ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA
DENGAN METODE *MAKSIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh:

AHMAD MISBAHUSSURUR
NIM. 05510023

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DENGAN METODE *MAKSIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Universitas Islam Negeri
(UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

AHMAD MISBAHUSSURUR
NIM. 05510023

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

SURAT PERNYATAAN

KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : AHMAD MISBAHUSSURUR

NIM : 05510023

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Estimasi Parameter Distribusi Gamma Dengan Metode *Maksimum Likelihood*

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 September 2009

Yang membuat pernyataan,

Ahmad Misbahussurur

NIM. 05510023

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DENGAN METODE *MAKSIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh:

AHMAD MISBAHUSSURUR
NIM. 05510023

Telah Disetujui untuk Diuji :

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Sri Harini, M.Si	**Munirul Abidin, M.Ag**
NIP. 19731014 200112 2 002	**NIP. 19720420 200212 1 003**

Tanggal, 14 September 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA
DENGAN METODE *MAKSIMUM LIKELIHOOD*

SKRIPSI

Oleh:

AHMAD MISBAHUSSURUR
NIM. 05510023

Telah dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 30 September 2009

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1.	Penguji Utama	: Wahyu H. irawan, M.Pd	( )
2.	Ketua	: Abdussakir, M.Pd	( )
3.	Sekretaris	: Sri Harini, M.Si	( )
4.	Anggota	: Munirul Abidin, M.Ag	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

MOTTO

مَنْ جَدَّ وَجَدَ

"SOPO SENG SREGEP TINEMU"

العلم بلا عمل كاالشجر بلا ثمر

"ILMU TANPA PERBUATAN SEPERTI POHON TAK BERBUAH"

"BE THE BEST FROM THE BEST"

(Penulis)

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya kecil terbaik ini kepada:

Bapak Ibu yang tercinta, mas syaiful sekeluarga

dan adik-adikku tersayang (ulum dan lia), terima kasih atas kasih sayang, do'a, dan perhatiannya serta motivasinya yang tidak akan pernah penulis lupakan demi terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Semoga Allah membalas semua kebaikan

yang telah diberikan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillah segala puji bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah serta inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini yang berjudul "Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode *Maksimum Likelihood*" sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan S1 dan memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si).

Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah menuntun umatnya dari kegelapan menuju jalan yang terang-benderang yakni Ad-dinul Islam.

Selama penulisan skripsi ini penulis telah banyak mendapat bimbingan, masukan, motivasi dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan panghargaan tertinggi kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang .
3. Abdussakir, M.Pd selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Saintek Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Sri Harini, M.Si sebagai dosen pembimbing Matematika yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan, sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.

5. Munirul Abidin, M.Ag selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains Matematika dan Islam yang telah banyak memberi arahan kepada penulis.
6. Abdul Aziz, M.Si yang banyak memberi masukan dan motivasi dalam penulisan skripsi ini dan segenap Dosen Fakultas Sains dan Teknologi, khususnya dosen jurusan Matematika yang telah mendidik dan memberikan ilmunya yang tak ternilai harganya.
7. Wahyu Henky Irawan, M.Pd sebagai dosen wali matematika penulis yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, dan masukannya mulai dari awal masuk bangku perkuliahan sampai pada akhir penulisan skripsi ini.
8. Kedua orang tua penulis Bpk. Sholichin dan Ibu Kholilah yang senantiasa memberi semangat dan limpahan do'a serta pengorbanan yang tiada ternilai, sungguh kasang sayang mereka memberikan ketenangan dan motivasi dalam mengarungi arus kehidupan dunia ini.
9. Mas syaiful sekeluarga, adik Ulum dan Lia terima kasih banyak telah memotivasi dalam penulisan skripsi ini.
10. Segenap teman-teman matematika angkatan 2005 yang selalu menemani dalam sedih dan tawa terutama teman satu bimbingan skripsi yang telah memberikan banyak pengalaman dan memberikan motivasi dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
11. Terima kasih juga penulis sampaikan kepada teman-teman Asatidz TPQ NH, Hyumanaru-ibien dkk, dan teman-teman UKM Unior khususnya angkatan 2006, serta para jama'ah Musholla NH yang telah mendoakan dan memotivasi demi selesainya skripsi ini.

12. Seseorang yang sekarang dan selama ini ada dalam hati penulis begitu juga telah mengakui penulis dihatinya, semoga Allah melapangkan niat baik ini.
13. Semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung pada proses terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan semuanya. Amin.

Dengan segala kerendahan hati dan jiwa, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga kritik dan saran sangat penulis harapkan demi tercapainya suatu titik kesempurnaan.

Semoga skripsi dapat diambil manfaatnya terutama bagi penulis dan umumnya bagi yang membacanya. Amin.

Malang, 14 September 2009

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERNYATAAN ORISINALITAS
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGESAHAN
HALAMAN MOTTO
HALAMAN PERSEMBAHAN
KATA PENGANTAR i
DAFTAR ISI iv
DAFTAR TABEL vi
DAFTAR GRAFIK........ vii
ABSTRAK viii
BAB I : PENDAHULUAN........ 1
1.1. Latar Belakang........ 1
1.2. Rumusan Masalah........ 4
1.3. Tujuan Penelitian 4
1.4. Batasan Masalah 4
1.5. Manfaat Penelitian 5
1.6. Metode Penelitian 5
1.7. Sistematika Penulisan 7
BAB II :KAJIAN PUSTAKA 8
2.1. Peubah Acak dan Distribusinya........ 8
2.1.1 Peubah Acak........ 8
2.1.2 Distribusi Peubah Acak........ 8
2.1.2.1 Distribusi Peubah Acak Diskrit........ 8
2.1.2.2 Distribusi Peubah Acak Kontinu........ 9
2.2. Ekspektasi dan Variansi 10
2.2.1 Ekspektasi........ 10
2.2.2 Variansi 13

2.3. Estimasi Parameter 15
2.3.1 Sifat-Sifat Penduga 16
2.4. Maksimum Likelihood 18
2.4.1 Fungsi Likelihood 18
2.4.2 Estimasi Maksimum Likelihood 18
2.5. Fungsi Gamma dan Distribusi Gamma 19
2.5.1 Fungsi Gamma 19
2.5.2 Distribusi Gamma 23
2.6. Kajian Keagamaan 28
2.6.1 Estimasi dalam Al-Qur'an dan Al-Hadits 29
BAB III : PEMBAHASAN 33
3.1. Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode *maksimum likelihood* 33
3.2. Aplikasi Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Maksimum Likelihood 45
3.3. Kajian Keagamaan 52
3.3.1 Estimasi dalam Al-Qur'an 52
3.3.2 Kaitan Al-Qur'an dan Pembahasan 54
BAB IV : PENUTUP 59
4.1. Kesimpulan 59
4.2. Saran 60
DAFTAR PUSTAKA 61
LAMPIRAN-LAMPIRAN

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

Tabel 3.1 Data Umur Baterai Mobil dalam Satuan Tahun 45

Tabel 3.2 Nilai Rata-rata Umur Baterai Mobil..46

DAFTAR GRAFIK

Grafik Halaman

Grafik 3.1 Grafik Distribusi Gamma 51

ABSTRAK

Misbahussurur, Ahmad. 2009. **Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode *Maksimum Likelihood*.** Skripsi Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: Sri Harini, M.Si dan Munirul Abidin, M.Ag.

Kata kunci : Estimasi Parameter, Distribusi Gamma, Maksimum Likelihood.

Estimasi parameter merupakan suatu metode untuk mengetahui sekitar berapa nilai-nilai populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Nilai populasi yang ditaksir adalah suatu nilai rata-rata dengan notasi μ dan nilai simpangan baku dengan notasi σ.

Teori estimasi sendiri digolongkan menjadi estimasi titik *(Point Estimate)* dan pendugaan selang *(Interval Estimation)*. Estimasi titik yang cukup penting adalah metode maksimum likelihood. Metode ini mempunyai beberapa kriteria atau bersifat takbias (*unbias*), efisien dan konsisten, sehingga untuk mencapai estimasi titik yang baik dapat dicari dan diketahui dengan menggunakan metode estimasi *Maksimum Likelihood*.

Distribusi gamma dapat diestimasi dengan metode *Maksimum Likelihood* karena mempunyai suatu fungsi padat peluang kontinu. Sehingga langkah-langkah estimasi *Maksimum Likelihood* adalah: menentukan fungsi padat peluang, membentuk fungsi padat peluang ke dalam bentuk fungsi likelihood, membentuk fungsi likelihood ke dalam bentuk log likelihood, menurunkan fungsi log likelihood terhadap parameter yang mengikutinya yakni α dan β, dan menentukan estimasi dari parameter α dan β. Sehingga didapatkan $E(X)$ dari distribusi gamma adalah $\widehat{\alpha\beta}$ dan var(X) dari distribusi gamma adalah $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2$.

Setelah menentukan $\widehat{\alpha\beta}$ dan $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2$, maka dapat diketahui bahwa $\widehat{\alpha\beta}$ merupakan suatu estimasi dari $\alpha\beta$. Begitu juga $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2$ merupakan estimasi dari $\alpha\beta^2$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur’an merupakan sumber ilmu pengetahuan. Al-Qur’an telah menjelaskan dimensi baru dan aktual terhadap studi mengenai fenomena jagad raya dan membantu manusia melakukan terobosan terhadap batas penghalang dari alam materi. Al-Qur’an membawa manusia kepada Allah SWT melalui ciptaan-Nya dan realitas konkret yang terdapat di bumi dan di langit, (Rahman, 2000: 1).

Mengingat Al-Qur’an adalah kitab suci serta mu’jizat yang paling besar, maka Al-Qur’an mengajarkan segala macam pengetahuan termasuk matematika. Matematika membawa peran yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Berbagai bentuk simbol digunakan untuk membantu perhitungan, pengukuran, penilaian dan peramalan. Seperti yang telah termaktub dalam Al-Qur’an:

وَلَوْ أَنَّ لِلَّذِينَ ظَلَمُوا۟ مَا فِى ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا وَمِثْلَهُۥ مَعَهُۥ لَٱفْتَدَوْا۟ بِهِۦ مِن سُوٓءِ ٱلْعَذَابِ يَوْمَ
ٱلْقِيَـٰمَةِ ۚ وَبَدَا لَهُم مِّنَ ٱللَّهِ مَا لَمْ يَكُونُوا۟ يَحْتَسِبُونَ ﴿٤٧﴾

Artinya: “Dan Sekiranya orang-orang yang zalim mempunyai apa yang ada di bumi semuanya dan (ada pula) sebanyak itu besertanya, niscaya mereka akan menebus dirinya dengan itu dari siksa yang buruk pada hari kiamat. dan jelaslah bagi mereka azab dari Allah yang belum pernah mereka perkirakan”. {Q.S. Az-Zumar: 47}

Ayat di atas membicarakan tentang matematika. Salah satu cabang dari matematika terapan adalah statistika, yang menggunakan teori probabilitas sebagai alat analisis, memberikan perkiraan fenomena dan statistika digunakan dalam berbagai macam ilmu, (Rahman, 2000: 109).

Salah satu peran dan fungsi statistik dalam ilmu pengetahuan adalah sebagai alat analisis dan interpretasi data kuantitatif ilmu pengetahuan, sehingga didapatkan suatu kesimpulan dari data tersebut. Dalam statistik, estimasi adalah suatu metode untuk mengetahui sekitar berapa nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Nilai populasi sering disebut dengan parameter populasi, sedangkan nilai-nilai sampel sering disebut dengan statistik sampel. Dalam metode estimasi, parameter populasi yang ingin ditaksir itu adalah berupa nilai rata-rata yang diberi notasi μ dan nilai simpangan baku dengan notasi σ.

Teori estimasi sendiri digolongkan menjadi estimasi titik *(Point Estimate)* dan pendugaan selang *(Interval Estimation)*. Istilah statistik yang sering didengar adalah estimasi yang merupakan terjemahan dari kata *estimation.* Pada dasarnya, estimasi adalah suatu metode untuk mengetahui sekitar beberapa nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel.

Estimasi titik yang cukup penting adalah metode maksimum likelihood. Estimasi ini pertama kali dikembangkan oleh R.A Fisher tahun 1920. Estimasi yang digunakan disini merupakan contoh dari estimasi titik. Salah satu metode estimasi adalah Estimasi maksimum likelihood. Metode ini mempunyai beberapa kriteria seperti ketidakbiasan, efisiensi dan konsistensi.

Suatu metode yang bersifat umum dari estimasi titik *(Point Estimate)* dengan beberapa sifat teoritis yang lebih kuat dibandingkan dengan metode OLS *(Ordinary Least Square Estimator)* adalah kemungkinan terbesar *(Maximum Likelihood, ML)*. Ide umum maksimum likelihood adalah: Misalkan $f(x,\theta)$ merupkan fungsi kepadatan *(Density Function)* dari variabel random *X*, dan misalkan θ merupkan parameter fungsi kepadatan. Pada suatu pengamatan, jikaterdapat suatu sampel random X_1, X_2,… X_n , maka penaksir maksimum likelihood dari θ adalah nilai θ yang mempunyai probabilitas terbesar untuk menghasilkan sampel yang diamati. Dengan kata lain, estimasi maksimum likelihood dari θ adalah nilai yang memaksimumkan fungsi kepadatan $f(x,\theta)$.

Suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel disebut sebagai **peubah acak**. Jika suatu ruang sampel mengandung titik yang berhingga banyaknya atau sederetan anggota yang banyaknya sebanyak bilangan bulat, maka ruang sampel disebut **ruang sampel diskrit**. Dan bila ruang sampel mengandung titik sampel yang tak berhingga banyaknya dan banyaknya sebanyak titk pada sepotong garis, maka ruang sampel disebut **ruang sampel kontinu**. Suatu peubah acak kontinu mempunyai peluang nol pada setiap titik *x*. Jika menyangkut peubah kontinu, $f(x)$ dinamakan fungsi padat peluang atau disingkat dengan fungsi padat. Beberapa distribusi peluang kontinu khusus itu diantaranya adalah: Distribusi Normal, Distribusi Normal Baku, Distribusi Seragam, Distribusi Eksponensial, Distribusi Gamma, Distribusi Beta, Distribusi Khi Kuadrat, dan Distribusi Weibull, (Walpole & Myers, 1995: 51-60).

Atas dasar uraian diatas, penulis akan mengkaji estimasi disitribusi gamma dengan judul : **”Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode *Maksimum Likelihood*”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana estimasi parameter dari distribusi gamma dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood*?
2. Bagaimana hasil estimasi parameter distribusi gamma pada data umur baterai mobil dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan di atas, maka tujuan penelitian adalah:

1. Untuk mengetahui langkah-langkah estimasi parameter dari distribusi gamma dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood*.
2. Untuk mengetahui hasil estimasi parameter distribusi gamma pada data umur baterai mobil dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood*.

1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi permasalahan, maka peneliti memberikan batasan asumsi $X \sim G(x|\alpha, \beta, 0)$ dimana estimasi parameter α dan β akan dicari dengan metode *Maksimum Likelihood*, kemudian diaplikasikan pada data umur baterai mobil dalam satuan tahun yang telah dibulatkan sampai persepuluhan tahun yakni satu angka di belakang koma (bilangan desimal). Dalam menentukan estimasi parameter dari distribusi gamma ini digunakan sifat-sifat pendugaan yaitu unbias, efisien, dan konsisten.

1.5 Manfaat Penelitian

a. Bagi Penulis

Kegunaan bagi Penulis adalah dapat memperdalam pemahaman peneliti mengenai Statistik inferensi, khususnya pendugaan parameter distribusi gamma, dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji suatu permasalahan statistik dalam berbagai hal.

b. Bagi Pembaca

Sebagai bahan pertimbangan dan perbandingan mengenai analisis statistik matematika, dan sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang estimasi maksimum likelihood pada distribusi kontinu, khususnya dalam distribusi gamma.

1.6 Metode Penelitian

Jenis Penelitian ini adalah penelitian perpustakaan *(library research)*, yang bersifat menggali informasi, mengumpulkan data dengan bermacam-macam materi yang terdapat dalam perpustakaan, seperti buku, majalah, dokumen catatan dan kisah-kisah sejarah lainnya, (Mardalis, 1990: 28).

Adapun langkah-langkah meneliti pada skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan permasalahan dalam penelitian.
2. Mencari dan menggunakan literatur utama untuk dijadikan acuan pokok dalam pembahasan.
3. Mengumpulkan berbagai bahan literatur pendukung yang bisa digunakan untuk memperkuat literatur utama.

4. Mempelajari dan menelaah konsep teori yang ada pada literatur utama dan pendukung.
5. Membahas permasalahan yang telah ditentukan dalam penelitian dengan menggunakan suatu teori pada literatur utama dan pendukung untuk menjawab suatu permasalahan yang telah ditentukan. Sehingga untuk mempermudah pembahasan, maka penulis memberikan teknik analisa pembahasan yakni:
   a. Menentukan fungsi distribusi gamma.
   b. Menentukan estimasi parameter distribusi gamma dengan metode *Maksimum Likelihood* dengan cara:
      1. Menentukan fungsi padat peluang gamma.
      2. Menentukan fungsi likelihood dari fungsi padat peluang.
      3. Menentukan fungsi maksimum likelihood (log likelihood) dari fungsi distribusi.
      4. Menentukan penduga parameter α dan β dengan memaksimumkan fungsi maksimum likelihood dari fungsi distribusi yang telah ditentukan.
      5. Menentukan sifat-sifat penaksir takbias, konsisten dan efisien.
   c. Mensubstitusikan data umur baterai mobil ke dalam fungsi distribusi gamma, sehingga dapat diketahui nilai parameter pada data tersebut dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood*.
6. Membuat kesimpulan. Kesimpulan merupakan jawaban singkat dari permasalahan.

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan ini terdiri dari empat bab, pada masing-masing bab terdapat subbab, dengan susunan sebagai berikut:

BAB I : Pendahuluan, yang meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : Kajian pustaka, kajian yang berisi tentang teori-teori yang ada kaitannya dengan hal-hal yang akan dibahas oleh penulis diantaranya adalah peubah acak diskrit dan kontinu, pendugaan parameter, metode *Maksimum Likelihood*, distribusi gamma, dan beberapa definisi serta pengertian penting baik dalam segi matematika maupun dalam segi keagamaan yang diambil dari berbagai literatur (buku, majalah, internet, dan lain-lain) yang berkaitan dengan penelitian.

BAB III : Pembahasan, pada bab ini berisi tentang uraian pendugaan parameter yang meliputi: menentukan penduga parameter dari distribusi gamma dengan metode *Maksimum Likelihood*, menentukan penduga parameter dari data yang telah diambil, dan menentukan sifat-sifat pendugaan parameter metode *Maksimum Likelihood*. Pada bab ini juga membahas tentang kaitan ayat-ayat Al-Qur’an dengan estimasi parameter.

BAB IV: Penutup, pada bab ini penulis membuat suatu kesimpulan, dan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Peubah Acak dan Distribusinya

2.1.1 Peubah Acak

Peubah acak atau variabel acak merupakan hasil-hasil prosedur penyampelan acak (*random sampling*) atau eksperimen acak dari suatu data yang telah dianalisis secara statistik. Peubah acak dapat dinyatakan dengan huruf besar, misal X, sedangkan nilai dari peubah acak dinyatakan dengan huruf kecil padanannya, misal x.

Definisi 2.1 :

Peubah acak ialah suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel, (Walpole & Myers, 1995: 51).

2.1.2 Distribusi Peubah Acak

2.1.2.1 Distribusi Peubah Acak Diskrit

Seringkali untuk memudahkan suatu perhitungan semua probabilitas peubah acak dinyatakan dalam suatu fungsi nilai-nilai X seperti $f(x)$ yaitu $f(x)=P(X=x)$. Pada peubah acak diskrit, setiap nilainya dikaitkan dengan probabilitas. Himpunan pasangan berurutan $[x,f(x)]$ disebut distribusi probabilitas peubah acak X. Sebuah distribusi yang mencantumkan semua kemungkinan nilai peubah acak diskrit berikut probabilitasnya disebut probabilitas diskrit, (Wibisono, 2005: 224).

Suatu peubah acak diskrit dapat dinyatakan sebagai:

$$F(x) = \sum px_x\,(x) \tag{2.1}$$

Definisi 2.2 :

Himpunan pasangan terurut (x,$f(x)$) merupakan suatu fungsi peluang, fungsi massa peluang, atau distribusi peluang peubah acak diskrit X bila, untuk setiap kemungkinan hasil x:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$ (Walpole & Myers, 1995 :54)

Definisi 2.3 :

Jika peubah X dapat menerima suatu himpunan diskrit dari nilai-nilai $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan probabilitas masing-masing $P_1, P_2, \ldots P_n$, dimana $P_1+P_2+\ldots+P_n = 1$, maka suatu fungsi $f(X)$ yang mempunyai nilai masing-masing $P_1, P_2, \ldots P_i$ untuk $X_1, X_2, \ldots, X_i$ disebut fungsi probabilitas. Sehingga dapat dituliskan dengan $f(X) = P(X = X_i)$, yaitu probabilitas P nilai peubah X ke-i (yaitu X_i) sama dengan $f(X)$, (Turmudi & Harini, 2008: 176).

2.1.2.2 Distribusi Peubah Acak Kontinu

Distribusi probabilitas bagi peubah acak kontinu tidak dapat disajikan dalam bentuk tabel, akan tetapi distribusinya dapat dinyatakan dalam persamaan yang merupakan fungsi nilai-nilai peubah acak kontinu dan digambarkan dalam bentuk kurva, (Wibisono,2005:226).

Suatu peubah acak kontinu dapat dinyatakan sebagai:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx \tag{2.2}$$

Definisi 2. 4 :

Fungsi *f*(*x*) adalah fungsi padat peluang peubah acak kontinu *X*, yang didefinisikan atas himpunan semua bilangan real *R*, bila

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in$ R.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$ (Walpole & Myers, 1995 :60)

2.2 Ekspektasi dan Variansi

2.2.1 Ekspektasi

Ekspektasi peubah acak *X*, dinyatakan dengan *E*(*X*) sehingga definisi ekspektasi adalah:

Definisi 2. 5 :

Misalkanlah *X* suatu peubah acaka dengna distribusi peluang *f*(*x*), maka nilai harapannya atau rataan *X* ialah:

$$E(X) = \mu = \sum_x x\, f(x) \tag{2.3}$$

(Walpole & Myers, 1995 :94).

Definisi 2. 6 :

Jika *X* adalah suatu peubah acak kontinu dan *f(x)* adalah fungsi padat peluang dari *x*, maka nilai ekspektasi dari peubah acak *X* adalah:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x\,(x) dx \qquad (2.4)$$

(Dudewich & Mishra,1995: 246).

Definisi 2.7 :

Misalkan X suatu peubah acak dengan fungsi padat peluang f dan g suatu fungsi dari X. Nilai harapan dari X adalah:

$$E[g(X)] = \sum g(x)f(x) \qquad \text{untuk } X \text{ diskrit, dan} \qquad (2.5)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\, dx \qquad \text{untuk } X \text{ kontinu.} \qquad (2.6)$$

(Barnes, 1994 : 100)

Teorema 2. 1 :

Bila a dan b konstanta, maka

$$E(aX + b) = a\, E(X) + b \qquad (2.7)$$

(Walpole & Myers, 1995 :60)

Bukti:

Dengan menggunakan Definisi 2.7, maka

$$E(aX\ +\ b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)\ f(x)\ 1\ x$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx +\ b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

$$= aE(x)\ +\ b \cdot 1$$

$$= aE(x)\ +\ b$$

Jadi, terbukti bahwa $E(aX + b) = aE(x) + b$, sehingga berakibat

1) Bila $a = 0$ maka $E(b) = b$

2) Bila $b = 0$ maka $E(aX) = aE(X)$

Teorema 2. 2 :

Sifat-sifat harapan matematika (ekspektasi).

Bila c suatu tetapan dan $g(X)$, $g_1(X)$, $g_2(X)$ suatu fungsi yang harapannya ada, maka:

1. $E(c) = c$;
2. $E(cg(X)) = cEg(X)$;
3. $E(g_1(X) + g_2(X)) = Eg_1(X) + E\, g_2(X)$;
4. $Eg_1(X) \leq Eg_2(X)$ jika $g_1(x) \leq g_2(x)$ untuk semua x;
5. $|Eg(X)| \leq E|g(X)|$

Bukti:

$$1.\ E(c) = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)\, dx$$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \quad \text{(Menurut Definisi 2.4, } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1\text{)}$$

$$= c \cdot 1$$

$$= c$$

$$2.\ E\big(cg(X)\big) = \int_{-\infty}^{\infty} cg(x)\, f(x)\, dx$$

$$= c\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$$

$$= cEg(X)$$

3. $E\left(g_1(X) + g_2(X)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(g_1(x) + g_2(x)\right) f(x)dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(g_1(x)\right) f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \left(g_2(x)\right) f(x)dx$$

$$= E\left(g_1(X)\right) + E\left(g_2(X)\right)$$

Sesuai dengan sifat integral, $\int (a+b)\, x\, dx = \int ax\, dx + \int bx\ dx,$

dengan a dan b adalah suatu konstanta.

4. $Eg_1(X) \leq Eg_2(X)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)\, f(x)dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)\, f(x)dx, jika\ g_1(x) \leq g_2(x)$$

(Dudewich & Mishra,1995: 249)

Sifat-sifat ini juga dapat dibuktikan untuk peubah acak diskrit dengan cara yang sama.

2.2.2 Variansi

Variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dengan Var (X) atau σ^2 bila tidak ada keraguan mengenai peubah acak yang dimaksud.

Definisi 2.8 :

Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ, makaVar (X) = σ^2 adalah:

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \tag{2.8}$$

bila X diskrit

dan

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx \qquad (2.9)$$

bila X kontinu (Walpole & Myers, 1995 : 104)

Teorema 2. 3 :

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2 \qquad (2.10)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= E(X-\mu)^2 \\
&= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 \\
&= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}$$

Teorema 2. 4 :

$$\text{Var}(aX+b) = a^2\,\text{var}(X) \qquad (2.11)$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(aX+b) &= E[(aX+b) - E(aX+b)]^2 \\
&= E[a(X) + b - aE(X) + b]^2 \\
&= E[a(X) - aE(X) + b - b]^2 \\
&= E[a(X) - aE(X)]^2 \\
&= E[a(X - E(X))]^2 \\
&= E[a^2(X-\mu)^2] \\
&= a^2E[(X-\mu)^2] \\
&= a^2\,\text{var}(X)
\end{aligned}$$

(Dudewich & Mishra,1995:255)

2.3 Estimasi Parameter

Parameter didefinisikan sebagai hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari suatu populasi. Disisi lain karakteristik sampel didefinisikan sebagai statistik. Sebagai contoh adalah rata-rata populasi (*population mean*) μ, varians populasi (*population variance*) σ^2, dan koefisian korelasi populasi (*population correlation coefficient*) ρ. Parameter biasanya tidak diketahui, dan dengan statistiklah harga-harga parameter itu diduga (ditaksir) atau diestimasi. Sebagai contoh adalah rata-rata sampel $\bar{x}$ digunakan untuk menaksir rata-rata populasi μ yang tidak diketahui dari pengambilan sampel suatu populasi. Dalam statistik non-parametrik, parameter yang cukup menarik untuk dikaji adalah median populasi. Parameter ini sering digunakan dalam analisis statistik non-parametrik untuk menggantikan rata-rata populasi sebagai ukuran untuk lokasi atau tendensi sentral yang lebih disukai.

Pendugaan (*estimasi*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel random, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui, (Hasan, 2002: 111).

Menurut Yitnosumarto (1990:211-212), penduga (*estimator*) adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari semua contoh disebut nilai duga (*estimate*).

Misalkan terdapat sebuah peubah acak X yang mengikuti sebaran tertentu dengan nilai yang diamati $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$. jika nilai-nilai pengamatan mempunyai peluang yang sama untuk diperoleh, maka nilai tengahnya:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

yang merupakan suatu penduga titik (*point estimate*) dari nilai tengah populasi μ. Penduga titik ini seringkali dicatat dengan $\hat{\mu}$ (*miu topi*) karena merupakan penduga dari μ, (Yitnosumarto, 1990: 212).

2.3.1 Sifat-Sifat Penduga

1. Tak bias (*unbiased*)

   Satu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan adalah penduga harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan terdapat parameter θ. Jika $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter θ, maka $E(\hat{\theta}) = \theta$, (Yitnosumarto,1990: 212).

2. Efisien

   Suatu penduga (misalkan: $\hat{\theta}$) dikatakan efisien bagi parameter (θ) apabila penduga tersebut mempunyai varians yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai varian terkecil. Dua penduga dapat dibandingkan efisiensinya dengan menggunakan efisiensi relative (*Relative efficiency*). Efisiensi relatif $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan:

$$\mathrm{R}\left(\hat{\theta}_2,\hat{\theta}_1\right)=\frac{E\left(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2-\hat{\theta}\right)^2}$$

$$=\frac{E\left(\hat{\theta}_1-E\left(\hat{\theta}_1\right)\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2-E\left(\hat{\theta}_2\right)\right)^2}$$

$$=\frac{\operatorname{var}\hat{\theta}_1}{\operatorname{var}\hat{\theta}_2}$$

$R=\frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_2}$, jika R >1 maka $\hat{\theta}_1>\hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$, dan jika R<1 maka $\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

3. Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten jika memenuhi syarat di bawah ini:

1) Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi, $\left(\hat{\theta}\right)$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika: $\mathrm{E}\left(\hat{\theta}-\mathrm{E}(\theta)\right)^2\rightarrow 0$ jika $n\rightarrow\infty$.

2) Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus diatas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1, (Hasan, 2002: 113-115).

2.4 Maksimum Likelihood

2.4.1 Fungsi Likelihood

Definisi 2.9 :

Fungsi likelihood dari n variabel acak $x_1,\ x_2,...,x_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel random. Fungsi kepadatan bersama $f_{x_1,...,x_n}(x_1,...,x_n;\theta)$, yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $x_1,...,x_n$ adalah sampel random dari fungsi kepadatan $f(x;\theta)$, maka fungsi likelihoodnya adalah $f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)...f(x_n;\theta)$, (Mood, Graybill and Boes, 1986:278).

2.4.2 Estimasi Maksimum Likelihood

Suatu pendugaan bersifat unbias, efisien dan konsisten dapat diketahui dengan menggunakan suatu metode yaitu metode *Maksimum Likelihood*. Metode tersebut sering memberikan hasil (penaksir) yang baik.

Definisi 2.10 :

Misalkan $X_1, X_2,..., X_n$ peubah acak dengan fungsi distribusi $F(x_1,x_2,...,x_n\mid\theta)$ dengan $\theta\in\Theta$ yang tidak diketahui, maka fungsi likelihood ialah:

$$L(\theta)=\begin{cases} f(x_1,x_2,...,x_n\mid\theta), \text{ jika } F \text{ mempunyai fungsi padat } f \\ p(x_1,x_2,...,x_n\mid\theta), \text{ jika } F \text{ mempunyai fungsi padat } p \end{cases}$$

Untuk Setiap $\hat{\theta}=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,...,X_n)\in\Theta$ sehingga

$L(\hat{\theta})=\sup\{L(\theta):\theta\in\Theta\}$ disebut maximum likelihood estimation.

(Dudewicz dan Mishra, 1995: 412)

2.5 Fungsi Gamma dan Distribusi Gamma

2.5.1 Fungsi Gamma

Defnisi 2.11 :

Fungsi gamma didefinisikan

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad \text{untuk } \alpha > 0 \tag{2.12}$$

Teorema 2.5 :

Jika $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$, maka

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Bukti:

1. $$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty x^{1-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} dx$$

$$= -e^{-x} \Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{e^x} \Big|_0^\infty$$

$$= -0 - (-1)$$

$$= 1$$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1}\, e^{-x} dx$

$$= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

Misal $x = u^2$, $dx = 2u\ du$

$$= \int_0^\infty (u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2} 2u\ du$$

$$= \int_0^\infty u^{-\frac{2}{2}} e^{-u^2} 2u\ du$$

$$= \int_0^\infty u^{-1}\, e^{-u^2} 2u\ du$$

$$= \int_0^\infty u^{-1}\, e^{-u^2} 2u\ du$$

$$= \int_0^\infty 2u\, u^{-1}\, e^{-u^2} du$$

$$= 2 \int_0^\infty u^{1-1}\, e^{-u^2} du$$

$$= 2 \int_0^\infty u^0\, e^{-u^2} du$$

$= 2 \int_0^\infty e^{-u^2}\, du$, Karena $\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, maka

$$= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\pi}$$ (Sjamsul Kislam, 1994:49)

Dengan manipulasi kalkulus pada tekhnik pengintegralan, maka diperoleh:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u\, dv \;= u\, v - \int_0^\infty v\, du$$

Dimana,

$$u = x^{\alpha-1}$$

$$du = (\alpha-1)x^{\alpha-1-1}dx$$

$$= (\alpha-1)x^{\alpha-2}dx$$

$$dv = e^{-x}dx$$

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\, dx$$

$$= -e^{-x} + c \Big|_0^\infty$$

Sehingga,

$$\Gamma(\alpha) = x^{\alpha-1}\ (-e^{-x} + c \Big|_0^\infty) - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}\, dx$$

$$= x^{\alpha-1}\ (-\frac{1}{e^{x}} \Big|_0^\infty) - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}\, dx$$

$$= x^{\alpha-1} - \frac{1}{e^{x}} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{e^{x}} x^{\alpha-1} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\, dx$$

$$= -\frac{x^{\alpha-1}}{e^{x}} \Big|_{0}^{\infty} - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx$$

$$= -\frac{\infty^{\alpha-1}}{e^{\infty}} - \frac{0^{\alpha-1}}{e^{0}} - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx$$

$$= -\frac{\infty^{\alpha-1}}{\infty} - \frac{0}{1} - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx$$

$$= -\infty^{\alpha-1}\frac{1}{\infty} - 0 - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx$$

$$= -\infty^{\alpha-1}\,0 - 0 - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx$$

$$= 0 - 0 - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)x^{\alpha-2}\,dx$$

$$= 0 - \int_0^\infty - e^{-x}(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}\,dx$$

$$= 0 + (\alpha-1)\int_0^\infty e^{-x}\; x^{\alpha-2}\,dx$$

$$= 0 + (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}\; e^{-x}\,dx$$

Untuk α > 1, menghasilkan rumus berulang:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2}\; e^{-x}\,dx$$

$$= (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$$

Dengan menggunakan rumus berulang diatas, maka:

$$\Gamma(\alpha-1) = \int_0^\infty x^{\alpha-2}\,e^{-x}dx$$

$$= (\alpha-2)\int_0^\infty x^{\alpha-3}\,e^{-x}d$$

$$= (\alpha-2)\,\Gamma(\alpha-2)$$

Sehingga diperoleh:

$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1)$

$= (\alpha - 1)(\alpha - 2)\,\Gamma(\alpha - 2)$

$= (\alpha - 1)(\alpha - 2)\,(\alpha - 3)\,\Gamma(\alpha - 3)$

$= (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(\alpha - 4)\,\Gamma(\alpha - 4),$

$= (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha - 3)(\alpha - 4)(\alpha - 5)\Gamma(\alpha - 5)$,dan seterusnya.

Jika $\alpha = n$, dimana n bilangan bulat positif, maka dapat dituliskan:

$\Gamma(n) = (n - 1)\,\Gamma(n - 1)$

$= (n - 1)\,(n - 2)\,\Gamma(n - 2)$

$= (n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)\,\Gamma(n - 3)$

$= (n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)\,(n - 4)\,\Gamma(n - 4)$

$= (n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)\,(n - 4)\,(n - 5)\,\Gamma(n - 5)$

$= (n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)\,(n - 4)\,(n - 5), \ldots, \Gamma\,(1).$

Sehingga,

$\Gamma(n) = (n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)\,(n - 4)\,(n - 5), \ldots, \Gamma(1)$

$= (n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3)\,(n - 4)\,(n - 5) \ldots 1$

$= (n - 1)!$

2.5.2 Distribusi Gamma

Defnisi 2.12 :

Misalkan X suatu peubah acak kontinu berdistribusi gamma dengan parameter α dan β, bila bentuk fungsi padatnya

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{\frac{-x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & , \text{untuk x selainnya} \end{cases} \qquad (2.13)$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, (Walpole & Myers, 1995: 190).

Pentingnya distribusi gamma dapat diketahui pada kenyataan bahwa distribusi gamma merupakan suatu keluarga distribusi yang distribusi lainnya merupakan hal khusus. Terapan penting distribusi gamma ini pada teori reliabilitas (uji keandalan) dan waktu menunggu. Peubah acak yang fungsi padatnya diberikan distribusi gamma adalah waktu atau ruang terjadinya sesuatu sampai sejumlah tertentu kejadian poisson terjadi, (Walpole & Myers, 1995: 193).

Teorema 2.6 :

Bila X berdistribusi gamma $X \sim G(x|\alpha, \beta, 0)$ maka rataan dan variansi distribusi gamma adalah:

$$\mu = E(X) = \alpha\beta \text{ dan } \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

Bukti:

$$\mu = E(X^r)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_x(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^r \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1+r}\, e^{\frac{-x}{\beta}} dx$$

Misalkan $y = \frac{x}{\beta}$, $\frac{y}{dx} = \frac{1}{\beta}$ dan $x = y\beta$, $dx = \beta\, dy$

sehingga,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\ (y\beta)^{\alpha-1+r}\ e^{-y} \beta\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\ \beta^{\alpha-1+r}\ y^{\alpha-1+r}\ e^{-y} \beta\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1+r}}{\beta^{\alpha}\, \Gamma(\alpha)}\ y^{\alpha-1+r}\ e^{-y} \beta\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1+r}}{\beta^{\alpha}\, \beta^{-1}\, \Gamma(\alpha)}\ y^{\alpha-1+r}\ e^{-y} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1+r}}{\beta^{\alpha-1}\, \Gamma(\alpha)}\ y^{\alpha-1+r}\ e^{-y} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1}\ \beta^{r}}{\beta^{\alpha-1}\, \Gamma(\alpha)}\ y^{\alpha-1+r}\ e^{-y} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}} \frac{\beta^{r}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1+r}\ e^{-y} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{r}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1+r}\ e^{-y} dy$$

$$= \frac{\beta^{r}}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\alpha-1+r}\ e^{-y} dy$$

$$= \frac{\beta^{r}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + r)$$

$$= \frac{\beta^{r}\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)}$$

Ambil r = 1 dan r = 2, maka persamaan diatas menjadi

$$\mu = E(X) = \frac{\beta\,\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta(\alpha!)}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \frac{\beta\,\alpha\,(\alpha - 1)!}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \beta\alpha$$

$$= \alpha\beta$$

Jadi, $\mu = E(X) = \alpha\beta$

$$E(X^2) = \frac{\beta^2\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha + 1)!}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha + 1)\,\big((\alpha + 1) - 1\big)!}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha + 1)\big((\alpha + 1) - 1\big)\Big(\big((\alpha + 1) - 1\big) - 1\Big)!}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha + 1)\,\alpha\,\big((\alpha + 1) - 2\big)!}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha + 1)\,\alpha\,(\alpha - 1)!}{(\alpha - 1)!}$$

$= \beta^2 (\alpha + 1)\alpha$

$= \beta^2(\alpha^2 + \alpha)$

$= \beta^2 \alpha^2 + \alpha\beta^2$

Sehingga σ^2 = Var (X) adalah:

$\sigma^2 =$ Var (X) $= E(X^2) - E(X)^2$

$= \beta^2 \alpha^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2$

$= \beta^2 \alpha^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2 \beta^2$

$= \alpha\beta^2 + \beta^2 \alpha^2 - \beta^2 \alpha^2$

$= \alpha\beta^2$

Dari $E(X) = \alpha\beta$, $E(X^2) = \beta^2 \alpha^2 + \alpha\beta^2$ dan σ^2 = Var (X) = $\alpha\beta^2$ dapat diperoleh suatu nilai α dan β, yakni;

Diketahui bahwa $E(X) = \frac{\sum x_i}{n}$

Karena $E(X) = \bar{X} = \alpha\beta$

Sehingga,

$$\frac{\sum x_i}{n} = \alpha\beta$$

$$\alpha = \frac{\frac{\sum x_i}{n}}{\beta}$$

$$\alpha = \frac{\bar{X}}{\beta}$$

$$\alpha = \bar{X}\beta^{-1}$$

Untuk $E(X^2) = \beta^2\alpha^2 + \alpha\beta^2$

Karena $E(X^2) = \frac{\sum x_i^2}{n}$

Sehingga,

$$\frac{\sum x_i^2}{n} = \beta^2\alpha^2 + \alpha\beta^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$$

$$= (\bar{X}\beta^{-1})^2\beta^2 + (\bar{X}\beta^{-1})\,\beta^2$$

$$= \left(\frac{\bar{X}}{\beta}\right)^2\beta^2 + \frac{\bar{X}}{\beta}\beta^2$$

$$= \frac{\bar{X}^2}{\beta^2}\beta^2 + \bar{X}\beta$$

$$= \bar{X}^2 + \bar{X}\beta$$

$$\bar{X}\beta = \frac{\sum x^2}{n} - \bar{X}^2$$

$$\beta = \frac{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2}{\bar{X}}$$

$$\beta = \frac{\frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n}}{\bar{X}}$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}$$

2.6 Kajian Keagamaan

Al-Qur'an merupakan suatu sumber tentang khazanah ilmu pengetahuan. Dalam Al-Qur'an telah diungkapkan bahwa ilmu pengetahuan dan Al-Qur'an adalah dua aspek kebenaran yang sama, dan tidak ada pertentangan di antara keduanya. Wahyu pertama Al-Qur'an yang diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW adalah menuntut ilmu perngetahuan dan menekankan pentingnya arti belajar dalam kehidupan umat manusia (96: 1-5). Al-Qur'an juga menganjurkan manusia untuk berdoa semoga Allah SWT menambah ilmu pengetahuan kepadanya (20 : 114). Salah satu ilmu pengetahuan tentang bilangan dan ilmu hisab adalah matematika. Matematika dikaitkan langsung dengan bilangan pokok dari keimanan, yakni bilangan angka "satu". Dalam Al-Qur'an surat Al-Ikhlas ayat 1 disebutkan:

قُلۡ هُوَ ٱللَّهُ أَحَدٌ ١

Artinya: Katakanlah: "Dia-lah Allah, yang Maha Esa. (Rahman, 2000: V–VI)

Matematika sangat erat kaitannya dengan perhitungan. Sehingga ada yang berpendapat bahwa matematika adalah ilmu hitung atau ilmu *al-hisab*. Allah SWT adalah raja dari segala sesuatu yang telah diciptakannya, bahkan dalam hal perhitungan, Allah SWT sangat cepat menghitung dan sangat teliti.

2.6.1 Estimasi Dalam Al-Qur'an dan Al-Hadits

Statistik merupakan cabang ilmu matematika yang berkaitan dengan pengumpulan data, pengolahan data, analisa data, dan penarikan kesimpulan data. Ayat-ayat Al-Qur'an yang berthubungan dengan masalah statistik terdapat pada surat Al-Baqarah ayat 261:

مَّثَلُ ٱلَّذِينَ يُنفِقُونَ أَمْوَٰلَهُمْ فِى سَبِيلِ ٱللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنۢبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلَ فِى كُلِّ سُنۢبُلَةٍ مِّا۟ئَةُ حَبَّةٍ ۗ وَٱللَّهُ يُضَٰعِفُ لِمَن يَشَآءُ ۗ وَٱللَّهُ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

Artinya: "Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha mengetahui.(2: 261)"

Estimasi dalam statistik diartikan sebagai pendugaan parameter. Di dalam Al-Quran terdapat suatu ayat yang menjelaskan tentang estimasi. Seperti yang disebutkan dalam surat Az-Zumar ayat 47:

وَلَوْ أَنَّ لِلَّذِينَ ظَلَمُوا۟ مَا فِى ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا وَمِثْلَهُۥ مَعَهُۥ لَٱفْتَدَوْا۟ بِهِۦ مِن سُوٓءِ ٱلْعَذَابِ يَوْمَ ٱلْقِيَٰمَةِ ۚ وَبَدَا لَهُم مِّنَ ٱللَّهِ مَا لَمْ يَكُونُوا۟ يَحْتَسِبُونَ ﴿٤٧﴾

Artinya: "Dan Sekiranya orang-orang yang zalim mempunyai apa yang ada di bumi semuanya dan (ada pula) sebanyak itu besertanya, niscaya mereka akan menebus dirinya dengan itu dari siksa yang buruk pada hari kiamat. dan jelaslah bagi mereka azab dari Allah yang belum pernah mereka perkirakan".{Q. S. Az-Zumar: 47}

Dari ayat diatas dapat diketahui bahwa, kaitan ayat tersebut dengan metode estimasi (perkiraan) adalah terletak pada lafadh "يحتسبون ". Karena pada ayat tersebut sudah tampak jelas bahwa adzab dan hukuman dari Allah SWT kepada mereka adalah sesuatu yang tidak pernah terlintas dalam pikiran dan perkiraan mereka. Dalam Al-Qur'an Surat Ali-'Imran ayat 24 juga disebutkan:

ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا۟ لَن تَمَسَّنَا ٱلنَّارُ إِلَّآ أَيَّامًا مَّعْدُودَٰتٍ ۖ وَغَرَّهُمْ فِى دِينِهِم مَّا كَانُوا۟ يَفْتَرُونَ ﴿٢٤﴾

Artinya: "Hal itu adalah karena mereka mengaku: "Kami tidak akan disentuh oleh api neraka kecuali beberapa hari yang dapat dihitung". mereka diperdayakan dalam agama mereka oleh apa yang selalu mereka ada-adakan". {Q. S. Ali-'Imran: 47}

Kaitan dari ayat tersebut dengan metode estimasi (pendugaan) terletak pada lafadh "الا اياما معدودت", yang dimaksud pada lafadz tersebut adalah hari-hari yang terbilang (tertentu). Pada ayat tersebut tidak dijelaskan secara jelas lama waktu ketika orang yahudi meentukan masa akan disentuh oleh api neraka, akan tetapi hanya tertulis ”beberapa hari saja”.

Yang dimaksudkan dengan hari-hari disini oleh ucapan orang-orang yahudi adalah 40 hari, yaitu hari-hari mereka ketika mereka menyembah anak-anak sapi setelah mereka ditinggal pergi oleh Nabi Musa Alaihissalam. Orang-orang yahudi berpaling dari kebenaran dan bersi keras untuk tidak mau kembali mencari kebenaran dan mengikutinya karena mereka percaya bahwa api neraka tidak bakal mampu mennyentuh kulit-kulit mereka. Jika memang mereka dilemparkan ke dalam api neraka hanya 40 hari saja. Padahal kepercayaan mereka itu adalah bathil dan tidak ada dasarnya sama sekali, sehingga perkiraan mereka itu salah karena mereka akan dimasukkan kedalam api neraka selama-lamanya akibat dari kekafiran, kezaliman dan sikap ingkar serta keras kepala mereka.

Dalam Al-Qur’an surat Ash-Shaaffat ayat 147 juga disebutkan:

وَأَرۡسَلۡنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: ”Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih.”

Pada QS. Ash-Shaaffat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang dijanjikan oleh Allah SWT yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih dari seratus ribu. Sehingga ketika Nabi Yunus menaungi mereka, maka mereka bertaubat dan Allah menjauhkan adzab itu dari mereka. Ada yang berpendapat mereka adalah 130.000 orang, 70.000 orang atau 20.000 orang.

Jika mengkaji lebih jauh lagi pada ayat ini dengan seksama, dapat diketahui bahwa Allah SWT telah menyatakan jumlah ummat Nabi Yunus dengan ketidakpastian, maka Allah SWT telah mengajarkan suatu teori statistik yakni estimasi. Sehingga dapat dimaksudkan agar para makhluk-Nya bisa menerapkan teori estimasi tersebut ke dalam dunia nyata melalui ilmu statistik.

Dari ayat Al-Qur'an yang telah disebutkan diatas tadi, dapat diketahui bahwa Allah SWT adalah zat yang ahli segalanya melebihi ahli-ahli dan pakar-pakar ilmu lainnya. Jadi jika di bumi Allah ini terdapat ilmu matematika, maka Allah adalah ahlinya, yang paling mengetahui, Dialah Allah SWT zat ahli matematika (matematisi) yang serba maha. Kalau di bumi Allah ada ilmu fisika, maka Allah yang paling mengetahui tentang fisika. Tidak ada yang tidak diketahui Allah SWT. Tidak ada yang tersembunyi bagi Allah SWT sesuatupun yang terjadi di bumi bahkan di langit, (Abdussakir, 2007: 91 - 92).

Metode estimasi juga disebutkan dalam suatu Hadits pada bab jual-beli tentang larangan menjual buah-buahan yang belum tampak jadinya tanpa syarat untuk dipetik dan haram menjual kurma basah dengan kurma kering kecuali dalam (jual beli) araya (ariah), yakni:

Hadis riwayat Ibnu Abbas r.as, ia berkata: Rasulullah saw. melarang menjual pohon kurma sebelum ia memakan sebagian buahnya atau dimakan orang lain dan sebelum ditimbang. Aku bertanya: Apa yang dimaksud dengan ditimbang? Seorang lelaki yang berada di sebelahnya menjawab: Yaitu ditaksir. (Shahih Muslim No.2833).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode *Maksimum Likelihood*

Distribusi gamma didapat dari fungsi gamma yang sudah dikenal luas, dan dipelajari dalam banyak bidang matematika.

Dari definisi 2.11, Fungsi gamma didefinisikan dengan

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \qquad \text{untuk } \alpha > 0$$

yang dipakai dalam mendefinisikan distribusi gamma dan akan diaplikasikan pada suatu data umur baterai mobil.

Distribusi gamma mempunyai parameter α dan β yang belum diketahui dengan peubah acak bebas X yang berukuran *n*. Maka parameter tersebut akan diestimasi dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood* yang mempunyai beberapa langkah estimasi.

Adapun Langkah-langkah estimasi dengan metode *Maksimum Likelihood* adalah:

Langkah I: Menentukan fungsi padat peluang distribusi gamma

Fungsi distribusi gamma adalah:

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\, e^{\frac{-x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & ,\text{untuk x selainnya} \end{cases}$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Fungsi distribusi gamma tersebut digunakan untuk mencari fungsi padat peluang peubah acak X_1, X_2, X_3, . . . , X_n, yaitu:

$$f(x_i) = f(\{x_1, x_2 \dots x_n\})$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x_i^{\alpha-1} e^{-\frac{x_i}{\beta}}$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_i}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-1}$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_1}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-1} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_2}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-1} \dots$$
$$\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_n}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-1}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-1} \quad (3.1)$$

Langkah II: Membentuk fungsi padat peluang (3.1) kedalam model L($x|\alpha$, β) yang dinamakan dengan fungsi likelihood.

Sehingga fungsi likelihood dari fungsi padat peluang (3.1) adalah:

$$L(x_i \mid \alpha, \beta) = L(f(x_i \mid \alpha, \beta))$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-1}$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_1}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-1} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_2}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-1} \dots$$
$$\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x_n}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha-1}$$

$$=\left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^{n}\left(e^{\left(\frac{-x_1}{\beta}\right)+\left(\frac{-x_2}{\beta}\right)+\ldots+\left(\frac{-x_n}{\beta}\right)}\right)\left((x_1x_2\ldots x_n)^{\alpha-1}\right)^{n}$$

$$=\left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^{n} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}}\left((x_1x_2\ldots x_n)^{\alpha-1}\right)^{n} \qquad (3.2)$$

Langkah III: Membentuk fungsi likelihood (3.2) kedalam model Ln L($x|\alpha$, β) yang dinamakan dengan fungsi maksimum likelihood (log likelihood).

Sehingga fungsi maksimum likelihood dari fungsi likelihood (3.2) dapat diperoleh:

$$L(x_i\mid\alpha,\beta)=\ln L(x_i\mid\alpha,\beta)$$

$$=\ln\left[\left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^{n} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}}\left((x_1x_2\ldots x_n)^{\alpha-1}\right)^{n}\right]$$

$$=\ln\left(\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}\right)^{-n} e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}}\left((x_1x_2\ldots x_n)^{\alpha-1}\right)^{n}$$

$$=-n\ln\left(\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}\right)e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}}\left((x_1x_2\ldots x_n)^{\alpha-1}\right)^{n}$$

$$=-n\ln\left(\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}\right)e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}}(x_1x_2\ldots x_n)^{n\alpha-n}$$

$$=-n\ln\left(\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}\right)-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}+(n\alpha-n)\sum\ln(x_i)$$

$$= -n\ln(\Gamma(\alpha)) - n\alpha\ln(\beta) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta} + (n\alpha - n)\sum\ln(x_i)$$

$$= -n\ln(\Gamma(\alpha)) - n\alpha\ln(\beta) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta} + n\alpha\sum\ln(x_i) - n\sum\ln(x_i) \qquad (3.3)$$

Langkah IV: Memaksimumkan fungsi maksimum likelihood (3.3) dengan menurunkan fungsi maksimum likelihood (3.3) terhadap parameter yang mengikutinya yakni α dan β, dan menyamakan dengan 0.

Pada distribusi gamma ini mempunyai dua parameter yang tidak diketahui yakni α dan β. Sehingga untuk nilai α dan β dapat dicari dengan mendiferensialkan persamaan (3.6) terhadap parameter yang mengikutinya yakni:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln L(x_i \mid \alpha, \beta) = 0, \text{dan } \frac{\partial}{\partial\beta}\ln L(x_i \mid \alpha, \beta) = 0 \qquad (3.4)$$

1. Diturunkan terhadap α.

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln L(x_i \mid \alpha, \beta) = 0$$

$$\frac{\partial\left(-n\ln(\Gamma(\alpha)) - n\alpha\ln(\beta) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta} + (n\alpha - n)\sum\ln(x_i)\right)}{\partial\alpha} = 0$$

$$\frac{\partial\left(-n\ln(\Gamma(\alpha)) - n\alpha\ln(\beta) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\beta} + n\alpha\sum\ln(x_i) - n\sum\ln(x_i)\right)}{\partial\alpha} = 0$$

$$-n\frac{1}{\Gamma(\hat{\alpha})}\Gamma^{'}(\hat{\alpha}) - n\ln(\hat{\beta}) - 0 + n\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) - 0 = 0$$

$$-n\frac{1}{\Gamma(\hat{\alpha})}\Gamma'(\hat{\alpha})-n\ln(\hat{\beta})+n\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=0$$

$$\frac{\Gamma'(\hat{\alpha})}{\Gamma(\hat{\alpha})}+\ln(\hat{\beta})-n\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)=0 \qquad (3.5)$$

2. Diturunkan terhadap β.

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln L(x_i\mid\alpha,\beta)=0$$

$$\frac{\partial\left(-n\ln(\Gamma(\alpha))-n\alpha\ln(\beta)-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}+(n\alpha-n)\sum\ln(x_i)\right)}{\partial\beta}=0$$

$$\frac{\partial\left(-n\ln(\Gamma(\alpha))-n\alpha\ln(\beta)-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta}+n\alpha\sum\ln(x_i)-n\sum\ln(x_i)\right)}{\partial\beta}=0$$

$$0-n\hat{\alpha}\frac{1}{\hat{\beta}}-\left(\left(-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\hat{\beta}^{-2}\right)+0-0=0$$

$$-n\hat{\alpha}\frac{1}{\hat{\beta}}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\hat{\beta}^{-2}=0$$

$$-n\hat{\alpha}\frac{1}{\hat{\beta}}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{\hat{\beta}^2}=0 \qquad (3.6)$$

Langkah V: Menentukan estimasi $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ dari $\alpha\beta$ pada fungsi padat peluang distribusi gamma.

Dari persamaan (3.6), dapat diperoleh suatu estimasi $\alpha\beta$;

$$-n\hat{\alpha}\frac{1}{\hat{\beta}}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{\hat{\beta}^2}=0$$

$$-n\hat{\alpha}\frac{1}{\hat{\beta}}\left(\hat{\beta}^2\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{1}{\hat{\beta}^2}\left(\hat{\beta}^2\right)=0\left(\hat{\beta}^2\right)$$

$$-n\hat{\alpha}\frac{\hat{\beta}^2}{\hat{\beta}}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\frac{\hat{\beta}^2}{\hat{\beta}^2}=0$$

$$-n\hat{\alpha}\hat{\beta}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=n\hat{\alpha}\hat{\beta}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\hat{\alpha}\hat{\beta}$$

karena $\mu = E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$

maka, $E(X) = \hat{\alpha}\hat{\beta}$

Sehingga estimasi dari $\alpha\beta$ dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood* adalah: $\hat{\alpha}\hat{\beta}$

Untuk nilai $\hat{\beta}$ adalah:

$$E(X)=\hat{\alpha}\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta}=\frac{E(X)}{\hat{\alpha}} \tag{3.7}$$

Untuk mengetahui bahwa nilai dari suatu $\hat{\alpha}$ itu diharapkan sama atau sama dengan α, begitu juga nilai $\hat{\beta}$ dengan β, maka dapat dibuktikan dengan mensubtitusikan persamaan (3.7) ke dalam persamaan (3.5) yang penyelesaiannya dilakukan secara numerik.

$$n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + n\ln(\beta) - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

$$n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + n\ln\left(\frac{E(X)}{\hat{\alpha}}\right) - \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

$$\left(\frac{1}{n}\right)n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + n\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{E(X)}{\hat{\alpha}}\right) - \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

$$\left(\frac{n}{n}\right)\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \left(\frac{n}{n}\right)\ln\left(\frac{E(X)}{\hat{\alpha}}\right) - \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \ln\left(\frac{E(X)}{\hat{\alpha}}\right) - \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \ln\left(\frac{E(X)}{\hat{\alpha}}\right) - \frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \ln\left(\frac{E(X)}{\hat{\alpha}}\right) - \frac{1}{n}(\ln(x_1 x_2 \ldots x_n)) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \ln\left(E(X)\hat{\alpha}^{-1}\right) - \frac{1}{n}(\ln(x_1 x_2 \ldots x_n)) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \ln E(X) - \ln\hat{\alpha} - \frac{1}{n}(\ln(x_1 x_2 \ldots x_n)) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \ln E(X) - \ln\hat{\alpha} - \left(\ln(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}\right) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \ln\hat{\alpha} + \ln E(X) - \left(\ln(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}\right) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \ln\hat{\alpha} - \ln\left(\frac{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}{E(X)}\right) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \ln\hat{\alpha} + \ln\left(\frac{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}{E(X)}\right)$$

Karena $\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = -C + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\alpha + n - 1}\right)$

Dimana C adalah konstanta Euler yang bernilai 0.55772156649 dan dimisalkan bahwa n = 40, maka dapat diketahui;

$$-C + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\alpha + n - 1}\right) = \ln\hat{\alpha} + \ln\left(\frac{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}{E(X)}\right)$$

$$-0.55772156649 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\alpha + n - 1}\right) = \ln\hat{\alpha} + \ln\left(\frac{(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}{E(X)}\right) \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.8) tersebut dapat diperoleh secara numerik suatu nilai $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta} = \frac{E(X)}{\hat{\alpha}}$ dengan menggunakan suatu aplikasi data umur baterai mobil yang telah ditentukan.

Untuk mendapatkan estimasi yang baik, maka untuk hasil estimasi parameter diatas harus memenuhi sifat unbias, konsisten dan efisien.

1. Unbias (takbias)

Suatu penaksir dikatakan unbias (takbias) dari α dan β, dimana $X_1, X_2, .., X_n$ suatu peubah acak bebas mengikuti distribusi gamma dengan parameter α dan β tidak diketahui, jika $E(X) = \hat{\alpha}\hat{\beta}$.

Jika peubah acak X_i berdistribusi gamma, maka fungsi $f(x)$ adalah:

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}$$

$$E(X^{r})=\int_{-\infty}^{\infty}x^{r}f_{x}(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^{r}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^{r}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+r-1}e^{\frac{-x}{\beta}}dx$$

Misalkan $\frac{y}{x}=\frac{1}{\beta}$, sehingga

$$E(X^{r})=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}(y\beta)^{\alpha+r-1}e^{-y}\beta\ dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\beta^{\alpha+r-1}y^{\alpha+r-1}e^{-y}\beta\ dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+r-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}y^{\alpha+r-1}e^{-y}\beta\ dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+r-1}}{\beta^{\alpha}\beta^{-1}\Gamma(\alpha)}y^{\alpha+r-1}e^{-y}\ dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^{\alpha+r-1}}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}y^{\alpha+r-1}e^{-y}\ dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^{\alpha-1}\beta^{r}}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}y^{\alpha+r-1}e^{-y}\ dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha-1}}\frac{\beta^{r}}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha+r-1}e^{-y}\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^r}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha+r-1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{\beta^r}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\alpha+r-1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{\beta^r}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + r)$$

$$= \frac{\beta^r \Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)}$$

Ambil r =1, maka :

$$E(X) = \frac{\beta\ \Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta(\alpha!)}{(\alpha-1)\,!}$$

$$= \frac{\beta\alpha(\alpha-1)\,!}{(\alpha-1)\,!}$$

$$= \beta\alpha$$

$$= \alpha\beta \tag{3.9}$$

Dari pembuktian (3.9), diketahui bahwa $\widehat{\alpha\beta} = \alpha\beta$.

Jadi, $\widehat{\alpha\beta}$ merupakan penduga takbias bagi μ.

Jika r = 2, maka:

$$E\left(X^2\right) = \frac{\beta^2(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha+1)\,!}{(\alpha-1)\,!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha+1)((\alpha+1)-1)\,!}{(\alpha-1)\,!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha+1)((\alpha+1)-1)(((\alpha+1)-1)-1)\,!}{(\alpha-1)\,!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha+1)\ \alpha\ ((\alpha-1)-2)\,!}{(\alpha-1)\,!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha+1)\ \alpha\ (\alpha-1)\,!}{(\alpha-1)\,!}$$

$$= \beta^2(\alpha+1)\alpha$$

$$= \beta^2(\alpha^2+\alpha)$$

$$= \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta^2 \qquad (3.10)$$

Karena Var (X) = σ^2 = $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2$, maka:

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \alpha\beta^2 + \beta^2\alpha^2 - (\alpha\beta)^2$$

$$= \alpha\beta^2 + \beta^2\alpha^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2 + \beta^2\alpha^2 - \beta^2\alpha^2$$

$$= \alpha\beta^2$$

Dari pembuktian tersebut, diketahui bahwa $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2 = \alpha\beta^2$.

Jadi, $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2$ merupakan penduga takbias bagi σ^2.

2. Efisien

Suatu penaksir dikatakan efisien apabila penduga tersebut mempunyai variansi yang kecil. Dengan menggunakan rumus efisiensi relatif, maka dapat diketahui:

$$R = \frac{E\left(X_1^2 - E(X_1)\right)^2}{E\left(X_2^2 - E(X_2)\right)^2}$$

$$= \frac{E\left(X_1 - E(X_1)\right)^2}{E\left(X_2 - E(X_2)\right)^2}$$

$$= \frac{Var(X_1)}{Var(X_2)}$$

$$= \frac{\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^2\right)_1}{\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^2\right)_2}$$

Jika R > 1, maka

$$\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^2\right)_2 < \left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^2\right)_1 \quad (3.11)$$

Sehingga hal itu berarti bahwa Var(X_2) = $\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^2\right)_2$ secara relatif lebih efisien daripada Var(X_1) = $\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}^2\right)_1$.

3. Konsisten (selaras)

Suatu penduga dikatakan konsisten adalah jika

$$E\left(\hat{\theta} - E(\theta)\right)^2 \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

Sehingga untuk peubah acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan parameter α dan β yang tidak diketahui dapat dituliskan:

$$E\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta} - E(\alpha\beta)\right)^2 \rightarrow 0 \text{ untuk } n \rightarrow \infty$$

Karena nilai ekspektasi $E\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\right)$ diharapkan sama dengan $\alpha\beta$, maka dapat diperoleh:

$$E\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\right) = \alpha\beta$$

$$E\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta} - E(\alpha\beta)\right)^2 = 0$$

Dimana nilai $E\left(\hat{\alpha}\hat{\beta} - E(\alpha\beta)\right)^2$ itu akan mendekati nol untuk n → ∞, sehingga dapat dituliskan dengan:

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\alpha}\hat{\beta} - E(\alpha\beta)\right)^2 = 0 \qquad (3.12)$$

Karena $\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\alpha}\hat{\beta} - E(\alpha\beta)\right)^2 = 0$, maka $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2$ merupakan penduga yang konsisten.

Dari persamaan (3.9), (3.10), (3.11) dan (3.12) dapat diketahui bahwa $E(X)$ merupakan penduga bagi parameter α dan β karena memiliki sifat takbias, efisien dan konsisten pada Metode *Maksimum Likelihood*.

3.2. Aplikasi Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode *Maksimum Likelihood*.

Tabel 3.1. Data Umur Baterai Mobil Dalam Satuan Tahun.

No	Data umur baterai mobil pertahun							
1	2,2	4,1	3,5	4,5	3,2	3,7	3,0	2,6
2	3,4	1,6	3,1	3,3	3,8	3,1	4,7	3,7
3	2,5	4,3	3,4	3,6	2,9	3,3	3,9	3,1
4	3,3	3,1	3,7	4,4	3,2	4,1	1,9	3,4
5	4,7	3,8	3,2	2,6	3,9	3,0	4,2	3,5

(Walpole & Myers, 1995)

Data diatas merupakan himpunan data umur baterai mobil pertahun (dalam satuan tahun) yang telah dibulatkan sampai persepuluhan tahun yakni satu angka dibelakang koma (bilangan desimal). Dimana variabel acak bebas kontinu X adalah umur 40 baterai mobil yang dibulatkan sampai sepersepuluh tahun. Untuk mengetahui rata-rata dan variansi data diatas, maka peneliti menggunakan suatu teorema (2.6). Sehingga dapat diketahui, bahwa;

$E(X) = \alpha\beta$, $E\left(X^2\right) = \beta^2\alpha^2 + \alpha\beta^2$ dan Var $(X) = \alpha\beta^2$

Karena $E(X) = \mu$, dimana μ yang secara statistik diduga dengan $\overline{X}$, maka

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Untuk mengetahui nilai rata-rata dan variansi dari data diatas, maka dapat dilihat tabel 3.2 dibawah ini:

Tabel 3.2: Nilai Rata-rata Umur Baterai Mobil

No	x_i	$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{40} x_i}{40}$	$x_i - \overline{X}$	$(x_i - \overline{X})^2$
1	2.2	3.4125	-1.2125	1.47015625
2	3.4	3.4125	-0.0125	0.00015625
3	2.5	3.4125	-0.9125	0.83265625
4	3.3	3.4125	-0.1125	0.01265625
5	4.7	3.4125	1.2875	1.65765625
6	4.1	3.4125	0.6875	0.47265625
7	1.6	3.4125	-1.8125	3.28515625
8	4.3	3.4125	0.8875	0.78765625
9	3.1	3.4125	-0.3125	0.09765625
10	3.8	3.4125	0.3875	0.15015625
11	3.5	3.4125	0.0875	0.00765625
12	3.1	3.4125	-0.3125	0.09765625
13	3.4	3.4125	-0.0125	0.00015625
14	3.7	3.4125	0.2875	0.08265625
15	3.2	3.4125	-0.2125	0.04515625
16	4.5	3.4125	1.0875	1.18265625
17	3.3	3.4125	-0.1125	0.01265625
18	3.6	3.4125	0.1875	0.03515625
19	4.4	3.4125	0.9875	0.97515625
20	2.6	3.4125	-0.8125	0.66015625
21	3.2	3.4125	-0.2125	0.04515625
22	3.8	3.4125	0.3875	0.15015625
23	2.9	3.4125	-0.5125	0.26265625
24	3.2	3.4125	-0.2125	0.04515625
25	3.9	3.4125	0.4875	0.23765625
26	3.7	3.4125	0.2875	0.08265625
27	3.1	3.4125	-0.3125	0.09765625
28	3.3	3.4125	-0.1125	0.01265625
29	4.1	3.4125	0.6875	0.47265625
30	3	3.4125	-0.4125	0.17015625

31	3	3.4125	-0.4125	0.17015625
32	4.7	3.4125	1.2875	1.65765625
33	3.9	3.4125	0.4875	0.23765625
34	1.9	3.4125	-1.5125	2.28765625
35	4.2	3.4125	0.7875	0.62015625
36	2.6	3.4125	-0.8125	0.66015625
37	3.7	3.4125	0.2875	0.08265625
38	3.1	3.4125	-0.3125	0.09765625
39	3.4	3.4125	-0.0125	0.00015625
40	3.5	3.4125	0.0875	0.00765625
	$\sum x_i = 136.5$			$\sum (x_i - \bar{X})^2 = 19.26375$

Pada tabel 3.2 di atas, nilai rata-rata suatu data umur baterai mobil adalah:

$$E(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$= 3.4125$$

Jadi, nilai $E(X) = \alpha\beta = 3.4125$

Untuk mengetahui nilai Var $(X) = \alpha\beta^2$, maka harus dicari terlebih dahulu masing-masing dari nilai α dan β dengan menggunakan ekspektasi $E(X) = \alpha\beta$ dan ekspektasi $E(X)^2 = \beta^2\alpha^2 + \alpha\beta^2$ yang telah dicantumkan pada teorema (2.6), maka α dan β adalah:

$$\alpha = \frac{\bar{X}}{\beta} \text{ dan } \beta = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}$$

Sehingga nilai β adalah:

$$\beta = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{X})^2}{\bar{X}}$$

$$= \frac{\frac{1}{40}\left(x_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots + \left(x_{40} - \overline{X}\right)^2}{3.4125}$$

$$= \frac{\frac{1}{40}(19.26375)}{3.4125}$$

$$= 0.48159375$$

Jadi nilai β = 0.48159375

Sedangkan nilai α adalah:

$$\alpha = \frac{\overline{X}}{\beta}$$

$$= \frac{3.4125}{0.48159375}$$

$$= 7.085847771$$

Maka nilai variansi dari data umur baterai mobil di atas adalah:

$$\begin{aligned} Var(X) = \alpha\beta^2 &= 7.085847771 \text{ x } (0.48159375)^2 \\ &= 7.085847771 \text{ x } 0.23193254 \\ &= 1.643438672 \end{aligned}$$

Untuk mengerjakan perhitungan statistik ini diasumsikan dengan mensubtitusikan suatu variabel acak bebas kontinu $X_i = X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{40}$ kedalam fungsi padat peluang distribusi gamma yang telah didefinisikan pada definisi (2.12), yakni:

$$f(x|\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & ,\text{untuk x selainnya} \end{cases}$$

dengan $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Dari persamaan tersebut, maka selanjutnya akan dapat dicari suatu penaksir (α,β) dengan menggunakan metode *Maksimum Likelihood* (Penaksiran Kemungkinan Maksimum) dengan mengikuti langkah-langkah pada pembahasan (**3.1**) diatas, sehingga didapatkan suatu hasilnya yakni:

$$E(X) = \hat{\alpha}\hat{\beta}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 3.4125$$

Karena nilai $\alpha\beta = \hat{\alpha}\hat{\beta}$ yakni 3.4125, maka untuk nilai $\hat{\beta}$ adalah:

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{\overline{X}}$$

$$= \frac{\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{3.4125}$$

$$= \frac{\frac{1}{40}\left(\left(x_1 - \overline{X}\right)^2 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 + \ldots\left(x_n - \overline{X}\right)^2\right)}{3.4125}$$

$$= \frac{\frac{1}{40}(19.26375)}{3.4125}$$

$$= 0.48159375$$

Sehingga untuk nilai $\hat{\alpha}$ dapat diketahui yakni:

$$\hat{\alpha} = \frac{E(X)}{\hat{\beta}}$$

$$= \frac{3.4125}{0.48159375}$$

$$= 7.085847771$$

Dari nilai $\hat{\alpha} = 7.085847771$ dan $\hat{\beta} = 0.48159375$, maka dapat diketahui nilai Variansi dari umur baterai tersebut, yakni:

$$\begin{aligned}
\text{Var}\ (X) &= \hat{\alpha}\hat{\beta}^2 \\
&= 7.085847771 \text{ x } (0.48159375)^2 \\
&= 7.085847771\text{x } 0.23193254 \\
&= 1.643438672
\end{aligned}$$

Untuk mengetahui bahwa nilai dari suatu $\hat{\alpha}$ itu sama dengan α, maka dapat dibuktikan dengan memasukkan nilai $\hat{\alpha}$ = 7.085847771 kedalam suatu persamaan dibawah ini yang penyelesaiannya dilakukan secara numerik.

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \ln \hat{\alpha} - \ln\left(\frac{(x_1 x_2 \ldots x_{40})^{\frac{1}{40}}}{E(X)}\right) = 0$$

$$\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \ln \hat{\alpha} + \ln\left(\frac{(x_1 x_2 \ldots x_{40})^{\frac{1}{40}}}{E(X)}\right)$$

Karena $\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = -C + \sum_{i=1}^{40}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\alpha + n - 1}\right)$

Dimana C adalah konstanta Euler yang bernilai 0.55772156649, sehingga dapat diketahui;

$$-C + \sum_{i=1}^{40}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\alpha + n - 1}\right) = \ln \hat{\alpha} + \ln\left(\frac{(x_1 x_2 \ldots x_{40})^{\frac{1}{40}}}{E(X)}\right)$$

$$-C + \sum_{i=1}^{40}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\alpha + n - 1}\right) = \ln 7.08587771 + \ln\left(\frac{(8.21458E + 20)^{\frac{1}{40}}}{3.4125}\right)$$

$$-C+\sum_{i=1}^{40}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\alpha+n-1}\right)=1.877030067$$

$$-0.55772156649+\sum_{i=1}^{40}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\alpha+n-1}\right)=1.877030067$$

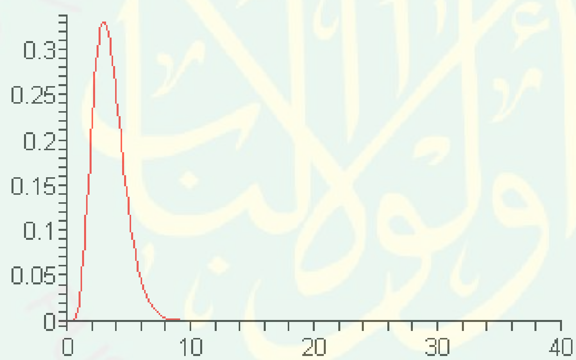
$1.884359774 \cong 1.877030067$

Karena nilai ruas kanan dan kiri bernilai hampir sama dengan selisih 0.007, maka nilai $\hat{\alpha}$ bisa dikatakan sama dengan nilai α.

Oleh karena itu $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ merupakan estimasi dari $\alpha\beta$.

Dari data diatas, dapat dibuat suatu grafik distribusi gamma yakni;

Grafik 3.1: Grafik distribusi gamma



Pada grafik tersebut (3.1) menunjukkan bahwa estimasi pada suatu data umur baterai mobil bernilai 3.4125 tahun. Dari estimasi tersebut didapati nilai dari $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$, sehingga nilai variansi dari umur baterai tersebut juga dapat diketahui yang bernilai 1.643438672. Karena data umur baterai dibulatkan persepuluhan tahun yakni pembulatan angkanya adalah satu angka dibelakang koma, maka esimasi dari umur baterai tersebut adalah 3.4 tahun dan variansinya adalah 1.6

tahun. Karena $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ merupakan estimasi $\alpha\beta$, sehingga dapat dituliskan $\hat{\alpha}\hat{\beta} = \alpha\beta$ yang berarti bahwa $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ merupakan estimasi takbias dari $\alpha\beta$.

3.3. Kajian Keagamaan

3.3.1 Estimasi Dalam Al-Qur'an

Dalam Al-Qur'an pada surat Ash-Shaffaat terdapat ayat yang menyinggung masalah matematika, yaitu tentang pendugaan. Surat Ash-Shaffaat adalah Makiyah, yakni turun sebelum Nabi hijrah ke Madinah. Ash-Shaffaat berarti yang berbaris baris, kalimat yang pertama dari ayat yang pertama. Yang disebutkan berbaris-baris itu adalah Malaikat-Malaikat Tuhan di alam malakut, yang tidak tahu berapa jutakah bilangannya, kecuali Allah Swt sendiri. Sedangkan bintang dilangit, yang dapat dilihat mata. Sedangkan pasir dipantai yang dapat ditampung tangan. Sedangkan daun dirimba yang dapat dilihat ketika berpucuk, berdaun dan tanggal dari tampuknya, lagi tidak dapat kita manusia menghitungnya, apatah lagi Malaikat yang ghaib (Amrullah, 1981:106).

Pendugaan dalam matematika disinggung dalam Al-Qur'an Surat Ali-'Imran ayat 24:

ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا۟ لَن تَمَسَّنَا ٱلنَّارُ إِلَّآ أَيَّامًا مَّعْدُودَٰتٍ ۖ وَغَرَّهُمْ فِى دِينِهِم مَّا كَانُوا۟ يَفْتَرُونَ ﴿٢٤﴾

Artinya: "Hal itu adalah karena mereka mengaku: "Kami tidak akan disentuh oleh api neraka kecuali beberapa hari yang dapat dihitung". mereka diperdayakan dalam agama mereka oleh apa yang selalu mereka ada-adakan". {Q. S. Ali-'Imran: 47}

Kaitan dari ayat tersebut dengan metode estimasi (pendugaan) terletak pada lafadh "الا اياما معدودت" . yang dimaksud pada lafadz tersebut adalah hari-hari yang terbilang (tertentu). Pada ayat tersebut tidak dijelaskan secara jelas lama waktu ketika orang yahudi meentukan masa akan disentuh oleh api neraka, akan tetapi hanya tertulis ”beberapa hari saja”.

Pendugaan dalam matematika disinggung dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147, yaitu:

وَأَرۡسَلۡنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih. (Qs. Ash-Shaffaat/37:147)

Sebab turunnya ayat diatas yaitu menceritakan tentang kisah Nabi Yunus. Bahwa tatkala Yunus diancam akan disiksa oleh kaumnya, maka dia keluar dari kalangan mereka sebelum mendapat perintah dari Allah Swt untuk hijrah. Lalu dia naik kapal, namun kapal itu tidak bisa berjalan dan para awak kapal menyangka bahwa kapal itu apabila memuat seorang budak yang melarikan diri, maka kapal itu tidak bisa berjalan. Oleh karena itu mereka melakukan undian dan ternyata undian itu keluar untuk Yunus, maka dilemparkanlah dirinya kedalam air (Al-Maraghi,1974:136).

3.3.2 Kaitan Al-Qur’an dengan Pembahasan

Menurut peneliti dari ayat Al-Qur’an yang telah disebutkan diatas, yakni pada masing-masing surat (*Ali-‘Imran: 47*) dan surat (*Ash-Shaffaat: 147*) terdapat suatu lafadz yang berkaitan dengan metode estimasi (penaksiran).

a. Surat Ali-‘Imran ayat 24

Adapun kaitan suatu metode estimasi pada surat Ali-’imran ini terletak pada lafadh "الا اياما معدودت" . Yang dimaksudkan dengan hari-hari di sini oleh ucapan orang-orang Yahudi adalah 40 hari, yaitu hari-hari mereka ketika mereka menyembah anak-anak sapi setelah mereka ditinggal pergi oleh Nabi Musa Alaihissalam.

Orang-orang yahudi berpaling dari kebenaran dan bersi keras untuk tidak mau kembali mencari kebenaran dan mengikutinya karena mereka percaya bahwa api neraka tidak bakal mampu menyentuh kulit-kulit mereka. Jika memang mereka dilemparkan ke dalam api neraka hanya 40 hari saja. Padahal kepercayaan mereka itu adalah bathil dan tidak ada dasarnya sama sekali, sehingga perkiraan mereka itu salah karena mereka akan dimasukkan kedalam api neraka selama-lamanya akibat dari kekafiran, kezaliman dan sikap ingkar serta keras kepala mereka.

Jika lama waktu ketika orang yahudi menentukan masa akan disentuh oleh api neraka dapat dinyatakan dalam variabel X, maka $\overline{X}$ = 40 hari yang merupakan perkiraan dari kaum yahudi itu sendiri. Padahal perkiraan mereka itu adalah salah karena Allah SWT akan dimasukkan kedalam api neraka selama-lamanya akibat dari sikap ingkar dan kezaliman mereka.

Oleh karena itu, dari penjelasan beberapa ayat Al-Qur’an di atas mempunyai suatu arti bahwa islam mulai dari sejak dulu telah mengenal estimasi.

b. Surat Ash-Shaffaat ayat 147

Menurut peneliti, kaitan suatu metode estimasi pada surat ini terletak pada kalimat "مائة الف او يزيدون", Karena ayat tersebut dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus tidak dengan perhitungan secara eksak. Sehingga terdapat perbedaan pendapat para ulama’ dalam menafsirkan ayat tersebut. Jika dipahami dalam arti atau, maka ayat ini bagaikan menyatakan jumlah mereka banyak, menurut perhitungannnya adalah seratus ribu/lebih.

Jika dipahami dalam arti dan/bahkan, maka itu berarti mereka diutus kepada dua kelompok, yang pertama berjumlah seratus ribu(100.000) dan yang satu lagi adalah yang lebih dari itu. Dalam satu riwayat dinyatakan jumlah dua puluh ribu. Yang seratus ribu adalah orang-orang yahudi penduduk Nainawa, yang ketika itu berada dalam kerajaan Asy'ur, sedang yang lebih adalah selain orang yahudi yang bermukim juga di negeri itu.

Al-Maraghi dalam Tafsir Al-Maraghi (1974:138), menceritakan bahwa Nabi Yunus sekali lagi diutus oleh kaum itu dan mereka ada 100.000 bahkan lebih. Maka menjadi stabil keadaan mereka dan beriman kepada Yunus. Karena, setelah Yunus keluar dari kalangan mereka, mereka berpikir benar-benar telah melakukan kekeliruan, dan jika mereka tidak mengikuti Rasul, maka mereka akan binasa, seperti yang terjadi atas umat-umat sebelum mereka. Maka tatkala Yunus kembali kepada mereka dan menyeru kepada Tuhannya, maka mereka menyambut seruan Yunus itu dengan taat dan tunduk kepada perintah dan larangan Allah. Maka kami anugrahi kenikmatan kepada mereka dalam kehidupan ini hingga ajal, dan mereka pun mati sebagaimana matinya orang-orang lain.

Al-Mahally dan As-Syuyuthi, dalam tafsir Jalalain, (1990:1945-1946), menjelaskan bahwa lafadz "وارسلنه" *(Dan kami utus dia*) sesudah itu, sebagaimana status sebelumnya, kepada kaum Bunainawiy yang tinggal didaerah Mausul "الي مائة الف او يزيدون" (*kepada seratus ribu orang atau*) bahkan "يزيدون" (*lebih dari itu*) yakni lebih dua puluh atau tiga puluh atau tujuh puluh ribu orang.

Para ulama’ diatas mempunyai versi yang berbeda-beda dalam menafsirkan "مائة الف او يزيدون", karena ayat tersebut tidak ada kejelasan dalam menerangkan jumlah umat Nabi Yunus. Para ulama memperkirakan jumlah umat Nabi Yunus dengan jumlah yang berbeda-beda tetapi meskipun demikian tidak ada yang mengatakan kurang dari 100.000 orang.

Dari ayat diatas diketahui bahwa terdapat perbedaan pendapat para ulama’ dalam menduga banyaknya umat Nabi Yunus. Lafadz "يزيدون" yang bermakna *lebih* itu oleh para ulama’ diduga sebanyak 20.000 orang, 30.000 orang, atau 70.000 orang. Ada juga yang hanya mengatakan *lebih saja*. Jika mengatakan *lebih saja,* maka bisa saja 10.000 orang atau 15.000 orang, hal ini karena ayat tersebut tidak mengatakan jumlah umat Nabi Yunus yang sebenarnya.

Jika umat Nabi Yunus Alaihissalam dapat dinyatakan dalam X, maka niali X tersebut berada dalam skala interval $100.000 \leq X < 200.000$, artinya umat Nabi Yunus tidak kurang dari 100.000 dan tidak sampai 200.000 orang.

Beberapa penjelasan ayat Al-Qur’an di atas menggambarkan dengan jelas bahwa teori ekspektasi dan estimasi sudah ada sekitar 1400 tahun yang lalu, akan tetapi teori tersebut dipelajari secara serius sekitar tahun 1980-an di Amerika. Sehingga dalam kehidupan sehari-hari, ketrampilan estimasi sangat dibutuhkan dan menghemat waktu dalam suatu penghitungan.

Abdussakir (2007:155-156) mengatakan bahwa pendugaan (estimasi) adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi yaitu estimasi banyak/jumlah (numerositas), estimasi pengukuran dan estimasi komputasional.

1. Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek disini maknanya sangat luas. Objek dapat bermakna orang, uang kelereng, titik, dan mobil. Estimasi pada Qs. Ash-Shaffaat ayat 147 adalah estimasi banyak yaitu banyaknya orang.
2. Estimasi pengukuran

   Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran disini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna ukuran waktu, panjang, luas, usia dan volume.
3. Estimasi komputasional

   Estimasi komputasional adalah menentukan hasil suatu operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak. Seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan kepuluhan terdekat.

Dengan adanya pemahaman dan pendalaman teori serta penerapan dalam suatu aplikasi, maka pada pokok pembahasan ini mengikuti suatu paradigma *ulul albab*, yang mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris dan logis (*bayani* dan *burhani*) sekaligus pendekatan intuitif, imajinatif dan metamifis (*irfani*). Konsep tarbiyatul *ulul albab* berlaku didalam dunia akademik dengan adanya kegiatan mendidik dean belajar yang dilakukan oleh dosen dan mahasiswa semata-mata hanya untuk mendekatkan diri kepada Allah SWT. Ulul albab selalu berada dibawah keputusan Allah SWT sehingga tidak selayaknya seseorang merisaukannya karena kebahagiaan terletak pada kedekatan makhluk terhadap sang Khalik Allah SWT. Seorang mahasiswa mencari ilmu pengetahuan melalui suatu observasi, eksperimen dan literatur. Karena derajat *ulul albab* wajib disandang oleh seorang mahasiswa.

Sosok mahasiswa yang menyandang *ulul albab* adalah mahasiswa yang mengedepankan dzikir, fikir dan amal sholeh. Sehingga seorang mahasiswa tersebut memiliki ilmu yang luas, pandangan mata yang tajam, otak yang cerdas, hati yang lembut dan semangat serta jiwa pejuang (jihad dijalan Allah) dengan perjuangan yang sebenar-benarnya. Sehingga mahasiswa yang telah menjadi sarjana mempunyai suatu karakter ulul albab yakni memiliki kedalaman spiritual, keagungan akhlak, keluasan ilmu dan kematangan profesional. Khususnya lulusan (sarjana) Matematika.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas, dapat disimpulkan bahwa:

1. Estimasi parameter distribusi gamma dengan parameter dari distribusi gamma tersebut yakni α dan β tidak diketahui, sehingga parameter tersebut diestimasi dengan menggunakan metode Maksimum Likelihood yang mempunyai beberapa langkah-langkah estimasi, yakni: menentukan fungsi padat peluang, membentuk fungsi padat peluang tersebut kedalam bentuk fungsi likelihood, membentuk fungsi likelihood kedalam bentuk log likelihood, menurunkan fungsi log likelihood terhadap parameter yang mengikutinya yakni α dan β, dan menentukan estimasi dari parameter α dan β. Sehingga didapatkan $E(X)$ dari distribusi gamma adalah $\alpha\beta$ dan var(X) dari distribusi gamma adalah $\alpha\beta^2$. Oleh karena itu, $\widehat{\alpha\beta}$ dan $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2$ merupakan estimasi yang baik dari $\alpha\beta$ dan $\alpha\beta^2$ karena telah memenuhi sifat-sifat estimasi yakni takbias, konsisiten dan efisien.

2. Hasil estimasi yang telah diaplikasikan pada suatu data umur baterai mobil adalah 3.4125 tahun, dimana $\hat{\alpha}$ = 7.085847771 dan $\hat{\beta}$ = 0.48159375. dengan variansi dari umur baterai itu adalah 1.643438672 tahun. Jika dibulatkan dalam sepersepuluhan tahun, maka nilai estimasi umur bateri mobil adalah $\widehat{\alpha\beta}$ = 3.4 dan $\hat{\alpha}\hat{\beta}^2$ = 1.6.

4.2 Saran

Pada penelitian ini peneliti menggunakan Metode *Maksimum Likelihood* dalam mencari estimasi parameter distribusi gamma. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian serupa, peneliti menyarankan agar membandingkan Metode *maksimum likelihood* dengan metode-metode estimasi yang lain kedalam distribusi peubah acak baik diskrit maupun kontinu.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN PRESS.

Al-Jazairi, Syaikh jabir Abu Bakar. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al Aisar (jilid 2)*. Jakarta: Darus Sunnah.

Ath-Thabari, Abu Ja'far Muhammad bin ja'far. 2009. *Tafsir Ath-Thabari*. Jakarta: Pustaka Azam.

Awat, Napa J. 1995. *Metode Statistika dan Ekonometri*. Yogyakarta: Liberty.

Dudewicz, Edward J & Mishra, Satya N. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Bandung: ITB.

Harini, Sri & Turmudi. 2007. *Metode Statistika*. Malang: UIN PRESS.

Hogg. McKean. Craig. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics*. Sixth edition. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Rahman, Afzalur. 2000. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta:Rineka Cipta.

Supranto, J. 1994. *Statistik Teori dan Aplikasi*. Edisi kelima. Jilid 2. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, Murray R.1984. *Kalkulus Lanjutan*. Erlangga: Jakarta.

I.A, Suparman, M,Sc. 1989. *Statistik Matematika*. Jakarta: Rajawali Pers.

Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-Dasar Statistika*. Jakarta: C.V Rajawali.

Walpole, Ronald E. & Myers Raymond H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan Terjemahan RK Sembiring*. Bandung: ITB.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran I: langkah-langkah perhitungan data umur baterai mobil

Langkah I: $f(x_i) = f(\{X_1, X_2, \dots, X_{40}\})$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x_1^{\alpha-1} e^{\frac{-x_1}{\beta}} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x_2^{\alpha-1} e^{\frac{-x_2}{\beta}} \cdots \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x_{40}^{\alpha-1} e^{\frac{-x_{40}}{\beta}}$$

$$= \prod_1^{40} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{-\sum_1^n x_i}{\beta}} (x_1 x_2 \dots x_{40})^{\alpha-1}$$

Langkah II:

$$L(f(xi) \mid \alpha, \beta) = \prod_1^{40} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{-\sum_1^n x_i}{\beta}} ((x_1 x_2 \dots x_{40})^{\alpha-1})^{40}$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{-x_1}{\beta}} (x_1)^{\alpha-1} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{-x_2}{\beta}} (x_2)^{\alpha-1} \dots \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{-x_{40}}{\beta}} (x_{40})^{\alpha-1}$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\right)^{40} e^{\frac{-\sum_1^n x_i}{\beta}} \prod ((x_i)^{\alpha-1})^{40}$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\right)^{40} e^{\frac{-136,5}{\beta}} ((821457864715856000000)^{\alpha-1})^{40}$$

Langkah III:

$$\mathrm{L}(x_i|\alpha, \beta) = \ln \mathrm{L}(x_i|\alpha, \beta)$$

$$= \ln\left[\left(\frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\right)^{40} e^{\frac{-136,5}{\beta}} ((821457864715856000000)^{\alpha-1})^{40}\right]$$

$$= \ln\left(\left(\beta^\alpha \Gamma(\alpha)\right)^{-40} e^{\frac{-136,5}{\beta}} ((821457864715856000000)^{\alpha-1})^{40}\right)$$

$$= -40 \ln(\Gamma(\alpha)\beta^\alpha) - \frac{136,5}{\beta} + (40\alpha - 40) \sum \ln(821457864715856000000)$$

$$= -40 \ln(\Gamma(\alpha)) - 40\alpha \ln(\beta) - \frac{136,5}{\beta} + (40\alpha - 40) \sum \ln(821457864715856000000)$$

$$= -40 \ln(\Gamma(\alpha)) - 40\alpha \ln(\beta) - \frac{136,5}{\beta} + 40\alpha \sum \ln(8.21458E+20) - 40 \sum \ln(8.21458E+20)$$

Langkah IV:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln \mathrm{L}(x|\alpha,\beta) = 0, \text{ dan } \frac{\partial}{\partial\alpha}\ln \mathrm{L}(x|\alpha,\beta) = 0$$

1. Diturunkan terhadap β

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\ln \mathrm{L}(f(x_i)|\alpha,\beta) = 0$$

$$\frac{\partial\left(-40\ln(\Gamma(\alpha)) - 40\alpha\ln(\beta) - \frac{136{,}5}{\beta} + 40\alpha\sum\ln(8.21458\text{E}+20) - 40\sum\ln(8.21458\text{E}+20)\right)}{\partial\beta} = 0$$

$$0 - 40\,\alpha\,\frac{1}{\beta} - (-136{,}5\,\beta^{-2}) + 0 - 0 = 0$$

$$-40\alpha\,\frac{1}{\beta} + 136{,}5\,\beta^{-2} = 0$$

$$-40\alpha\,\frac{1}{\beta} + 136{,}5\,\frac{1}{\beta^2} = 0$$

2. Diturunkan terhadap α

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln \mathrm{L}(f(x_i)|\alpha,\beta) = 0$$

$$\frac{\partial\left(-40\ln(\Gamma(\alpha)) - 40\alpha\ln(\beta) - \frac{136{,}5}{\beta} + 40\alpha\sum\ln(8.21458\text{E}+20) - 40\sum\ln(8.21458\text{E}+20)\right)}{\partial\alpha} = 0$$

$$-40\,\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma'(\alpha) - 40\ln(\beta) - 0 + 40\sum\ln(821457864715856000000) - 0 = 0$$

$$-40\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma'(\alpha) - 40\ln(\beta) + 40\sum\ln(821457864715856000000) = 0$$

$$40\,\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + 40\ln(\beta) - 40\sum\ln(821457864715856000000) = 0$$

Langkah V: Dari penurunan terhadap β menghasilkan suatu estimasi $\widehat{\alpha\beta}$, yakni;

$$-40\alpha\frac{1}{\beta}+(136{,}5)\frac{1}{\beta^2}=0$$

$$-40\alpha\frac{1}{\beta}(\beta^2)+(136{,}5)\frac{1}{\beta^2}(\beta^2)=0(\beta^2)$$

$$-40\ \alpha\frac{\beta^2}{\beta}+(136{,}5)\frac{\beta^2}{\beta^2}=0$$

$$-40\ \alpha\beta+136{,}5=0$$

$$136{,}5=40\alpha\beta$$

$$\frac{136{,}5}{40}=\alpha\beta$$

$$3{,}4125=\alpha\beta$$

$$\widehat{\alpha\beta}=3{,}4125$$

Lampiran II: Membuat Grafik Distribusi Gamma

```
> a:=7.085847771;
```

$$a := 7.085847771$$

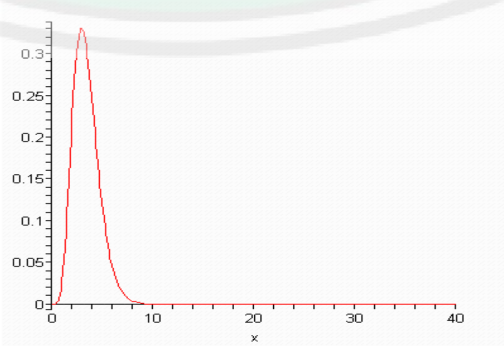
```
> b:=0.48159375;
```

$$b := 0.48159375$$

```
> f:= x -> 1/((b^a)*GAMMA(a))*x^(a-1)*exp(-x/b);
```

$$f := x \to \frac{x^{(a-1)}\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{b}\right)}}{b^a\,\Gamma(a)}$$

```
> plot(f(x),x=0..40);
```



```
>ln(7.085847771)+ln(((82145864715856000000)^(1/40))/(3.
4125));
```

$$1.958099523 + \ln(0.2930402930\, 82145864715856000000^{(1/40)})$$

```
> evalf(%);
```

$$1.877030067$$

```
> int(exp(-x)*ln(x),x=0..infinity);
```

$$-\gamma$$

```
> value(%);
```

$$-\gamma$$

```
> evalf(%);
```

$$-0.5772156649$$

Lampiran II: Perhitungan Fungsi Gamma

```
Private Sub Form_Load()
Dim a As Double, b As Double
a = 1.87703006710866 - Gamma(7.085847771, 40)
b = Gamma(7.085847771, 4000)
MsgBox b, vbInformation
End
End Sub

Private Function Gamma(x As Double, n As Double)
Dim Temp As Double
Temp = 0
For i = 1 To n
   Temp = Temp + (1 / i - 1 / (x + i - 1))
Next
Gamma = Temp - 0.5772156649
End Function
```

BUKTI KONSULTASI

Nama : Ahmad Misbahussurur
NIM : 05510023
Fakultas/ Jurusan : Saintek/ Matematika
Dosen pembimbing : I. Sri Harini, M.Si
II. Munirul Abidin, M.Ag
Judul : Estimasi Parameter Gamma Dengan Metode *Maksimum Likelihood*

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1.	14 Mei 2009	Proposal Skripsi	1.	
2.	15 Juni 2009	ACC Proposal		2.
3.	13 Juli 2009	Konsultasi BAB I	3.	
4.	15 Juli 2009	Konsultasi BAB I dan BAB II		4.
5.	17 Juli 2009	Konsultasi Keagamaan BAB I dan BAB II	5.	
6.	22 Juli 2009	Revisi BAB I dan BAB II		6.
7.	30 Juli 2009	ACC BAB I dan BAB II	7.	
8.	30 Juli 2009	Revisi Keagamaan BAB I dan BAB II		8.
9.	11 Agustus 2009	Konsultasi BAB III	9.	
10.	12 Agustus 2009	Revisi BAB III		10.
11.	18 Agustus 2009	Konsultasi Keagamaan BAB III	11.	
12.	01 September 2009	Revisi BAB III dan Konsultasi BAB IV		12.
13.	11 September 2009	ACC BAB III dan IV	13	
14.	11 september 2009	Revisi Keagamaan BAB III		14.
15.	12 September 2009	Konsultasi Keseluruhan dan ACC	15	
16.	12 September 2009	ACC Keseluruhan Keagamaan		16.

Malang, 12 September 2009

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001