\phi) = N$.

(v). Dari Teorema 2.6.4, dapat dibentuk suatu homomorfisma surjektif dari G ke $G|\ker(\phi)$

(vi). Dari Teorema 2.7.1, dapat dibentuk suatu isomorfisma dari $G|\ker(\phi)$ ke $\phi(G)$

Dari langkah (i) sampai (vi), sesuai dengan Teorema 2.7.2 terbukti bahwa terdapat suatu isomorfisma dari $HN|N$ ke $\phi(HN)$

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa $\phi(HN) = H|(H \cap N)$, yaitu ϕ merupakan pemetaan surjektif. Diambil sebarang $y \in H|(H \cap N)$, maka $y = h(H \cap N)$ untuk suatu $h \in H$ dan dengan demikian dapat dipilih $x = he \in HN$ sehingga berlaku $\phi(x) = y$

Jadi, ϕ merupakan pemetaan surjektif sehingga menurut Teorema 2.7.3 terdapat suatu isomorfisma dari $HN|N$ ke $H|(H \cap N)$.

Teorema 3.2.2.2

Diketahui H dan K subgrup normal pada G. Jika K subgrup pada H, maka terdapat suatu isomorfisma dari $G|H$ ke $(G|K)|(H|K)$ (Dummit dan Foote, 1991:98).

Bukti:

Menurut Teorema 2.6.6, Teorema 2.6.8, dan Teorema 2.6.9, diperoleh $G|H$ dan $(G|K)|(H|K)$ merupakan grup. Pembuktian adalah dengan menggunakan Teorema 2.7.3, yaitu dengan menjalankan langkah (i) sampai (vi) sebagai berikut:

(i). Dibentuk G dan $G^{'} = (G|K)|(H|K)$ merupakan grup

(ii). Dibentuk pengaitan $\phi : G \to G^{'}$ dengan $\phi(a) = (aK)(H|K)$ untuk setiap $a \in G.$.

Jelas bahwa ϕ merupakan pemetaan. Diambil sebarang $a, b \in G$.

Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\phi(ab) &= ((ab)K)(H|K) \\
&= ((aK)(bK))(H|K) \\
&= ((aK)(H|K))((bK)(H|K)) \\
&= \phi(a)\phi(b)
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa ϕ merupakan homomorfisma.

(iii). Diketahui $\phi(G) \subseteq G^{'}$

(iv). Dari Teorema 2.6.4, diperoleh $G|\ker(\phi)$ merupakan grup.

Jika $x \in \ker(\phi)$, berakibat $\phi(x) = (H|K)$ atau dengan kata lain $xK \in H|K$.

Diperhatikan bahwa $xK \in H|K$ jika dan hanya jika $x \in H$. Jadi, diperoleh

$\ker(\phi) = H$

(v). Dari Teorema 2.6.5, dapat dibentuk suatu homomorfisma surjektif dari G ke $G|\ker(\phi)$

(vi). Dari Teorema 2.7.1, dapat dibentuk suatu isomorfisma dari $G|\ker(\phi)$ ke $\phi(G)$..

Dari langkah (i) sampai (vi), sesuai dengan Teorema 2.7.2 terbukti bahwa terdapat suatu isomorfisma dari $G|H$ ke $\phi(G)$..

Terakhir, akan ditunjukkan bahwa $\phi(G) = (G|K)|(H|K)$, yaitu ϕ merupakan pemetaan surjektif. Diambil sebarang $y \in (G|K)|(H|K)$, maka $y = (aK)(H|K)$ untuk suatu $a \in G$ dan dengan demikian dapat dipilih $x = a \in G$ sehingga berlaku $\phi(x) = y$.

Jadi, ϕ merupakan pemetaan surjektif sehingga menurut Teorema 2.7.3 terdapat suatu isomorfisma dari $G|H$ ke $(G|K)|(H|K)$.

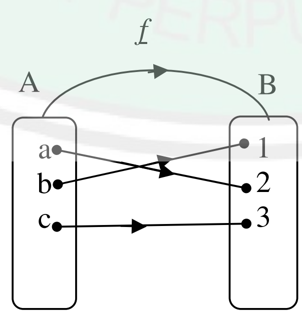
3.3 Kajian Isomorfisme Dalam Islam

Dalam kamus bahasa indonesia, yang dimaksud dengan isomorfisme adalah sama atau serupa. Sedangkan dalam Aljabar Abstrak, yang dimaksud dengan isomorfisme adalah suatu pemetaan dari himpunan pertama ke himpunan yang kedua yang memenuhi sifat-sifat homomorfisme dan bijektif. Dalam perspektif islam, kajian isomorfisme dapat kita lihat dalam surat An-Nahl ayat 97 sebagaimana berikut:

مَنْ عَمِلَ صَٰلِحًا مِّن ذَكَرٍ أَوْ أُنثَىٰ وَهُوَ مُؤْمِنٌ فَلَنُحْيِيَنَّهُۥ حَيَوٰةً طَيِّبَةً ۖ
وَلَنَجْزِيَنَّهُمْ أَجْرَهُم بِأَحْسَنِ مَا كَانُوا۟ يَعْمَلُونَ ﴿٩٧﴾

Artinya:"Barangsiapa yang mengerjakan amal saleh, baik laki-laki maupun perempuan dalam keadaan beriman, Maka Sesungguhnya akan kami berikan kepadanya kehidupan yang baik[839] dan Sesungguhnya akan kami beri balasan kepada mereka dengan pahala yang lebih baik dari apa yang Telah mereka kerjakan" (Q.S An-Nahl: 97)

Dalam ayat diatas dijelaskan bahwa ada dua golongan yaitu laki-laki dan perempuan dimana dalam Islam tidak ada perbedaan dalam mendapat pahala, dengan kata lain bahwa pahala yang didapat baik laki-laki maupun perempuan adalah sama, selain itu hakekat dari penciptaannyapun juga sama yaitu diciptakan dari unsur sari pati tanah, dan sama-sama beribadah kepada Allah SWT. Sedangkan yang membedakan dari kedua himpunan tersebaut yaitu faktor jenis kelaminnya. Hal ini dapat di gambarkan kedalam diagram sebagaimana berikut:



Gambar 3.1 *Isomorfisme Amal Perbuatan*

Keterangan:

A = Laki-Laki B = perempuan

a = pahala 1 = pahala

b = hakekat penciptaannya 2 = hakekat penciptaannya

c = beribadah 3 = beribadah

Dalam ayat lain disebutkan bahwa laki-laki dan perempuan, keduanya adalah sama yakni sama-sama manusia. Sebagaimana laki-laki berasal dari laki-laki dan perempuan, maka demikian pula halnya perempuan berasal dari laki-laki dan perempuan. Tidak ada kelebihan yang satu dari yang lain tentang penilaian iman dan amalnya. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Quran surat Al-Imron ayat 195 yang berbunyi:

فَٱسۡتَجَابَ لَهُمۡ رَبُّهُمۡ أَنِّي لَآ أُضِيعُ عَمَلَ عَٰمِلٖ مِّنكُم مِّن ذَكَرٍ أَوۡ أُنثَىٰۖ بَعۡضُكُم مِّنۢ
بَعۡضٖۖ فَٱلَّذِينَ هَاجَرُواْ وَأُخۡرِجُواْ مِن دِيَٰرِهِمۡ وَأُوذُواْ فِي سَبِيلِي وَقَٰتَلُواْ وَقُتِلُواْ
لَأُكَفِّرَنَّ عَنۡهُمۡ سَيِّـَٔاتِهِمۡ وَلَأُدۡخِلَنَّهُمۡ جَنَّٰتٖ تَجۡرِي مِن تَحۡتِهَا ٱلۡأَنۡهَٰرُ ثَوَابٗا مِّنۡ عِندِ
ٱللَّهِۚ وَٱللَّهُ عِندَهُۥ حُسۡنُ ٱلثَّوَابِ ١٩٥

Artinya:"Maka Tuhan mereka memperkenankan permohonannya (dengan berfirman): "Sesungguhnya Aku tidak menyia-nyiakan amal orang-orang yang beramal di antara kamu, baik laki-laki atau perempuan, (karena) sebagian kamu adalah turunan dari sebagian yang lain[259]. Maka orang-orang yang berhijrah, yang diusir dari kampung halamannya, yang disakiti pada jalan-Ku, yang berperang dan yang dibunuh, Pastilah akan Ku-hapuskan kesalahan-kesalahan mereka dan Pastilah Aku masukkan mereka ke dalam surga yang mengalir sungai-sungai di bawahnya, sebagai pahala di sisi Allah. dan Allah pada sisi-Nya pahala yang baik." (Q.S. Ali-Imron:195).

Selain itu, representase dari isomorfisme dapat kita jumpai pada surat Adz-Dzariyaat ayat 56 yang berbunyi:

وَمَا خَلَقۡتُ ٱلۡجِنَّ وَٱلۡإِنسَ إِلَّا لِيَعۡبُدُونِ ٥٦

Artinya:"Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku" (Q.S Adz-Dzariyaat: 56).

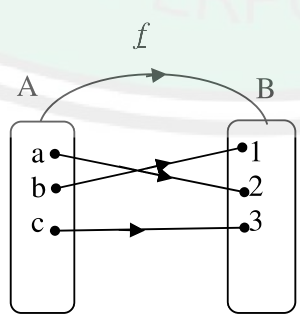
Berdasarkan ayat di atas, dapat diketahui bahwa ada dua himpunan semesta yaitu himpunan manusia dan himpunan jin. Meskipun hakekat penciptaannya berbeda tetapi tujuan penciptaannya sama yaitu untuk mengabdi kepada Allah SWT.

Kajian isomorfisme juga dapat direpresentasikan kedalam masalah pembagian warisan. Salah satunya yaitu pada surat An-Nisa ayat 11 sebagaimana berikut:

يُوصِيكُمُ ٱللَّهُ فِيٓ أَوۡلَٰدِكُمۡۖ لِلذَّكَرِ مِثۡلُ حَظِّ ٱلۡأُنثَيَيۡنِۚ فَإِن كُنَّ نِسَآءٗ فَوۡقَ ٱثۡنَتَيۡنِ
فَلَهُنَّ ثُلُثَا مَا تَرَكَۖ وَإِن كَانَتۡ وَٰحِدَةٗ فَلَهَا ٱلنِّصۡفُۚ وَلِأَبَوَيۡهِ لِكُلِّ وَٰحِدٖ مِّنۡهُمَا
ٱلسُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُۥ وَلَدٞۚ فَإِن لَّمۡ يَكُن لَّهُۥ وَلَدٞ وَوَرِثَهُۥٓ أَبَوَاهُ فَلِأُمِّهِ ٱلثُّلُثُۚ
فَإِن كَانَ لَهُۥٓ إِخۡوَةٞ فَلِأُمِّهِ ٱلسُّدُسُۚ مِنۢ بَعۡدِ وَصِيَّةٖ يُوصِي بِهَآ أَوۡ دَيۡنٍۗ ءَابَآؤُكُمۡ
وَأَبۡنَآؤُكُمۡ لَا تَدۡرُونَ أَيُّهُمۡ أَقۡرَبُ لَكُمۡ نَفۡعٗاۚ فَرِيضَةٗ مِّنَ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ عَلِيمًا
حَكِيمٗا ١١ ۞

Artinya:"11)Allah mensyari'atkan bagimu tentang (pembagian pusaka untuk) anak-anakmu. yaitu : bahagian seorang anak lelaki sama dengan bagahian dua orang anak perempuan; dan jika anak itu semuanya perempuan lebih dari dua, Maka bagi mereka dua pertiga dari harta yang ditinggalkan; jika anak perempuan itu seorang saja, Maka ia *memperoleh separo harta. dan untuk dua orang ibu-bapa, bagi masing-masingnya seperenam dari harta yang ditinggalkan, jika yang meninggal itu mempunyai anak; jika orang yang meninggal tidak mempunyai anak dan ia diwarisi oleh ibu-bapanya (saja), Maka ibunya mendapat sepertiga; jika yang meninggal itu mempunyai beberapa saudara, Maka ibunya mendapat seperenam. (Pembagian-pembagian tersebut di atas) sesudah dipenuhi wasiat yang ia buat atau (dan) sesudah dibayar hutangnya. (Tentang) orang tuamu dan anak-anakmu, kamu tidak mengetahui siapa di antara mereka yang lebih dekat (banyak) manfaatnya bagimu. Ini adalah ketetapan dari Allah. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana." (Q.S An-Nisaa: 11)*

Berdasarkan surat An-Nisaa ayat 11 di atas, dijelaskan bahwasanya Allah memerintahkan kepada umat manusia untuk berlaku adil, karena pada masa jahiliyah, orang-orang memberikan seluruh harta warisan hanya untuk laki-laki, tidak untuk perempuan. Maka Allah memerintahkan kesamaan diantara mereka dalam hal sama-sama mempunyai hak untuk menjadi ahli waris, dan membedakan bagian yang diperoleh diantara dua jenis tersebut, dimana bagian laki-laki sama dengan dua bagian perempuan. Hal itu disebabkan karena laki-laki bertanggungjawab atas nafkah, kebutuhan, usaha, dan resiko tanggung jawab (Tafsir Ibnu Katsir, 2007: 439)



Gambar 3.1 *Isomorfisme Hak Waris*

Keterangan:

A = Laki-Laki	B = perempuan
a = hak mendapat warisan	1 = hak mendapat warisan
b = hakekat penciptaannya	2 = hakekat penciptaannya
c = bagian yang diperoleh	3 = bagian yang diperoleh

BAB IV

PENUTUP

4.1 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan pada BAB III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa dikatakan subgrup normal jika dan hanya jika berlaku koset kiri sama dengan koset kanannya, sehingga dengan menggunakan contoh M_{12} terbukti bahwa hasil irisan dari dua buah subgrup normal adalah juga normal. Sedangkan dikatakan isomorfisme grup pada subgrup normal jika dan hanya jika komponennya itu adalah subgrup normal dan berlaku sifat homomorfisme dan bijektif.

4.2 SARAN

Hal-hal yang dibahas dalam skripsi ini hanya sebagian kecil dari isomorfisme grup pada subgrup normal. Oleh karena itu, diharapkan kepada para penulis yang lain untuk mengadakan penelitian secara lebih mendalam mengenai isomorfisme grup pada subgrup normal dengan mencari sifat-sifat yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.

Arifin, achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Aziz, Abdul. 2007. *Bumi Sholat Secara Matematis*. Malang: UIN Malang Press.

Aziz, Abdul dan Abdusysyakir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press

Bhattacharya, Jain, Nagpaul, S. R. 1994. *Basic Abstract Algebra.* Cambridge: Cambridge University Press.

Dummit, David S. dan Richard M. Foote. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Durbin, J. B. 1992. *Modern Algebra an Introduction Third Edition.* Singapure: John Wiley and Sonc, Inc.

Fraleigh, J. B. 1994. *A First Course In Abstract Algebra.* New York: Addison Wesley Publishing Company.

Gallian, J. A. 1990. *Contemporary Abstract Algebra Second Edition.* Toronto: D. C. Heath and Company Lexington, Massachus Etts.

Kahfi, M. S. 1997. *Geometri Transformasi I*. Malang: IKIP Malang.

Kerami, Djati dan Cormentyna Sitanggang. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Pinter, Carles C. 1990. *A Book of Abstract Algebra, Second Edition*. New York: Mc Graw-Hall Publishing Company.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Raishinghania, M. D. dan R. S. Aggarwal. 1980. *Modern Algebra. New Delhi*: S. Chand and Company Ltd.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 3 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Soebagio, Suhartidan Sukirman. 1993. *Struktur Aljabar*. Jakarta: UT.

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press

Team ahli tafsir. 2007. *Shahih Tafsir ibnu Katsir jilid 2*. Bogor: Pustaka ibnu katsir

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Maslahatul Umah
NIM : 04510006
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Kajian Isomorfisme Grup Pada Subgrup Normal
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	13 Maret 2009	Konsultasi Judul	1.	
2	17 April 2009	Konsultasi BAB I dan II		2.
3	11 Mei 2009	Revisi BAB I dan II	3.	
4	8 Juni 2009	Konsultasi BAB III		4.
5	22 Juni 2009	Revisi BAB III	5.	
6	06 Juli 2009	Konsultasi Keagamaan		6.
7	21 Juli 2009	Revisi Keagamaan	7.	
8	22 Juli 2009	ACC Keagamaan		8.
9	17 Juli 2009	Konsultasi Keseluruhan	9.	
10	21 Juli 2009	ACC Keseluruhan		10.

Malang, 25 Juli 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321