MENYELESAIKAN SISTEM KONGRUENSI LINIER

SKRIPSI

Oleh:
KURNIA ERA WATI
NIM. 04510005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG

2009

MENYELESAIKAN SISTEM KONGRUENSI LINIER

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
KURNIA ERA WATI
NIM. 04510005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009

MENYELESAIKAN SISTEM KONGRUENSI LINIER

SKRIPSI

Oleh:
KURNIA ERA WATI
NIM. 04510005

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 11 April 2009

Pembimbing I,

Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP: 150 300 415

Pembimbing II,

Achmad Nashichuddin, MA
NIP. 150 302 531

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : KURNIA ERA WATI

NIM : 04510005

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 April 2009

Yang membuat pernyataan

Kurnia Era Wati

NIM. 04510005

MOTTO

وَٱسۡتَعِينُواْ بِٱلصَّبۡرِ وَٱلصَّلَوٰةِۚ وَإِنَّهَا لَكَبِيرَةٌ إِلَّا عَلَى ٱلۡخَٰشِعِينَ ٤٥

Artinya: ***“Jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu. Dan yang sesungguhnya yang demikian itu sungguh berat, kecuali bagi orang-orang yang khusyu’.”*** **(Q.S Al-Baqarah 45)**

Dedicated To:

Ayah (M. Sukri S.Sos), Ibunda (Eti Kusnaeti)

Ines Ermerawan

Dwi Nurcahyani, M. Rizal A Pamungkas dan

F. Azka Naquibillah

Sebagai belahan jiwa dan inspirasi hidupku

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Syukur Alhamdulillah penulis haturkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan hidayah-Nya sehingga mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul *"Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linier"* dengan baik.

Sholawat dan salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita semua, Nabi Muhammad SAW.

Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih yang tak terhingga beriring doa kepada yang terhormat:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Achmad Nashichuddin, MA, selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.
7. Ayahanda dan Ibunda tercinta semoga Allah membalas dengan rahman dan rahim-Nya yang tiada tara, dan saudara sadariku semoga dalam perjalanan hidupku bisa memberikan setetes embun kebahagian kepada kalian.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2004, dan sahabat-sahabatku (nulur, pepep, vita, cs4) terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini baik secara lanngsung maupun tidak langsung.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin.

Malang, April 2009

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Wati, Kurnia Era. 2009. **Menyelesaikan sistem kongruensi linier**. Skripsi, jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd. (II) Achmad Nashichuddin, M. A

Kata Kunci: Kongruensi Linier, Eliminasi-Subtitusi, Invers, Matriks, Operasi Baris Elementer, Algoritma eulides

Sistem kongruensi linier merupakan suatu sistem residu yang lengkap dengan modulo c dari suatu baris polynominal dengan koefisien-koefisien bulat dan dapat dituliskan dalam bentuk umumnya:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \equiv b_1 \pmod{c} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \equiv b_2 \pmod{c} \\
\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \equiv b_m \pmod{c} \text{ dimana } a_{ij} \,\&\, b_i \in R, i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n
\end{array}
$$

Dalam skripsi ini masalah yang dibahas dalam skripsi ini dirumuskan sebagai berikut yaitu: bagaimana sistem kongruensi linier dikatakan mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian serta bagaimana cara menyelesaikan sistem kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel, sedangkan tujuan penulisan skripsi ini adalah menjelaskan sistem kongruensi linier mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian serta menjelaskan cara menyelesaikan sistem kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel. Kemudian permasalahan yang dikaji dibatasi pada penyelesaian sistem kongruensi tiga kongruensi tiga variabel dengan menggunakan cara eliminasi, subtitusi, campuran (eliminasi-subtitusi), invers , matriks, operasi baris elemneter dan algoritma euclides.

Dalam menyelesaikan sistem kongruensi linier perlu diketahui beberapa definisi yang terkait dengan sistem kongruensi linier.

Dalam kajian ini, penulis mengkaji sistem kongruensi linier yang mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian, dengan menggunakan perbandingan koefisien dan pembuktian pada aturan cremer. Untuk menyelesaikan sistem kongruensi linier dikerjakan dengan berbagai cara diantaranya: eliminasi, subtitusi, campuran (eliminasi-subtitusi), invers , matriks, operasi baris elemneter dan algoritma euclides.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa sistem kongruensi linier yang mempunyai selesaian, dapat dikerjakan dengan dengan berbagai cara diantaranya: eliminasi, subtitusi, campuran (eliminasi-subtitusi), invers , matriks, operasi baris elemneter dan algoritma euclides.

Dalam skripsi ini diharapkan agar dilakukan pengkajian yang lebih luas, yakni menyelesaikan sistem kongruansi nonlinier dan aplikasi pada program komputer.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika sebagai salah satu cabang keilmuan, yang digunakan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan persoalan manusia. Dalam hubungannya dengan berbagai ilmu pengetahuan, matematika berfungsi sebagai bahasa ilmu dengan lingkup universal sebab dengan menggunakan matematika kita dapat melakukan abstraksi dari kenyataan-kenyataan yang sangat rumit menjadi suatu model sehingga dicapai ketajaman dalam memberikan deskripsi, mempermudah untuk mengadakan klasifikasi dan kalkulisasi (Roziana, 2008: 1). Jadi dengan menggunakan bahasa matematika suatu persoalan dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan.

Menurut Leonhandry (1962: 3) matematika tidak hanya suatu alat, tetapi matematika juga merupakan bahasa. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan semakin lebih mudah untuk dipahami. Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam, adalah konsep tauhid, yaitu ke-Esaan Allah. Namun, Al-Quran tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari suatu yang ada dibalik alam semesta (Rahman, 1992: 92). Alam semesta sendiri memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-

perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007: 79).

Dalam AL-Quran surat Maryam ayat 94 disebutkan:

لَّقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

Artinya: Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti. .(Q.S. Maryam: 94)

Ayat diatas menceritakan bahwa sesungguhnya Allah, Dia yang maha esa itu telah mengetahui keadaan baik yang terjangkau oleh mahkluk maupun yang mereka tidak dapat terjangkau, kebutuhan dan keinginan mereka dengan rinci sebelum hadir dipentas jagad raya dan telah mengitung mereka dengan hitungan yang teliti sehingga semua Dia penuhi kebutuhannya. Dengan demikian Allah adalah pembuat hitungan yang paling teliti. (Shihab, 2002: 307-309).

Dewasa ini semakin banyak muncul penggunaan model matematika maupun penalaran matematika sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori bilangan merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari dari mulai bangun tidur sampai kita tertidur kembali kita tidak lepas dari teori bilangan. (Taufik, 2001: 1).

Terkait dengan pernyataan diatas, menyelesaikan sistem kongruensi linier merupakan salah satu penelitian yang menarik untuk dikaji. Karena pada semua buku-buku atau literatur-literatur hanya membahas sistem kongruensi linier satu variabel.

Sistem kongruensi linier adalah sistem kongruensi linier merupakan suatu sistem residu yang lengkap dengan modulo c dari suatu baris polynominal dengan koefisien-koefisien bulat dan dapat dituliskan dalam bentuk umumnya:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \equiv b_1 \pmod{c} \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \equiv b_2 \pmod{c} \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \equiv b_m \pmod{c}
\end{array}
\text{dimana} a_{ij} \,\&\, b_i \in R, i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n
$$

Sebelum menyelesaikan sistem kongruensi linier perlu diketahui sistem kongruensi linier tersebut mempunyai selesaian atau tidak mempunyai selesaian. Untuk menyelesaiakan sistem kongruensi linier yang mempunyai selesaian dapat dikerjakan dengan berbagai cara, diantaranya eliminasi, subtitusi, campuran (eliminasi-subtitusi), invers, invers matriks, operasi baris elementer, dan algoritma euclides.

Dengan mengkaji dan mengalisis suatu sistem kongruensi linier ini, akan didapat suatu perumusan yang akan lebih mempermudah proses pengaplikasiannya ke dunia nyata. Sebagai contoh, kerja arloji menggunakan modulo 12 untuk menyatakan jam, menggunakan modulo 60 ontuk menyatakan menit dan detik, kerja kalender menggunakan modulo 7 untuk hari-hari dalam satu minggu, menggunakan modulo 5 untuk hari-hari pasaran di Jawa (pon, wage, kliwon, legi, paing).

Dalam menyelesaikan sistem kongruensi linier ini dapat dikerjakan berbagai cara, diantaranya eliminasi, subtitusi, campuran (eliminasi-subtitusi), invers, invers matriks, eliminasi baris elementer, dan algoritma euclides. Dalam Al-Quran juga dijelaskan bahwa untuk bisa dikatakan sebagai orang yang bertakwa dapat dilakukan berbagai cara, diantaranya beriman kepada Allah, hari kemudian, malaikat-malaikat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, musafir (yang memerlukan pertolongan) dan orang-orang yang meminta-minta, (memerdekakan) hamba sahaya, mendirikan shalat, dan menunaikan zakat, orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji, orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan.

Dalam Al-Quran surat Al-Baqarah ayat 177 disebutkan:

لَّيۡسَ ٱلۡبِرَّ أَن تُوَلُّواْ وُجُوهَكُمۡ قِبَلَ ٱلۡمَشۡرِقِ وَٱلۡمَغۡرِبِ وَلَٰكِنَّ ٱلۡبِرَّ مَنۡ ءَامَنَ بِٱللَّهِ وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِ
وَٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ وَٱلۡكِتَٰبِ وَٱلنَّبِيِّـۧنَ وَءَاتَى ٱلۡمَالَ عَلَىٰ حُبِّهِۦ ذَوِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡيَتَٰمَىٰ وَٱلۡمَسَٰكِينَ
وَٱبۡنَ ٱلسَّبِيلِ وَٱلسَّآئِلِينَ وَفِي ٱلرِّقَابِ وَأَقَامَ ٱلصَّلَوٰةَ وَءَاتَى ٱلزَّكَوٰةَ وَٱلۡمُوفُونَ بِعَهۡدِهِمۡ إِذَا
عَٰهَدُواْۖ وَٱلصَّٰبِرِينَ فِي ٱلۡبَأۡسَآءِ وَٱلضَّرَّآءِ وَحِينَ ٱلۡبَأۡسِۗ أُوْلَٰٓئِكَ ٱلَّذِينَ صَدَقُواْۖ وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمُ
ٱلۡمُتَّقُونَ ١٧٧

Artinya: Bukanlah menghadapkan wajahmu ke arah timur dan barat itu suatu kebajikan, akan tetapi Sesungguhnya kebajikan itu ialah beriman kepada Allah, hari Kemudian, malaikat-malaikat, kitab-kitab, nabi-nabi dan memberikan harta yang dicintainya kepada kerabatnya, anak-anak yatim, orang-orang miskin, musafir (yang memerlukan pertolongan) dan orang-orang yang meminta-minta; dan (memerdekakan) hamba sahaya, *mendirikan shalat, dan menunaikan zakat; dan orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji, dan orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan. mereka Itulah orang-orang yang benar (imannya); dan mereka Itulah orang-orang yang bertakwa. (Q.S. Al-Barqarah: 177)*

Ayat diatas menjelaskan bahwa kata *birr* (kesalehan) sama dengan aplikasi madu. Siapa pun atau apa pun yang sangat manis dan berfaedah dipersamakan dengan madu. Oleh karenanya, siapapun yang sangat baik dan saleh disebut sebagai '*orang yang bertakwa*', yaitu orang yang benar-benar berbuat bajik (dalam makna seluas-luasnya). (Imani, 2006: 54)

Beberapa kajian terdahulu tentang kongruensi linier telah dibahas pada karya tulis yang lain, oleh salma. Dari karya tulisnya untuk menyelesaikan sistem kongruansi linier menggunakan cara langsung. Untuk selanjutnya peneliti tertarik untuk melanjutkan meneliti tentang sistem kongruensi linier dengan menggunakan cara yang diperoleh dari hasil pembuktian dan akan membahas secara lebih luas tentang beberapa teknik dalam menyelesaikan sistem kongruansi linier. Oleh karena itu penulis merumuskan judul untuk skripsi ini "*menyelesaikan sistem kongruensi linier*".

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang tersebut, masalah yang akan dikaji dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana sistem kongruensi linier dikatakan mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian?

2. Bagaimana cara menyelesaikan sistem kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah dikemukakan sebelumnya, maka tujuan penelitian skripsi ini adalah untuk:

1. Menjelaskan sistem kongruensi linier mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian.
2. Menjelaskan cara menyelesaikan sistem kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan dalam skirsi ini tidak meluas, maka penulis membatasi pada penyelesaian kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel dengan menggunakan modulo yang sama. Cara yang digunakan untuk menyelesaikan sistem kongruensi linier tersebut adalah eliminasi, subtitusi, eliminasi-subtitusi, matriks, matriks invers, operasi baris elementer, dan algoritma euclides.

1.5 Manfaat Penulisan

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai cara menyelesaikan sistem kongruensi linier.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya teori bilangan mengenai cara menyelesaikan sistem kongruensi linier.

3. Bagi lembaga UIN malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori bilangan.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan sebuah penelitian kepustakaan (Library Reseach). Metode kepustakaan adalah metode yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat diruangan perpustakaan, seperti: buku-buku, majalah, dokumen, catatan dan kisah-kisah sejarah dan lain-lainnya. (Mardalis, 1999: 28)

1.6.1 Jenis Penelitian

Jenis dari penulisan skripsi ini adalah penelitian kepustakaan (Library Reseach). Metode kepustakaan adalah metode yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material yang terdapat diruangan perpustakaan, seperti: buku-buku, majalah, dokumen, catatan dan kisah-kisah sejarah dan lain-lainnya. (Mardalis, 1999: 28)

Dalam penulisan skripsi ini akan digunakan beberapa pustaka yang sesuai dengan tema dan judul yang telah ditetapkan dengan tanpa mengurangi keakuratan dalam penyampaian penelitian. Dalam pengambilan bahan pustaka adalah dengan memperhatikan dua kriteria pokok yaitu prinsip relevansi dengan fokus atau topik penelitian.

1.6.2 Data dan Sumber Data

Data yang digunakan penulis dalam rangka penyusunan skripsi ini adalah data-data yang meliputi sistem kongruensi linier dan teknik-teknik dalam menyelesaikan sistem kongruensi lilier, dan data-data lain yang sesuai.

Sumber data dalam penulisan skripsi ini diperoleh melalui buku-buku antara lain: Marhan Taufik (Pengantar Ilmu Bilangan), Drs. Gatot Muhsetyo, M.Sc (Dasar-Dasar Teori Bilangan), Drs. Sukirman, M.Pd (Pengantar Teori Bilangan) dan sumber-sumber lain yang relevan.

1.6.3 Teknik Analisis data

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan penulis dalam menganalisis data ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan deskripsi dan pembahasan tentang kongruensi linier yang mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian.
2. Memberikan bukti umum untuk mencari penyelesaian sistem kongruensi linier.
3. Memberikan contoh soal tentang menyelesaikan sistem kongruensi linier dengan menggunakan eliminasi, subtitusi, eliminasi-subtitusi, matriks, matriks invers, operasi baris elementer, dan algoritma euclides.

Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan

1.7 Sistematika Penulisan

Yang dimaksud dengan sistematika pembahasan disini adalah gambaran singkat mengenai skripsi ini, dengan tujuan memberikan gambaran secara garis besar pembhasan-pembahasan dalam skripsi ini. Dengan kata lain sistematika pembahsan adalah kerangka pembahasan skripsi yang disusun mulai dari yang pertama sampai akhir.

Adapun sistematika penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

BAB I: PENDAHULUAN

Bab ini merupakan bab pengantar yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penulisan, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang studi teoritis dari berbagai literatur dan sumber-sumber yang relevan dengan masalah yang diteliti. Bab ini membahas tentang sistem persamaan linier, teknik menyelesaikan persamaan, dan kongruensi.

BAB III: PEMBAHASAN

Bab ini memaparkan pembahasan tentang sistem kongruensi yang mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian, menyelesaikan sistem kongruensi linier dengan tiga kongruensi tiga variabel, serta kajian agama Islam tentang menyelesaikan sistem kongruensi linier.

BAB IV: PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2. 1 Kalimat terbuka

Definisi 1.1:

kalimat terbuka *adalah* kalimat yang mengandung variabel, dan jika variabel tersebut diganti konstanta dengan semesta sesuai maka kalimat itu akan menjadi kalimat yang bernilai benar saja atau bernilai salah saja. (Saputro, 1990: 10)

Contoh:

a) Manusia makan nasi
b) 3 x 3 = □
c) 2 + x = 7
d) 4 – 2 = 2

Kalimat a, b, c adalah kalimat terbuka sedangkan d bukan kalimat terbuka yaitu kalimat tertutup. Pada kalimat a sampai c masing – masing variabelnya adalah "manusia", "□", "x" dan jika variabelnya diganti dengan "ines", "9", "5". Pengganti – pengganti dari variabel pada a sampai c disebut konstanta yang sesuai, maka kalimat yang terjadi dapat disebut kalimat tertutup. (Saputro, 1990: 10).

Definisi 1.2:

variabel adalah simbol yang menunjukkan suatu anggota yang belum spesifik dalam semesta pembicaraan (Saputro, 1990: 9)

Definisi 1.3:

konstanta adalah simbol yang menunjukkan anggota tertentu (yang sudah spesifik) dalam semesta pembicaraan (Saputro, 1990: 9)

2. 2 Persamaan

Definisi 2.1:

persamaan adalah kalimat terbuka yang masih mengandung variabel dan menggunakan tanda “=”. (Saputro, 1990: 10)

Contoh:

Contoh pada kalimat terbuka yaitu kalimat b dan c disebut persamaan. Dan pada kalimat b, jika variabelnya diganti 9 maka bernilai benar dan selain 9 maka bernilai salah. Bilangan 9 disebut selesaian persamaan.

2. 3 Persamaan Linier

Definisi 3.1:

Bentuk $a_1x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$ disebut persamaan linier, (Anton, 1990: 2)

Jadi persamaan linier adalah persamaan yang berderajat satu dan tidak ada perkalian antara variabelnya. Untuk $a_1, a_2, \cdots, a_n$ atau $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dan b merupakan konstanta real.

Contoh:

a) $x + 3y = 7$ b) $xy + 4x = 12$ c) $x^2 + 2y = 8$

Kalimat pada a adalah persamaan linier. Kalimat b dan c bukan persamaan linier karena ada pangkat lebih dari satu dan ada perkalian antara variabelnya yaitu x dan y.

2. 4 Sistem persamaan linier

Sistem persamaan linier (SPL) merupakan suatu sistem persamaan dimana suku-suku peubah (seperti x dan y) berderajat satu (jadi tidak mempunyai pangkat lebih dari satu) dan sistem persamaan linier merupakan suatu himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dalam peubah (variabel) x dan peubah y, yang secara umum dapat didefinisikan persamaan linier dalam n peubah $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sebagai persamaan linier yang dinyatakan dalam bentuk:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\;\vdots \qquad\; \vdots \qquad \vdots \qquad\; \vdots \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \text{ dimana } a_{1,} a_2, \ldots a_n \text{ dan } b \in R
\end{array}
$$

2. 5. Beberapa Teknik untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier

Dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dapat diselesaikan beberapa cara antara lain:

2. 5. 1 Eliminasi-Subtitusi

Metode subtitusi artinya mengganti nilai variabel dengan nilai tertentu sehingga persamaan menjadi kalimat benar. Atau subtitusi adalah memasukkan nilai salah satu variabel ke variabel lain. Misalnya mensubtitusikan nilai $x = x_1$

yang diperoleh untuk mendapatkan nilai y_1. Atau mensubtitusikan nilai y_1 yang diperoleh untuk mendapatkan x_1 yang artinya himpunan penyelesaian $\{(x_1, y_1)\}$

Eliminasi mempunyai arti proses mengeliminasi (menghilangkan) salah satu variabel untuk menentukan nilai variabel lainnya dan sebaliknya. Sedangkan subtitusi-eliminasi adalah proses penggabungan 2 metode penyelesaian dalam persamaan linier dimana metode eliminasi digunakan untuk mendapatkan nilai variabel pertama dan hasilnya disubtitusikan ke persamaan untuk mendapatkan nilai variabel kedua.

Metode eliminasi-subtitusi merupakan gabungan dua metode antara metode eliminasi-subtitusi. Dimana dalam menentukan penyelesaian SPL dengan metode eliminasi-subtitusi dapat disimpulkan bahwa metode subtitusi bekerja lebih lambat dalam menentukan variabel pertama, tapi sangat cepat menentukan variabel kedua setelah variabel pertama diketahui. Sementara metode eliminasi justru lebih cepat menentukan variabel pertama tapi lebih lambat dalam menentukan variabel kedua karena proses eliminasi diulang lagi dari awal.

Cara terbaik menyelesaikan SPL adalah dengan menggabungkan dua metode eliminasi dan subtitusi. Metode eliminasi digunakan untuk mendapatkan variabel kedua.

Contoh: tentukan himpunan selesaian dari sistem persamaan linier dua peubah berikut:

$6p + 4q = 16$ ……...(1)

$4p + 2q = 10$………(2)

Penyelesaian:

$$\begin{array}{l} 6p + 4q = 16 \\ 4p + 2q = 10 \end{array}\left|\begin{array}{l} x2 \\ x3 \end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{r} 12p + 8q = 32 \\ \underline{12p + 6q = 30} \; - \\ 2q = 2 \\ q = 1 \end{array}$$

Subtitusikan q = 1 ke persamaan (2)

$4p + 2q = 10$

$4p + 2(1) = 10$

$4p = 8$

$p = 2$

jadi himpunan penyelesaiannya {(2,1)}

2. 5. 2 Matriks

Pada sistem persamaan linier terdapat koefisien-koefisien dan variabel-variabelnya. Bentuk ini dapat dirancang dalam sesuatu bentuk segi empat yang disebut matriks.

Bentuk umum matriks:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

dimana $a_{1,} a_2, \ldots a_n$ dan $b \in R$

sehingga: $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Bentuk nama matriks diatas dapat dinyatakan dengan : (a_{ij}), I = 1, 2 …., m; j = 1, 2…,n. dimana a_{ij} adalah skalar.

Jadi, ada m-kolom dari n-baris:

$(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, (a_{m1}, a_{m2}, \ldots a_{mn})$ dan ada n baris dari m-kolom;

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \ldots \\ a_{mm} \end{pmatrix}$$

Suatu matriks dapat juga dikatakan m x n matriks.

Contoh: suatu 2 x 3 matriks:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan baris $(3 \quad 2 \quad 3)$ dan $(1 \quad 2 \quad 1)$ serta kolom-kolomnya: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

matriks juga dapat dinyatakan dalam bentuk huruf-huruf besar: A, B, …, dengan elemen-elemen huruf kecil a, b, …

A = B jika kedua elemen-elemenya sama

Contoh:

$\begin{pmatrix} x + y & 2z + w \\ x - y & z - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ adalah sama dengan

$x + y = 3$

$x - y = 1$

$2z + w = 5$

z – w = 4

Determinan

Determinan adalah suatu bilangan yang diperoleh atau tergabung untuk suatu matriks persegi (Assuari, 1980 : 60) elemen–elemennya diletakkan pada dua garis lurus.

Determinan tingkat tiga:

Determinan dari matriks 3 x 3 didefinisikan sebagai berikut:

$$\text{Det(A)= det} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3$$

Yang terdiri dari sembilan bilangan disusun 3 baris dan 3 kolom disebut determinan tingkat tiga. Pada 3 persamaan 3 variabel dapat menggunakan metode sarrus (2 kolom pertama digandengkan dibelakang matriks asal)

Matriks Adjoint

Transpose (putaran) dari matriks kofaktor disebut matriks adjoint (Assuari, 1990: 80)

Bila A adalah suatu matriks 2 x 2 yaitu

$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{bmatrix}$, maka matriks dari kofaktor adalah $\begin{bmatrix} -a_2 & b_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$ dan bila A adalah suatu matriks 3 x 3 yaitu:

$$\text{Det (A) = det} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

$k_{11} = b_2c_3 - c_2b_3$, $k_{12} = a_2c_3 - c_2a_3$, $k_{13} = a_2b_3 - b_2a_3$

$k_{21} = b_2c_3 - c_1b_3$, $k_{22} = a_1c_3 - c_1a_3$, $k_{23} = a_1b_3 - b_1a_3$

$k_{31} = b_1c_2 - c_1b_2$, $k_{32} = a_1c_2 - c_2c_1$, $k_{33} = a_1b_2 - b_1a_2$

Jadi matriks dari kofaktor (matriks adjoint) adalah

$$K' = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}$$

2. 5. 3 Invers matriks

Dalam himpunan bilangan, operasi perkalian mempunyai sifat komutatif. Artinya, untuk setiap dua bilangan a dan b berlaku $a \cdot b = b \cdot a$ jika ada bilangan x sehingga $a \cdot x = x \cdot a = 1$, maka x disebut invers dari a yang dinyatakan dengan a^{-1}. dalam hal ini a^{-1} juga disebut kebalikan dari a, sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. (Subagio, 1998: 2)

Rumus umum invers matriks di ordo 2x2 sebagai berikut:

Jika S = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, untuk mendapatkan invers matriks S.

Dipergunakan perkalian matriks dan kesamaan 2 buah matriks sebagai berikut:

Misalkan $S^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ dan $S \cdot S^{-1} = 1$

Jadi $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bu \\ cx + dz & cy + du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ a) $ax + bz = 1$

$cx + dz = 0$

b) $ay + bu = 0$

$cy + du = 1$

penyelesaian sistem persamaan ini adalah

a) $ax + bz = 1$

$cx + dz = 0$

jika persamaan pertama dikalikan dengan d dan persamaan kedua dikalikan dengan b diperoleh:

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} adx + bdx = d \\ \underline{bcx + bdx = 0 -} \end{array}$$

$$(ad - bc)x = d \text{ atau } x = \frac{d}{ad - bc}$$

Dengan subtitusi diperoleh dz = -cx atau $z = \frac{-c}{ad - bc}$

b) $ay + bu = 0$

$cy + du = 1$

jika persamaan pertama dikalikan d, dan persamaan kedua dikalikan dengan b diperoleh:

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} ady + bdu = 0 \\ \underline{bcy + bdu = b -} \end{array}$$

$$(ad - bc)y = -b \text{ atau } y = \frac{-b}{ad - bc}$$

Dengan subtitusi diperoleh:

Bu = -ay atau $u = \frac{-a}{ad - bc}$

Nilai x, y, z dan u ada apabila ad-bc $\neq 0$

Jadi $S^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

Atau $S^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ dengan ad-bc $\neq$ 0

Contoh: tentukan invers matriks $S = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Penyelesaian jika $S = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$maka $S^{-1} \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Jadi $S^{-1} = \dfrac{1}{20-18}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -\dfrac{3}{2} & \dfrac{5}{2} \end{bmatrix}$

2. 5. 4 Operasi Baris Elementer

Cara ini dapat diselesaikan dengan menggunakan tiga tipe operasi yaitu:

1. Kalikanlah sebuah baris dengan sebuah konstanta yang tak sama dengan nol
2. Pertukarkanlah dua baris tersebut
3. Tambahkanlah perkalian dari suatu baris pada baris yang lainnya

Operasi- operasi diatas disebut operasi baris elementer (Anton, 1998: 5)

Matriks diperoleh dari operasi baris elementer antara lain:

- Matriks yang baris pertamanya tidak semuanya nol dan unsur tidak nol pertama kali adalah satu (1) yang disebut satu utama
- Satu utama pada baris berikutnya lebih menjorok ke kanan dibanding satu utama baris sebelumnya.
- Suatu baris yang semuanya nol diletakkan bersama- sama dibawah

2. 6. Keterbagian

Defenisi 6. 1:

Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat, kita katakan a membagi habis b, ditulis $a|b$, jika dan hanya jika terdapat bilangan bulat k sedemikian hingga $k \cdot a = b$. Jika tidak ada bilangan bulat k sedemikian hingga $k \cdot a = b$, maka dikatakan a tidak membagi habis, dan ditulis $a \nmid b$. (Taufik, 2001: 80)

Untuk lebih jelas, maka penulis memberikan contoh sebagai berikut :

$2|4$ berarti menurut definisi 2. 1 ada bilangan bulat k sehingga $k \cdot 2 = 4$, Dengan k =2

$3 \nmid 2$ karena tidak ada bilangan bulat $k \cdot 3 = 2$

Terdapat istilah yang mempunyai arti yang sama dengan $a|b$ ialah

- a membagi b
- b terbagi a

Apabila a, b, dan k bilangan-bilangan bulat dengan $a \neq 0$ dan $k \cdot a = b$, maka k disebut hasil bagi (kosien). Selain itu k juga disebut faktor dari b yang menjadi komplemen dari a atau dengan singkat dikatakan “k adalah faktor b komplemen a”.

Definisi 6.2:

Jika b = aq + r dengan 0 $\leq$ r < a, maka

b disebut bilangan yang dibagi (devidend)

a disebut bilangan pembagi (divisor)

q disebut bilangan hasil bagi (equentient) r disebut bilangan sisa (remainder)

Suatu algoritma adalah metode atau prosedur matematis untuk memperoleh hasil tertentu, yang dilakukan menurut sejumlah langkah berurutan yang terhingga. Teorema ini sebenarnya telah bersifat eksistensi (keujudan) dari adanya bilangan-bilangan bulat q dan r pada suatu algoritma. Namun demikian, uraian tentang pembuktiannya dapat memberikan gambaran adanya suatu metode, cara, atau prosedur matematis untuk memperoleh bilangan-bilangan bulat q dan r sehingga b = qa + r. (Muhsetyo, 1997: 53)

Untuk lebih jelas, maka penulis memberikan contoh

$23 = 4.5 + 3 \rightarrow y = qx + r$

23 adalah bilangan yang dibagi

5 adalah bilangan pembagi

4 adalah hasil bagi

3 adalah bilangan sisa

Jika x = 4 dan y adalah sebarang bilangan bulat, maka menurut teorema Algoritma pembagian, y dapat dikatakan dengan

$y = 4q + r \qquad 0 \leq r < 4$

Ini berarti bahwa nilai-nilai y yang mungkin dapat ditentukan oleh nilai-nilai r yang mungkin, yaitu r = 0 atau r =1

Untuk r = 0, $y = 4q + r = 4q + 0 \rightarrow y = 4q$, dengan $q \in Z$

y yang dapat dinyatakan dengan 4q ($q \in Z$) disebut bilangan bulat genap (evan integer)

untuk r = 1, $y = 2q + r = 2q + 1$ $q \in Z$

y yang dapat dinyatakan dengan 2q + 1 ($q \in Z$) disebut bilangan bulat ganjil (gasal, odd integer)

Ternyata, berdasarkan teorema algoritma pembagian, setiap bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai bilangan bulat genap 4q atau bilangan bulat ganjil (4q + 1). Selanjutnya jika diambil x = 3, maka menurut teorema algoritma pembagian, dengan mengambil r = 0, r =1, dan r = 2, sebarang bilangan bulat b dapat dinyatakan sebagai salah satu dari:

y = 3q

y = 3q + 1

y = 3q + 2

Dengan alasan yang sama, setiap bilangan bulat selalu dapat dinyatakan antara lain:

1. Salah satu dari 4q, 4q + 1, 4q + 2, atau 4q + 3, ($q \in Z$)
2. Salah satu dari 5q, 5q + 1, 5q + 2, 5q + 3, atau 5q + 4 ($q \in Z$)
3. Salah satu dari 6q, 6q + 1, 6q + 2, 6q + 3, atau 6q + 4 atau 6q + 5($q \in Z$)

Disinilah sebenarnya letak dari konsep algoritma pembagian, suatu konsep mendasar yang dapat digunakan untuk membantu pembuktian sifat-sifat tertentu.

2.7 Faktor Persekutuan Terbesar

Definisi 7.1:

Suatu bilangan z disebut faktor persekutuan (FP) dari $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ (ditulis z = FP $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$) jika dan hanya jika $z | x_1$ untuk setiap I = 1, 2, 3, …, n. (Taufik, 2001: 111)

Contoh: carilah faktor persekutuan 5 dan 10

Jawab: (5, 10) = 1 dan 5 karena $1|5, 1|10$ dan $5|5, 5|10$

Definisi 7.2:

Suatu bilangan bulat z disebut faktor persekutuan terbesar dari bilangan-bilangan bulat $x_1, x_2, x_3 \ldots,$ dan x_n yang semuanya tidak 0 (ditulis "Z = FPB($x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$)") jika dan hanya jika z = FP ($x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$) jika terdapat w = FP ($x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$) maka w ≤ z. (Taufik, 2001: 110)

Contoh: carilah faktor persekutuan terbesar dari 5 dan 10

Jawab: karena FP 5 dan 10 = 1 dan 5 dan 5 >1 maka (5, 10) = 5

Ada beberapa cara untuk menentukan FPB dari dua bilangan atau lebih. Jika bilangannya kecil antara lain dengan menuliskan semua faktor dari bilangan-bilangan tersebut, tentukan FP-nya dan FPB-nya adalah FP yang terbesar dari bilangan-bilangan tersebut dengan menuliskan bilangan-bilangan tersebut sebagai hasil kali faktor-faktor primanya, dan FPB-nya adalah faktor-faktor dari bilangan-bilangan tersebut.

Teorema 7.1

Jika (x, y) = z maka $\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = \left(\frac{x}{x,y}, \frac{y}{x,y}\right) = 1$ (Taufik, 2001: 114)

Bukti:

Ambil $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \geq 1$

Misal $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = w$

Maka $w \mid \frac{x}{z}$ dan $w \mid \frac{y}{z}$ (definisi 6.1)

$w \mid \frac{x}{z} \rightarrow kw = \frac{x}{z}$ (definisi 6.1)

$\rightarrow (kw) = x$

$\rightarrow k(kw) = x$ (sifat asosiatif)

$\rightarrow wz \mid x$ (definisi 6.1; $k \in Z$)

$wz \mid x$ dan $wz \mid y$ maka w = FP dari x dan y (definisi 6.1)

Dan z = FPB dari x dan y

$FP \leq FPB$

$wz \leq z$

$w \leq \frac{z}{z}$

$w \leq 1$

$\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) \leq 1$

Karena $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \geq 1$ dan $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \leq 1$ maka $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 1.$

Teorema 7.2

Jika y = qx + r maka FPB (y, x) = FPB (x, r). (Taufik, 2001: 115)

Bukti:

(x, y) = z (teorema 7.1)

Maka (x, y) = z

$\rightarrow z \mid y$ dan $z \mid x$ (definisi 7.1)

$z|y \rightarrow pz = y \,;\, p \in Z$ (definisi 6.1)

$z|x \rightarrow pz = x \,;\, p \in Z$ (definisi 6.1)

Karena $y = qx + r$

$y - qx = r$

$r = y - qx$

Karena $z|y$ dan $z|x$, $q \in Z$ maka $z|r$

$z|y$, $z|x$ dan $z|r$ maka menurut definisi 3.1 z = (y, x) = (y, r) = (x, r) jadi (y, x) = (x, r) = z (teorema terbukti)

Contoh: $y = qx + r$

$15 = 3.\ 4 + 3$

(15, 4) = FPB (4, 3) = 1 maka FPB (15, 4) = 1

Teorema 7.3 (Algoritma Euclides)

Jika x dan y bilangan-bilangan bulat positif, dengan menerapkan algoritma pembagian berulang-ulang maka kita memperoleh persamaan berikut ini:

$y = qx + r$ dengan $0 < r < x$

$x = q_1 r + r_1$ dengan $0 < r_1 < r$

$r = q_2 r_1 + r_2$ dengan $0 < r_2 < r_1$

$r_1 = q_3 r_2 + r_3$ dengan $0 < r_3 < r_2$

$\vdots \qquad \vdots$

$r_{j-2} = q_j r_{j-1} + r_j$ dengan $0 < r_j < r_{j-1}$

$r_{j-1} = q_j + 1 r_j$

Maka (x, y) = r_j

(Taufik, 2001: 116)

Bukti:

$$y = qx + r \rightarrow (x, y) = (x, r) \quad \text{(teorema 7.2)}$$

$$x = q_1 r + r_1 \rightarrow (x, r) = (r, r_1)$$

$$r = q_2 r_1 + r_2 \rightarrow (r, r_1) = (r_1, r_2)$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \rightarrow (r_1, r_2) = (r_2, r_3)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$r_{j-2} = q_j r_{j-1} + r_j \rightarrow (r_2, r_3) = r_{j-1}, r_j$$

$$r_{j-1} = q_j + 1 r_j \rightarrow (r_{j-1}, r_j) = r_j$$

Dari proses pengulangan tersebut diperoleh $(x, y) = (y, r) = (x, r) = (r, r_1)$

$$= (r_1, r_2) = (r_2, r_3)$$

$$= (r_{j-2}, r_{j-1}) = (r_{j-1}, r_j)$$

Sekarang akan dibuktikan FPB (y, x) = r_j

Persamaan yang berulang-ulang tersebut akan terhenti jika sisanya nol.

Jika r = 0 maka persamaan menjadi y = qx

$$y = qx + r \rightarrow (y, x) = (x, r)$$

$$y = qx \rightarrow (y,x) = (x)$$

$$(r_{j-1}, r_j) = r_j$$

Contoh: carilah FPB dari 120 dan 95

Jawab: 120 = 1.95 + 35 $\rightarrow$ (120, 95) = (95, 35)

95 = 2. 35 + 25 $\rightarrow$ (95, 35) = (35, 25)

35 = 1. 25 + 10 $\rightarrow$ (35, 25) = (25, 10)

25 = 2. 10 + 5 $\rightarrow$ (25, 10) = (10, 5)

10 = 2. 5 + 0 $\rightarrow$ (10, 5) = (5, 0)

Jadi (120, 95) = 5

Teorema 7.4:

Jika FPB (x, y) = r_j tunggal maka ada bilangan-bilangan bulat m dan n sedemikian hingga mx + ny = r_j. (Taufik, 2001: 119)

Bukti:

Dari teorema 3.3 diketahui bahwa

$r_{j-4} = q_{j-2}r_{j-3} + r_{j-2} \rightarrow r_{j-2} = r_{j-4} - q_{j-2}r_{j-3}$ ……………..(i)

$r_{j-3} = q_{j-1}r_{j-2} + r_{j-1} \rightarrow r_{j-3} = r_{j-3} - q_{j-1}r_{j-2}$ ……………..(ii)

$r_{j-2} = q_jr_{j-1} + r_j \rightarrow r_j = r_{j-2} - q_jr_{j-1}$ ……………………(iii)

Menurut teorema 7.3 (y, x) = r_j, jika distribusi pada persamaan (iii) maka diperoleh

$$\begin{aligned}(x, y) = r_j &= r_{j-2} - q_jr_{j-1} \\ &= r_{j-2} - q_j(r_{j-3} - q_{j-1}r_{j-2}) \\ &= r_{j-2} - q_jr_{j-3} + q_jq_{j-1}1r_{j-2} \\ &= (1 + q_jq_{j-1})r_{j-2} - q_jr_{j-3}\end{aligned}$$

$$= (1 + q_j q_{j-1})(r_{j-4} - q_{j-2} r_{j-3}) - q_j r_{j-3}$$

$$= r_{j-4} - q_{j-2} r_{j-3} + q_j q_{j-1} r_{j-4} - q_j q_{j-1} q_j r_{j-3} - q_j r_{j-3}$$

$$= (1 + q_j q_{j-1}) r_{j-4} - (q_{j-2} + q_j q_{j-1} q_j) r_{j-3} - q_j r_{j-3}$$

$$= (1 + q_j q_{j-1}) r_{j-4} + (- q_{j-2} - q_j q_{j-1} q_{j-2} r_{j-3} q_j) r_{j-3}$$

$$r_j = (1 + q_j q_{j-1}) r_{j-4} + (- q_{j-2} - q_j q_{j-1} q_{j-2} r_{j-3} q_j)(r_{j-5} - q_{j-3} r_{j-4})$$

$$= \left(\frac{1 + q_j q_{j-1} + q_j q_{j-3} + q_{j-2} q_{j-3} + q_j q_{j-1} q_{j-2} q_{j-3}}{m} \right) \frac{r_{j-4}}{x} + \left(\frac{-q_{j-2} - q_j q_{j-1} q_{j-2} r_{j-3} - q_j}{n} \right) \frac{r_{j-5}}{y}$$

Sehingga dapat ditulis

$$r_j = mx + ny$$

Dimana m dan n adalah bilangan bulat.

Khususnya jika (x, y) = 1 maka ada bilangan-bilangan bulat m dan n sedemikian hingga mx + ny = 1.

Contoh:

Tentukan FPB dari 49 dan 29

Jawab:

$180 = 3 \,.\, 55 + 15 \rightarrow 15 = 180 - 3 \,.\, 35$

$55 = 3 \,.\, 15 + 10 \rightarrow 10 = 55 - 3 \,.\, 15$

$15 = 1 \,.\, 10 + 5 \rightarrow 5 = 15 - 1 \,.\, 10$

$10 = 2 \,.\, 5$

$5 = 15 - 1 \,.\, 10$

$= 15 - 1(55 - 3 \,.\, 15)$

$= 4 \,.\, 15 - 1 \,.\, 55$

$= 4\ (180 - 3 \,.\, 55) - 1 \,.\, 55$

$= 4.\ 180 - 13 \,.\, 55$

$= 720 - 615$

Jadi (180, 55) = 5

2. 8. Kongruensi

Definisi 8.1:

Jika sebuah bilangan bulat m suatu bilangan positif, maka a kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \equiv b \pmod{m}$) bila m membagi (a – b). Jika m tidak membagi (a – b) maka dikatakan a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \not\equiv b$). (Sukirman, 2005: 87)

Contoh :

$18 \equiv 6 \pmod 4$ karena $4 | 18 - 6$

$19 \not\equiv 5 \pmod 6$ karena $6 \nmid 19 - 5$

Definisi 8.2:

jika $a \equiv r \pmod{m}$ dengan $0 \leq r < m$. maka r disebut *residu* terkecil dari a modulo m. untuk kongruensi modulo m ini, {(0, 1, 2, 3, …, (m-1)} disebut himpunan residu terkecil modulo m.

Teorema 8.1:

$x \equiv y \pmod{n}$ jika dan hanya ada bilangan bulat k sedemikian hingga $x = nk + y$. (Taufik, 2001: 144)

Bukti:

$$x \equiv y \pmod{n}$$

$$\rightarrow n \mid (x - y)$$

$$\rightarrow \exists K \in Z \ni kn = y - x$$

$$\rightarrow \exists K \in Z \ni kn = kn + y$$

Contoh:

$5 \equiv 11 \pmod{3}$ karena $\exists\ k = -2 \ni 5 = -2 \cdot 3 + 11$

Teorema 8. 2:

Dua bilangan bulat x dan y kongruen modulo n jika dan hanya jika keduanya mempunyai residu yang sama jika dibagi n. (Taufik, 2001: 145)

Bukti:

Misal $x = qn + r$…………..…(i)

$y = q'n + r'$…………(ii) dimana $0 \leq r < n$ dan $0 \leq r < n$

maka jika $x - y$ diperoleh

$$= (qn + r) - (q'n + r')$$

$$= qn - q'n + r - r'$$

$$= (q - q')n + (r - r')$$

Karena $x \equiv y \pmod{n}$ maka menurut definisi 2.1. $n \mid (x - y)$

Subtitusi persamaan (i) pada (ii) maka diperoleh

$$n \mid (x - y)$$

$$n \mid (q - q')n + (r - r')$$

Berarti $n \mid (q - q')n$ dan $n \mid (r - r')$

Karena $0 \leq r < n$ dan $0 \leq r' < n$ maka $n|(r - r')$ jika dan hanya jika $r = r'$

Contoh:

$20 \equiv 26 \pmod 6$ karena residu terkecil dari 20 dan 26 adalah sama-sama 2

Definisi 8. 2

Himpunan bilangan bulat $\{r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n\}$ disebut sistem residu lengkap modulo n jika dan hanya jika setiap bilangan kongruen modulo n dengan tepat satu diantara $r_1, r_2, r_3, \ldots,$ atau r_n. (Taufik, 2001: 147)

Contoh:

Himpunan S = {-24, -11, 26, -9, 20, 37, 48} merupakan sistem residu lengkap karena $-24 \equiv 0 \pmod 4$

$-11 \equiv 1 \pmod 4$

$26 \equiv 2 \pmod 4$

$-9 \equiv 3 \pmod 4$

$20 \equiv 0 \pmod 4$

$37 \equiv 1 \pmod 4$

$48 \equiv 2 \pmod 4$

Teorema 8.3:

Misalkan $x \equiv x' \pmod n$ dan $y \equiv y' \pmod n$ maka

a) $x + y \equiv x' + y' \pmod n$

b) $x - y \equiv x' - y' \pmod n$

c) $xy \equiv x'y' \pmod n$

d) $px + qy \equiv px' - qy' \pmod n$, p, q bilangan-bilangan bulat

e) $kx = kx' \pmod n$, k sebarang bilangan bulat tak negatif.

Bukti:

a) $x \equiv x' \pmod n \rightarrow n|(x - x')$ (definisi 8.1)

$y \equiv y' \pmod n \rightarrow n|(y - y')$ (definisi 8.1)

$n|(x - x')$ dan $n|(y - y') \rightarrow n|(x - x') + (y - y')$ (teorema 6.1.b)

$\rightarrow n|[(x + y) - (x' + y')]$

$\rightarrow x + y \equiv x' + y' \pmod n$ (definisi 8.1)

b) $x \equiv x' \pmod n \rightarrow n|(x - x')$ (definisi 8.1)

$y \equiv y' \pmod n \rightarrow n|(y - y')$ (definisi 8.1)

$n|(x - x')$ dan $n|(y - y') \rightarrow n|(x - x') - (y - y')$ (teorema 6.1.e)

$\rightarrow n|[(x - y) - (x' - y')]$

$\rightarrow x - y \equiv x' - y' \pmod n$ (definisi 8.1)

c) $x \equiv x' \pmod n \rightarrow n|(x - x')$ (definisi 8.1)

$\rightarrow pn = (x - x')$ (definisi 6.1)

$\rightarrow y(pn) = y(x - x')$ (dikalikan dengan y; $y \in Z$)

$\rightarrow (yp)n = y(x - x')$ (sifat assosiatif)

$\rightarrow n|y(x - x')$ (definisi 6.1; $y \in Z$)

$y \equiv y' \pmod n \rightarrow n|y - y'$ (definisi 8.1)

$\rightarrow qn = (y - y')$ (definisi 6.1)

$\rightarrow x'(qn) = x'(y - y')$ (dikalikan dengan x'; $x' \in Z$)

$\rightarrow (x'p)n = (y - y')$ (sifat assosiatif)

$\rightarrow n|x'(y-y')$ (definisi 6.1; $x \in Z$)

Dari $n|y(x'-x')$ dan $n|x'(y-y')$

Maka $n|[y(x-x')+x'(y-y')]$ (teorema 6.1.b)

$n|yx-yx'+x'y-x'y$ (perkalian)

$n|yx-x'y$ (sifat assosiatif)

$xy \equiv x'y' \pmod n$ (definisi 8.1)

d) $x \equiv x' \pmod n \rightarrow n|(x-x')$ (definisi 8.1)

$\rightarrow pn = (x-x')$ (definisi 6.1)

$\rightarrow p(pn) = p\ (x-x')$ (dikalikan dengan p; $p \in Z$)

$\rightarrow (pp)\ n = p\ (x-x')$ (sifat assosiatif)

$\rightarrow n|p(x-x')$ (definisi 6.1; $p \in Z$)

$y \equiv y' \pmod n \rightarrow n|(y-y')$ (definisi 8.1)

$\rightarrow qn = (y-y')$ (definisi 6.1)

$\rightarrow q(qn) = q\,(y-y')$ (dikalikan dengan q; $q \in Z$)

$\rightarrow (qq)n = q\ (y-y')$ (sifat assosiatif)

$\rightarrow n|q(y-y')$ (definisi 6.1; $q \in Z$)

Dari $n|p(x-x')$ dan $n|q(y-y') \rightarrow n|p(x-x')+q(y-y')$ (teorema 6.1 b)

$\rightarrow n|px-px'+qy-qy'$ (sifat assosiatif)

$\rightarrow n|(px+qy)-(px'+qy)$

$\rightarrow px + qy \equiv px' - qy' \pmod{n}$ (definisi 8.1)

e) $x \equiv x' \pmod{n} \rightarrow n | (x - x')$ (definisi 8.1)

$\rightarrow pn = (x - x')$ (definisi 6.1)

$\rightarrow k(pn) = k(x - x')$ (dikalikan dengan k; $k \in Z$)

$\rightarrow (kp)n = k(x - x')$ (sifat assosiatif)

$\rightarrow n | k(x - x')$ (definisi 6.1; $kp \in Z$)

$\rightarrow n | kx - kx'$

$\rightarrow kx \equiv kx' \pmod{n}$ (definisi 6.1)

Contoh:

$19 \equiv 7 \pmod{3}$ dan $5 \equiv 14 \pmod{3}$ maka

a. $19 + 5 \equiv 7 + 14$

$24 \equiv 21 \pmod{3}$

b. $19 - 5 \equiv 7 - 14 \pmod{3}$

$14 \equiv -7 \pmod{3}$

c. $19 \cdot 5 \equiv 7 \cdot 14 \pmod{3}$

$95 \equiv 98 \pmod{3}$

d. misal p = 2 dan q = 3 maka

$2 \cdot 19 + 3 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 7 + 3 \cdot 14 \pmod{3}$

$53 \equiv 56 \pmod{3}$

e. misal k = 4 maka

$4 \cdot 9 \equiv 4 \cdot 7 \pmod{3}$

$76 \equiv 28 \pmod{3}$

Teorema 8. 4:

a. Jika $mx \equiv my \pmod{n}$ dan $(m, n) = 1$ maka $x \equiv y \pmod{n}$

b. Jika $mx \equiv my \pmod{n}$ dan $(m, n) = k$ maka $x \equiv y \left(\bmod \frac{n}{k}\right)$

(Taufik, 2001: 153)

Bukti:

a. FPB $(m, n) = 1 \rightarrow am + bn = 1$ (teorema 7.4)

$\rightarrow (x-y)am + (x-y)bn = (x-y)$ (dikalikan dengan (x–y))

$mx \equiv my \pmod{n} \rightarrow n | m(x-y)$ (definisi 8.1)

$\rightarrow pn = m\,(x-y)$ (definisi 6.1)

$\rightarrow a(pn) = am\,(x-y)$ (dikalikan a; $a \in Z$)

$\rightarrow (ap)n = am\,(x-y)$ (sifat assosiatif)

$\rightarrow n | am(x-y)$ (definisi 6.1)

$n | am(x-y)$ berarti $n | am$ dan $n | (x-y)$ (teorema 6.1. b)

$\rightarrow n | (x-y)am + (x-y)bn$ (nilai$(x-y)$ disubtitusikan)

$\rightarrow n | am + bn(x-y)$ (sifat assosiatif)

$\rightarrow n | (x-y)$ (nilai $am + bn = 1$)

$\rightarrow x \equiv y \pmod{n}$ (definisi 8.1)

Contoh:

$28 \equiv 48 \pmod{5}$

$4 \cdot 7 \equiv 4 \cdot 12 \pmod{5}$

$(4, 5) = 1$ maka $7 \equiv 12 \pmod{5}$

b. $(m, n) = k \rightarrow \left(\frac{n}{k}, \frac{m}{k}\right) = 1$ (teorema 7.1)

$mx \equiv my \pmod{n} \rightarrow n \mid m(x-y)$ (definisi 8.1)

$\rightarrow \frac{n}{k} \left| \frac{m}{k}(x-y) \right.$ (dibagi dengan k; $k \in Z$)

$\rightarrow \frac{m}{k} x \equiv \frac{m}{k} y \left(\mod \frac{n}{k} \right)$ (definisi 8.1)

$\rightarrow x \equiv y \left(\mod \frac{n}{k} \right)$ (dibagi $\frac{m}{k}; \frac{m}{k} \in Z$)

Contoh:

$56 \equiv 104 \pmod{6}$

$8 \cdot 7 \equiv 8 \cdot 13 \pmod{6}$

FPB (8, 6) = 2

$7 \equiv 13 \left(\mod \frac{6}{2}\right)$

$7 \equiv 13 \pmod{3}$

2. 9 Kongruensi Linier

Kongruensi linier adalah suatu kongruensi, variabelnya berpangkat paling tinggi satu. Bentuk umum kongrunesi: $ax \equiv b \pmod{m}$, dengan $a \not\equiv 0 \pmod{m}$.

Teorema 9.1

Jika $(a, m) \nmid b$ maka kongruensi linier $ax \equiv b \pmod{m}$ tidak memiliki solusi. (Sukirman, 2005: 108)

Bukti:

Kita buktikan kontraposisi teorema itu, yaitu jika $ax \equiv b \pmod{m}$ memiliki solusi maka $(a, m) \mid b$. Misalkan r adalah solusi dari $ax \equiv b \pmod{m}$ maka $ar \equiv b \pmod{m}$ sehingga $ar - b = km$ untuk suatu bilangan bulat k.

Perhatikan $ar - b = km$. karena $(a, m) \mid a$ dan $(a, m) \mid km$ maka $(a, m) \mid b$. jadi terbukti kontraposisi teorema itu, sehingga terbukti pula teorema itu.

Contoh:

$6x \equiv 7 \pmod{8}$, karena $(6, 2) = 2$ dan $2 \nmid 7$ maka kongruensi linier $6x \equiv 7 \pmod{8}$ tidak mempunyai solusi.

Teorema 9.2:

Jika $(a,m) = 1$, maka kongruensi linier $ax \equiv b \pmod{m}$ memiliki tepat satu solusi. (Sukirman, 2005: 108)

Bukti:

karena $(a, m) = 1$ maka ada bilangan bulat r dan s sehingga $ar + ms = 1$.

Jika kedua ruas dari persamaan ini dikalikan b, diperoleh:

$(ar)b + (ms)b = b$

$a(rb) + m(sb) = b$

$a(rb) - b = -(sb)m$

persamaan terakhir ini berarti bahwa $a(rb) - b$ adalah kelipatan m. jika $a(rb) \equiv b \pmod{m}$. maka residu terkecil dari rb modulo m adalah solusi dari kongruensi linier itu.

Selanjutnya tinggal menunjukkan bahwa solusi itu tunggal. Andaikan solusi kongruensi linier itu tunggal, misalkan r dan s masing-masing solusi dari $ax \equiv b \pmod{m}$, maka ar $\equiv$ b (mod m) dan as $\equiv$ b (mod m), dengan sifat transitif diperoleh: ar $\equiv$ as (mod m). karena (a, m) = 1, maka r $\equiv$ s (mod m). ini berarti m$|$(r - s). tetapi karena r dan s adalah solusi dari kongruensi itu, maka r dan s masing-masing residu terkecil modulo m, sehingga 0 $\leq$ r < m dan 0 $\leq$ s < m. dari kedua pertidaksamaan ini diperoleh bahwa –m< r – s < m, tetapi karena m$|$(r - s) maka r – s = 0 atau r = s. ini berarti bahwa solusi dari kongruensi linier tunggal (terbukti).

Salah satu menyelesaikan kongruensi linier adalah memanipulasi koefisien atau konstanta pada pengkongruenan itu, sehingga memungkinkan kita untuk melakukan kanselisasi (penghapusan).

Contoh:

Selesaikan 4x $\equiv$ 1 (mod 15)

Jawab: 4x $\equiv$ 1 (mod 15)

4x $\equiv$ 16 (mod 15)

x $\equiv$ 4 (mod 15)

Karena (4, 15) = 1 maka kemungkinan kita melakukan kanselisasi 4 pada kongruensi 4x $\equiv$ 16 (mod 15) sehingga diperoleh x $\equiv$ 4 (mod 15). Solusi dari kongruensi 4x $\equiv$ 1 (mod 15) adalah 4.

Teorema 9.3:

Sesuai teorema 9.2 diatas, jika (a, m) = 1, maka kongruensi ax $\equiv$ 1 (mod m) mempunyai tepat satu solusi pada solusi kongruensi itu disebut *invers dari a modulo m* yang diberi simbol a^{-1}. (Sukirman, 2005: 110)

Contoh:

Carilah 2^{-1} (mod 13)

Jawab:

Untuk mencari 2^{-1} (mod 13), kita perlu menyelesaikan kongruensi 2x ≡ 1 (mod 13).

$2x \equiv 1 \pmod{13}$

$2x \equiv 14 \pmod{13}$

$x \equiv 7 \pmod{13}$

Jadi 2^{-1} (mod 13) adalah 7

Teorema 9.4:

Jika (a, m) = d dan d | b maka kongruensi linier ax ≡ b (mod m) memiliki tepat satu solusi.

Bukti:

Kita harus membuktikan bahwa kongruensi linier ax ≡ b (mod m) memiliki d solusi. Dan seterusnya harus ditunjukkan bahwa tak ada solusi lain kecuali d solusi itu.

Sekarang akan dibuktikan bahwa kongruensi linier itu memiliki d solusi. (a, m) = d berarti ada a' dan m' sehingga a = da' dan m = dm' d | b berarti ada b' sehingga b = db'

Sehingga dari ax ≡ b (mod m) memberikan

$da'\square \equiv db' \pmod{dm'}$ atau

$a'\square \equiv b' \pmod{m'}$.

Dari (a, m) = d memberikan (da', dm') = d atau (a', m') = 1. Menurut teorema 9.2 jika (a', m') = 1, maka $a'x \equiv b' \pmod{m'}$ memiliki satu solusi. Misalkan solusi itu r, maka d buah bilangan yaitu:

$r, r + m', r + 2m', \cdots, (d-1)$ memenuhi kongruensi $ax \equiv b \pmod{m}$. hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

pertama setiap $r + km'$ dengan $k = 0, 1, 2, \cdots, (d-1)$ memenuhi kongruensi $ax \equiv b \pmod{m}$.

$$ax = a(r + km) = da'(r + km')$$

$$= da'r + da'km'$$

Karena $a'r \equiv b' \pmod{m'}$ dan $m'd = m$, maka

$$ax \equiv a'rd + a'km'd \pmod{m}$$

$$\equiv b'd + a'km'd \pmod{m}$$

$$\equiv b'd \pmod{m}$$

$$ax \equiv b \pmod{m} \text{ karena } b = b'd$$

Jadi $r + k'm$ untuk $k = 0, 1, 2, \cdots, (d-1)$ memenuhi kongruensi $ax \equiv b \pmod{m}$.

Kedua setiap $r + km'$ dengan $k = 0, 1, 2, \cdots, (d-1)$ adalah residu terkecil modulo m. ditunjukkan sebagai berikut:

r adalah solusi dari $a'x \equiv b'$ (modulo m') berarti $r \geq 0$ sehingga $0 \leq r + 1km'$

$r + km' \leq r + (d-1)m'$ untuk setiap $k = 0, 1, 2, \cdots, (d-1)$.

$r + (d-1)m' < m' + (d-1)m' = dm' = m$

Jadi $0 \leq r + km' < m$

Hal ini menunjukkan bahwa $r + km'$ dengan $k = 0, 1, 2, \cdots, (d-1)$ adalah residu-residu terkecil modulo m.

Ketiga, tak ada dua bilangan dari r + km' untuk k = 0, 1, 2, ⋯ , (d – 1) yang kongruen modulo m, sebab r + km' untuk k = 0, 1, 2, ⋯ , (d – 1) adalah residu-residu terkecil modulo m yang berbeda.

Sampai disini telah ditunjukkan bahwa tak ada solusi lain, kecuali d buah solusi itu. Tadi diambil bahwa r adalah solusi dari kongruensi linier ax ≡ b (mod m) dan ar ≡ b (mod m).

Jadi as ≡ ar ≡ b (mod m)

Karena (a, m) = d dan as ≡ ar (mod m) diperoleh bahwa

$$s \equiv r \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$s \equiv r \pmod{m'} \text{ karena } m = dm'$$

Ini berarti s – r = tm' atau s = r + tm' untuk suatu bilangan bulat t. Karena s adalah residu modulo m, sedangkan semua residu terkecil modulo m berbentuk r + km' dengan 0, 1, 2, ⋯ , (d – 1) adalah residu-residu terkecil modulo m berbentuk r + km' dengan 0, 1, 2, ⋯ , (d – 1). Maka s = r + tm' adalah salah satu diantara r + km' jadi tak ada solusi lain, kecuali d buah solusi, yaitu r + km' dengan 0, 1, 2, ⋯ , (d – 1). Lengkaplah bukti teorema itu.

2. 10 Sistem Kongruensi Linier

Sistem kongruensi linier merupakan suatu sistem residu yang lengkap dengan modulo c dari suatu baris polynominal dengan koefisien-koefisien bulat dan dapat dituliskan dalam bentuk umumnya:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \equiv b_1 \pmod c$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \equiv b_2 \pmod c$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \equiv b_m \pmod{c} \text{ dimana } a_{ij} \,\&\, b_i \in R, i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n$$

Teorema 10. 1:

Jika $A = (a_{ij})$ dan B (b_{ij}) masing-masing matriks berukuran n x k yang elemen-elemennya dengan A ≡ B (mod m), C = (c_{ij}) ialah matriks berukuran k x p dan D = (d_{ij}) ialah matriks berukuran t x n, maka AC ≡ BC (mod m) dan DA ≡ BC (mod m) dan DA ≡ DB (mod m). (Sukirman, 2005: 126)

Bukti:

Misalkan AC = E = (e_{ij}) ialah matriks berukuran n x p dengan (e_{ij}) = $\sum_{r}^{k} a_{ij}c_{rj}$ dan BC = G = (g_{ij}) adalah matriks berukuran n x p dengan g_{ij} = $\sum_{r}^{k} b_{ij}c_{rj}$.

Karena A ≡ B (mod m), maka a_{ij} ≡ b_{ij} (mod m) untuk setiap I dan j, sehingga $a_{ij}c_{ij}$ ≡ $b_{ij}c_{ij}$ (mod m) untuk setiap 1 ≤ r ≤ k.

Akibatnya $\sum_{r}^{k} a_{ij}c_{rj} \equiv \sum_{r}^{k} b_{ij}c_{rj}$ (mod m). yaitu e_{ij} ≡ g_{ij} (mod m).

Hal ini bearti AC ≡ BC (mod m)

Bukti untuk DA ≡ DB (mod m) mirip dengan bukti tersebut.

Perhatikan sistem n kongruensi linier n variabel berikut ini.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \equiv b_1 \pmod{m}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \equiv b_2 \pmod{m}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \equiv b_m \pmod{m}$$

Dengan menggunakan notasi matriks, sistem kongruensi linier ini dapat dinyatakan sebagai pengkongruenan matriks AX $\equiv$ B (mod m), dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{dan } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Definisi 10. 1:

Jika A adalah matriks-matriks berukuran n x n yang elemen-elemenya bilangan bulat sedemikian hingga $AA^{-1} \equiv AA^{-1} \equiv$ I (mod m), dengan I adalah matriks identitas berukuran n, maka A^{-1} disebut invers matriks modulo m.

Jika A^{-1} adalah invers dari A dan B $\equiv$ A^{-1} (mod m), maka B juga invers dari A. hal ini mengikuti teorema 10.1 karena BA $\equiv$ $A^{-1}A \equiv$ I (mod m). sebaliknya, jika $B_1 \equiv B_2$ (mod m). untuk menunjukkan hal ini, kita gunakan teorema 10. 1 dari kongruensi $B_1A \equiv B_2A \equiv I$, kita mempunyai $B_1AB \equiv B_2AB_1$ (mod m). Karena $AB_1 \equiv I$ (mod m), kita dapat menyimpulkan $B_1 \equiv B_2$ (mod m). (Sukirman, 2005: 128)

Definisi 10.2:

Misalkan A suatu matriks persegi berukuran n. adjoint dari A diberi symbol adj (A) adalah suatu matriks persegi berukuran n yang elemen pada baris ke i kolom ke j ialah d_{ij} dengan d_{ij} sama dengan $(-1)^{i+j}$ determinan matriks yang diperoleh dari A dengan menghapus semua elemen pada baris ke I dan kolom ke j.

Teorema 10. 2:

Jika suatu matriks persegi dengan Δ = det A $\neq$ 0, maka A adj(A) = (det A)I.

Teorema 10. 3:

Jika A suatu matriks persegi yang elemen-elemennya bilangan bulat dan m suatu bilangan bulat positif sedemikian hingga (Δ, m) = 1, maka invers dari A modulo m adalah $A^{-1} = \Delta^{-1}\text{adj}(A)$.

Bukti:

Karena (Δ, m) = 1, maka Δ^{-1} ada. Dan karena $\Delta \neq 0$, maka A adj(A) = Δ I. sehingga

$A\Delta^{-1}$ adj(A) $\equiv \Delta\Delta^{-1}I \equiv I$ (mod m)

Δ^{-1} adj(A)A $\equiv \Delta\Delta^{-1}I \equiv I$ (mod m).

2. 11. Menyelesaikan sistem kongruensi linier

Masalah utama dalam membahas sistem kongruensi linier adalah mencari penyelesaian atau jawaban dari sistem kongrunesi linier.

Untuk mencari nilai-nilai bilangan bulat x yang memenuhi:

f (x) $\equiv$ 0 (mod m)

dengan f (x) adalah suatu polynomial yang koefisien-koefisiennya bulat. Nilai-nilai x yang memenuhi kongruensi f (x) $\equiv$ 0 (mod m) disebut penyelesaian atau jawaban dari kongruensi f (x) $\equiv$ 0 (mod m)

contoh:

f (x) = $x^3+6x^2-11 \equiv 0 \pmod 5$

dipenuhi oleh x = 3 sebab jika x diganti 3:

$f(3) = 3^3 + 6 \cdot 3^2 - 11 = 27 + 54 - 11 = 70 \equiv 0 \pmod{5}$

maka diperoleh nilai 0 (mod 5), berarti x = 3 memenuhi kongruensi.

Nilai x = 3 disebut penyelesaian kongruensi f (x) = $x^3 + 6x^2 - 11 \equiv 0 \pmod{5}$. Menyelesaikan kongruensi berarti mencari penyelesaian kongruensi. (Muhstyo, 1997: 159).

2.10 Beberapa Cara Kebaikan Dalam Pandangan Islam

Al-Quran adalah kitabullah terbesar yang banyak menyimpan rahasia-rahasia baik dalam dunia nyata maupun ghaib. Al-Quran merupakan kitab yang mengandung berbagai ilmu dan sumber seluruh ilmu pengetahuan, salah satunya adalah matematika.

Dalam menyelesaikan sistem kongruensi linier ini dapat dikerjakan berbagai cara, diantaranya eliminasi, subtitusi, campuran (eliminasi-subtitusi), invers, invers matriks, eliminasi baris elementer, dan algoritma euclides. Jika direlevansikan dengan kajian agama sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa banyak hal-hal yang ditunjukkan Allah SWT sebagai tanda kebesaran-Nya. Demikianlah sebagaimana yang tertera pada surat An-Nahl ayat 11:

يُنۢبِتُ لَكُم بِهِ ٱلزَّرۡعَ وَٱلزَّيۡتُونَ وَٱلنَّخِيلَ وَٱلۡأَعۡنَٰبَ وَمِن كُلِّ ٱلثَّمَرَٰتِۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَأٓيَةٗ
لِّقَوۡمٖ يَتَفَكَّرُونَ ١١

Artinya: Dia menumbuhkan bagi kamu dengan air hujan itu tanam-tanaman; zaitun, korma, anggur dan segala macam buah-buahan. Sesungguhnya *pada yang demikian itu benar-benar ada tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang memikirkan. (Q.S An-Nahl: 11)*

Ayat diatas menyebutkan beberapa yang paling bermanfaat atau populer dalam masyarakat Arab tempat dimana turunya Al-Quran, dengan menyatakan bahwa dia yakni Allah SWT menumbuhkan bagi kamu denganya yakni dengan air hujan itu tanaman-tanaman; dari yang paling layu sampai dengan yang paling panjang usianya dan paling banyak manfaatnya. Dia menumbuhkan zaitun, kurma, anggur yang dapat kamu jadikan makanan yang halal atau minuman yang haram dan dari segala macam atau sebagaian buah-buahan selain itu. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar ada tanda yang sangat jelas bahwa yang mengaturnya seperti itu adalah Maha Esa lagi Maha Kuasa. (Shihab, 2002:195).

Jadi surat An-Nahl ayat 11 menceritakan bahwa untuk mengetahui kekuasaan Allah SWT terdapat banyak tanda-tanda yang diberikan Allah SWT.

Dalam surat Al-Baqarah ayat 177 juga menegaskan bahwa kebaikan dapat ditemukan dalam berbagai macam cara:

لَّيۡسَ ٱلۡبِرَّ أَن تُوَلُّواْ وُجُوهَكُمۡ قِبَلَ ٱلۡمَشۡرِقِ وَٱلۡمَغۡرِبِ وَلَٰكِنَّ ٱلۡبِرَّ مَنۡ ءَامَنَ بِٱللَّهِ وَٱلۡيَوۡمِ ٱلۡأٓخِرِ
وَٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ وَٱلۡكِتَٰبِ وَٱلنَّبِيِّـۧنَ وَءَاتَى ٱلۡمَالَ عَلَىٰ حُبِّهِۦ ذَوِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡيَتَٰمَىٰ وَٱلۡمَسَٰكِينَ
وَٱبۡنَ ٱلسَّبِيلِ وَٱلسَّآئِلِينَ وَفِي ٱلرِّقَابِ وَأَقَامَ ٱلصَّلَوٰةَ وَءَاتَى ٱلزَّكَوٰةَ وَٱلۡمُوفُونَ بِعَهۡدِهِمۡ إِذَا
عَٰهَدُواْۖ وَٱلصَّٰبِرِينَ فِي ٱلۡبَأۡسَآءِ وَٱلضَّرَّآءِ وَحِينَ ٱلۡبَأۡسِۗ أُوْلَٰٓئِكَ ٱلَّذِينَ صَدَقُواْۖ وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمُ
ٱلۡمُتَّقُونَ ١٧٧

Artinya: Bukanlah menghadapkan wajahmu ke arah timur dan barat itu suatu kebajikan, akan tetapi Sesungguhnya kebajikan itu ialah beriman kepada Allah, hari Kemudian, malaikat-malaikat, kitab-kitab, nabi-nabi dan memberikan harta yang dicintainya kepada kerabatnya, anak-anak yatim, orang-orang miskin, musafir (yang memerlukan pertolongan) dan orang-orang yang meminta-minta; dan (memerdekakan) hamba sahaya, mendirikan shalat, dan menunaikan zakat; dan orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji, dan orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan. mereka Itulah orang-orang yang benar (imannya); dan mereka Itulah orang-orang yang bertakwa. (Q.S. Al-Baqarah: 177)

Ayat diatas menceritakan bahwa Allah menjelaskan menghadap kiblat secara tertentu itu bukan mancakup pilar-pilar yang agung, kaidah-kaidah yang umum dan aqidah yang lurus. Sesungguhnya kebajikan itu ialah orang-orang yang beriman kepada Allah SWT, orang-orang yang beriman adalah orang-orang sebagai berikut:

1. Beriman kepada Allah
2. Beriman kepada hari kemudian, malaikat-malaikat, kitab-kitab, dan nabi-nabi
3. Meberikan harta yang dicintainya kepada kerabatnya, anak-anak yatim, orang-orang miskin, musafir (yang memerlukan pertolongan) dan orang-orang yang meminta-minta, dan (memerdekan hamba sahaya)
4. Mendirikan shalat
5. Menunaikan zakat

6. Orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji
7. Orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan. (Al-Mubarakfuri, 2007:557)

Menurut Imani (2006:54) ayat diatas menjelaskan bahwa kata *birr* (kesalehan) sama dengan aplikasi madu. Siapapun atau apapun yang sangat manis dan berfaidah dipersamakan dengan madu. Oleh karenanya, siapapun yang sangat baik dan shaleh disebut sebagai 'orang yang bertakwa', yaitu orang yang benar-benar berbuat bajik (dalam makna yang seluas-luasnya).

Keimanan seseorang kepada Allah menyebabkan dia merendah dihadapan-Nya dan berdiri tegak menantang, dimana keimanan kepada hari kebangkitan menimbulkan wawasan kemurahan hati, sedangkan keimanan kepada Malaikat mengacu kepada eksistensi keimanan kepada Allah dan wahyu dan lain-lain. Iman kepada para nabi merupakan iman kepada jalan nan lurus dan petunjuk yang benar yang disepanjang sejarah. Fakta manunjukan bahwa manusia selalu memiliki tujuan dan tidak benar-benar bebas di dunia ini. Ungkapan Al-Quran, memberikan hartanya menunjukkan bantuan dan kemanusiaan yang dilakukan orang-orang yang beriman, mendirikan salah mengacu kepada hubungan langsung dengan Allah, menunaikan zakat mengarah pada perencanaan kehidupan sosial untuk memutuskan permasalahan yang ada pada berbagai lapisan masyarakat, orang-orang yang memenuhi janji tatkala mereka membuat janji (berarti) memperkuat kepaduan dan hubungan antar manusia, dan konsep yang sabar merupakan sebuah faktor yang aktif pada manusia untuk menjadi tabah dan stabil.

Dalam tafsir Ibnu Katsier surat Al-Baqarah ayat 177 mengandung garis-garis besar, dan kaidah yang sama dalam akidah yang lurus, ketika Allah menyuruh kaum mukminin pada awal pertamanya menghadap kiblat baitul Maqdis, kemudian mengalihkan mereka ke ka;bah, terasa berat bagi sebagian orang ahli kitab dan sebagian kaum muslimin, maka Allah menurunkan keterangan hikmatnya bahwa pengertian ibadat dan bakti ialah taat dan patuh kepada Allah, menurut perintah-Nya dan menghadap ke arah mana saja yang diperintahkan oleh Allah, dan mengikuti apa yang disyariatkan Allah itulah yang albirr (bakti) dan bertakwa atau iman yang sempurna, dan bukannya sekedar menghadap ketimur atau kebarat, jika tidak melalui perintah Allah dan syariat-Nya.

Ayat ini meliputi semua tujuan iman dan takwa. Iman: percaya adanya Allah yang tiada Tuhan kecuali Dia, dan hari kemudian, hari pembalasan atas amal yang kita lakukan di dunia daripada kebaikan dan kejahatan. Dan iman percaya adanya Malaikat sebagai makhluk Allah yang sangat patut dan taat, tidak melanggar segala perintah Allah dan tanggap mengerjakan apa yang diperintahkan pada mereka. Iman kepada kitab-kitab Allah yang diturunkan kepada semua Nabi pesuruh-Nya, terutama AL-Quran penutup dari semua kitab yang terdahulu, bahkan Al-Quran telah memasukkan kitab-kitab yang sebelumnya. Iman terhadap semua Nabi utusan Allah terutama penutup dari semua Nabi yaitu Nabi Muhammad saw. Demikianlah tuntunan agama Allah yang meliputi hubungan dengan Allah, malaikat, kitab Allah dan para Nabi utusan Allah. Kemudian hubungan dengan masyarakat hidup sesama manusia. Untuk membantu kerabat (famili) dan anak yatim, dan orang miskin, dan orang rantau dan peminta-minta dan memerdekakan budak, mendirikan shalat, dan menunaikan zakat; dan orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji, dan orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan.

Orang-orang yang memiliki sifat-sifat yang tersebut itulah yang benar beriman dan mereka pula orang yang sungguh bertakwa. Sebab telah melengkapi tuntunan dalam hati, perasaan dan pikiran dan amal perbuatan, melaksanakan semua perintah dan meninggalkan semua yang dilarang (haram).

Menurut Al-Maraghi (1993: 92-101) ayat ini menceritakan ketika Allah memerintahkan kepada kaum muslimin untuk memindahkan kiblat dari Baitul-Maqdis ke ka'bah, orang-orang ahli kitab menantang perintah tersebut. Akhirnya terjadilah perdebatan sengit antara kaum muslimin dengan mereka. Para ahli kitab itu berpendapat bahwa salat yang dilakukan dengan menghadap kiblat ahli kitab adalah bertolak dihadapan Allah. Dan orang yang melakukannya tidak mengikuti petunjuk para Nabi. Sebaliknya, kaum muslimin mengatakan bahwa salat yang mendapat ridha Allah ialah menghadap Masjidil-Haram, yakni kiblat Nabi Ibrahim dan para Nabi sesudahnya. Memperhatikan permasalahan tersebut, Allah menjelaskan bahwa menghadap kiblat secara tertentu itu bukan merupakan kebajikan yang dimaksud agama. Sebab, disyariatkan menghadap Tuhannya. Disamping itu, berarti ia sedang meminta kepada Tuhannya, berpaling dari selain Allah, agar dijadikan sebagai lambang persatuan umat yang mempunyai tujuan satu. Dengan demikian, ajaran ini mendidik umat Islam untuk terbiasa mengambil kesepakatan dalam seluruh urusan mereka, bersatu dan melangkah secara bersama-sama menuju cita-cita.

Iman kepada Allah adalah dasar semua kebajikan. Dan kenyataan ini takkan pernah terbukti melainkan jika iman tersebut telah meresap ke dalam jiwa dan merayap ke seluruh pembuluh nadi yang disertai dengan sikap khusyu', tenang, taat, patuh, dan hatinya tidak akan meledak-ledak lantaran mendapatkan kenikmatan, dan tak berputus asa ketika tertimpa musibah. Orang-orang yang benar-benar beriman tidak bersedia menjadi budak manusia lainnya. Ia hanya mau tunduk dan taat kepada Allah dan syari'at-syari'at-Nya.

Iman kepada hari akhir mengingatkan kita (manusia) bahwa ternyata terdapat alam-alam gaib, kelak akhirat yang akan dihuni.

Mengeluarkan harta kepada orang-orang yang membutuhkan karena belas kasihan terhadap mereka, adalah ditunjukkan kepada orang-orang sebagai berikut:

a) Sanak famili yang membutuhkan
b) Anak-anak yatim
c) Kaum fakir miskin
d) Ibnu sabil (orang yang sedang dalam perjalanan jauh)
e) Orang yang meminta-minta
f) Memerdekakan budak atau hamba sahaya

Mendirikan salat sebaik mungkin, hal ini tentu saja tidak cukup dengan melaksanakan gerak-gerak salat dan doa-doa saja. Tetapi harus disertai dengan memperhatikan rahasia yang terkandung didalam salat. Menunaikan zakat yang diwajibkan, menginfakkan harta termasuk tiang pokok kebajikan.

Menepati janji atau transaksi berarti memelihara keutuhan masyarakat. Dengan demikian, keadaan individu masyarakat akan tercipta suasana saling percaya.

Orang-orang yang bersikap sabar ketika tertimpa kesengsaraan atau miskin, atau tertimpa musibah seperti kematian anak, kehilangan harta benda atau tertimpa penyakit, dan ketika berada dimedan perang atau sedang berkecambuknya peperangan dengan musuh.

Siapapun yang menjalankan ayat ini, berarti telah mempunyai kesempurnaan Iman. Atau ia telah mencapai derajat tertinggi dalam masalah Iman.

Menurut Ghoffar (2007: 329-333) ayat ini mencakup sendi-sendi yang agung, kaidah-kaidah yang umum, dan aqidah yang lurus. Penafsiran ayat ini adalah, ketika pertama kali Allah memerintahkan orang-orang mukmin menghadap Baitul Maqdis kemudian dia mengalihkan ke Ka'bah, sebagian Ahlul Kitab dan kaum muslimin merasa keberatan. Maka Allah memberikan penjelasan mengenai hikmah pengalihan kiblat tersebut, yaitu bahwa ketaatan kepada Allah, patuh pada semua perintah-Nya, menghadap ke mana saja yang diperintahkan, dan mengikuti apa yang telah disyariatkan, inilah yang disebut kebaikan, ketakwaan, dan keimanan yang sempurna.

Mengenai ayat ini, al-Aufi meriwayatkan dari Ibnu Abbas, katanya: "tidaklah shalat dan beramal itu merupakan suatu kebaikan. Hal ini ketika Rasulullah berpindah dari Makkah ke Madinah, serta diturunkannya berbagai kewajiban dan peraturan. Maka Allah memrintahkan berbagai kewajiban dan pelaksanaannya".

Aliyah, mengatakan: "ketika itu orang-orang Yahudi menghadap ke arah barat, sedangkan orang-orang nasrani menghadap ke arah timur. Maka Allah berfirman:

لَّيۡسَ ٱلۡبِرَّ أَن تُوَلُّواْ وُجُوهَكُمۡ قِبَلَ ٱلۡمَشۡرِقِ وَٱلۡمَغۡرِبِ

Artinya: Bukanlah menghadapkan wajahmu ke arah timur dan barat itu suatu kebajikan

Lebih lanjut Abdul 'Aliyah menuturkan: "itulah pembicaraan tentang keimanan yang hakikatnya adalah pengalaman."

Mujahid mengatakan: "tetapi kebaikan itu adalah apa yang ditetapkan didalam hati berupa ketaatan kepada Allah."

Adh-Dhahhak mengatakan: "tetapi kebajikan dan ketakwaan itu adalah pelaksanaan semua kewajiban sebagaimana mestinya."

Selain itu, Orang-orang yang beriman adalah orang-orang sebagai berikut:

1. Beriman kepada hari kemudian, malaikat-malaikat, kitab-kitab, dan nabi-nabi
2. Memberikan harta yang dicintainya kepada kerabatnya, anak-anak yatim, orang-orang miskin, musafir (yang memerlukan pertolongan) dan orang-orang yang meminta-minta, dan (memerdekan hamba sahaya).

3. Mendirikan shalat, artinya menyempurnakan pelaksanaan amalan shalat secara tepat waktu dengan rukun sesuai dengan yang disyariatkan dan diridhai.
4. Menunaikan zakat, artinya penyucian diri dan pembersihannya dari akhlak hina tercela.
5. Orang-orang yang menepati janjinya apabila ia berjanji.
6. Orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan.

Dari kedua ayat diatas dapat diambil sebuah pelajaran penting tentang Allah SWT itu maha kuasa lagi maha pengasih. Untuk menjadi seorang yang beriman, Allah SWT memberi kesempatan bahwa banyak jalan untuk menuju menjadi orang yang beriman. Allah SWT juga menunjukkan bermacam-macam tanda-tanda kekuasaan-Nya. Dan segala macam-macam tanda-tanda itu akan berguna bagi kaum yang memikirkannya.

Jadi dalam surat An-Nahl ayat 11 dan Al-Baqarah ayat 177 sangat relevan jika dikaitkan dengan menyelesaikan sistem kongruensi linier. Karena dalam menyelesaikan sistem kongruensi linier dapat dikerjakan dengan menggunakan banyak cara. Begitu juga dengan Allah SWT yang menunjukkan banyak hal untuk menunjukkan kekuasaan-Nya dan banyak hal juga untuk menjadi orang yang beriman disisi Allah SWT.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Sistem Kongruensi Linier

Sistem kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel

$a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod{m}$

$a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod{m}$

$a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod{m}$

untuk a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m $\in$ Z dengan m > 0.

Sebelum mencari nilai variabel-variabel dari sistem kongruensi tiga kongruensi tiga variabel ditest dulu untuk mengetahui apakah sistem kongruensi tersebut mempunyai selesaian, tidak mempunyai selesaian dan apakah mempunyai banyak selesaian dengan menggunakan kemungkinan-kemungkinan antara lain:

i. Jika $a_1 : a_2 : a_3 \not\equiv b_1 : b_2 : b_3 \not\equiv c_1 : c_2 : c_3 \not\equiv : d_1 : d_2 : d_3$

   Untuk $a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod{m}$

   $a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod{m}$

   $a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod{m}$

   Sistem persamaan kongruensi linier (i) mempunyai tepat satu selesaian.

ii. Jika $a_1 : a_2 : a_3 \equiv b_1 : b_2 : b_3 \equiv c_1 : c_2 : c_3 \not\equiv : d_1 : d_2 : d_3$

   Untuk $a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod{m}$

   $a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod{m}$

   $a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod{m}$

   Sistem persamaan kongruensi linier (ii) tidak mempunyai selesaian

iii. Jika $a_1 : a_2 : a_3 \equiv b_1 : b_2 : b_3 \equiv c_1 : c_2 : c_3 \equiv : d_1 : d_2 : d_3$

Untuk $a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod{m}$

$$a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod{m}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod{m}$$

Sistem persamaan kongruensi linier (iii) mempunyai banyak selesaian

Dari sistem kongruensi linier dapat dibentuk ke dalam sistem persamaan linier dengan menghilangkan modulonya. Dan sistem kongruensi linier tersebut menjadi

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Untuk mengetahui selesaian persamaan linier tersebut mempunyai selesaian tunggal, dapat dicari dengan menggunakan aturan cremer sebagai berikut: (Suryadi, 1984: 180)

$AX = B$, maka $x_k = \dfrac{D_k}{D}$, dimana:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

$$D_k = \det,\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(kolom ke-k)

Untuk menentukan D_k, penulis menulis matriksnya dengan mengganti kolom ke-k oleh kolom konstanta b, syarat dapat dipakai cremer adalah m = n (banyaknya persamaan yang bebas = banyaknya variabel), dengan syarat det (A) $\neq 0$.

Contoh:

Apakah tiga persamaan dengan tiga variabel mempunyai satu selesaian?

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

Jawab:

Karena m = n = 3, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3$

Maka dapat dipakai aturan cremer adalah:

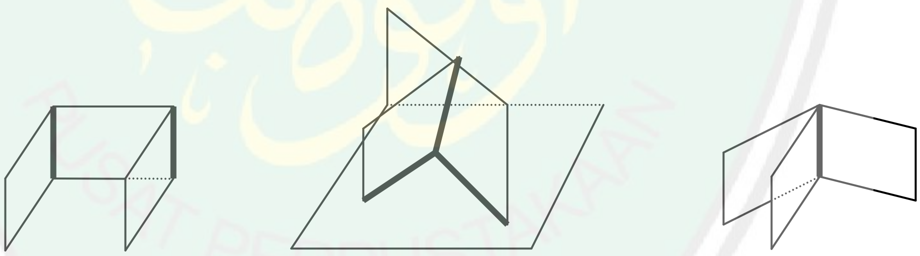
$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - d_3b_2c_1 - b_3c_2d_1 - c_3d_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1}$$

$$y = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3 - a_3d_2c_1 - d_3c_2a_1 - c_3a_2d_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1}$$

$$z = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - a_3b_2d_1 - b_3d_2a_1 - d_3a_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1}$$

Jadi persamaan-persamaan diatas mempunyai satu selesaian

Gambar dibawah ini mengilustrasikan ketiga kemungkinan pada tiga persamaan tiga variabel. (Charles, 1993: 7)



(i) (ii) (iii)

Gambar diatas menunjukkan bahwa:

(i) Tidak ada titik potong, artinya bidang yang ketiga sejajar dengan garis potong dan bidang pertama (seperti atap, lantai dan dinding kamar)

(ii) Ketiga bidang itu bertemu pada sebuah titik tunggal (garis potong dua bidang yang pertama menembus bidang yang ketiga); atau

(iii) Terdapat takhingga banyaknya solusi, disini ketiga bidang itu mempunyai setidaknya satu garis sekutu (seperti halaman-halaman sebuah buku mempunyai pengikat bersama)

3.2 Cara Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linier

Untuk menyelesaikan sistem kongruensi tiga kongruensi tiga variabel dengan modulo sama dengan perbandingan koefisien $a_1 : a_2 : a_3 \not\equiv b_1 : b_2 : b_3 \not\equiv c_1 : c_2 : c_3 \not\equiv : d_1 : d_2 : d_3$. penulis memberikan beberapa cara antara lain:

- **Eliminasi**

$a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod m$……………………..(i)

$a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod m$……………………..(ii)

$a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod m$……………………..(iii)

Untuk $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, m \in Z$ dengan $m > 0$.

Eliminasi peubah y dari persamaan (i)dan (ii).

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod m & x a_2 & a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z \equiv a_2d_1 \pmod m \\ a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod m & x a_1 & \underline{a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z \equiv a_1d_2 \pmod m} \end{array} \text{ kurangkan}$$

$$a_2b_1y - a_1b_2y + a_2c_1z - a_1c_2z \equiv a_2d_1 - a_1d_2 \pmod m \ldots\text{(iv)}$$

Dari persamaan (ii) dan (iii):

$$\begin{array}{l|l|l} a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod m & x\ a_3 & a_2a_3x + a_3b_2y + a_3c_2z \equiv a_3d_2 \pmod m \\ a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod m & x\ a_2 & \underline{a_2a_3x + a_2b_3y + a_2c_3z \equiv a_2d_3 \pmod m} \end{array} \text{ kurangkan}$$

$$a_3b_2y - a_2b_3y + a_3c_2z - a_2c_3z \equiv a_3d_2 - a_2d_3 \pmod m \ldots\text{(v)}$$

Persamaan (iv) dan (v) merupakan sistem persamaan linier dua peubah y dan z.

Eliminasi peubah y:

$$\begin{array}{l|l|} a_2b_1y - a_1b_2y + a_2c_1z - a_1c_2z \equiv a_2d_1 - a_1d_2 \pmod{m} & x\; a_3b_2 - a_2b_3 \\ a_3b_2y - a_2b_3y + a_3c_2z - a_2c_3z \equiv a_3d_2 - a_2d_3 \pmod{m} & x\; a_2b_1 - a_1b_2 \end{array} \quad \text{kurangkan}$$

$$a_3b_2a_2c_1z - a_2b_3a_2c_1z - a_3b_2a_1c_2z + a_2b_3a_1c_2z \equiv a_2d_1a_3b_2 - a_2b_3a_2d_1 - a_1d_2a_3b_2 + a_1d_2a_2b_3 \pmod{m}$$
$$\underline{a_2b_1a_3c_2z - a_1b_2a_3c_2z - a_2b_1a_2c_3z + a_1b_2a_2c_3z \equiv a_2b_1a_3d_2 - a_1b_2a_3d_2 - a_2b_1a_2d_3 - a_2d_3a_1b_2 \pmod{m}}$$

Dan hasilnya diperoleh:

$$z \equiv \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - a_3b_2d_1 - b_3d_2a_1 - d_3a_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

Eliminasi peubah z dari persamaan (iv) dan (v):

$$\begin{array}{l|l|} a_2b_1y - a_1b_2y + a_2c_1z - a_1c_2z \equiv a_2d_1 - a_1d_2 \pmod{m} & xa_3c_2 - a_2c_3 \\ \underline{a_3b_2y - a_2b_3y + a_3c_2z - a_2c_3z \equiv a_3d_2 - a_2d_3 \pmod{m}} & xa_2c_1 - a_1c_2 \end{array} \quad \text{kurangkan}$$

$$a_3c_2a_2b_1y - a_2c_3a_2b_1y - a_3c_2a_1b_2y + a_2c_3a_1b_2y \equiv a_3c_2a_2d_1 - a_2c_3a_2d_1 - a_3c_2a_1d_2 + a_2c_3a_1d_2 \pmod{m}$$
$$\underline{a_2c_1a_3b_2y - a_2c_1a_2b_3y - a_1c_2a_3b_2y + a_1c_2a_2b_3y \equiv a_2c_1a_3d_2 - a_2c_1a_2d_3 - a_1c_2a_3d_2 + a_1c_2a_2d_3 \pmod{m}}$$

Dan hasilnya diperoleh:

$$y \equiv \frac{a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3 - a_3d_2c_1 - d_3c_2a_1 - c_3a_2d_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

Eliminasi peubah y dari persamaan (i) dan (ii):

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod{m} & xb_2 & a_1b_2x + b_2b_1y + b_2c_1z \equiv b_2d_1 \pmod{m} \\ a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod{m} & xb_1 & \underline{a_2b_1x + b_2b_1y + b_1c_2z \equiv b_1d_2 \pmod{m}} \end{array} \quad \text{kurangkan}$$

$$a_1b_2x - b_1a_2x + b_2c_1z - b_1c_2z \equiv b_2d_1 - b_1d_2 \pmod{m} \ldots \text{(vi)}$$

Dari persamaan (ii) dan (iii)

$$\begin{array}{l|l|l} a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod{m} & xb_3 & a_2b_3x + b_3b_2y + b_3c_2z \equiv b_3d_2 \pmod{m} \\ a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod{m} & xb_2 & \underline{a_3b_2x + b_3b_2y + b_2c_3z \equiv b_2d_3 \pmod{m}} \end{array} \quad \text{kurangkan}$$

$$a_3b_3x - a_3b_2x + b_3c_2z - b_2c_3z \equiv b_3d_2 - b_2d_3 \pmod{m} \text{...(vii)}$$

Persamaaan (vi) dan (vii) merupakan sistem persamaan linier dua peubah y dan z.

Eliminasi peubah z

$$\begin{array}{l} a_1b_2x - b_1a_2x + b_2c_1z - b_1c_2z \equiv b_2d_1 - b_1d_2 \pmod{m} \\ a_3b_3y - a_3b_2y + b_3c_2z - b_2c_3z \equiv b_3d_2 - b_2d_3 \pmod{m} \end{array} \left| \begin{array}{l} x\, b_3c_2 - b_3c_2 \\ x\, b_2c_1 - b_1c_2 \end{array} \right| \text{kurangkan}$$

$$\begin{array}{l} b_3c_2a_1b_2x - b_3c_2b_1a_2x - b_3c_2a_1b_2x + b_3c_2b_1a_2x \equiv b_3c_2b_2d_1 - b_3c_2b_1d_2 - b_3c_2b_2d_1 + b_3c_2b_1d_2 \pmod{m} \\ \underline{b_2c_1a_3b_3x - b_2c_1a_3b_2x - b_1c_2a_3b_3x + b_1c_2a_3b_2x \equiv b_2c_1b_3d_2 - b_2c_1b_2d_3 - b_1c_2b_3d_2 + b_1c_2b_2d_3 \pmod{m}} \end{array}$$

Dan hasilnya diperoleh:

$$x \equiv \frac{d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - d_3b_2c_1 - b_3c_2d_1 - c_3d_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

- **Subtitusi**

$a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod{m}$…………………..(i)

$a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod{m}$…………………..(ii)

$a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod{m}$…………………..(iii)

Untuk $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, m \in Z$ dengan $m > 0$.

Dari persamaan $a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod{m} \Leftrightarrow a_1x \equiv d_1 - b_1y - c_1z \pmod{m}$,

$$\Leftrightarrow x \equiv \frac{d_1 - b_1y - c\ z}{a_1} \pmod{m}$$

Peubah x ini disubstitusikan ke persamaan (ii) dan (iii) diperoleh :

Dimasukkan ke persamaan(ii), maka diperoleh:

$$\Leftrightarrow a_2\left(\frac{d_1 - b_1y - c_1z}{a_1}\right) + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow a_2d_1 - a_2b_1y - a_2c_1z \equiv a_1d_2 - a_1c_2z \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow a_1b_2y - a_2b_1y + a_1c_2z - a_2c_1z \equiv a_1d_2 - a_2d_1 \pmod{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\text{(iv)}$$

Dan dimasukkan ke persamaan (iii), maka diperoleh:

$$\Leftrightarrow a_3\left(\frac{d_1 - b_1y - c_1z}{a_1}\right) + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow a_3d_1 - a_3b_1y - a_3c_1z \equiv a_1d_3 - a_1b_3y - a_1c_3z \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow a_1b_3y - a_3b_1y + a_1c_3z - a_3c_1z \equiv a_1d_3 - a_3d_1 \pmod{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(v)}$$

Persamaan (iv) dan (v) membentuk sistem persamaan linier dua peubah y dan z :

$$a_1b_2y - a_2b_1y + a_1c_2z - a_2c_1z \equiv a_1d_2 - a_2d_1 \pmod{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(vi)}$$

$$a_1b_3y - a_3b_1y + a_1c_3z - a_3c_1z \equiv a_1d_3 - a_3d_1 \pmod{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(vii)}$$

Dari persamaan (vii), diperoleh:

$$a_1b_3y - a_3b_1y + a_1c_3z - a_3c_1z \equiv a_1d_3 - a_3d_1 \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_3 - a_3b_1)y \equiv a_1d_3 - a_3d_1 - a_1c_3z + a_3c_1z \pmod{m}$$

$$\Leftrightarrow y \equiv \frac{a_1d_3 - a_3d_1 - a_1c_3z + a_3c_1z}{a_1b_3 - a_3b_1} \pmod{m}$$

Peubah y dimasukkan ke persamaan (iv), diperoleh:

$$\Leftrightarrow (a_1b_2 - a_2b_1)\left(\frac{a_1d_3 - a_3d_1 - a_1c_3z + a_3c_1z}{a_1b_3 - a_3b_1}\right) + a_1c_2z - a_2c_1z \equiv a_1d_2 - a_2d_1 \pmod{m}$$

$$z \equiv \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - a_3b_2d_1 - b_3d_2a_1 - d_3a_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

Nilai z dapat dimasukkan ke persamaan $y \equiv \dfrac{a_1d_3 - a_3d_1 - a_1c_3z + a_3c_1z}{a_1b_3 - a_3b_1} \pmod{m}$,

maka diperoleh:

$$y \equiv \frac{a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3 - a_3d_2c_1 - d_3c_2a_1 - c_3a_2d_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \;\; y \text{ (mod m)}$$

Dan nilai y dimasukkan ke persamaan $x \equiv \dfrac{d_1 - b_1y - c\ z}{a_1}$ (mod m), maka diperoleh:

$$x \equiv \frac{d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - d_3b_2c_1 - b_3c_2d_1 - c_3d_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \text{ (mod m)}$$

- **Campuran (Eliminasi dan Subtitusi)**

$a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1$ (mod m)……………………..(i)

$a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2$ (mod m)……………………..(ii)

$a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3$ (mod m)……………………..(iii)

Untuk $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, m \in Z$ dengan $m > 0$.

Eliminasi peubah y dari persamaan (i) dan (ii)

$$\begin{array}{l|l|l} a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \text{ (mod m)} & xa_2 & a_1a_2x + a_2b_1y + a_2c_1z \equiv a_2d_1 \text{ (mod m)} \\ a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \text{ (mod m)} & xa_1 & \underline{a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z \equiv a_1d_2 \text{ (mod m)}} \end{array} \quad \text{kurangkan}$$

$$a_2b_1y - a_1b_2y + a_2c_1z - a_1c_2z \equiv a_2d_1 - a_1d_2 \text{ (mod m)}\ldots\text{(iv)}$$

$$\begin{array}{l|l|l} a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \text{ (mod m)} & xa_3 & a_2a_3x + a_3b_2y + a_3c_2z \equiv a_3d_2 \text{ (mod m)} \\ a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \text{ (mod m)} & xa_2 & \underline{a_2a_3x + a_2b_3y + a_2c_3z \equiv a_2d_3 \text{ (mod m)}} \end{array} \quad \text{kurangkan}$$

$$a_3b_2y - a_2b_3y + a_3c_2z - a_2c_3z \equiv a_3d_2 - a_2d_3 \text{ (mod m)} \ldots\text{(v)}$$

Persamaan (iv) dan (v) merupakan sistem persamaan linier dua peubah y dan z.

Eliminasi peubah y:

$$\begin{array}{l|l|} a_2b_1y - a_1b_2y + a_2c_1z - a_1c_2z \equiv a_2d_1 - a_1d_2 \text{ (mod m)} & xa_3b_2 - a_2b_3 \\ a_3b_2y - a_2b_3y + a_3c_2z - a_2c_3z \equiv a_3d_2 - a_2d_3 \text{ (mod m)} & xa_2b_1 - a_1b_2 \end{array} \quad \text{kurangkan}$$

$$a_3b_2a_2c_1z - a_2b_3a_2c_1z - a_3b_2a_1c_2z + a_2b_3a_1c_2z \equiv a_2d_1a_3b_2 - a_2b_3a_2d_1 - a_1d_2a_3b_2 + a_1d_2a_2b_3 \pmod{m}$$

$$\underline{a_2b_1a_3c_2z - a_1b_2a_3c_2z - a_2b_1a_2c_3z + a_1b_2a_2c_3z \equiv a_2b_1a_3d_2 - a_1b_2a_3d_2 - a_2b_1a_2d_3 - a_2d_3a_1b_2 \pmod{m}}$$

Dan hasilnya diperoleh:

$$z \equiv \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - a_3b_2d_1 - b_3d_2a_1 - d_3a_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

Nilai z disubtitusikan ke persamaan $a_2b_1y - a_1b_2y + a_2c_1z - a_1c_2z \equiv a_2d_1 - a_1d_2 \pmod{m}$

Diperoleh:

$$y \equiv \frac{a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3 - a_3d_2c_1 - d_3c_2a_1 - c_3a_2d_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

Dan nilai y dan z dimasukkan ke persamaan $x \equiv \frac{d_1 - b_1y - c\ z}{a_1}$ (mod m), diperoleh:

$$x \equiv \frac{d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - d_3b_2c_1 - b_3c_2d_1 - c_3d_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

- **Invers**

Jika (a, m) = 1, maka kongruensi linier ax ≡ b (mod m) memiliki tepat satu solusi. Jika (a, m) = 1 maka kongruensi linier ax ≡ 1 (mod m) mempunyai tepat satu solusi. Solusi kongruensi ini disebut invers dari a modulo m yang diberi simbol a^{-1}

- **Invers matriks**

Jika A suatu matriks persegi panjang yang elemen-elemenya bilangan bulat dan m suatu bilangan bulat positif sedemikian hingga (Δ, m) = 1, maka invers dari A modulo m adalah $A^{-1} = \Delta^{-1}\text{adj}(A)$

Bukti: karena (Δ , m) = 1, maka Δ^{-1} ada. Dan karena $\Delta \neq 0$, maka A adj(A) = Δ I.

Sehingga $A.\Delta^{-1}\text{adj}(A) \equiv \Delta\Delta^{-1}I \equiv I \pmod{m}$

$$\Delta^{-1}\text{adj}(A)A \equiv \Delta\Delta^{-1}I \equiv I \pmod{m}$$

Ini menunjukkan bahwa $A^{-1} = \Delta^{-1}\text{adj}(A)$ adalah invers dari A modulo m.

- **Matriks**

$a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \pmod{m}$…………………..(i)

$a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \pmod{m}$…………………..(ii)

$a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \pmod{m}$…………………..(iii)

Untuk $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, m \in Z$ dengan $m > 0$.

Maka dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \pmod{m}$$

Det: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$

$$\Rightarrow a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2c_1 - c_3a_2b_1$$

Adj: $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \pmod{m}$

$A_{11} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - b_3c_2$

$A_{23} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = a_1b_3 - a_3b_1$

$A_{12} = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2c_3 - a_3c_2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_2c_3 - a_3b_2$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1c_3 - a_3c_1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1c_3 - a_3c_1$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{\det} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det}$$

Maka untuk mencari nilai x, y, z dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{\det} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

➢ **Operasi baris elementer**

Cara ini dapat diselesaikan dengan menggunakan tiga tipe operasi yaitu:

1. Kalikanlah sebuah baris dengan sebuah konstanta yang tak sama dengan nol.
2. Pertukarlah dua baris tersebut.
3. Tambahkanlah perkalian dari suatu baris pada baris yang lainnya.

Operasi-operasi diatas disebut operasi baris elementer (Anton. H. 1998: 5)

Matriks diperoleh dari operasi baris elementer antara lain:

- Matriks yang baris pertamanya tidak semuanya nol dan unsur tidak nol pertama kali adalah satu (1) yang disebut satu utama
- Satu utama pada baris berikutnya lebih menjorok ke kanan dibanding satu baris utama
- Suatu baris yang semuanya nol diletakkan bersama-sama dibawah

Contoh:

$$a_1x + b_1y + c_1z \equiv d_1 \quad (\text{mod } m)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{i})$$

$$a_2x + b_2y + c_2z \equiv d_2 \quad (\text{mod } m)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{ii})$$

$$a_3x + b_3y + c_3z \equiv d_3 \quad (\text{mod } m)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{iii})$$

Untuk $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, m \in Z$ dengan $m > 0$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right] (\text{mod} 7) \rightarrow \begin{array}{r} B_1.a_2.a_3 \\ B_2.a_1.a_3 \\ B_3.a_1.a_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} a_1a_2a_3 & b_1a_2a_3 & c_1a_2a_3 & d_1a_2a_3 \\ a_2a_1a_3 & b_2a_1a_3 & c_2a_1a_3 & d_2a_1a_3 \\ a_3a_1a_2 & b_3a_1a_2 & c_3a_1a_2 & d_3a_1a_2 \end{array}\right] (\text{mod } m) \rightarrow \begin{array}{l} B_2 - B_1 \\ B_3 - B_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1a_2a_3 & b_1a_2a_3 & c_1c_2c_3 & d_1a_2a_3 \\ 0 & b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3 & c_2a_1a_3 - c_1a_2a_3 & d_2a_1a_3 - d_1a_2a_3 \\ 0 & b_3a_1a_2 - b_1a_2a_3 & c_3a_1a_2 - c_1a_2a_3 & d_3a_1a_2 - d_1a_2a_3 \end{array}\right] (\text{mod } m) \rightarrow B_3(b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3) - B_2(b_3a_1a_2 - b_1a_2a_3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1a_2a_3 & b_1a_2a_3 & c_1a_2a_3 & d_1a_2a_3 \\ 0 & b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3 & c_2a_1a_3 - c_1a_2a_3 & d_2a_1a_3 - d_1a_2a_3 \\ 0 & 0 & (c_3a_1a_2 - c_1a_2a_3)(b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3) - (c_2a_1a_3 - c_1a_2a_3)(b_3a_1a_2 - b_1a_2a_3) & (d_3a_1a_2 - d_1a_2a_3)(b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3) - (d_2a_1a_3 - d_1a_2a_3)(b_3a_1a_2 - b_1a_2a_3) \end{array}\right] (\text{mod } m)$$

$$z \equiv \frac{(d_3a_1a_2 - d_1a_2a_3)(b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3) - (d_2a_1a_3 - d_1a_2a_3)(b_3a_1a_2 - b_1a_2a_3)}{(c_3a_1a_2 - c_1a_2a_3)(b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3) - (c_2a_1a_3 - c_1a_2a_3)(b_3a_1a_2 - b_1a_2a_3)} \ (\text{mod } m)$$

$$y \equiv \frac{(d_2a_1a_3 - d_1a_2a_3) - (c_2a_1a_3 - c_1a_2a_3)\dfrac{(d_3a_1a_2 - d_1a_2a_3)(b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3) - (d_2a_1a_3 - d_1a_2a_3)(b_3a_1a_2 - b_1a_2a_3)}{(c_3a_1a_2 - c_1a_2a_3)(b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3) - (c_2a_1a_3 - c_1a_2a_3)(b_3a_1a_2 - b_1a_2a_3)}}{b_2a_1a_3 - b_1a_2a_3} \ (\text{mod } m)$$

$$x \equiv \frac{(d_1a_2a_3) - (c_1a_2a_3)z - (b_1a_2a_3)y}{(a_1a_2a_3)} \ (\text{mod } m)$$

Dari pembuktian diatas, penulis akan menggunakan hasil dari pembuktian tersebut untuk mencari masing-masing variabel dalam sistem kongruensi linier tiga kongruensi tiga variabel dengan modulo yang sama dengan perbandingan koefisien $a_1 : a_2 : a_3 \not\equiv b_1 : b_2 : b_3 \not\equiv c_1 : c_2 : c_3 \not\equiv : d_1 : d_2 : d_3$

Contoh soal:

$2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$………………………………(i)

$2x + \quad z \equiv 4 \pmod 7$……………….………………(ii)

$x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$………………………………(iii)

$a_1 = 2$	$b_1 = 5$	$c_1 = 6$	$d_1 = 3$
$a_2 = 2$	$b_2 = 0$	$c_2 = 1$	$d_2 = 4$
$a_3 = 1$	$b_3 = 2$	$c_3 = 3$	$d_3 = 1$

- **Eliminasi**

Dari pembuktian diatas untuk mencari nilai x diperoleh:

$$x \equiv \frac{d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - d_3b_2c_1 - b_3c_2d_1 - c_3d_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod m$$

Dengan memasukkan nilai – nilai diatas, maka diperoleh:

$$x \equiv \frac{3.0.3 + 5.1.1 + 6.4.2 - 6.0.1 - 3.1.2 - 5.4.3}{2.0.3 + 5.1.1 + 6.2.2 - 1.0.6 - 2.1.2 - 3.2.5} \pmod 7$$

$$x \equiv \frac{-27}{-5} \pmod 7$$

$-5x \equiv -27 \pmod 7$

Karena $-27 \equiv -20 \pmod 7$, Karena -20 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih -20 dan kita dapat menggganti -27 pada kongruensi tersebut dengan -20, sehingga diperoleh $-5x \equiv -20 \pmod 7$. Selanjutnya karena

(-5, 7) = 1, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh x $\equiv$ 4 (mod 7)

untuk mencari nilai y diperoleh:

$$y \equiv \frac{a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3 - a_3d_2c_1 - d_3c_2a_1 - c_3a_2d_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \text{ (mod m)}$$

$$y \equiv \frac{2.4.3 + 3.1.1 + 6.2.1 - 1.4.6 - 1.1.2 - 3.2.3}{2.0.3 + 5.1.1 + 6.2.2 - 1.0.6 - 2.1.2 - 3.2.5} \text{ (mod 7)}$$

$$y \equiv \frac{-5}{-5} \text{ (mod 7)}$$

y $\equiv$ 1 (mod 7)

untuk mencari nilai z diperoleh:

$$z \equiv \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - a_3b_2d_1 - b_3d_2a_1 - d_3a_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \text{ (mod m)}$$

$$z \equiv \frac{2.0.1 + 5.4.1 + 3.2.2 - 1.0.3 - 2.4.2 - 1.2.5}{2.0.3 + 5.1.1 + 6.2.2 - 1.0.6 - 2.1.2 - 3.2.5} \text{ (mod 7)}$$

$$z \equiv \frac{6}{-5} \text{ (mod 7)}$$

-5z $\equiv$ 6 (mod 7)

5z $\equiv$ -6 (mod 7)

Karena -6 $\equiv$1 (mod 7), 1 $\equiv$ 8 (mod 7), 8 $\equiv$ 15 (mod 7). Karena 15 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 15 dan kita dapat menggganti -6 pada kongruensi tersebut dengan 15, sehingga diperoleh 5z $\equiv$ 15 (mod 7). Selanjutnya karena (5, 7) = 1, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh z $\equiv$ 3 (mod 7)

Jadi nilai x $\equiv$ 4 (mod 7), y $\equiv$1 (mod 7), z $\equiv$3 (mod 7)

➢ **Subtitusi**

Dengan cara yang sama dari pembuktian diatas untuk mencari nilai x diperoleh:

$$x \equiv \frac{d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - d_3b_2c_1 - b_3c_2d_1 - c_3d_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \text{ (mod m)}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai diatas, maka diperoleh:

$$x \equiv \frac{3.0.3 + 5.1.1 + 6.4.2 - 6.0.1 - 3.1.2 - 5.4.3}{2.0.3 + 5.1.1 + 6.2.2 - 1.0.6 - 2.1.2 - 3.2.5} \text{ (mod 7)}$$

$$x \equiv \frac{-27}{-5} \text{ (mod 7)}$$

-5x ≡ -27 (mod 7)

Karena -27 ≡-20 (mod 7), Karena -20 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih -20 dan kita dapat menggganti -27 pada kongruensi tersebut dengan -20, sehingga diperoleh -5x ≡ -20 (mod 7). Selanjutnya karena (-5, 7) = 1, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh x ≡ 4 (mod 7)

untuk mencari nilai y diperoleh:

$$y \equiv \frac{a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3 - a_3d_2c_1 - d_3c_2a_1 - c_3a_2d_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \text{ (mod m)}$$

$$y \equiv \frac{2.4.3 + 3.1.1 + 6.2.1 - 1.4.6 - 1.1.2 - 3.2.3}{2.0.3 + 5.1.1 + 6.2.2 - 1.0.6 - 2.1.2 - 3.2.5} \text{ (mod 7)}$$

$$y \equiv \frac{-5}{-5} \text{ (mod 7)}$$

y ≡ 1 (mod 7)

untuk mencari nilai z diperoleh:

$$z \equiv \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - a_3b_2d_1 - b_3d_2a_1 - d_3a_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

$$z \equiv \frac{2.0.1 + 5.4.1 + 3.2.2 - 1.0.3 - 2.4.2 - 1.2.5}{2.0.3 + 5.1.1 + 6.2.2 - 1.0.6 - 2.1.2 - 3.2.5} \pmod{7}$$

$$z \equiv \frac{6}{-5} \pmod{7}$$

-5z ≡ 6 (mod 7)

5z ≡ -6 (mod 7)

Karena -6 ≡1 (mod 7), 1 ≡ 8 (mod 7), 8 ≡ 15 (mod 7). Karena 15 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 15 dan kita dapat mengggganti -6 pada kongruensi tersebut dengan 15, sehingga diperoleh 5z ≡ 15 (mod 7). Selanjutnya karena (5, 7) = 1, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh z ≡ 3 (mod 7)

Jadi nilai x ≡ 4 (mod 7), y ≡1 (mod 7), z ≡3 (mod 7)

- **Campuran (Eliminasi dan Subtitusi)**

Dengan cara yang sama dari pembuktian diatas untuk mencari nilai x diperoleh:

$$x \equiv \frac{d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1d_2b_3 - d_3b_2c_1 - b_3c_2d_1 - c_3d_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

Dengan memasukkan nilai-nilai diatas, maka diperoleh:

$$x \equiv \frac{3.0.3 + 5.1.1 + 6.4.2 - 6.0.1 - 3.1.2 - 5.4.3}{2.0.3 + 5.1.1 + 6.2.2 - 1.0.6 - 2.1.2 - 3.2.5} \pmod{7}$$

Dengan memasukkan nilai – nilai diatas, maka diperoleh:

$$x \equiv \frac{-27}{-5} \pmod{7}$$

-5x ≡ -27 (mod 7)

Karena -27 ≡-20 (mod 7), Karena -20 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih -20 dan kita dapat menggganti -27 pada kongruensi tersebut dengan -20, sehingga diperoleh -5x ≡ -20 (mod 7). Selanjutnya karena (-5, 7) = 1, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh x ≡ 4 (mod 7)

untuk mencari nilai y diperoleh:

$$y \equiv \frac{a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1a_2d_3 - a_3d_2c_1 - d_3c_2a_1 - c_3a_2d_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

$$y \equiv \frac{2.4.3 + 3.1.1 + 6.2.1 - 1.4.6 - 1.1.2 - 3.2.3}{2.0.3 + 5.1.1 + 6.2.2 - 1.0.6 - 2.1.2 - 3.2.5} \pmod{7}$$

$$y \equiv \frac{-5}{-5} \pmod{7}$$

y ≡ 1 (mod 7)

untuk mencari nilai z diperoleh:

$$z \equiv \frac{a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1a_2b_3 - a_3b_2d_1 - b_3d_2a_1 - d_3a_2b_1}{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1} \pmod{m}$$

$$z \equiv \frac{2.0.1 + 5.4.1 + 3.2.2 - 1.0.3 - 2.4.2 - 1.2.5}{2.0.3 + 5.1.1 + 6.2.2 - 1.0.6 - 2.1.2 - 3.2.5} \pmod{7}$$

$$z \equiv \frac{6}{-5} \pmod{7}$$

-5z ≡ 6 (mod 7)

5z ≡ -6 (mod 7)

Karena -6 ≡1 (mod 7), 1 ≡ 8 (mod 7), 8 ≡ 15 (mod 7). Karena 15 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 15 dan kita dapat menggganti -6 pada kongruensi tersebut dengan 15, sehingga diperoleh 5z $\equiv$ 15 (mod 7). Selanjutnya karena (5, 7) = 1, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh z $\equiv$ 3 (mod 7)

Jadi nilai x $\equiv$ 4 (mod 7), y $\equiv$1 (mod 7), z $\equiv$3 (mod 7)

- **Martiks**

Dari pembuktian diatas untuk mencari nilai x, y, z diperoleh:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{\det}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} (\mathrm{mod}\ m)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & 10 \\ 4 & 1 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -13 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$x \equiv \frac{13}{5} (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$5x \equiv 13 (\mathrm{mod}\ 7)$$

karena 13$\equiv$20 (mod 7), karena 20 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 20 dan kita dapat mengganti 13 pada kongruensi tersebut dengan 20, sehingga diperoleh 5x $\equiv$ 20 (mod 7). Selanjutnya karena (5, 7) = 1, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh x $\equiv$ 4 (mod 7)

$$y \equiv 1 (\mathrm{mod} 7)$$

$$z \equiv \frac{-6}{5} (\mathrm{mod}\ 7)$$

$5z \equiv -6 \pmod 7$

Karena $-6 \equiv 1 \pmod 7$, $1 \equiv 8 \pmod 7$, $8 \equiv 15 \pmod 7$. Karena 15 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 15 dan kita dapat menggganti -6 pada kongruensi tersebut dengan 15, sehingga diperoleh $5z \equiv 15 \pmod 7$. Selanjutnya karena $(5, 7) = 1$, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh $z \equiv 3 \pmod 7$

Jadi nilai $x \equiv 4 \pmod 7$, $y \equiv 1 \pmod 7$, $z \equiv 3 \pmod 7$

Penulis juga akan mencari nilai masing-masing variabel dengan mengunakan perhitungan langsung atau tanpa melihat rumus

Contoh soal:

- **Eliminasi**

$2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$……………………………….(i)

$2x + \quad z \equiv 4 \pmod 7$ …………………..……………….(ii)

$x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$ ……………………………….(iii)

$$\begin{array}{l} 2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7 \\ \underline{2x + \quad\quad z \equiv 4 \pmod 7} \; - \\ \quad 5y + 5z \equiv -1 \pmod 7 \end{array}$$ ……………………………….(iv)

$$\begin{array}{l|c|l} 2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7 & x1 & 2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7 \\ x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7 & x2 & \underline{2x + 4y + 6z \equiv 2 \pmod 7} \; - \\ & & \quad\quad y \equiv 1 \pmod 7 \end{array}$$

$5y + 5z \equiv -1 \pmod 7$

$5(1) + 5z \equiv -1 \pmod 7$

$5 + 5z \equiv -1 \pmod 7$

$5z \equiv -6 \pmod 7$

Karena $-6 \equiv 1 \pmod 7$, $1 \equiv 8 \pmod 7$, $8 \equiv 15 \pmod 7$. Karena 15 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 15 dan kita dapat menggganti -6 pada kongruensi tersebut dengan 15, sehingga diperoleh $5z \equiv 15 \pmod 7$. Selanjutnya karena $(5, 7) = 1$, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh $z \equiv 3 \pmod 7$

$$\begin{array}{l|c|l} 2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7 & x2 & 4x + 10y + 12z \equiv 6 \pmod 7 \\ x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7 & x5 & \underline{5x + 10y + 15z \equiv 5 \pmod 7} \; - \end{array}$$

$$-x - 3z \equiv 1 \pmod 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(v)}$$

$$\begin{array}{l|c|l} -x - 3z \equiv 1 \pmod 7 & x1 & -x - 3z \equiv 1 \pmod 7 \\ 2x + z \equiv 4 \pmod 7 & x3 & \underline{6x + 3z \equiv 12 \pmod 7} \; + \end{array}$$

$$5x \equiv 13 \pmod 7$$

karena $13 \equiv 20 \pmod 7$, karena 20 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 20 dan kita dapat mengganti 13 pada kongruensi tersebut dengan 20, sehingga diperoleh $5x \equiv 20 \pmod 7$. Selanjutnya karena $(5, 7) = 1$, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh $x \equiv 4 \pmod 7$

$$\begin{array}{l|c|l} 2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7 & x1 & 2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7 \\ 2x + \qquad z \equiv 4 \pmod 7 & x6 & \underline{12x + \qquad 6z \equiv 24 \pmod 7} \; - \end{array}$$

$$-10x + 5y \equiv -21 \pmod 7$$

$$\begin{array}{rl|c|l} -10x + 5y \equiv -21 \pmod 7 & x1 & -10x + 5y \equiv -21 \pmod 7 \\ 5x - 2y \equiv 11 \pmod 7 & x2 & \underline{10x - 2y \equiv -22 \pmod 7} + \end{array}$$

$$y \equiv 1 \pmod 7$$

Jadi nilai $x \equiv 4 \pmod 7$, $y \equiv 1 \pmod 7$, $z \equiv 3 \pmod 7$

- **Subtitusi**

$2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$……………………………….(i)

$2x + \quad z \equiv 4 \pmod 7$……………….……………….(ii)

$x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$……………………………….(iii)

Dari persamaan $2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$

$$2x \equiv 3 - 5y - 6z \pmod 7$$

$$x \equiv \frac{3 - 5y - 6z}{2} \pmod 7$$

Peubah x ini disubtitusikan ke persamaan (ii) dan persamaan (iii) diperoleh:

$$2\left(\frac{3 - 5y - 6z}{2}\right) + z \equiv 4 \pmod 7$$

$\Leftrightarrow 6 - 10y - 12z \equiv 2z \pmod 7$

$\Leftrightarrow -10y - 10z \equiv 2 \pmod 7$……………………………..(iv)

Dan peubah x dimasukkan juga ke persamaan (iii) diperoleh:

$$\left(\frac{3 - 5y - 6z}{2}\right) + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$$

$\Leftrightarrow 3 - 5y - 6z \equiv 2 - 4y - 6z \pmod 7$

$\Leftrightarrow -5y + 4y - 6z + 6z \equiv 2 - 3 \pmod 7$

$\Leftrightarrow y \equiv 1 \pmod 7$

Nilai y dimasukkan ke persamaan (iv) diperoleh:

$-10y - 10z \equiv 2 \pmod 7$

$-10(1) - 10z \equiv 2 \pmod 7$

$-10 - 10z \equiv 2 \pmod 7$

$10z \equiv -12 \pmod 7$

$5z \equiv -6 \pmod 7$

Karena $-6 \equiv 1 \pmod 7$, $1 \equiv 8 \pmod 7$, $8 \equiv 15 \pmod 7$. Karena 15 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 15 dan kita dapat mengggganti -6 pada kongruensi tersebut dengan 15, sehingga diperoleh $5z \equiv 15 \pmod 7$. Selanjutnya karena $(5, 7) = 1$, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh $z \equiv 3 \pmod 7$

Selanjutnya nilai y dan z dimasukkan ke persamaan (i), diperoleh:

$$x \equiv \frac{3 - 5y - 6z}{2} \pmod 7$$

$$\equiv \frac{3 - 5(1) - 6(3)}{2} \pmod 7$$

$$\equiv -10 \pmod 7$$

$$\equiv -3 \pmod 7$$

$$\equiv 4 \pmod 7$$

Jadi nilai $x \equiv 4 \pmod 7$, $y \equiv 1 \pmod 7$, $z \equiv 3 \pmod 7$

- **Campuran (Eliminasi dan Subtitusi)**

$2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$…………………………………(i)

$2x + \quad z \equiv 4 \pmod 7$………………..………………(ii)

$x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$…………………………………(iii)

$2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$

$\underline{2x + \quad\quad z \equiv 4 \pmod 7}$ –

$5y + 5z \equiv -1 \pmod 7$ ……………………………….(iv)

$2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$ | x1 | $2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$

$x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$ | x2 | $\underline{2x + 4y + 6z \equiv 2 \pmod 7}$ -

$y \equiv 1 \pmod 7$

$5y + 5z \equiv -1 \pmod 7$

$5(1) + 5z \equiv -1 \pmod 7$

$5 + 5z \equiv -1 \pmod 7$

$5z \equiv -6 \pmod 7$

Karena $-6 \equiv 1 \pmod 7$, $1 \equiv 8 \pmod 7$, $8 \equiv 15 \pmod 7$. Karena 15 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 15 dan kita dapat menggganti -6 pada kongruensi tersebut dengan 15, sehingga diperoleh $5z \equiv 15 \pmod 7$. Selanjutnya karena $(5, 7) = 1$, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh $z \equiv 3 \pmod 7$

Selanjutnya nilai y dan z disubtitusikan ke persamaan (ii), diperoleh:

$2x + z \equiv 4 \pmod 7$

$2x + 3 \equiv 4 \pmod 7$

$2x \equiv 1 \pmod 7$

Karena $1 \equiv 8 \pmod 7$. Karena 8 adalah bilangan residu terkecil yang dapat habis dibagi 2 maka kita pilih 8 dan kita dapat menggganti 1 pada kongruensi tersebut dengan 8, sehingga diperoleh $2x \equiv 8 \pmod 7$. Selanjutnya karena $(2, 7) =$

1, maka kita dapat membagi 2 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh $x \equiv 4 \pmod 7$

Jadi nilai $x \equiv 4 \pmod 7$, $y \equiv 1 \pmod 7$, $z \equiv 3 \pmod 7$

- **Invers**

$5x \equiv 13 \pmod 7$

$(5, 7) = 1 \rightarrow 5x \equiv 1 \pmod 7$

$5x \equiv 15 \pmod 7$

$x \equiv 3 \pmod 7$

Invers 5 adalah 3, maka

$5x \equiv 13 \pmod 7$

$3.5x \equiv 3.\ 13 \pmod 7$

$x \equiv 4 \pmod 7$

$5z \equiv -6 \pmod 7$

$(5, 7) = 1 \rightarrow 5x \equiv 1 \pmod 7$

$5x \equiv 15 \pmod 7$

$x \equiv 3 \pmod 7$

Invers 5 adalah 3, maka

$5z \equiv -6 \pmod 7$

$3.5 \equiv -6.3 \pmod 7$

$z \equiv -18 \pmod 7$

$z \equiv 3 \pmod 7$

$y \equiv 1 \pmod 7$

$(1, 7) = 1 \rightarrow x \equiv 1 \pmod 7$

Invers 1 adalah 1

y ≡ 1 (mod 7)

1. y ≡ 1. 1 (mod 7)

y ≡ 1 (mod 7)

Jadi nilai x ≡ 4 (mod 7), y ≡1 (mod 7), z ≡3 (mod 7)

- **Matriks**

2x + 5y + 6z ≡3 (mod 7)

2x + z ≡ 4 (mod 7)

x + 2y + 3z ≡ 1 (mod 7)

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \pmod 7$$

Det = -5 ≡ 2 (mod 7), maka $\Delta^{-1} = 4$, sehingga $A^{-1} = \Delta^{-1}\,\mathrm{adj}\ (A) =$

$$4\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ -5 & 0 & 10 \\ 4 & 1 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 20 \\ -20 & 0 & 40 \\ 16 & 4 & -40 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \pmod 7$$

Sehingga $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \pmod 7$

Jadi nilai x ≡ 4 (mod 7), y ≡1 (mod 7), z ≡3 (mod 7)

- **Operasi baris elementer (OBE)**

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} (\text{mod}7) \xrightarrow{\substack{B_1 - B_2 \\ B_2 - B_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} (\text{mod}7) \xrightarrow{\substack{B_2(-\frac{1}{5}) \\ B_3 - B_1}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} (\text{mod } 7) \xrightarrow[B_3 + B_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{bmatrix} (\text{mod } 7)$$

$x + 3y + 3z \equiv 2 \pmod 7$

$y + z \equiv -\frac{1}{5} \pmod 7$

$z \equiv -\frac{6}{5} \pmod 7$

$z \equiv -\frac{6}{5} \pmod 7$

$5z \equiv -6 \pmod 7$

Karena -6 $\equiv$1 (mod 7), 1 $\equiv$ 8 (mod 7), 8 $\equiv$ 15 (mod 7). Karena 15 adalah residu terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 15 dan kita dapat menggganti -6 pada kongruensi tersebut dengan 15, sehingga diperoleh 5z $\equiv$ 15 (mod 7). Selanjutnya karena (5, 7) = 1, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh z $\equiv$ 3 (mod 7)

$y + z \equiv -\frac{1}{5} \pmod 7$

$y + (3) \equiv -\frac{1}{5} \pmod 7$

$5y \equiv -16 \pmod 7$

Karena -16 $\equiv 9 \pmod 7$, $9 \equiv -2 \pmod 7$, $-2 \equiv 5 \pmod 7$. Karena 5 adalah bilangan bulat terkecil yang dapat habis dibagi 5 maka kita pilih 5 dan kita dapat menggganti -16 pada kongruensi tersebut dengan 5, sehingga diperoleh $5y \equiv 5 \pmod 7$. Selanjutnya karena $(5, 7) = 1$, maka kita dapat membagi 5 pada ruas-ruas kongruensi itu, sehingga diperoleh $y \equiv 1 \pmod 7$

$x + 3y + 3z \equiv 2 \pmod 7$

$x + 3(1) + 3(3) \equiv 2 \pmod 7$

$x \equiv -10 \pmod 7$

$x \equiv -3 \pmod 7$

$x \equiv 4 \pmod 7$

Jadi nilai $x \equiv 4 \pmod 7$, $y \equiv 1 \pmod 7$, $z \equiv 3 \pmod 7$

- **Algoritma euclides**

$2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$……………………………….(i)

$2x + \quad z \equiv 4 \pmod 7$……………………..…………….(ii)

$x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$……………………………….(iii)

Apabila diselesaikan dengan algoritma euclides maka ketiga persamaan tersebut dieliminasi dan hasil eliminasi tersebut diselesaikan dengan menggunakan cara algoritma euclides

$2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$ x2 $\quad 4x + 10y + 12z \equiv 6 \pmod 7$

$x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$ x5 $\quad \underline{5x + 10y + 15z \equiv 5 \pmod 7}$ -

$-x - 3z \equiv 1 \pmod 7$……………….(iv)

Selanjutnya kita mengeliminasi persamaan (iv) dan (ii)

$$\begin{array}{l|c|l} -x - 3z \equiv -1 \pmod 7 & x1 & -x - 3z \equiv -1 \pmod 7 \\ 2x + z \equiv 4 \pmod 7 & x3 & \underline{6x + 3z \equiv 12 \pmod 7} + \end{array}$$

$$5x \equiv 13 \pmod 7$$

$5x \equiv 13 \pmod 7 \rightarrow 5x + 7s = 13$

$(5, 7) = 1 \rightarrow 7 = 1.\ 5 + 2 \rightarrow 2 = 7 - 1.5$

$5 = 1.\ 2 + 3 \rightarrow 3 = 5 - 1.2$

$2 = 1.\ 1 + 1 \rightarrow 1 = 2 - 1.1$

$1 = 2 - 1.1$

$= 2 - 1.\ (2 - 1.1)$

$= 2 - 1\ (7 - 1.5 - 1.1)$

$= (2 + (-1.-1)5.-2.7\ )$

$= 3.\ 5 - 2.7$

$(5, 7) = 1 \rightarrow 5x + 7s = 1$

$5(3) + 7(-2) = 1$

$5(39) + 7(-26) = 13$

$x_0 = 39$

$x \equiv 39 \pmod 7$

$x \equiv 4 \pmod 7$

selanjutnya untuk mencari nilai z kita eliminasi persamaan (i) dan (ii)

$2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$

$\underline{2x + \quad\quad z \equiv 4 \pmod 7} -$

$5y + 5z \equiv -1 \pmod 7$……………………………..(v)

Selanjutnya kita mengeliminasi persamaan (i) dan (iii)

$$\begin{array}{l|c|l} 2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7 & x1 & 2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7 \\ x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7 & x2 & \underline{2x + 4y + 6z \equiv 2 \pmod 7}\ - \end{array}$$

$$y \equiv 1 \pmod 7$$

$5y + 5z \equiv -1 \pmod 7$

$5(1) + 5z \equiv -1 \pmod 7$

$5 + 5z \equiv -1 \pmod 7$

$5z \equiv -6 \pmod 7$

$5z \equiv -6 \pmod 7 \rightarrow 5x + 7s = 1$

$5(3) + 7(-2) = 1$

$5(-18) + 7(12) = -6$

$z_0 = -18$

$z \equiv -18 \pmod 7$

$z \equiv 3 \pmod 7$

Jadi nilai $x \equiv 4 \pmod 7$, $y \equiv 1 \pmod 7$, $z \equiv 3 \pmod 7$

Dari beberapa cara diatas untuk mencari nilai x, y dan z diperoleh:

$x \equiv 4 \pmod 7 \rightarrow x = \{\ldots, -10, -3, 4, 11, 18, \ldots\}$

$y \equiv 1 \pmod 7 \rightarrow y = \{\ldots, -13, -6, 1, 8, 15, \ldots\}$

$z \equiv 3 \pmod 7 \rightarrow x = \{\ldots, -11, -4, 3, 10, 17, \ldots\}$

Untuk membuktikan apakah benar nilai x, y dan z diatas penulis akan memasukkan nilai x, y dan z ke persamaan (i), (ii) dan (iii)

Persamaan (i) $= 2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$

$2(4) + 5(1) + 6(3) \equiv 3 \pmod 7$

$31 \equiv 3 \pmod 7 \rightarrow$ benar

Persamaan (ii) = $2x + z \equiv 4 \pmod 7$

$2(4) + 3 \equiv 4 \pmod 7$

$11 \equiv 4 \pmod 7 \rightarrow$ benar

Persamaan (iii) = $x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$

$4 + 2(1) + 3(3) \equiv 1 \pmod 7$

$15 \equiv 1 \pmod 7 \rightarrow$ benar

Selain memasukkan nilai x, y dan z yang telah dihitung sesuai dengan berbagai cara diatas penulis mencoba memasukkan nilai x, y dan z secara acak dengan catatan nilai x, y dan z anggota himpunan x, y dan z.

Contoh:

Ambil sebarang anggota himpunan, misalnya -3 untuk x, 8 untuk y dan 17 untuk z.

Jawab:

Kita akan memasukkan nilai-nilai x, y dan z diatas pada persamaan(i), (ii), (iii)

Maka, persamaan (i) = $2x + 5y + 6z \equiv 3 \pmod 7$

$2(-3) + 5(8) + 6(17) \equiv 3 \pmod 7$

$136 \equiv 3 \pmod 7 \rightarrow$ benar

Persamaan (ii) = $2x + z \equiv 4 \pmod 7$

$2(-3) + 17 \equiv 4 \pmod 7$

$11 \equiv 4 \pmod 7 \rightarrow$ benar

Persamaan (iii) = $x + 2y + 3z \equiv 1 \pmod 7$

$-3 + 2(8) + 3(17) \equiv 1 \pmod 7$

$64 \equiv 1 \pmod 7 \rightarrow$ benar

Jadi untuk menyelesaikan persamaan kongruensi tidak harus memasukkan nilai x, y dan z yang telah dihitung sesuai dengan berbagai cara diatas, tetapi untuk menyelesaikan persamaan kongruensi dapat juga memasukkan nilai x, y dan z secara acak dengan catatan nilai x, y dan z anggota himpunan x, y dan z.

Selain memasukkan nilai x, y dan z pada persamaan untuk membuktikan kebenaran persamaaan, penulis juga memberikan cara lain yaitu *jumlah nilai selesaian.*

$$\begin{array}{r} x \equiv 4 \pmod 7 \\ y \equiv 1 \pmod 7 \\ z \equiv 3 \pmod 7 \quad + \\ \hline x+y+z \equiv 1 \pmod 7 \end{array}$$

Kita akan memasukkan nilai x, y dan z pada $x + y + z \equiv 1 \pmod 7$, maka

$\leftrightarrow x + y + z \equiv 1 \pmod 7$

$\leftrightarrow 4 + 1 + 3 \equiv 1 \pmod 7$

$\leftrightarrow 8 \equiv 1 \pmod 7 \rightarrow$ benar

Kita juga akan memasukkan nilai x, y dan z yang diambil secara acak (anggota himpunan x, y, z). Ambil sebarang nilai x, y dan z. misalnya 18 untuk x, -6 untuk y dan 10 untuk z. maka

$\leftrightarrow x + y + z \equiv 1 \pmod 7$

$\leftrightarrow 18 + (-6) + 10 \equiv 1 \pmod 7$

$\leftrightarrow 22 \equiv 1 \pmod 7 \rightarrow$ benar

Penulis juga akan memberikan contoh soal sistem kongruensi tiga variabel dengan modulo yang sama dengan perbandingan koefisien $a_1:a_2:a_3 \equiv b_1:b_2:b_3 \equiv c_1:c_2:c_3 \equiv :d_1:d_2:d_3$.

Contoh soal:

$2x + 3y + z \equiv 5 \pmod 7$……………………………..(i)

$2x + 3y + z \equiv 5 \pmod 7$……………………………..(ii)

$2x + 3y + z \equiv 5 \pmod 7$……………………………..(iii)

$a_1 = 2$	$b_1 = 3$	$c_1 = 1$	$d_1 = 5$
$a_2 = 2$	$b_2 = 3$	$c_2 = 1$	$d_2 = 5$
$a_3 = 2$	$b_3 = 3$	$c_3 = 1$	$d_3 = 5$

Dari contoh soal diatas dapat dketahui bahwa penyelesaian sistem kongruensi tiga kongruensi tiga variabel dengan modulo yang sama mempunyai banyak selesaian karena mempunyai perbandingan $a_1:a_2:a_3 \equiv b_1:b_2:b_3 \equiv c_1:c_2:c_3 \equiv :d_1:d_2:d_3$. Dikerjakan dengan berbagai cara apapun menghasilkan banyak selesaian.

3.3 Menyelesaikan Sistem Kongruensi Dalam Pandangan Islam.

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diketahui bahwa beberapa cara dalam menyelesaikan sistem kongruensi linier adalah bertujuan untuk mempermudah dalam menyelesaikan sistem kongruensi linier.

Jika dikaitkan dengan agama Islam, hal ini dapat direlevansikan dengan Al-Quran yang menyebutkan bahwa Al-Quran diturunkan untuk mempermudah. Sebagaimana yang tertera pada surat Thaahaa ayat 2-3:

مَآ أَنزَلۡنَا عَلَيۡكَ ٱلۡقُرۡءَانَ لِتَشۡقَىٰٓ ﴿٢﴾ إِلَّا تَذۡكِرَةٗ لِّمَن يَخۡشَىٰ ﴿٣﴾

Artinya: Kami tidak menurunkan Al Quran Ini kepadamu agar kamu menjadi susah (2). Tetapi sebagai peringatan bagi orang yang takut (kepada Allah), (3).(Q.S Thaahaa: 2-3)

Ayat diatas menceritakan bahwa Allah SWT tidaklah membuat kesusahan dengan diturunkannya Al-Quran, tetapi Allah SWT menurunkan Al-Quran sebagai kemudahan untuk memberi peringatan kepada manusia.

Seperti yang telah dijelaskan dalam bab-bab sebelumnya bahwa dalam menyelesaikan sistem kongruensi linier dapat diselesaikan dengan berbagai macam cara. Islam mengajarkan kepada umatnya untuk pantang menyerah dalam menyelesaikan setiap persoalan karena setiap persoalan selalu memiliki jalan keluar atau solusi. Dalam menyelesaikan persoalan tidak hanya terpaut satu cara saja tetapi Islam mengajarkan banyak cara dalam menyelesaikan persoalan. Sikap pantang menyerah, pantang berputus asa, dan memiliki rasa percaya diri sangat dianjurkan dan merupakan suatu perintah dalam Al-Qur'an. Hal ini sebagaimana dinyatakan oleh Allah swt dalam surat Al-Hijr ayat 56 berikut ini:

قَالَ وَمَن يَقۡنَطُ مِن رَّحۡمَةِ رَبِّهِۦٓ إِلَّا ٱلضَّآلُّونَ ﴿٥٦﴾

Artinya: Ibrahim berkata: "Tidak ada orang yang berputus asa dari rahmat Tuhan-nya, kecuali orang-orang yang sesat".(Q.S. Al-Hijr: 56)

Dalam surat Alam Nasyroh ayat 5-6, Allah SWT menyatakan bahwa sesuadah ada kesulitan pasti ada kemudahan. Oleh karena itu, Islam sangat menganjurkan agar umatnya selalu berusaha dan pantang menyerah dalam menghadapi setiap kesulitan apapun sebagaimana berikut ini:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦

Artinya: Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5). Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6). (Q.S. Alam Nasyroh: 5-6).

Sebagai akhir dari analisis tentang relevansi antara konsep salah satu cabang matematika yaitu teori bilangan khususnya masalah menyelesaikan sistem kongruensi linier dengan kajian Islam. yang sekaligus merupakan hal yang utama yang dapat dijadikan sebagi refleksi dari semuanya yakni ternyata setelah banyak mempelajari matematika yang merupakan ilmu hitung-menghitung serta banyak mengetahui mengenai masalah yang terdapat dalam matematika yang dapat direlevansikan dalam agama Islam sesuai dengan konsep-konsep yang ada dalam Al-Qur'an, maka akan dapat menambah keyakinan diri akan kebesaran Allah SWT selaku sang pencipta yang serba Maha, salah satunya adalah Maha

Matematisi. Karena Dialah sang raja yang sangat cepat dan teliti dalam semua masalah perhitungan. Hal ini sesuai dalam Al-Quran surat Maryam ayat 94:

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya: Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti.(Q.S. Maryam: 94)

Ayat diatas menceritakan bahwa sesungguhnya Allah, Dia yang maha esa itu telah mengetahui keadaan baik yang terjangkau oleh mahkluk maupun yang mereka tidak dapat terjangkau, kebutuhan dan keinginan mereka dengan rinci sebelum hadir dipentas jagad raya dan telah mengitung mereka dengan hitungan yang teliti sehingga semua Dia penuhi kebutuhannya. Dengan demikian Allah adalah pembuat hitungan yang paling teliti. (Shihab, 2002: 307-309).

Juga dalam surat Al-An'am ayat 62:

ثُمَّ رُدُّوٓاْ إِلَى ٱللَّهِ مَوۡلَىٰهُمُ ٱلۡحَقِّۚ أَلَا لَهُ ٱلۡحُكۡمُ وَهُوَ أَسۡرَعُ ٱلۡحَٰسِبِينَ ٦٢

Artinya: Kemudian mereka (hamba Allah) dikembalikan kepada Allah, Penguasa mereka yang sebenarnya. Ketahuilah bahwa segala hukum (pada hari itu) kepunyaanNya. dan dialah pembuat perhitungan yang paling cepat.(Q.S. Al-An'am: 62)

Ayat diatas menjelaskan bahwa Allah SWT akan memperhitungkan perbuatan segala golongan manusia dalam waktu sekejap, dan tidak ada catatan apapun yang menghalangi-Nya untuk menghitung segala hal dari mereka. Dengan demikian Allah adalah pembuat perhitungan yang paling cepat. (Shihab, 2002: 186-187).

Dari kedua ayat diatas dapat diambil sebuah pelajaran penting tentang sifat Allah SWT yaitu teliti dan cepat dalam perhitungan. Allah SWT menciptakan segala sesuatu menurut ukuran dan hitungan yang telah diciptakan oleh Allah SWT dan tidak ada satupun keadaan mereka yang tersembunyi bagi Allah SWT. (ash-Shiddieqy: 2000: 2508)

Dari sini terlihat, bahwa betapa kuasanya Allah dalam melakukan perhitungan meskipun pada dzat yang terkecil yang tak akan dapat dihitung dengan kasat mata manusia. Sekalipun menggunakan alat yang canggihpun, tak kan ada yang dapat menyaingi Allah SWT. Sehingga hal ini dapat menambah ketaqwaan kita kepada Allah SWT sang Kholiq yang Maha cepat dalam penghitungannya. Selain itu, dengan mengetahui tentang kajian masalah berhitung yang ada dalam Al-Quran juga dapat menambah keyakinan bahwa meskipun matematika basiknya tergolong dalam ilmu umum, tetapi sebenarnya telah banyak dibahas dalam Al-Quran. Hal ini terbukti, bahwa di dalam Al-Quran disiplin ilmu matematika tak hanya membahas masalah perhitungan angka saja, tetapi juga membahas masalah himpunan, bilangan, pengukuran, statistika, estimasi, dan masih banyak lagi keajaiban-keajaiban matematika yang terdapat dalam Al-Quran.

BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa:

1. Dari sistem kongruensi linier ada yang mempunyai selesaian dan tidak mempunyai selesaian dengan melihat perbandingan koefisien masing-masing variabel dan pembuktian pada aturan cremer. Sistem kongruensi yang mempunyai selesaian ada yang mempunyai satu selesaian dan banyak selesaian. Untuk sistem kongruensi yang mempunyai satu selesaian dapat dilihat dengan perbandingan koefisien $a_1:a_2:a_3 \square b_1:b_2:b_3 \square c_1:c_2:c_3 \square :d_1:d_2:d_3$. Untuk sistem kongruensi yang mempunyai banyak selesaian dapat dilihat dengan perbandingan koefisien $a_1:a_2:a_3 \equiv b_1:b_2:b_3 \equiv c_1:c_2:c_3 \equiv :d_1:d_2:d_3$. Untuk sistem kongruensi linier yang tidak mempunyai selesaian dapat dilihat dengan perbandingan koefisien $a_1:a_2:a_3 \equiv b_1:b_2:b_3 \equiv c_1:c_2:c_3 \square :d_1:d_2:d_3$
2. Sistem kongruensi tiga kongruensi tiga variabel dengan modulo sama dengan perbandingan koefisien $a_1:a_2:a_3 \square b_1:b_2:b_3 \square c_1:c_2:c_3 \square :d_1:d_2:d_3$. Dapat diselesaikan menggunakan beberapa cara, antara lain: eliminasi, subtitusi, campuran (eliminasi-subtitusi), matriks, invers, operasi baris elementer, dan algoritma euclides.

4.2 Saran

pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan menyelesaikan sistem kongruensi linier dengan menggunakan cara eliminasi, subtitusi, campuran (eliminasi-subtitusi), matriks, invers, operasi baris elementer, dan algoritma euclides. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah menyelesaikan sistem kongruensi nonlinier dan pengaplikasiannya pada program komputer.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al Qur'an.* Malang: UIN Malang Press.

____________. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press.

Al-Maraghi, Ahmad Mustafa. 1993. *Tafsir Al-Maraghi 16.* Semarang: CV Toha Putra.

Al-Mubarakfuri, Syaikh Shafyyurrahman. 2007. *Shahih Tafsir Ilmu Katsir.* Jakarta: Pustaka Ibnu Katsir.

Ash-Shiddieqy, Teungku Muhammad Hasbi. 2000. *Tafsir Al-QUR'AN An-Nuur 3*. Semarang: PT. Pustaka Rizki Putra.

Anton, Howard. 1998. *Aljabar Linier Elementer.* Jakarta: Erlangga.

Assuari, Sofjan. 1983. *Aljabar Linier Dasar Ekonometri.* Jakarta: CV Rajawali

Bahreisy, H. Salim dan H. Said Bahreisy. 1987. *Terjemah Singkat Tafsir Ibnu Katsir I.* Surabaya: PT Bina Ilmu.

Cullen, Charles G. 1993. *Aljarab Linier dengan Penerapannya.* Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Goffar, M. Abdul. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir jilid I.* jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Golshani, Mahdi. 2003. *Filsafat Ilmu Sains Menurut Al-Quran.* Bandung: Mizan.

Imani, Allamah Kamal Faqih. 2006. *Tafsir Nurul Quran.* Jakarta: Al-Huda.

Mardalis. 2006. *Metode Penelitian Suatu Pendekatan Proposal.* Jkarta: CV Rajawali.

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Dasar-dasar Teori Bilangan.* Malang: IKIP Malang.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Quran Sebagai Sumber Ilmu Pengetahuan.*Jakarta: Rineka Cipta.

Rasyad, Rasdihan. 2003. *Aljabar Linier Untuk Umum.* Jakarta: Grasindo.

Roziana, Dewi Farida. 2008. *Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Divusi Konveksi*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 1 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 7 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 8 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 13 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Subagio, suharti. 1986. *Matriks.* Jakarta: Karunika Jakarta Utama.

Sukirman. 2003. Pengantar Teori Bilangan. Yogyakarta: Hanggar Kreator.

Suryadi. P. A. 1979. *Aljabar Linier dan Ilmu Ukur Analitik.* Bandung: Djambatan.

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345

Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Kurnia Era Wati
NIM	: 04510005
Fakultas/ jurusan	: Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi	: Menyelesaikan Sistem Kongruensi Linier
Pembimbing I	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II	: Achmad Nashichuddin, MA.

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	2 Februari 2009	Konsultasi Masalah	1.	
2	16 Februari 2009	Konsultasi BAB III		2.
3	24 Februari 2009	Revisi BAB III	3.	
4	5 Maret 2009	Revisi BAB III		4.
5	11 Maret 2009	Konsultasi keagamaan	5.	

6	23 Maret 2009	Konsultasi BAB I dan II		6.
7	28 Maret 2009	Revisi BAB II dan III	7.	
8	28 Maret 2009	Revisi Keagamaan		8.
9	30 Maret 2009	Konsultasi BAB I, II, III	9.	
10	30 Maret 2009	Revisi Keagamaan		10.
11	31 Maret 2009	Revisi BAB I, II, III	11.	
12	1 April 2009	Konsultasi Keseluruhan		12.
13	3 April 2009	ACC Keseluruhan	13.	

Malang, 11 April 2009

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

<u>Sri Harini, M.Si</u>

NIP. 150 318 321