

**ANALISIS DINAMIK MODEL DISKRIT PADA VIBRASI
DAWAI DIKENAI MASSA MENGGELINDING DI
SEPANJANG DAWAI**

SKRIPSI

**OLEH
HANA INTAN WAHYU WIJAYANTI
200601110025**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

**ANALISIS DINAMIK MODEL DISKRIT PADA VIBRASI
DAWAI DIKENAI MASSA MENGGELINDING DI
SEPANJANG DAWAI**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)**

**Oleh
Hana Intan Wahyu Wijayanti
NIM. 200601110025**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

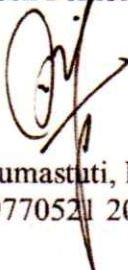
**ANALISIS DINAMIK MODEL DISKRIT PADA VIBRASI
DAWAI DIKENAI MASSA MENGGELINDING DI
SEPANJANG DAWAI**

SKRIPSI

**Oleh
Hana Intan Wahyu Wijayanti
NIM. 200601110025**

**Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Malang, 03 Juni 2024**

Dosen Pembimbing I


**Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.
NIP. 19770521 200501 2 004**

Dosen Pembimbing II


**Ach. Nashichuddin, M.A.
NIP. 19730705 200003 1 002**

**Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika**


**Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005**

**ANALISIS DINAMIK MODEL DISKRIT PADA VIBRASI
DAWAI DIKENAI MASSA MENGGELINDING DI
SEPANJANG DAWAI**

SKRIPSI

Oleh
Hana Intan Wahyu Wijayanti
NIM. 200601110025

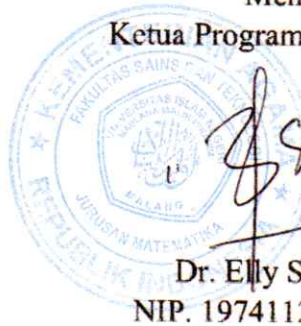
Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat.)

Tanggal 10 Juni 2024

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si.
Anggota Penguji 1 : Juhari, M.Si.
Anggota Penguji 2 : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si.
Anggota Penguji 3 : Ach. Nashichuddin, M.A.

.....
.....
.....
.....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Hana Intan Wahyu Wijayanti
NIM : 200601110025
Program Studi : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Diskrit Pada Vibrasi Dawai

Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri. Bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Juni 2024

Yang membuat pernyataan,



Hana Intan Wahyu Wijayanti
NIM. 200601110025

MOTO

”Nikmati Proses Tanpa Protes dan Tetap Menjadi Versi Terbaik”

(Hana Intan)

PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim, dengan mengucapkan syukur kepada Allah Swt. Skripsi ini penulis persembahkan untuk Ayahanda Karyanto yang selalu mendukung dan mendoakakan setiap langkah dan keputusan yang penulis ambil. Ibunda Siti Mujiati yang tidak henti-hentinya mendoakan semua anaknya. Kakak tercinta Angelita Nungki Wahyuning yang selalu support dan mendampingi setiap langkah penulis. Abah dan ibu sebagai guru yang senantiasa membimbing penulis. Teman-teman yang selalu membantu dalam menyelesaikan kesulitan penulis. Dosen-dosen yang telah membantu menyelesaikan skripsi penulis. Serta diri saya sendiri yang mau diajak untuk memaksakan diri dan bersusah payah dalam menyelesaikan segala tantangan dan tekanan selama menempuh pendidikan strata satu.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Dinamik Model Diskrit Pada Vibrasi Dawai Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai” ini dengan baik. Sholawat serta salam tetap tercurah limpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membawa kita dari zaman kegelapan hingga menuju zaman yang terang benderang yakni agama Islam serta yang selalu kita nantikan syafaatnya di akhirat kelak.

Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk menyelesaikan studi Strata-1 (S-1) Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Atas terselesaikannya penyusunan skripsi ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, arahan, dukungan, nasihat, do'a, dan pengalaman dalam penyusunan skripsi ini. Terima kasih telah rela meluangkan waktu di sela-sela kesibukan Ibu.
5. Ach. Nashichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, dukungan, nasihat, do'a, dan pengalaman dalam penyusunan skripsi ini. Terima kasih telah rela meluangkan waktu di sela-sela kesibukan Bapak.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan bimbingan, motivasi dan ilmunya selama perkuliahan.

7. Bapak Karyanto, Ibu Siti Mujiati dan Kakak tercinta Angelita Nungki Wahyuning yang selalu senantiasa memberikan waktu, tenaga, dukungan serta do'a yang tiada putus selama perkuliahan. Terima kasih sudah menjadi alasan untuk tetap berjuang menyelesaikan tugas akhir.
8. Keluarga kontrakan cerah serta sahabat-sahabat yang tidak bisa disebutkan satu persatu, terima kasih telah menemani perjalanan selama perkuliahan ini. Terima kasih juga atas segala do'a, motivasi, dukungan, pengorbanan, dan waktu yang kita lalui bersama.
9. Semua orang yang pernah menjadi bagian hidup, terima kasih sudah memberikan banyak pelajaran hidup, motivasi untuk terus melangkah dan terus bertahan.
10. Segenap *civitas* akademika program studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim serta semua pihak yang telah membantu dalam proses penyelesaian skripsi ini baik secara langsung maupun tidak.

Penulis menyadari bahwa terdapat banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Maka dari itu, penulis berharap diberikan kritik serta saran yang membangun untuk menjadi bahan perbaikan bagi penulis. Penulis juga berharap semoga penelitian ini dapat memberi manfaat kepada penulis maupun pembaca. Mohon maaf atas segala kekurangan pada penulisan skripsi ini.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 10 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN.....	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTO	vi
PERSEMBAHAN.....	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR.....	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
DAFTAR LAMPIRAN	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
مستخلص البحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Manfaat Penelitian.....	5
1.5 Batasan Masalah	5
BAB II KAJIAN PUSTAKA.....	7
2.1 Persamaan Diferensial	7
2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa.....	7
2.1.2 Persamaan Diferensial Linier dan Non-Linier	8
2.2 Sistem Dinamik Diskrit	8
2.3 Metode Beda Hingga Standar.....	9
2.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	10
2.4.1 Linierisasi.....	11
2.4.2 Nilai Eigen	12
2.5 Model Matematika Vibrasi Dawai	13
2.6 Analisis Perilaku Model Kontinu Vibrasi Dawai	24
2.7 Janji Kemudahan dari Allah	25
BAB III METODE PENELITIAN	28
3.1 Jenis Penelitian	28
3.2 Tahap Penelitian	29
BAB IV PEMBAHASAN.....	31
4.1 Analisis Dinamik Model Diskrit $y(t)$ dan $\theta(t)$	31
4.1.1 Diskritisasi Model	31
4.1.2 Titik Keseimbangan Model Diskrit.....	33
4.1.3 Kestabilan Titik Keseimbangan	35
4.1.4 Potret Fase.....	39
4.2 Simulasi Dinamik Model Diskrit.....	42
4.2.1 Simulasi Lendutan dan Sudut Lendutan	42

4.2.2 Perbandingan $y_1(t)$ dengan $\theta_1(t)$ dan $y_2(t)$ dengan $\theta_2(t)$..	46
4.3 Perbandingan Hasil Simulasi Model Diskrit dan Kontinu	46
4.4 Janji Kemudahan Allah dalam Diskritisasi	54
BAB V PENUTUP	56
5.1 Kesimpulan.....	56
5.2 Saran	57
DAFTAR PUSTAKA	59
LAMPIRAN	61
RIWAYAT HIDUP	66

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Daftar Nilai Parameter (Pratiwi, 2022)	14
Tabel 4.1 Perbandingan Hasil Simulasi Numerik Model Diskrit dan Kontinu y_1	48
Tabel 4.2 Perbandingan Hasil Simulasi Numerik Model Diskrit dan Kontinu y_2	49
Tabel 4.3 Perbandingan Hasil Simulasi Numerik Model Diskrit dan Kontinu θ_1	51
Tabel 4.4 Perbandingan Hasil Simulasi Numerik Model Diskrit dan Kontinu θ_2	52

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Ilustrasi Vibrasi Dawai.....	14
Gambar 2.2	Grafik $y(t)$ di $t \in [0,120]$	18
Gambar 2.3	Grafik $\theta(t)$ di $t \in [0,120]$	18
Gambar 2.4	Grafik Solusi Analitik $y(t)$ untuk $\delta^2 - 4a > 0$	20
Gambar 2.5	Grafik Solusi Analitik $y(t)$ untuk $\delta^2 - 4a < 0$	20
Gambar 2.6	Grafik Solusi Analitik $\theta(t)$ untuk $\delta^2 - 4c > 0$	22
Gambar 2.7	Grafik Solusi Analitik $\theta(t)$ untuk $\delta^2 - 4c < 0$	22
Gambar 2.8	Potret Fase dengan $t = -300 - 300$	23
Gambar 2.9	Potret Fase dengan $t = 0 - 10$	23
Gambar 4.1	Potret Fase Perubahan Kecepatan Lendutan terhadap Waktu.....	40
Gambar 4.2	Potret Fase Perubahan Kecepatan Sudut Lendutan terhadap Waktu	41
Gambar 4.3	Grafik Sistem Persamaan 4.3 Saat $t \in [0,10]$	43
Gambar 4.4	Grafik Sistem Persamaan 4.3 Saat $t \in [0,120]$	43
Gambar 4.5	Grafik Sistem Persamaan 4.4 Saat $t \in [0,10]$	44
Gambar 4.6	Grafik Sistem Persamaan 4.4 Saat $t \in [0,120]$	45
Gambar 4.7	Perbandingan $y_1(t)$ dengan $\theta_1(t)$ dan $y_2(t)$ dengan $\theta_2(t)$ pada Sistem Persamaan 4.3 dan 4.4 Saat $t \in [0,10]$	46
Gambar 4.8	Perbandingan y_1 dan y_2 Model Kontinu dan Diskrit pada Sistem Persamaan 4.1 dan 4.3, dengan $y_1(0) = 0; y_2(0) = 0,5$	47
Gambar 4.9	Grafik Nilai Galat y_1 dan y_2 Model Diskrit dan Model Kontinu.....	50
Gambar 4.10	Perbandingan θ_1 dan θ_2 Model Kontinu dan Diskrit pada Sistem Persamaan 4.2 dan 4.4 dengan $\theta_1(0) = 0; \theta_2(0) = 1,2$	51
Gambar 4.11	Grafik Nilai Galat θ_1 dan θ_2 Model Diskrit dan Model Kontinu.....	54

DAFTAR SIMBOL

$y(t)$	: Lendutan Dawai Bergantung Pada t
$\theta(t)$	: Sudut Lendutan Dawai Bergantung Pada t
$\frac{dy(t)}{dt}$ atau $\dot{y}$	: Kecepatan Vibrasi Dawai Bergantung Pada Variabel t
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ atau $\ddot{y}$	: Percepatan Vibrasi Dawai Bergantung Pada Variabel t
$\frac{d\theta(t)}{dt}$ atau $\dot{\theta}$	: Kecepatan Sudut Dawai Bergantung Pada Variabel t
$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$ atau $\ddot{\theta}$	: Percepatan Sudut Dawai Bergantung Pada Variabel t
t	: Variabel Bebas (Waktu)
A	: Luas Penampang Dawai
E	: Modulus Elastisitas (Tingkat Kelenturan Dawai)
k_p	: Konstanta Tingkat Kepegasan Vibrasi Dawai
m_d	: Massa Dawai
m_b	: Massa Benda
μ_k	: Koefisien Gaya Gesek Dawai
g	: Gaya Gravitasi
F_r	: Energi Potensial Dorong
δ	: Suku Redaman <i>Viskos</i>
η	: Koefisien <i>Viskositas</i> (Koefisien Kekentalan Fluida/Udara)
v	: Kecepatan Benda Menggelinding
r	: Jari-Jari Benda
l	: Panjang Dawai
λ	: Pemisalan dari $\frac{4k_p}{m_d}$
α	: Pemisalan dari $\frac{\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu_k m_b g + \frac{1}{2}k_p \eta v}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2}$
β	: Pemisalan dari $\frac{\frac{1}{2}m_b g}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2}$
γ	: Pemisalan dari $\frac{\frac{1}{2}k_p l^2}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2}$

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Program Maple untuk Analisis Dinamik Persamaan Lendutan di Sekitar Titik Keseimbangan.....	61
Lampiran 2	Program Maple untuk Analisis Dinamik Persamaan Sudut Lendutan di Sekitar Titik Keseimbangan.....	62
Lampiran 3	Tabel Perbandingan y_1 dengan y_2 dan θ_1 dengan θ_2 Model Vibrasi Dawai.....	63
Lampiran 4	Grafik Sistem Persamaan 4.1 dan 4.2.....	65

ABSTRAK

Wijayanti, Hana Intan Wahyu. 2024. **Analisis Dinamik Model Diskrit Pada Vibrasi Dawai Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M. Pd., M. Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: Analisis Dinamik, Model Diskrit, Vibrasi Dawai, Massa Menggelinding, Lendutan Dawai, Sudut Lendutan Dawai.

Penelitian ini menganalisis kestabilan perilaku dari model diskrit vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai. Analisis perilaku pada penelitian ini ditujukan untuk memvalidasi model yang telah dibangun. Model kontinu ditransformasi dengan kaidah diskritisasi setiap variabelnya sehingga membentuk model persamaan diskrit untuk lendutan dan sudut lendutan. Langkah-langkah analisis meliputi diskritisasi model, mencari titik tetap, menganalisis kestabilan, dan simulasi. Pada masing-masing sistem dinamik diperoleh nilai eigen λ_i berbentuk bilangan kompleks, dengan suku realnya negatif, sebagai indikasi stabil (sink). Simulasi untuk beberapa percobaan untuk lendutan dawai (y_1), kecepatan lendutan (y_2), sudut lendutan (θ_1), dan kecepatan sudut lendutan (θ_2) menunjukkan indikasi konvergensi pada iterasi waktu $t = 10$ detik, dengan nilai $y_1 = 0.0678$, $y_2 = 0.0196$, $\theta_1 = 0.0112$ dan $\theta_2 = 0.7459$. Selanjutnya, penelitian ini menginvestigasi pula selisih nilai lendutan, dan kecepatan lendutan dari bentuk diskrit dan kontinunya secara berturut-turut sebesar 0.011, dan 0.0147. Sementara itu selisih nilai diskrit dan kontinu untuk sudut lendutan kecepatan sudut lendutan secara berturut-turut sebesar 0.0047, dan 0.0312. Berdasarkan hal tersebut, dapat disimpulkan bahwa kondisi diskrit dan kontinu berada pada persekitaran nilai yang sama. Dapat disimpulkan bahwa model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai dapat dipertanggungjawabkan validitasnya. Untuk penelitian selanjutnya, dapat dilakukan analisis eksplorasi nilai parameter real yang relevan dengan model.

ABSTRACT

Wijayanti, Hana Intan Wahyu. 2024. **Dynamic Analysis of Discrete Model on String Vibration Subjected to Rolling Mass along the String**. Thesis. Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, M. Pd., M. Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: Dynamic Analysis, Discrete Model, String Vibration, Rolling Mass, Deflection of String, Deflection Angle of String.

This study analyzes the behavioral stability of a discrete model of string vibration experiencing a rolling mass along the string. The behavioral analysis in this study is intended to validate the model that has been built. The continuous model is transformed with the discretization rule of each variable to form a discrete equation model for deflection and deflection angle. The analysis steps include model discretization, fixed point search, stability analysis, and simulation. In each dynamic system, the eigenvalue λ_i is obtained as a complex number with negative real terms as an indication of stability (sink). Simulations for several experiments for string deflection (y_1), deflection velocity (y_2), deflection angle (θ_1), and deflection angle velocity (θ_2) showed indications of converging at iteration time $t = 10$ seconds, with values of $y_1 = 0.0678$, $y_2 = 0.0196$, $\theta_1 = 0.0112$, and $\theta_2 = 0.7459$. Furthermore, this study also investigated the difference in deflection value, and deflection velocity of the discrete and continuous forms by 0.011, and 0.0147, respectively. Meanwhile, the difference between the discrete and continuous values for the deflection angle of the deflection angular velocity was 0.0047, and 0.0312, respectively. Based on this, it can be concluded that the discrete and continuous conditions have almost the same value. It can be concluded that the vibration model of the string undergoing mass rolling along the string can be accounted for its validity. For further research, an exploratory analysis of the real parameter values relevant to the model can be conducted.

مستخلص البحث

وبجايانتي، هانا إنتان وحي. ٢٠٢٤. تحليل الديناميكي للنموذج المنفصلة لاهتزازية الخيط الحاطع لكتلة تتدحرج على طول الخيط. بحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف: (١) آري كوسوماستوتي، الماجستير، المشرف (٢) أحمد ناصح الدين، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: تحليل الديناميكي، النموذج المنفصلة، اهتزاز الوتر، الكتلة المتدحرج، انحراف الوتر، زاوية انحراف الوتر.

تحليل هذا البحث الثباتي السلوكي لنموذج منفصلة لاهتزازية الخيط يتعرض لكتلة تتدحرج على طول الخيط. يهدف تحليل السلوكي في هذا البحث إلى التحقق من صحة النموذج الذي تم بناؤه. يتم تحويل نموذج المتصل باستخدام قاعدة التجزئة لكل متغير لتكوين نموذج معادلة منفصلة للانحراف وزاوية الانحراف. وتتضمن خطوات التحليل تفصيل النموذج، وإيجاد النقاط الثابتة، وتحلل الثبات، والمحاكاة. في كل نظام الديناميكي. يتم الحصول على القيمة الأصلية λ_{ib} في شكل عدد المركب، مع إشادة سالبة، كمؤشر على الاستقرار (الحوض). تظهر المحاكاة لعدة تجارب على معدل الانحراف (y_1) ، وسرعة الانحراف (y_2) ، وزاوية الانحراف (θ_1) ، وسرعة زاوية الانحراف (θ_2) مؤشراً على التقارب عند زمن التكرار $t = 10$ ثوانٍ، بقيم $y_1 = 0.0678$ ، و $y_2 = 0.0196$ ، و $\theta_1 = 0.0112$ ، و $\theta_2 = 0.7459$. علاوة على ذلك، يتحقق هذا البحث في إسترداد قيمة الانحراف من الشكلين المنفصل والمستمر على التوالي بمقدار 0.011 و 0.0147. والوقت نفسه، الفرق بين قيم الاهتزازية لزاوية العمود لسرعة زاوية العمود بمقدار 0.0047 و 0.0312 على التوالي. وبناء على ذلك، استنتاج أن الشرطين المنفصلة والمتصلة في نفس القيمة. ويستنتج أن نموذج الاهتزاز الخيط الذي يتعرض الحاضع للكتلة تتدحرج على طول السحابة يمكن أن يستنتج صحته. إجراء من يد البحث يمكن إجراء تحليلات استكشافية على قيم البارامترات الحقيقية ذات الصلة بالنموذج.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada penelitian sebelumnya dilakukan oleh (Janah, 2022) dengan memperhatikan penelitian (McKenna, 1999) mengenai terjadinya gelombang pada dawai ketika dikenai massa di atasnya di sepanjang dawai. Untuk asumsi dan variabel pada lendutan dawai $y(t)$ dan sudut lendutan $\theta(t)$ kedua model ini memiliki kesamaan. Asumsi kedua adalah tinggi dawai sama pada pengait kedua ujungnya. Energi yang terlibat pada pemodelan dawai yaitu energi kinetik (Ek) dan energi potensial (Ep). Energi yang terlibat pada benda yaitu energi potensi dorong (F_r), energi potensial berat (Ep_{wb}), energi potensial pegas (Ep_{pb}), energi kinetik translasi (Ek_{Tb}) dan energi kinetik rotasi (Ek_{Rb}). Sedangkan energi yang terlibat pada dawai yaitu energi kinetik translasi dawai (Ek_{Td}), energi kinetik rotasi dawai (Ek_{Rd}), energi potensial berat dawai (Ep_{wd}) dan energi potensial pegas dawai (Ep_{pd}). Ada beberapa parameter dalam penelitian ini yaitu (m_b) merupakan massa benda, (m_d) merupakan massa dawai, (l) adalah panjang dawai dan (E) modulus elastisitas dawai. Hal ini menghasilkan persamaan diferensial biasa orde dua untuk $y(t)$ dan $\theta(t)$ sebagai model matematika.

Hasil konstruksi model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai pada penelitian (Janah, 2022) memiliki kendala pada profil $y(t)$ dan $\theta(t)$ yang tidak stabil. Oleh karena itu, penelitian (McKenna, 1999) dilibatkan pada penelitian (Pratiwi, 2022) untuk menguji ulang hasilnya. Pada modifikasi energi potensial tegangan dawai Ep_{Td} diabaikan dengan asumsi bahwa energi

memiliki pengaruh kecil pada $y(t)$ dan $\theta(t)$. Selain itu konstruksi ulang pada model vibrasi dawai melibatkan suku redaman viskos kecil $\delta\dot{\theta}$ dan $\delta\dot{y}$. Energi benda dan dawai diperhitungkan dalam model ter-revisi. Kemudian, pada penelitian (Millenia, 2022) diperoleh hasil analitik dengan menunjukkan pergerakan dua model yang terdiri dari lendutan dawai $y(t)$ dan sudut lendutan dawai $\theta(t)$ tetap stabil terhadap waktu t .

Fokus pada penelitian ini adalah kajian analisis dinamik diskrit model matematika penelitian (Janah, 2022) yang telah direvisi pada (Pratiwi, 2022). Model matematika vibrasi dawai dikenai massa menggeling di representasikan secara sistematis sebagai persamaan diferensial biasa orde dua non-linier. Metode beda hingga standar kemudian akan digunakan untuk mendiskritisasi model ini. Penelitian ini menggunakan metode beda hingga *Euler*. Dalam model ini melibatkan variabel bebas dan terikat. Waktu (t) merupakan variabel bebas dalam penelitian ini karena menentukan bagaimana dawai bergetar. Sedangkan simpangan (y) dan sudut (θ) yang dihasilkan dari massa yang bergerak di sepanjang dawai merupakan variabel terikat. Solusi diskrit dari fungsi kontinu dalam bentuk titik-titik dalam interval akan diperoleh melalui penggunaan metode numerik. Selain itu, dengan menggunakan simulasi solusi diskrit kita dapat mengetahui kestabilan dawai.

Menurut (Hussain dkk., 2002) untuk membuat data diskrit yang lebih mudah digunakan, dipahami dan dijelaskan, maka sifat-sifat kontinu di kuantifikasi melalui proses diskritisasi yang berguna untuk mereduksi dan menyederhanakan data. Model diskrit akan lebih mudah diimplementasikan karena data yang didapat lebih sederhana dan konkret.

Mendapatkan Kemudahan adalah janji Allah kepada hambanya-Nya yang bertaqwa dan berusaha menggapainya. Allah Swt berfirman dalam surat Al-Lail ayat 5-7 (Kementrian Agama RI, 2022) yaitu:

فَأَمَّا مَنْ آتَىٰ وَآتَىٰ وَصَدَّقَ بِالْحُسْنَىٰ فَسَنُيَسِّرُهُ لِلْيُسْرَىٰ

“Maka barang siapa yang memberikan (hartanya di jalan Allah) dan bertakwa, dan membenarkan (adanya pahala) yang terbaik (surga), maka akan kami mudahkan baginya jalan menuju kemudahan (kebahagiaan)” [Q.S. Al-Lail ayat 5-7].

Dalam tafsir Al-Muyassar (Haidar dkk., 2016) disebutkan bahwa jika kita memberikan (sebagian) harta untuk bertakwa kepada Allah dan percaya bahwa akan ada hisab maupun balasan kebaikan terhadap amalannya, maka akan Allah beri petunjuk kepada kabajikan dan kebaikan serta akan dipermudah urusan-urusan kita. Ayat tersebut menjelaskan jika kita memberikan waktu, tenaga, fikiran serta harta untuk berada di jalan kebaikan maka niscaya Allah akan mudahkan urusan kita.

Berdasarkan ayat di atas, penelitian ini berupaya mengembangkan ilmu yang bertujuan untuk memudahkan peneliti selanjutnya dalam mengembangkan ilmu. Selain itu, hubungan penelitian ini dengan surah Al-Lail ayat 5-7 terletak pada kata “*yusra*” yang berarti mudah. Seperti halnya dengan kegunaan dari diskritisasi yaitu membuat data lebih mudah dipahami dengan mereduksi dan menyederhanakannya.

Berdasarkan uraian di atas penelitian ini dilakukan dengan mengubah model vibrasi dawai dikenai massa menggelinding dalam bentuk diskrit untuk mendapatkan simulasi model diskritnya serta membandingkan hasil simulasi model diskrit dan kontinu. Penelitian ini mengangkat judul “*Analisis Dinamik Model Diskrit pada Vibrasi Dawai Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah disebutkan sebelumnya, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana analisis dinamik model diskrit pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai?
2. Bagaimana simulasi dinamik model diskrit pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai?
3. Bagaimana perbandingan (selisih nilai) $y_1(t), y_2(t), \theta_1(t)$, dan $\theta_2(t)$ pada kondisi diskrit dan kontinu untuk vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disebutkan sebelumnya, maka tujuan penelitian dalam penelitian ini adalah:

1. Mengetahui hasil analisis dinamik model diskrit pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai.
2. Mengetahui hasil simulasi dinamik model diskrit pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai.
3. Mengetahui hasil perbandingan (selisih nilai) $y_1(t), y_2(t), \theta_1(t)$, dan $\theta_2(t)$ pada kondisi diskrit dan kontinu untuk model vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian ini adalah:

1. Dengan mengetahui perilaku model maka diperoleh interpretasi tentang bagaimana fenomena itu terjadi untuk keperluan regulasi selanjutnya.
2. Dengan mengetahui hasil simulasi diskrit, maka dapat dibandingkan perubahan perilaku model diskrit terhadap model kontinu untuk keperluan revisi model diskrit yang diperlukan sehingga perilaku diskrit dapat mendekati kontinunya.
3. Dengan mengetahui hasil perbandingan (selisih nilai) $y_1(t), y_2(t), \theta_1(t)$, dan $\theta_2(t)$ pada model diskrit dan kontinunya, maka dapat dipertanggungjawabkan keabsahan perilaku model pada model pada kondisi diskrit dan kontinunya sebagai salah satu acuan dalam menyimpulkan konstektual atau tidaknya model yang dibangun.

1.5 Batasan Masalah

Agar penelitian ini tidak menyimpang dari tujuan yang diinginkan, maka perlu adanya batasan masalah sebagai berikut:

1. Model matematika yang digunakan pada penelitian ini menggunakan versi hasil reduksi persamaan diferensial orde dua pada (Pratiwi, 2022) dalam bentuk sistem persamaan diferensial orde satu sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\delta y_2 - \frac{4k_p}{m_d} y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \end{cases}$$

dimana $\dot{y}_1 = y_2$ merupakan lendutan dawai dan $\dot{y}_2 = -\delta y_2 - \frac{4k_p}{m_d} y_1 +$

$\frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$ merupakan laju lendutan dawai.

dan

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\delta\theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1 \end{cases}$$

dengan,

$$\alpha = \frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu_k m_b g + \frac{1}{2}k_p \eta v\right)}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}; \quad \beta = \frac{l m_b g}{2 \left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}; \quad \gamma = \frac{2 k_p l^2}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$$

dimana, $\dot{\theta}_1 = \theta_2$ merupakan sudut lendutan dawai dan $\dot{\theta}_2 = -\delta\theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1$ merupakan laju sudut lendutan dawai.

2. Parameter yang terlibat pada model (Pratiwi, 2022) dan merujuk pada penelitian (McKenna, 1999).

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial yang hanya bergantung pada satu variabel bebas disebut persamaan diferensial biasa (PDB) (Maya, 2014). Berikut merupakan persamaan diferensial biasa yang memuat suatu variabel tak bebas y dan variabel bebas t dapat dinotasikan dengan:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = \dot{y} \quad (2.1)$$

$$\frac{ds}{dx} = s'(x) = s' \quad (2.2)$$

Orde dalam persamaan diferensial biasa merujuk pada tingkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam persamaan. Secara umum, persamaan diferensial dapat dikelompokkan sebagai orde pertama, orde kedua, orde ketiga, dan seterusnya, tergantung pada derajat tertinggi dari turunan yang terlibat. Orde tertinggi dari turunan dalam setiap persamaan diferensial menentukan orde dari persamaan tersebut. Solusi persamaan diferensial orde tinggi melibatkan fungsi dan turunan dari fungsi tersebut. Suatu persamaan yang memuat turunan ke- n dari fungsi $y(x)$ yang tidak diketahui disebut persamaan diferensial biasa orde ke- n . Turunan tertinggi dalam persamaan tersebut direpresentasikan sebagai $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$ (Maya, 2014). Berikut ini bentuk persamaan diferensial biasa orde dua dengan koefisien konstan:

$$\ddot{y} = -\delta \dot{y} - \frac{4 k_p}{m_d} y + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - Fr \quad (2.3)$$

2.1.2 Persamaan Diferensial Linier dan Non-Linier

Sistem persamaan diferensial dapat dinyatakan sebagai linier maupun non-linier bergantung pada sifat hubungan antara variabel dan turunan dalam persamaan tersebut. Pada persamaan diferensial linier variabel dan turunannya hanya dan hanya jika paling tinggi berderajat satu dan tidak ada variabel terikat yang dapat dikalikan dengan variabel terikat lain, turunan dengan turunan, atau variabel terikat dengan suatu turunan. Bentuk persamaan diferensial linier orde- n sebagai berikut:

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \dots + a_2(t)\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = f(t) \quad (2.4)$$

Sedangkan, persamaan diferensial non-linier merupakan persamaan diferensial yang memuat perkalian antar variabel tak bebas dan turunannya serta memuat fungsi non linier seperti fungsi trigonometri, fungsi eksponensial, dan fungsi algoritmik. Sistem persamaan nonlinier dapat dijadikan linier dengan melakukan linierisasi. Contoh persamaan diferensial non-linier orde dua sebagai berikut:

$$\ddot{\theta} = -\delta \dot{\theta} - \alpha \sin \theta - \beta \cos \theta - \gamma \cos \theta \sin \theta \quad (2.5)$$

2.2 Sistem Dinamik Diskrit

Sistem dinamik merujuk pada suatu konsep dalam ilmu matematika dan ilmu komputasi yang digunakan untuk memodelkan perubahan suatu keadaan atau nilai-nilai variabel suatu sistem seiring waktu. Sistem dinamik terbagi menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskrit (SDD) dan sistem dinamik kontinu (SDK). Sistem dinamik dapat bersifat kontinu atau diskrit, tergantung pada apakah perubahan terjadi secara

kontinu atau pada titik-titik waktu tertentu. Sistem dinamik digunakan untuk menjelaskan, membuat model, dan mensimulasikan suatu sistem yang mengalami perubahan seiring waktu dan dalam kondisi berkala (Sinaga dkk., 2021). Sistem dinamik diskrit dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{cases} x_{m+1} = f(x_m, y_m) \\ y_{m+1} = g(x_m, y_m) \end{cases} \quad (2.6)$$

dengan f dan g merupakan fungsi pembangkit sistem (Elaydi, 2005).

Bentuk sistem dinamik diskrit sering dikaitkan dengan bentuk sistem persamaan beda linier yang terdiri dari suku ke- k sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1(m+1) &= a_{11}x_1(m) + a_{12}x_2(m) + \cdots + a_{1k}x_k(m) \\ x_2(m+1) &= a_{21}x_1(m) + a_{22}x_2(m) + \cdots + a_{2k}x_k(m) \\ &\vdots \\ x_k(m+1) &= a_{k1}x_1(m) + a_{k2}x_2(m) + \cdots + a_{kk}x_k(m) \end{aligned}$$

2.3 Metode Beda Hingga Standar

Salah satu teknik numerik untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial dengan mendekati turunan-turunan menggunakan perbedaan nilai pada titik-titik diskrit dalam domain waktu atau ruang adalah metode beda hingga. Ide dasar di balik metode beda hingga adalah menggunakan pendekatan beda hingga untuk mendiskritisasi domain dari solusi persamaan diferensial sigantikan. (Lapidus, 1999). Terdapat variasi metode beda hingga yang lebih canggih untuk meningkatkan akurasi, seperti metode *Euler* dan metode *Runge-Kutta*.

Dalam simulasi model matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding, metode yang digunakan adalah metode *Euler*. Metode *Euler* adalah

salah satu bentuk sederhana dari metode beda hingga yang dapat diterapkan pada persamaan diferensial biasa. Ini adalah metode umum yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan waktu diskrit. Misalnya, jika diberikan sebuah persamaan diferensial:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 < t$$

dengan menggunakan persamaan

$$\dot{x}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Sehingga untuk turunan x terhadap t , adalah

$$f(x(t)) = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

atau dapat ditulis

$$x(t+h) = x(t) + hf(x(t)) \quad (2.7)$$

Untuk $t = t_0 + m \cdot h$, maka

$$x((t_0 + m \cdot h) + h) = x(t_0 + m \cdot h) + hf(x(t_0 + m \cdot h))$$

$$x(t_0 + (m+1)h) = x(t_0 + m \cdot h) + hf(x(t_0 + m \cdot h))$$

dan untuk $x(t_0 + m \cdot h) = x(t)$, sehingga

$$x(m+1) = x(t) + hf(x(t)) \quad (2.8)$$

2.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Analisis kestabilan digunakan untuk mengevaluasi apakah titik kesetimbangan dari suatu sistem dinamik, seperti sistem persamaan diferensial, bersifat stabil atau tidak stabil. Titik kesetimbangan adalah nilai-nilai variabel di mana sistem tidak mengalami perubahan seiring waktu. Kestabilan titik kesetimbangan mengacu pada sifat sistem di sekitar titik kesetimbangan tersebut

dan sejauh mana sistem cenderung untuk kembali atau menjauh dari titik tersebut setelah mengalami gangguan kecil. Ini seringkali menjadi fokus analisis dalam memahami perilaku sistem dinamik. Dalam konteks sistem dinamik, kestabilan titik kesetimbangan (*equilibrium point*) merupakan salah satu konsep penting. Titik kesetimbangan adalah nilai-nilai variabel di mana sistem tidak mengalami perubahan seiring waktu, atau di mana turunan sistem terhadap waktu menjadi nol.

2.4.1 Linierisasi

Linierisasi adalah proses untuk mengaproksimasi fungsi nonlinear atau sistem nonlinear dengan fungsi atau sistem linear (Boyce & DiPrima, 2009). Perlu dilakukan linearisasi dengan ekspansi deret *Taylor* di sekitar titik kesetimbangan jika ditemukan suku non-linear. Jika h dan k dalam sistem nonlinier, kita akan mencari sistem linier di sekitar titik kesetimbangan (x^*, y^*) dan menghilangkan suku nonlinier dengan cara berikut:

$$\frac{dx}{dt} = h(x^*, y^*) + \frac{dh}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{dh}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*) \quad (2.9)$$

$$\frac{dy}{dt} = k(x^*, y^*) + \frac{dk}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{dk}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*) \quad (2.10)$$

Ketika dalam kesetimbangan $h(x^*, y^*) = 0$, $k(x^*, y^*) = 0$ sehingga persamaan linier berikut dapat diperoleh:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{dh}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*) \quad (2.11)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dk}{dx}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{dk}{dy}(x^*, y^*)(y - y^*) \quad (2.12)$$

Sistem ini dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} \frac{dh}{dx} & \frac{dh}{dy} \\ \frac{dk}{dx} & \frac{dk}{dy} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Di mana M_0 pada $x = x^*, y = y^*$. Matriks M_0 disebut matriks *Jacobian* (Boyce & DiPrima, 2009).

2.4.2 Nilai Eigen

Nilai eigen (*eigenvalues*) dari suatu matriks adalah akar-akar dari persamaan karakteristik ($\det(A - \lambda I) = 0$) di mana A adalah matriks *Jacobian* pada titik kesetimbangan, λ adalah *eigenvalues* yang dicari, I adalah matriks identitas, dan $\det$ menunjukkan determinan. *Eigenvalues* sangat penting dalam analisis sistem dinamik karena memberikan informasi tentang sifat kestabilan dari titik kesetimbangan pada sistem persamaan diferensial.

Dalam konteks sistem dinamik, kita sering menggunakan matriks *Jacobian* (J) untuk mengevaluasi *eigenvalues* pada titik kesetimbangan. *Jacobian* adalah matriks turunan parsial dari persamaan diferensial sistem tersebut terhadap variabel-variabel keadaan di sekitar titik kesetimbangan.

Misalnya, jika kita memiliki sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$, dengan x sebagai vektor keadaan dan f adalah fungsi sistem, maka matriks *Jacobian* J pada suatu titik kesetimbangan x_0 diberikan oleh turunan parsial dari f terhadap x di titik tersebut. Penjelasan lebih detail mengenai kestabilan dari nilai eigen sebagai berikut:

Matriks A berukuran 2×2 yang dapat ditulis sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Nilai-nilai eigen dari matriks A diperoleh dari akar-akar persamaan karakteristik $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$. dengan $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ dan $\tau = a_{11} + a_{22}$.

Kasus I: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$

1. Jika $|\lambda_1| < 0$ dan $|\lambda_2| < 0$. maka titik kesetimbangan sistem mengalami stabilitas.
2. Jika $|\lambda_1| > 0$ dan $|\lambda_2| > 0$. maka titik kesetimbangan sistem mengalami ketidakstabilan
3. Jika $|\lambda_1| > 0$ dan $|\lambda_2| < 0$. atau Jika $|\lambda_1| < 0$ dan $|\lambda_2| > 0$ maka titik kesetimbangan sistem mengalami ketidakstabilan pelana.
4. Jika $|\lambda_{1,2}| = 1$. maka titik kesetimbangan sistem mengalami ketidakstabilan..

Kasus II: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

1. Jika $|\lambda| < 1$ maka titik kesetimbangan sistem mengalami stabilitas.
2. Jika $|\lambda| > 1$ maka titik kesetimbangan sistem mengalami ketidakstabilan.

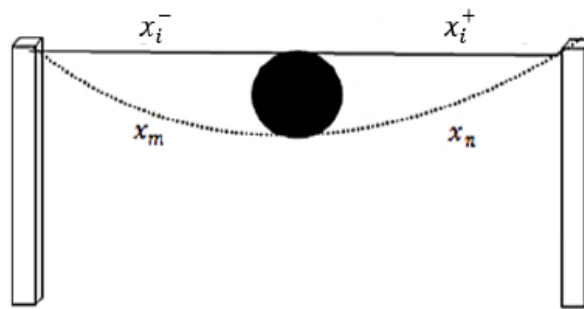
Kasus III: $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$, maka $\lambda_1 = a + ib$ atau $\lambda_2 = a - ib$ dan $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

1. Jika $|r| < 1$ maka titik kesetimbangan sistem mengalami stabilitas
2. Jika $|r| > 1$ maka titik kesetimbangan sistem mengalami ketidakstabilan..
3. Jika $|r| = 1$ maka titik kesetimbangan sistem mengalami kestabilan pusat (Elaydi, 2005).

2.5 Model Matematika Vibrasi Dawai

Untuk memodelkan suatu masalah perlu penguasaan ilmu matematika dan konsep ilmiah yang baik, oleh karena itu, model matematika dibuat agar sesuai dengan konsep ilmiah yang dinyatakan dalam bentuk persamaan matematika.

Model matematika vibrasi dawai dikenai massa menggeling disepanjang dawai yang di konstruksi oleh (Janah, 2022) memiliki kendala dengan $y(t)$ dan $\theta(t)$ yang tidak stabil, sehingga di observasi kembali dan telah direvisi dalam (Pratiwi, 2022) dengan melibatkan penelitian (McKenna, 1999).



Gambar 2.1 Ilustrasi Vibrasi Dawai

Gambar 2.1 tersebut ialah ilustrasi vibrasi dawai yang akan dianalisis, dimana analisis ini membutuhkan model matematika untuk memahami gaya atau energi yang terlibat dalam gambar tersebut.

Berikut nilai parameter yang digunakan dirujuk dari (Pratiwi, 2022):

Tabel 2.1 Daftar Nilai Parameter (Pratiwi, 2022)

No	Parameter	Definisi	Nilai dan satuan
1.	m_b	Massa Benda	10 kg
2.	m_d	Massa Dawai	250 kg
3.	δ	Frekuensi Dawai	0.1 Hz
4.	k_p	Konstanta Pegas	2.600 N/m
5.	g	Percepatan Gravitasi	10 m/s ²
6.	μ_k	Koefisien Gaya Gesek Dawai	0.57
7.	l	Panjang Dawai	180 m
8.	r	Jari-Jari Benda	0.1 m
9.	v	Kecepatan Benda	10 m/s
10.	η	Koefisien Viskositas	0.018x10 ⁻³ Ns/m ²
1.1	α	Pemisalan $\frac{-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu_k m_b g + \frac{1}{2}k_p \eta v}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2}$	0.001582
13.	β	Pemisalan $\frac{\frac{1}{2}m_b g}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2}$	0.003333
14.	γ	Pemisalan $\frac{2k_p l^2}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2}$	62.399999
15.	λ	Pemisalan $\frac{4k_p}{m_d}$	41.6

Energi yang terlibat pada pemodelan vibrasi dawai yaitu energi kinetik (Ek) dan energi potensial (Ep). Energi yang terlibat pada benda yaitu energi potensi dorong (F_r), energi potensial berat (Ep_{wb}), energi potensial pegas (Ep_{pb}), energi kinetik translasi (Ek_{Tb}) dan energi kinetik rotasi (Ek_{Rb}). Sedangkan energi yang terlibat pada dawai yaitu energi kinetik translasi (Ek_{Td}), energi kinetik rotasi dawai (Ek_{Rd}), energi potensial berat dawai (Ep_{wd}) dan energi potensial pegas dawai (Ep_{pd}).

Setelah itu, energi yang berpartisipasi pada benda yang menggelinding dan dawai tersebut perlu dilakukan substitusi pada persamaan Lagrange. Persamaan Lagrange untuk model matematika dari penelitian (Pratiwi, 2022) bisa dituliskan seperti dibawah ini

$$L = (Ek_b + Ek_d) - (EP_b + EP_d) \quad (2.14)$$

Dengan mensubstitusikan hasil dari $Ek_b + Ek_d$ dan $EP_b + EP_d$ diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L &= (Ek_{Tb} + Ek_{Rb} + Ek_{Td} + Ek_{Rd}) - (Fr + Ep_{wb} + Ep_{pb} + Ep_{wd} + Ep_{pd}) \\ &= \left((F_r \cos \theta + m_b g \sin \theta - \mu_k m_b g \cos \theta - k_p \eta v \cos \theta) s + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{5} m_b r^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_d (\dot{y})^2 + \frac{1}{6} m_d l^2 (\dot{\theta})^2 \right) - \left(F_r - m_b g y + \frac{1}{2} k_p y^2 - \right. \\ &\quad \left. m_d g y + \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 \right) \\ L &= (F_r \cos \theta + m_b g \sin \theta - \mu_k m_b g \cos \theta - k_p \eta v \cos \theta) s + \quad (2.15) \\ &\quad \frac{1}{5} m_b r^2 (\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m_d (\dot{y})^2 + \frac{1}{6} m_d l^2 (\dot{\theta})^2 - F_r + (m_b + m_d) g y - \\ &\quad \frac{1}{2} k_p y^2 - \frac{1}{2} k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))^2 \end{aligned}$$

Sebagaimana hasil dari persamaan (2.15) menunjukkan gerak dawai dikenai massa dengan gaya dorong merujuk pada persamaan *Euler-Lagrange*. Selanjutnya

persamaan (2.15) diturunkan terhadap $y, \dot{y}, \theta$ dan $\dot{\theta}$. Maka, mendapat hasil sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = (m_b + m_d) g - 2 k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m_d \ddot{y}$$

dan

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta) s - k_p l$$

$$\cos \theta ((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta))$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right) \ddot{\theta}$$

sehingga diperoleh

$$m_d \ddot{y} = (m_b + m_d) g - 2 k_p ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta))$$

dan

$$\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right) \ddot{\theta} = (-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta) s -$$

$$k_p l \cos \theta ((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta))$$

yaitu

$$\ddot{y} = -F_r - \frac{2k_p}{m_d} ((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta)) + \frac{(m_b + m_d) g}{m_d} \quad (2.16)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta) s - k l \cos \theta ((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta))}{\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right)} \quad (2.17)$$

Dengan memperhitungkan $((y - l \sin \theta) + (y + l \sin \theta)) = 2y$ dan $((y - l \sin \theta) - (y + l \sin \theta)) = -2 l \sin \theta$, ini menjadi

$$\ddot{y} = -F_r - \frac{4k_p y}{m_d} + \frac{(m_b + m_d) g}{m_d} \quad (2.18)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta) s + 2kl^2 \cos \theta \sin \theta}{\left(\frac{2}{5} m_b r^2 + \frac{1}{3} m_d l^2 \right)} \quad (2.19)$$

Kemudian perlu disederhanakan dan ditambahkan suku kecil redaman viskositas di atas y dan θ sebagai akibat interaksi dengan fluida sebesar $-\delta\dot{y}$ dan $-\delta\dot{\theta}$ (McKenna & Walter, 1990), sehingga diperoleh

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - F_r - \frac{4k_p y}{m_d} + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} \quad (2.20)$$

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{(-F_r \sin \theta + m_b g \cos \theta + \mu_k m_b g \sin \theta + k_p \eta v \sin \theta)s + 2k_p l^2 \cos \theta \sin \theta}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} \quad (2.21)$$

Selanjutnya, diasumsikan bahwa jarak benda (s) berada di antara ujung satu dengan ujung lainnya pada dawai dengan diperoleh $s = \frac{1}{2}$ (McKenna & Walter, 1990). Sehingga, persamaan (2.20) dan (2.21) bisa ditulis dan disederhakan menjadi

$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \frac{4k_p}{m_d} y + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \quad (2.22)$$

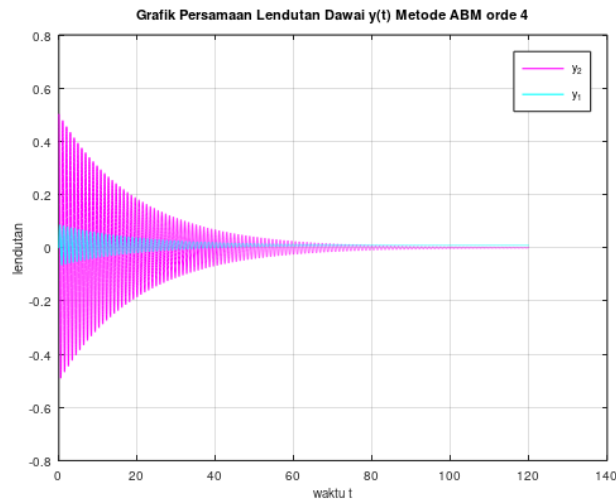
$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu_k m_b g + \frac{1}{2}k_p \eta v\right) \sin \theta + \frac{1}{2}m_b g \cos \theta + 2k_p l^2 \cos \theta \sin \theta}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2} \quad (2.23)$$

Dengan $\lambda = \frac{4k_p}{m_d}$, $\alpha = \frac{-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu_k m_b g + \frac{1}{2}k_p \eta v}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2}$, $\beta = \frac{\frac{1}{2}m_b g}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2}$, $\gamma = \frac{2k_p l^2}{\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2}$ sehingga dapat ditulis

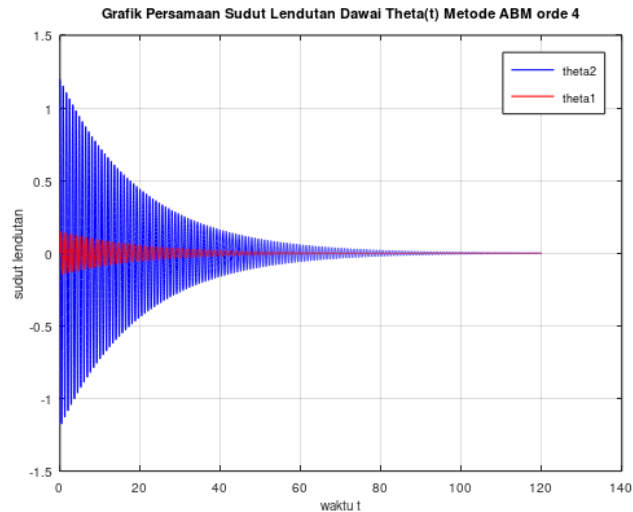
$$\ddot{y} = -\delta\dot{y} - \lambda y + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \quad (2.24)$$

$$\ddot{\theta} = -\delta\dot{\theta} - \alpha \sin \theta - \beta \cos \theta - \gamma \cos \theta \sin \theta \quad (2.25)$$

Berdasarkan uraian di atas, maka diketahui bahwa persamaan (2.24) dan (2.25) tersebut ialah persamaan diferensial biasa orde dua. Persamaan (2.24) dan (2.25) dirujuk pada penelitian (Pratiwi, 2022) setelah melalui proses reduksi memperoleh hasil numerik dengan metode ABM orde 4 dan membentuk profil grafik dapat dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Grafik $y(t)$ di $t \in [0, 120]$ parameter: $t_0 = 0$; $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = 0.5$; $h = 0.01$; $\delta = 0.1$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$; $\lambda = 41.6$ (Pratiwi, 2022)



Gambar 2.3 Grafik $\theta(t)$ di $t \in [0, 120]$ parameter: $t_0 = 0$; $\theta_1(0) = 0$; $\theta_2(0) = 1.2$; $\alpha = 0.001582$; $\beta = 0.0066667$; $\gamma = 62,399999$ (Pratiwi, 2022)

Pada gambar 2.2 menunjukkan bahwa lendutan pada plot grafik $y(t)$ stabil setelah sekitar 100 detik. Hal ini menunjukkan bahwa seiring berjalannya waktu, lendutan dawai kembali ke posisi stabilnya. Solusi numerik menunjukkan bahwa nilai maksimum $y(t)$ adalah $y_2 = 0.50282216$ dan $y_1 = 0.08663981$ sedangkan nilai minimum $y_2 = 0.00003245$ dan $y_1 = 0.08663981$ pada rentang waktu $t = [0, 120]$, serta menuju stabil pada $t = 100$. Sedangkan pada gambar 2.3

menunjukkan bahwa sudut lendutan pada grafik $\theta(t)$ mulai stabil setelah 100 detik, menunjukkan bahwa seiring waktu sudutnya kembali stabil seperti posisi semula. Solusi numerik menunjukkan bahwa nilai maksimum $\theta(t)$ adalah $\theta_2 = 1.19503142$ dan $\theta_1 = 0.15099725$ sedangkan nilai minimum $\theta_2 = 0.00000032$ dan $\theta_1 = 0.00000010$ pada rentang waktu $t \in [0, 120]$. Hal ini menunjukkan bahwa amplitude lendutan dan sudut lendutan dawai semakin mengecil seiring waktu dan stabil pada suatu titik.

Dirujuk dari (Millenia, 2022) persamaan (2.24) dan (2.25) diperoleh solusi analitik untuk $y(t)$ dan $\theta(t)$ pada tiga kondisi berbeda. Untuk $y(t)$ diperoleh solusi khusus dari tiga kasus sebagai berikut:

1. Untuk kasus $\delta^2 - 4a > 0$ diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$y(t) = -\frac{\sqrt{\delta^2 - 4a}(\delta p + 2q + p\sqrt{\delta^2 - 4a})}{2(4a - \delta^2)} e^{\frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2}t} + \frac{\sqrt{\delta^2 - 4a}(\delta p + 2q - p\sqrt{\delta^2 - 4a})}{2(4a - \delta^2)} e^{\frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - 4a}}{2}t} + \frac{b}{a}$$

2. Untuk kasus $\delta^2 - 4a = 0$ diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

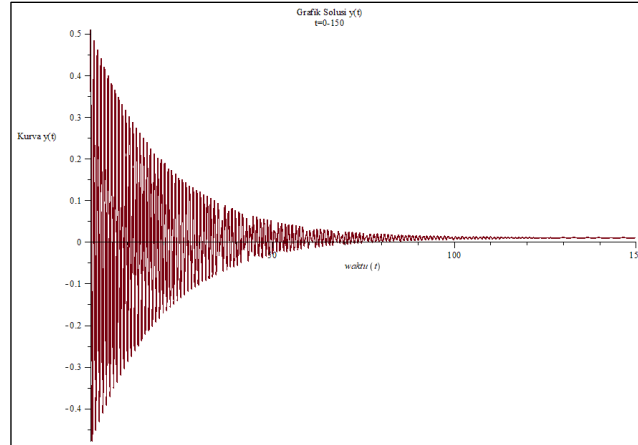
$$y(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t} (p + qt + 0.5\delta pt) + \frac{b}{a}$$

3. Untuk kasus $\delta^2 - 4a < 0$ diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$y(t) = pe^{\frac{-\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4a - \delta^2}}{2}t + \left(\frac{2q + \delta p}{\sqrt{4a - \delta^2}} \right) e^{\frac{-\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4a - \delta^2}}{2}t + \frac{b}{a}$$

$$\text{Dengan } a = \frac{4K_p}{m_d} \text{ dan } b = \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r$$

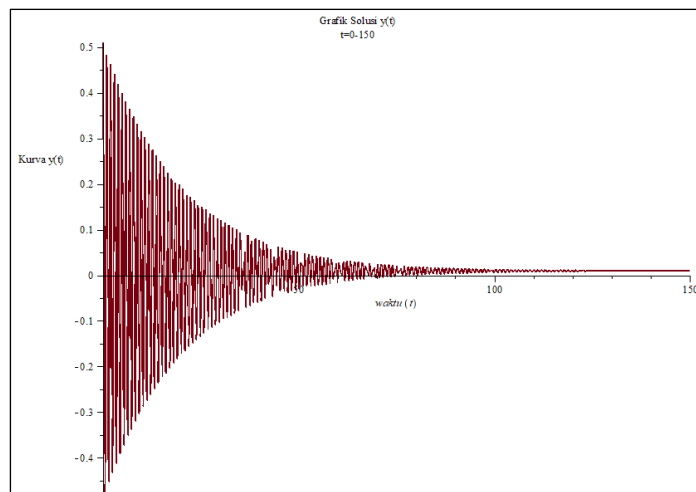
Pada Hasil analisis diperoleh bahwa grafik $y(t)$ realistis saat diskriminan bernilai positif dan negatif. Berikut grafik solusi $y(t)$ untuk $\delta^2 - 4a > 0$ pada saat $t = 0 - 150$ detik:



Gambar 2.4 Grafik Solusi Analitik $y(t)$ untuk $\delta^2 - 4a > 0$. dengan $\delta = 0.1$. $y(0) = 0.5$, $\dot{y}(0) = 0$. $m_d = 2500$. $m_b = 100$. $f_r = 10$. $K_p = \frac{m_d + m_b}{2 * y(0)} g$, dan $g = 10$ (Millenia, 2022)

Dari gambar 2.4 ketika $\delta^2 - 4a > 0$. terlihat bahwa dengan amplitudo awalnya adalah 0.5, kemudian seiring dengan berjalannya waktu saat $t = 150$. amplitudo gelombang vibrasi dawai dengan massa menggelinding semakin kecil hampir berhenti saat mencapai 0.001 atau hampir mendekati posisi diam pada $t \pm 135$ detik.

Kemudian grafik solusi $y(t)$ untuk $\delta^2 - 4a < 0$ grafik pada saat $t = 0 - 150$ detik sebagai berikut:



Gambar 2.5 Grafik Solusi Analitik $y(t)$ untuk $\delta^2 - 4a < 0$. dengan $\delta = 0.1$. $y(0) = 0.5$, $\dot{y}(0) = 0$. $m_d = 2500$. $m_b = 100$. $f_r = 10$. $K_p = \frac{m_d + m_b}{2 * y(0)} g$, dan $g = 10$ (Millenia, 2022)

Dari gambar 2.5 ketika $\delta^2 - 4a < 0$. terlihat bahwa dengan amplitudo awalnya adalah 0.5, kemudian seiring dengan berjalannya waktu saat $t = 150$. amplitudo gelombang vibrasi dawai dengan massa menggelingding semakin kecil hampir berhenti saat mencapai 0.001 atau hampir mendekati posisi diam pada $t \pm 120$ detik.

Selanjutnya, Untuk $\theta(t)$ diperoleh solusi khusus dari tiga kasus sebagai berikut:

1. Untuk kasus $\delta^2 - 4c > 0$ diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$\theta(t) = -\frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q+p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)}e^{\frac{-\delta+\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} + \frac{\sqrt{\delta^2-4c}(\delta p+2q-p\sqrt{\delta^2-4c})}{2(4c-\delta^2)}e^{\frac{-\delta-\sqrt{\delta^2-4c}}{2}t} + \frac{d}{c}$$

2. Untuk kasus $\delta^2 - 4c = 0$ diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

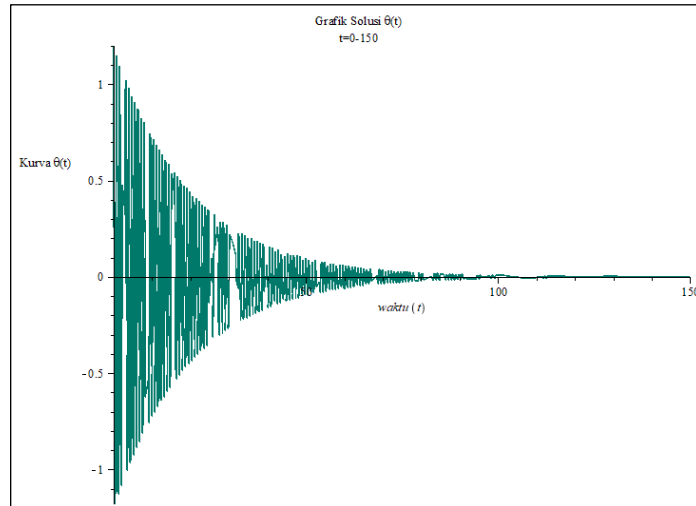
$$\theta(t) = e^{\frac{-\delta}{2}t}(p + qt + 0.5\delta pt) + \frac{d}{c}$$

3. Untuk kasus $\delta^2 - 4c < 0$ diperoleh solusi analitik sebagai berikut:

$$\theta(t) = pe^{\frac{-\delta}{2}t} \cos \frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2}t + \left(\frac{2q+\delta p}{\sqrt{4c-\delta^2}}\right) e^{\frac{-\delta}{2}t} \sin \frac{\sqrt{4c-\delta^2}}{2}t + \frac{d}{c}$$

$$\text{Dengan } c = \frac{\left(-\frac{1}{2}F_r + \frac{1}{2}\mu m_b g + \frac{1}{2}k \eta v + 2K_p l\right)l}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)} \text{ dan } d = \frac{\frac{l}{2}m_b g}{\left(\frac{2}{5}m_b r^2 + \frac{1}{3}m_d l^2\right)}$$

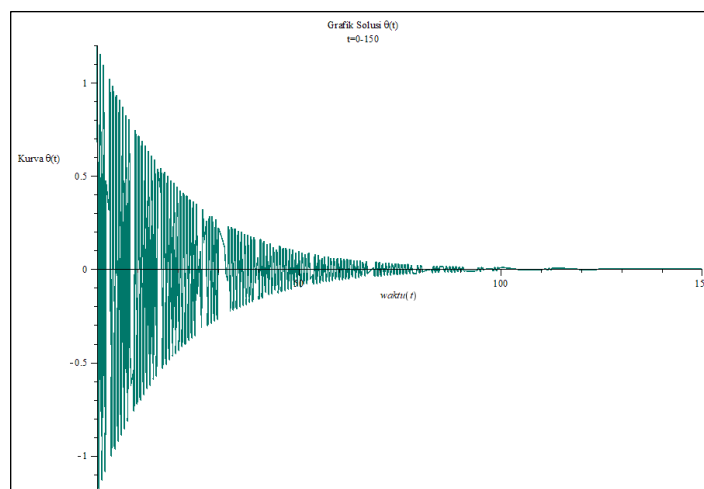
Pada Hasil analisis diperoleh bahwa grafik $\theta(t)$ realistis saat diskriminan bernilai positif dan negatif. Berikut grafik solusi analitik $\theta(t)$ untuk $\delta^2 - 4c > 0$ pada saat $t = 0 - 150$ detik:



Gambar 2.6 Grafik Solusi Analitik $\theta(t)$ untuk $\delta^2 - 4c > 0$. dengan $\delta = 0.1$. $\theta(0) = 1.2$, $\dot{\theta}(0) = 0$. (Millenia, 2022)

Dari gambar 2.6 ketika $\delta^2 - 4c > 0$ terlihat bahwa dengan amplitudo awalnya adalah 1.2 kemudian seiring dengan berjalannya waktu saat $t = 150$. amplitudo sudut gelombang vibrasi dawai dengan massa menggelingding semakin kecil hampir berhenti saat mencapai 0.001 atau hampir mendekati posisi diam pada $t \pm 135$ detik.

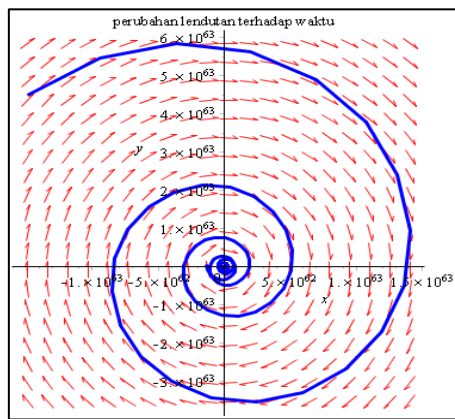
Kemudian grafik solusi $\theta(t)$ untuk $\delta^2 - 4c < 0$ grafik pada saat $t = 0 - 150$ detik sebagai berikut:



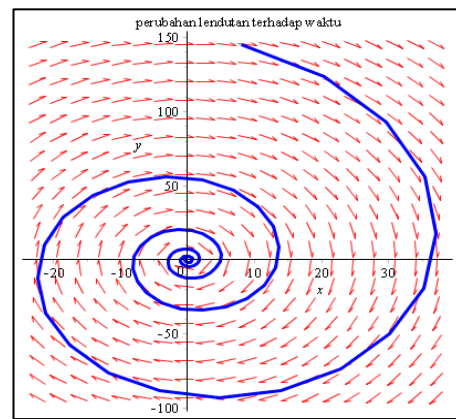
Gambar 2.7 Grafik Solusi Analitik $\theta(t)$ untuk $\delta^2 - 4c < 0$. dengan $\delta = 0.1$. $\theta(0) = 1.2$, $\dot{\theta}(0) = 0$. $\alpha = 0.001582$, $\beta = 0.0066667$, $\gamma = 62,399999$ (Millenia, 2022)

Berdasarkan hasil profil grafik solusi $\theta(t)$ untuk $\delta^2 - 4c < 0$ pada gambar 2.7, terlihat bahwa dengan amplitudo mula-mula 1.2 kemudian seiring dengan berjalannya waktu $t = 150$. amplitudo gelombang vibrasi dawai yang diberi massa menggelinging semakin kecil yang sampai akhirnya hampir berhenti dengan amplitudo 0.001 atau hampir kembali di posisi diam pada $t \pm 140$ detik.

Selanjutnya, model vibrasi dawai dikenai massa menggelinging di sepanjang dawai diperoleh hasil uji sensitivitas dan memperoleh hasil potret fase sebagai berikut:



Gambar 2.8 Potret Fase dengan $t = -300 - 300$



Gambar 2.9 Potret Fase dengan $t = 0 - 10$

Berdasarkan gambar 2.8 menunjukkan bahwa potret fase pada simulasi persamaan lendutan vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinging variasi parameter pertama dengan $t = -300 - 300$. berbentuk spiral dengan arah menuju titik kesetimbangan dan anak panah menunjukkan medan vektor. Selanjutnya berdasarkan gambar 2.9 menunjukkan bahwa potret fase pada simulasi persamaan lendutan vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinging variasi parameter kedua dengan $t = 0 - 10$. berbentuk spiral dengan arah menuju titik kesetimbangan dan anak panah menunjukkan medan vektor.

2.6 Analisis Perilaku Model Kontinu Vibrasi Dawai

Analisis perilaku model kontinu vibrasi dawai pada persamaan 2.24 dan 2.25 dilakukan dengan cara mereduksi persamaan menjadi orde 1 dengan mengasumsikan $y = y_1$ dan $\dot{y}_1 = y_2$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= \frac{d}{dt}(\dot{y}_1) = \frac{d}{dt}(y_2) = \dot{y}_2 \\ \dot{y}_2 &= -\delta y_2 - \frac{4k_p}{m_d} y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r\end{aligned}$$

Selanjutnya, didapatkan sistem persamaan diferensial biasa orde satu sebagai hasil reduksi dari asumsi diatas, yakni

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\delta y_2 - \frac{4k_p}{m_d} y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \end{cases} \quad (2.26)$$

Asumsikan bahwa, $\theta = \theta_1$ dan $\dot{\theta}_1 = \theta_2$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 &= \frac{d}{dt}(\dot{\theta}_1) = \frac{d}{dt}(\theta_2) = \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2 &= -\delta\theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1\end{aligned}$$

Selanjutnya, didapatkan sistem persamaan diferensial biasa orde satu sebagai hasil reduksi dari asumsi diatas, yakni

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\delta\theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Pada sistem persamaan 2.27 terdapat suku tak linier sehingga perlu dilakukan linierisasi. Menurut (McKenna, 1999), dapat dilakukan linierisasi dengan mensubstitusikan $\sin \theta = \theta$ dan $\cos \theta = 1$.

Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa linier sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\delta\theta_2 - \alpha\theta_1 - \beta - \gamma\theta_1 \end{cases} \quad (2.28)$$

Sehingga persamaan diferensial biasa tak linier menjadi bentuk persamaan diferensial biasa linier.

Pada masing-masing sistem dinamik didapatkan titik kesetimbangan yaitu $E_1(y_1^*, y_2^*) = (0,0)$, $E_2(y_1^*, y_2^*) = (\frac{gm_b + gm_d - F_r m_d}{4k_p}, 0)$ dan $E_1(\theta_1^*, \theta_2^*) = (0,0)$, $E_2(\theta_1^*, \theta_2^*) = (\frac{\beta}{-\alpha - \gamma}, 0)$, sehingga dapat ditentukan jenis kestabilannya. Titik kesetimbangan $E_2(y_1^*, y_2^*)$ dan $E_2(\theta_1^*, \theta_2^*)$ bersifat stabil bersifat stabil (sink) jika $h < \delta$.

2.7 Janji Kemudahan dari Allah

Janji Allah untuk memberikan kemudahan tercantum dalam Al-Quran, terutama dalam Surah Al-Insyirah ayat 5-6 (Kementrian Agama RI, 2022), yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا , إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan" [Q.S. Al-Insyirah ayat 5-6].

Ayat ini menurut tafsir Ibnu Katsir, menunjukkan bahwa Allah mengulangi apa yang telah Dia katakan bahwa akan ada kemudahan setelah kesulitan. Menurut Ibnu Jarir, Ibnu Abdul A'la, dan Ibnu Saur dari Ma'mar, Al-Hasan, mereka mengatakan bahwa Nabi Muhammad Saw. pernah muncul dengan tersenyum dan gembira dan berkata (Al-Sheikh, 2021):

"Satu kesulitan tidak akan dapat mengalahkan dua kemudahan, satu kesulitan tidak akan dapat mengalahkan dua kemudahan. Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

Ibnu Jarir meriwayatkan kisah yang sama melalui hadis Auf al-A'rabi dan Yunus bin Ubaid, dengan mengutip dari Al-Hasan. Menurut riwayat Sa'id dari Qatadah, Rasulullah menyampaikan kabar gembira kepada para sahabatnya melalui ayat ini. Beliau kemudian bersabda (Al-Sheikh, 2021):

"Satu kesulitan tidak akan dapat mengalahkan dua kemudahan."

Yang beliau maksudkan adalah firman Allah Q.S. Al-Insyirah ayat 5-6. Dari penjelasan tersebut, Q.S. Al-Insyirah ayat 5-6 menunjukkan bahwa dalam kehidupan, seseorang akan menghadapi kesulitan dan tantangan, tetapi Allah juga menjanjikan kemudahan sebagai bagian dari ujian dan cobaan tersebut. Dalam Islam, keyakinan bahwa Allah akan memberikan kemudahan dalam situasi yang sulit adalah salah satu aspek penting dari tawakal (mempercayai Allah sepenuhnya) dan iman (kepercayaan). Namun, penting untuk diingat bahwa janji Allah ini tidak selalu berarti bahwa semua masalah akan segera terselesaikan atau bahwa hidup akan bebas dari kesulitan. Sebaliknya, ini mengingatkan kita untuk bersabar, bertawakal, dan berusaha keras untuk mengatasi kesulitan yang mungkin kita hadapi, karena kemudahan akan datang pada saat yang tepat menurut kehendak Allah.

Selain itu, didalam Q.S Al – Lail ayat 5-7 dijelaskan jika kita memberikan apa yang kita punya termasuk harta, waktu, tenaga untuk berbuat baik di jalan Allah dengan mengharapkan ridho-Nya maka akan diberi kemudahan. Pada tafsir As-Sa'diy (Ebook Sunnah, 2021) disebutkan bahwa sebab Allah membedakan antara orang-orang yang beramal saleh dan menjelaskan jenis amal yang mereka lakukan, dengan berfirman: "Adapun orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah," artinya, mereka menunaikan kewajiban-kewajiban harta seperti zakat,

sedekah, kafarat, shadaqah, dan infak, serta kewajiban-kewajiban badan seperti puasa, salat, dan haji dan umrah. "Dan bertakwa" dengan tidak melakukan hal-hal yang dilarang atau melanggar perintah dalam bentuk apa pun, "dan beriman kepada pahala yang terbaik (surga)" serta membenarkan dengan mengimani konsep tauhid dan semua ajaran agama yang diimplikasinya, serta semua akibat baik berupa pahala di akhirat. "Maka Kami akan menyiapkan baginya jalan yang mudah." Dengan kata lain, karena dia mengambil sebab-sebab kemudahan, maka Allah memudahkan baginya. Oleh karena itu, Kami akan memudahkan urusannya, Kami akan memudahkan segala hal yang baik baginya, dan Kami akan memudahkan baginya untuk meninggalkan segala hal yang buruk.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini, penulis menggunakan metode kuantitatif dan kualitatif. Metode kualitatif dapat memberikan lebih banyak wawasan terhadap kasus dawai yang sedang diteliti. Sedangkan metode kuantitatif mengukur perhatian pada setiap variabel dan hubungan antara satu variabel dengan variabel lainnya (Hardani dkk., 2020). Penelitian kualitatif tujuan umumnya mempelajari suatu fenomena utama yang dieksplorasi dalam bentuk penelitian (Creswell, 2010). Pendekatan kuantitatif sendiri merupakan salah satu jenis metodologi penelitian ilmiah yang melibatkan analisis data pada data-data numerikal (angka), mulai dari pengumpulan data, penafsiran terhadap data tersebut, serta visualisasi data. Fokus penelitian ini yaitu mengolah data numerik dan melakukan analisis dinamik diskrit terhadap model yang telah ada. Salah satu tujuan dari penelitian kuantitatif adalah untuk memverifikasi objek penelitian tertentu (Creswell, 2010). Objek penelitian yang digunakan adalah model matematika vibrasi dawai penelitian (Janah, 2022) yang direvisi dalam (Pratiwi, 2022) dengan mengacu pada model matematika pada penelitian (McKenna, 1999).

Penelitian ini berfungsi untuk mendeskripsikan bagaimana analisis dinamik diskrit dari model matematika yang selanjutnya mensimulasikan model dinamik diskritnya serta melakukan perbandingan hasil simulasi model kontiu dan diskrit. Penelitian ini berfokus pada pengembangan analisis matematis untuk memahami dinamik pada waktu diskrit vibrasi dawai. Langkah-langkah untuk menganalisis

dinamik diskrit pada penelitian ini merujuk pada penelitian (Roza dkk., 2021) dan (Munandar, 2017).

3.2 Tahap Penelitian

Tahap penelitian analisis dinamik model diskrit pada vibrasi dawai dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai adalah sebagai berikut:

1. Tahapan untuk menganalisis model diskrit $y(t)$ dan $\theta(t)$ pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai sebagai berikut.
 - a. Mendiskritisasi model dengan menggunakan skema beda hingga. Metode beda hingga yang digunakan untuk simulasi model diskrit pada vibrasi dawai dikenai massa menggelinding disepanjang dawai adalah metode *Euler*.
 - b. Menentukan titik kesetimbangan pada sistem diskrit.
 - c. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan sistem diskrit menggunakan matriks Jacobi untuk menentukan nilai eigen.
 - d. Potret Fase dan interpretasi
2. Mensimulasikan sistem dinamik model diskrit pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai serta menginterpretasikan hasil simulasinya. Adapun simulasi yang digunakan yaitu:
 - a. Simulasi dengan mengubah iterasi waktu yang pertama yakni ketika $t \in [0,10]$ dan yang kedua yakni ketika $t \in [0,120]$.
 - b. Membandingkan hasil simulasi $y_1(t)$ dengan $\theta_1(t)$ dan $y_2(t)$ dengan $\theta_2(t)$

3. Melakukan perbandingan hasil simulasi dinamik model diskrit dan model kontinu $y(t)$ dan $\theta(t)$ pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai baik secara numerik maupun plot grafik. Selanjutnya menghitung selisih nilai dari hasil perbandingan $y_1(t), y_2(t), \theta_1(t), \theta_2(t)$ simulasi solusi kondisi diskrit dan kontinu dalam bentuk plot grafik.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Analisis Dinamik Model Diskrit $y(t)$ dan $\theta(t)$

4.1.1 Diskritisasi Model

Berikut model vibrasi dawai dikenai massa menggelinding diatasnya pada penelitian (Pratiwi, 2022) yang selanjutnya akan didiskritisasi menggunakan metode beda hingga:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\delta y_2 - \frac{4k_p}{m_d} y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\delta\theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad (4.2)$$

Pada model vibrasi dawai dikenai massa menggelinding dengan $\frac{dy}{dt}$ dan $\frac{d\theta}{dt}$, didiskritisasi menggunakan metode beda hingga dengan pendekatan *Euler*. Untuk nilai $\frac{dy_1}{dt} = \frac{y_{1m+1} - y_{1m}}{h}$ pada persamaan lendutan dawai, nilai $\frac{dy_2}{dt} = \frac{y_{2m+1} - y_{2m}}{h}$ pada persamaan kecepatan lendutan dawai, nilai $\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\theta_{1m+1} - \theta_{1m}}{h}$ pada persamaan sudut lendutan dawai dan $\frac{d\theta_2}{dt} = \frac{\theta_{2m+1} - \theta_{2m}}{h}$ pada persamaan kecepatan sudut lendutan dawai. Berikut proses diskritisasi sistem (4.1) pada persamaan lendutan dawai:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{y_{1m+1} - y_{1m}}{h} &= y_{2m} \\ y_{1m+1} - y_{1m} &= h y_{2m} \\ y_{1m+1} &= h y_{2m} + y_{1m} \end{aligned}$$

Selanjutnya, proses diskritisasi sistem (4.1) pada persamaan kecepatan lendutan dawai sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_2}{dt} &= -\delta y_2 - \frac{4k_p}{m_d} y_1 + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \\
\frac{y_{2m+1} - y_{2m}}{h} &= -\delta y_{2m} - \frac{4k_p}{m_d} y_{1m} + \frac{(m_b + m_d)g}{m_d} - F_r \\
y_{2m+1} - y_{2m} &= -h\delta y_{2m} - h\frac{4k_p}{m_d} y_{1m} + h\left(\frac{(m_b + m_d)g}{m_d}\right) - hF_r \\
y_{2m+1} &= y_{2m} - h\delta y_{2m} - h\frac{4k_p}{m_d} y_{1m} + h\left(\frac{(m_b + m_d)g}{m_d}\right) - hF_r
\end{aligned}$$

Kedua, pada persamaan sudut lendutan dawai proses diskritisasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_1}{dt} &= \theta_2 \\
\frac{\theta_{1m+1} - \theta_{1m}}{h} &= \theta_{2m} \\
\theta_{1m+1} - \theta_{1m} &= h \theta_{2m} \\
\theta_{1m+1} &= h \theta_{2m} + \theta_{1m}
\end{aligned}$$

Sedangkan proses diskritisasi pada persamaan kecepatan sudut lendutan dawai sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_2}{dt} &= -\delta\theta_2 - \alpha \sin \theta_1 - \beta \cos \theta_1 - \gamma \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\
\frac{\theta_{2m+1} - \theta_{2m}}{h} &= -\delta\theta_{2m} - \alpha \sin \theta_{1m} - \beta \cos \theta_{1m} - \gamma \cos \theta_{1m} \sin \theta_{1m} \\
\theta_{2m+1} - \theta_{2m} &= -h\delta\theta_{2m} - h\alpha \sin \theta_{1m} - h\beta \cos \theta_{1m} - h(\gamma \cos \theta_{1m} \sin \theta_{1m}) \\
\theta_{2m+1} &= \theta_{2m} - h\delta\theta_{2m} - h\alpha \sin \theta_{1m} - h\beta \cos \theta_{1m} - h(\gamma \cos \theta_{1m} \sin \theta_{1m})
\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh model sistem diskrit:

$$\begin{cases} y_{1m+1} = h y_{2m} + y_{1m} \\ y_{2m+1} = y_{2m} - h\delta y_{2m} - h\frac{4k_p}{m_d} y_{1m} + h\left(\frac{(m_b + m_d)g}{m_d}\right) - hF_r \end{cases} \quad (4.3)$$

dan

$$\begin{cases} \theta_{1m+1} = h \theta_{2m} + \theta_{1m} \\ \theta_{2m+1} = \theta_{2m} - h\delta\theta_{2m} - h\alpha \sin \theta_{1m} - h\beta \cos \theta_{1m} - h(\gamma \cos \theta_{1m} \sin \theta_{1m}) \end{cases} \quad (4.4)$$

Sistem persamaan (4.3) merupakan model lendutan vibrasi dawai diskrit dan sistem persamaan (4.4) merupakan model sudut lendutan vibrasi dawai diskrit dimana h adalah ukuran langkah yang bernilai positif.

4.1.2 Titik Keseimbangan Model Diskrit

Titik keseimbangan pada sistem persamaan (4.3) merupakan titik (y_1^*, y_2^*) yang memenuhi persamaan $f(y_1^*, y_2^*) = y_1^*$ dan $g(y_1^*, y_2^*) = y_2^*$, maka memenuhi kondisi $y_{1_{m+1}} = y_{1_m} = y_1^*$ dan $y_{2_{m+1}} = y_{2_m} = y_2^*$ (Elaydi, 2005). Adapun proses menentukan titik keseimbangan pada model diskrit lendutan dan kecepatan lendutan dawai sebagai berikut.

Pada persamaan lendutan dawai dimisalkan $y_1^* = 0$. Karena $y_1^* = hy_2^* + y_1^*$, maka $y_2^* = 0$ atau $hy_2^* = 0$. Sehingga diperoleh titik keseimbangan dari sistem persamaan (4.3) yakni $E_1(y_1^*, y_2^*) = (0, 0)$. Kemudian kasus kedua diperoleh:

$$\begin{aligned} y_1^* &= f(y_1^*, y_2^*) \\ y_1^* &= y_1^* + hy_2^* \\ y_1^* - y_1^* &= hy_2^* \\ 0 &= hy_2^* \\ 0 &= y_2^* \end{aligned} \tag{4.5}$$

dengan nilai y_1^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_2^* &= g(y_1^*, y_2^*) \\ y_2^* &= y_2^* - h\delta y_2^* - h\frac{4k_p}{m_d}y_1^* + h\left(\frac{(m_b + m_d)g}{m_d}\right) - hF_r \\ y_2^* - y_2^* &= -h\delta y_2^* - h\frac{4k_p}{m_d}y_1^* + h\left(\frac{(m_b + m_d)g}{m_d}\right) - hF_r \\ 0 &= -h\delta y_2^* - h\frac{4k_p}{m_d}y_1^* + h\left(\frac{(m_b + m_d)g}{m_d}\right) - hF_r \\ h\delta y_2^* &= -h\frac{4k_p}{m_d}y_1^* + h\left(\frac{(m_b + m_d)g}{m_d}\right) - hF_r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta y_2^* &= \frac{-4k_p y_1^* + g m_b + g m_d - F_r m_d}{m_d} \\ y_2^* &= \frac{-4k_p y_1^* + g m_b + g m_d - F_r m_d}{m_d \delta}\end{aligned}\quad (4.6)$$

Karena $y_2^* = 0$, maka diperoleh y_1^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{-4k_p y_1^* + g m_b + g m_d - F_r m_d}{m_d \delta} \\ \frac{4k_p y_1^*}{m_d \delta} &= \frac{g m_b + g m_d - F_r m_d}{m_d \delta} \\ y_1^* &= \frac{g m_b + g m_d - F_r m_d}{4k_p}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan dari sistem persamaan (4.3) $E_2(y_1^*, y_2^*) = (\frac{g m_b + g m_d - F_r m_d}{4k_p}, 0)$.

Selanjutnya, dikarenakan sistem persamaan (4.3) dan (4.4) *uncouple* maka, dicari masing-masing titik tetapnya. Titik kesetimbangan pada sistem persamaan (4.4) merupakan titik (θ_1^*, θ_2^*) yang memenuhi persamaan $f(\theta_1^*, \theta_2^*) = \theta_1^*$ dan $g(\theta_1^*, \theta_2^*) = \theta_2^*$, maka memenuhi kondisi $\theta_{1_{m+1}} = \theta_{1_m} = \theta_1^*$ dan $\theta_{2_{m+1}} = \theta_{2_m} = \theta_2^*$. Adapun proses menentukan titik kesetimbangan pada model diskrit sudut lendutan dan kecepatan sudut lendutan dawai sebagai berikut.

Pada persamaan sudut lendutan dawai dimisalkan $\theta_1^* = 0$. Karena $\theta_1^* = h\theta_2^* + \theta_1^*$, maka $\theta_2^* = 0$ atau $h\theta_2^* = 0$. Sehingga diperoleh titik kesetimbangan dari sistem persamaan (4.4) yakni $E_1(\theta_1^*, \theta_2^*) = (0, 0)$. Kemudian kasus kedua diperoleh:

$$\begin{aligned}\theta_1^* &= f(\theta_1^*, \theta_2^*) \\ \theta_1^* &= \theta_1^* + h\theta_2^* \\ \theta_1^* - \theta_1^* &= h\theta_2^* \\ 0 &= h\theta_2^* \\ 0 &= \theta_2^*\end{aligned}\quad (4.8)$$

dengan nilai θ_1^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \theta_2^* &= g(\theta_1^*, \theta_2^*) \\
 \theta_2^* &= \theta_2^* - h\delta\theta_2^* - h\alpha \sin \theta_1^* - h\beta \cos \theta_1^* - h(\gamma \cos \theta_1^* \sin \theta_1^*) \\
 \theta_2^* - \theta_2^* &= -h\delta\theta_2^* - h\alpha \sin \theta_1^* - h\beta \cos \theta_1^* - h(\gamma \cos \theta_1^* \sin \theta_1^*) \\
 0 &= -h\delta\theta_2^* - h\alpha \sin \theta_1^* - h\beta \cos \theta_1^* - h(\gamma \cos \theta_1^* \sin \theta_1^*) \\
 h\delta\theta_2^* &= -h\alpha \sin \theta_1^* - h\beta \cos \theta_1^* - h(\gamma \cos \theta_1^* \sin \theta_1^*) \\
 \theta_2^* &= -\frac{\alpha \sin \theta_1^*}{\delta} - \frac{\beta \cos \theta_1^*}{\delta} - \frac{\gamma \cos \theta_1^* \sin \theta_1^*}{\delta} \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Pada persamaan (4.9) terdapat suku tak linier sehingga perlu dilakukan linierisasi. Menurut (McKenna, 1999), dapat dilakukan linierisasi dengan mensubstitusikan $\sin \theta = \theta$ dan $\cos \theta = 1$.

Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial biasa linier sebagai berikut:

$$\theta_2^* = -\frac{\alpha \theta_1^*}{\delta} - \frac{\beta}{\delta} - \frac{\gamma \theta_1^*}{\delta} \tag{4.10}$$

Karena $\theta_2^* = 0$, maka diperoleh θ_1^* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{\alpha}{\delta}\theta_1^* - \frac{\beta}{\delta} - \frac{\gamma}{\delta}\theta_1^* \\
 0 &= \left(\frac{-\alpha - \gamma}{\delta}\right)\theta_1^* - \frac{\beta}{\delta} \\
 \frac{\beta}{\delta} &= \left(\frac{-\alpha - \gamma}{\delta}\right)\theta_1^* \\
 \theta_1^* &= \frac{\beta}{-\alpha - \gamma} \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan dari sistem persamaan (4.4) $E_2(\theta_1^*, \theta_2^*) =$

$$\left(\frac{\beta}{-\alpha - \gamma}, 0\right).$$

4.1.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Analisis kestabilan persamaan lendutan (4.3) yakni:

$$\begin{cases} y_{1_{m+1}} = h y_{2_m} + y_{1_m} \\ y_{2_{m+1}} = y_{2_m} - h\delta y_{2_m} - h \frac{4k_p}{m_d} y_{1_m} + h \left(\frac{(m_b + m_d)g}{m_d} \right) - hF_r \end{cases}$$

Dengan demikian, untuk mengidentifikasi jenis stabilitas titik kesetimbangan pada sistem persamaan tersebut, analisis nilai eigen dari matriks Jacobian dilakukan untuk titik kesetimbangan $E_2(y_1^*, y_2^*)$. Kemudian, matriks Jacobian dari sistem persamaan (4.3) pada titik kesetimbangan (y_1^*, y_2^*) sebagai berikut:

$$J(y_1^*, y_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1^*} & \frac{\partial f}{\partial y_2^*} \\ \frac{\partial g}{\partial y_1^*} & \frac{\partial g}{\partial y_2^*} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial y_1^*} \right|_{(y_1^*, y_2^*)} &= 1 & \left. \frac{\partial g}{\partial y_1^*} \right|_{(y_1^*, y_2^*)} &= -\frac{4hk_p}{m_d} \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y_2^*} \right|_{(y_1^*, y_2^*)} &= h & \left. \frac{\partial g}{\partial y_2^*} \right|_{(y_1^*, y_2^*)} &= 1 - h\delta \end{aligned}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{4hk_p}{m_d} & 1 - h\delta \end{bmatrix}$$

Berikutnya, untuk menghitung nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik kesetimbangan di E_2 , dipaparkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(A_1 - \lambda I) &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{4hk_p}{m_d} & 1 - h\delta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\frac{4hk_p}{m_d} & 1 - h\delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 1 - \lambda & h \\ -\frac{4hk_p}{m_d} & 1 - h\delta - \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ (1 - \lambda)(1 - h\delta - \lambda) + \frac{4h^2k_p}{m_d} &= 0 \\ \lambda^2 + (h\delta - 2)\lambda + \frac{(1 - h\delta)m_d + 4h^2k_p}{m_d} &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nilai-nilai eigen diperoleh dengan mencari akar-akar dari persamaan (4.13)

dengan $a = 1$, $b = h\delta - 2$, dan $c = \frac{(1-h\delta)m_d + 4h^2k_p}{m_d}$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{h\delta - 2 \pm \sqrt{(h\delta - 2)^2 - 4(1)\left(\frac{(1-h\delta)m_d + 4h^2k_p}{m_d}\right)}}{2(1)} \\ &= -\frac{(h\delta - 2) \pm \sqrt{(h^2\delta^2 - 4h\delta + 4) - 4\left(\frac{(1-h\delta)m_d + 4h^2k_p}{m_d}\right)}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{h\delta m_d - 2m_d \pm \sqrt{(h^2\delta^2 m_d^2 - 16h^2k_p m_d)}}{m_d}\end{aligned}$$

dari persamaan $\lambda_{1,2}$ kemudian disubstitusikan nilai parameter Tabel 2.1 yang dirujuk dari (Pratiwi, 2022) sehingga $\lambda_1 = -0,05h + (6,4496h)i$ dan $\lambda_2 = -0,05h - (6,4496h)i$, dari hasil tersebut dapat ditentukan kestabilan titik kesetimbangan dengan beberapa syarat yakni:

1. Jika $h < \delta$ maka diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 0,99995 + 0,00645i$ dan $\lambda_2 = 0,99995 - 0,00645i$ sehingga diperoleh nilai $r = \sqrt{0,99995^2 + 0,00645^2} = 0,99997$
2. Jika $h > \delta$ maka diperoleh hasil eigen $\lambda_1 = 0,95 + 6,45i$ dan $\lambda_2 = 0,95 - 6,45i$ sehingga diperoleh nilai $r = \sqrt{0,95^2 + 6,45^2} = 6,52$
3. Jika $h = \delta$ maka diperoleh hasil eigen $\lambda_1 = 0,995 + 0,645i$ dan $\lambda_2 = 0,995 - 0,645i$ sehingga diperoleh nilai $r = \sqrt{0,995^2 + 0,645^2} = 1,186$

Kestabilan dari titik kesetimbangan lendutan dawai dapat ditentukan dengan kriteria kestabilan jika $|r| < 1$ (Elaydi, 2005). Maka titik kesetimbangan

$E_2(y_1^*, y_2^*) = (\frac{gm_b + gm_d - F_r m_d}{4k_p}, 0)$ bersifat stabil (sink) jika $h < \delta$.

Berikutnya yaitu analisis kestabilan persamaan sudut lendutan (4.3). Dengan mengingat sistem persamaan sudut lendutan setelah dilakukan linierisasi yakni:

$$\begin{cases} \theta_{1_{m+1}} = h \theta_{2_m} + \theta_{1_m} \\ \theta_{2_{m+1}} = \theta_{2_m} - h\delta\theta_{2_m} - h\alpha\theta_{1_m} - h\beta - h\gamma\theta_{1_m} \end{cases} \quad (4.14)$$

maka untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan pada sistem persamaan tersebut, analisis nilai eigen dari matriks Jacobian dilakukan untuk $E_2(\theta_1^*, \theta_2^*)$. Kemudian, matriks Jacobian dari sistem persamaan (4.14) pada titik kesetimbangan (θ_1^*, θ_2^*) diberikan sebagai berikut:

$$J(\theta_1^*, \theta_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1^*} & \frac{\partial f}{\partial \theta_2^*} \\ \frac{\partial g}{\partial \theta_1^*} & \frac{\partial g}{\partial \theta_2^*} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_1^*} \right|_{(\theta_1^*, \theta_2^*)} &= 1 & \left. \frac{\partial g}{\partial \theta_1^*} \right|_{(\theta_1^*, \theta_2^*)} &= -h\alpha - h\gamma \\ \left. \frac{\partial f}{\partial \theta_2^*} \right|_{(\theta_1^*, \theta_2^*)} &= h & \left. \frac{\partial g}{\partial \theta_2^*} \right|_{(\theta_1^*, \theta_2^*)} &= 1 - h\delta \end{aligned}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h\alpha - h\gamma & 1 - h\delta \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik kesetimbangan di E_2 , dipaparkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(A_2 - \lambda I) &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h\alpha - h\gamma & 1 - h\delta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \left| \begin{bmatrix} 1 & h \\ -h\alpha - h\gamma & 1 - h\delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} 1 - \lambda & h \\ -h\alpha - h\gamma & 1 - h\delta - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1 - \lambda)(1 - h\delta - \lambda) + h^2\alpha + h^2\gamma &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda(h\delta - 2) + 1 - h\delta + h^2\alpha + h^2\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nilai-nilai eigen diperoleh dengan mencari akar-akar dari persamaan (4.16)

dengan $a = 1$, $b = h\delta - 2$, dan $c = 1 - h\delta + h^2\alpha + h^2\gamma$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
\lambda_{3,4} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= -\frac{h\delta - 2 \pm \sqrt{(h\delta - 2)^2 - 4(1)(1 - h\delta + h^2\alpha + h^2\gamma)}}{2(1)} \\
&= -\frac{1}{2} \left(h\delta - 2 \pm \sqrt{(h^2\delta^2 - 4h\delta + 4) - 4(1 - h\delta + h^2\alpha + h^2\gamma)} \right) \\
&= -\frac{1}{2} \left(h\delta - 2 \pm \sqrt{h^2\delta^2 - 4h^2\alpha - 4h^2\gamma} \right)
\end{aligned}$$

dari persamaan $\lambda_{3,4}$ kemudian disubstitusikan nilai parameter Tabel 2.1 yang dirujuk dari (Pratiwi, 2022), sehingga $\lambda_3 = -0,05h + (7,8992h)i$ dan $\lambda_4 = -0,05h - (7,8992h)i$, dari hasil tersebut dapat ditentukan kestabilan titik kesetimbangan dengan beberapa syarat yakni:

1. Jika $h < \delta$ maka diperoleh nilai eigen $\lambda_3 = 0,99995 + 0,000789i$ dan $\lambda_4 = 0,99995 - 0,000789i$ sehingga diperoleh nilai $r = \sqrt{0,99995^2 + 0,000789^2} = 0,999995$
2. Jika $h > \delta$ maka diperoleh hasil eigen $\lambda_3 = 0,95 + 7,89i$ dan $\lambda_4 = 0,95 - 7,89i$ sehingga diperoleh nilai $r = \sqrt{0,95^2 + 7,89^2} = 7,95$
3. Jika $h = \delta$ maka diperoleh hasil eigen $\lambda_3 = 0,995 + 0,789i$ dan $\lambda_4 = 0,995 - 0,789i$ sehingga diperoleh nilai $r = \sqrt{0,995^2 + 0,789^2} = 1,270$

Kestabilan dari titik kesetimbangan sudut lendutan dawai dapat ditentukan dengan kriteria kestabilan jika $|r| < 1$ (Elaydi, 2005). Maka titik kesetimbangan $E_2(\theta_1^*, \theta_2^*) = \left(\frac{\beta}{-\alpha - \gamma}, 0 \right)$ bersifat stabil (sink) jika $h < \delta$.

4.1.4 Potret Fase

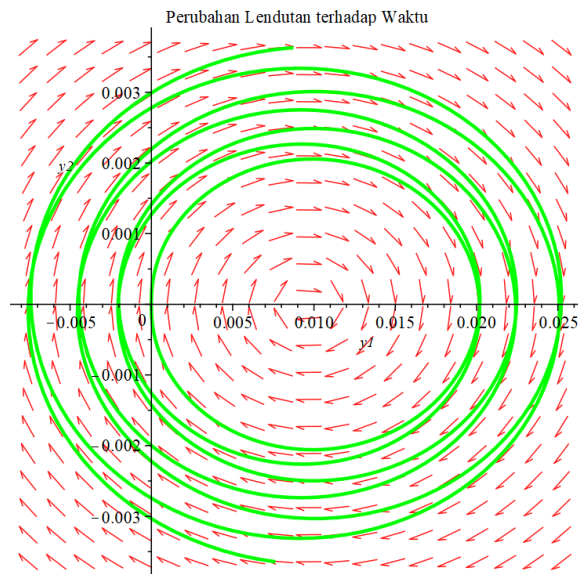
Potret fase adalah diagram sekaligus medan arah yang dapat membantu menganalisis kestabilan. Dalam penelitian ini model diskrit dari vibrasi dawai dengan massa menggelinding direduksi menjadi dua sistem persamaan yaitu:

1. Pada sistem persamaan 4.3 membahas tentang perubahan kecepatan vibrasi lendutan dawai terhadap waktu. Dengan mensubstitusikan parameter Tabel 2.1 yang dirujuk dari (Pratiwi, 2022), maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} y_{1_{m+1}} = y_{1_m} + 0.001 y_{2_m} \\ y_{2_{m+1}} = -0.0001 y_{2_m} - 0.0416 y_{1_m} + 0.0004 \end{cases} \quad (4.17)$$

Persamaan 4.17 menghasilkan nilai titik kesetimbangan dari sistem persamaan tersebut yakni $E_2(y_1^*, y_2^*) = (0.00962, 0)$ dengan nilai eigen kompleks yaitu $\lambda_1 = -0.00005 + 0.00645i$ dan $\lambda_2 = -0.00005 - 0.00645i$ dan dengan syarat $h < \delta$.

Selanjutnya, berikut grafik potret fase dari sistem persamaan 4.17:



Gambar 4.1 Potret Fase Perubahan Kecepatan Lendutan terhadap Waktu

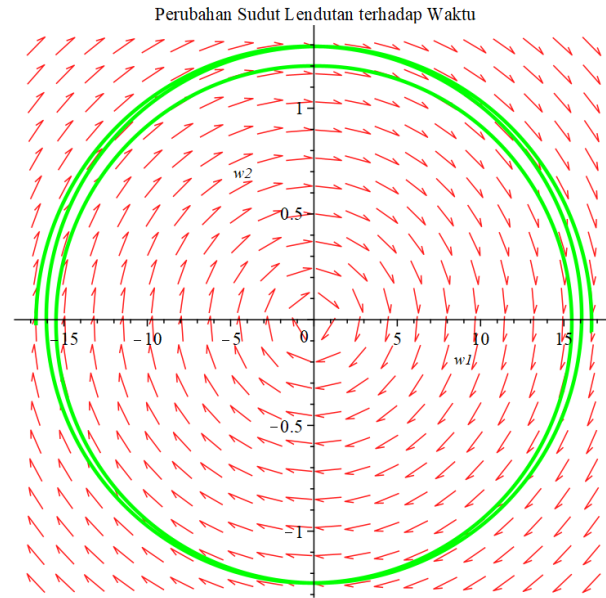
Gambar 4.1 terlihat bahwa membentuk spiral yang semakin mendekati ke titik kesetimbangan yaitu $E_1(y_1^*, y_2^*) = (0,0)$, bentuk ini menunjukkan bahwa sistem memiliki perilaku periodik yang stabil.

2. Pada sistem persamaan 4.4 membahas tentang perubahan kecepatan vibrasi sudut lendutan dawai terhadap waktu. Dengan mensubstitusikan parameter

Tabel 2.1 yang dirujuk dari (Pratiwi, 2022), maka dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{cases} \theta_{1_{m+1}} = 0.0001 \theta_{2_m} + \theta_{1_m} \\ \theta_{2_{m+1}} = -0.00001 \theta_{2_m} - 0.00624 \theta_{1_m} - 6.6666 \times 10^{-7} \end{cases} \quad (4.18)$$

Persamaan 4.18 menghasilkan nilai titik kesetimbangan dari sistem persamaan tersebut yakni $E_2(\theta_1^*, \theta_2^*) = (-0.00011, 0)$ dengan nilai eigen kompleks yaitu $\lambda_3 = -5 \times 10^{-6} + 0.00078i$ dan $\lambda_4 = -5 \times 10^{-6} - 0.00078i$ dan dengan syarat $h < \delta$. Berikut grafik potret fase dari sistem persamaan 4.18:



Gambar 4.2 Potret Fase Perubahan Kecepatan Sudut Lendutan terhadap Waktu

Gambar 4.2 terlihat bahwa membentuk spiral yang semakin mendekati ke titik kesetimbangan yaitu $E_1(\theta_1^*, \theta_2^*) = (0,0)$, bentuk ini menunjukkan bahwa sistem memiliki perilaku periodik yang stabil.

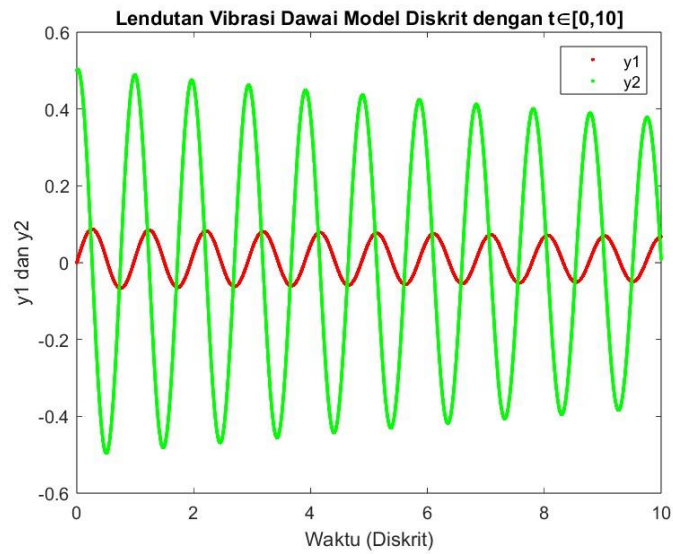
4.2 Simulasi Dinamik Model Diskrit

4.2.1 Simulasi Lendutan dan Sudut Lendutan

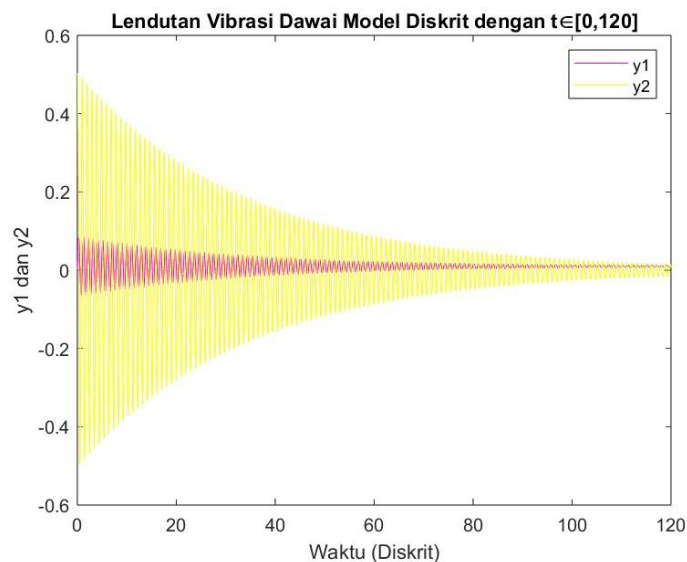
Bagian ini akan disimulasikan mengenai eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan 4.3 dan 4.14 dengan parameter yang digunakan mengacu pada tabel 2.1 yang digambarkan dengan simulasi. Simulasi numerik dilakukan dengan menggunakan *software* Matlab dengan *source code* yang disajikan pada lampiran. Simulasi numerik dibagi menjadi dua bagian, yakni bagian pertama untuk simulasi lendutan vibrasi dawai dan yang kedua untuk simulasi sudut lendutan vibrasi dawai.

Pertama: Simulasi Lendutan Vibrasi Dawai Dikenai Massa Menggelinding di Atasnya

Berdasarkan hasil analisis yang diperoleh, model diskrit vibrasi dawai dikenai massa menggelinding di atasnya khususnya persamaan lendutan mempunyai titik kesetimbangan yang dapat ditentukan jenis kestabilannya yaitu $E_1(y_1^*, y_2^*) = (0,0)$ dan $E_2(y_1^*, y_2^*) = (\frac{gm_b + gm_d - F_r m_d}{4k_p}, 0)$. Menghasilkan nilai eigen kompleks $\lambda_1 = -0,05h + (6,4496h)i$ dan $\lambda_2 = -0,05h - (6,4496h)i$ dan dengan syarat $h < \delta$. Secara diskrit simulasinya dapat dipaparkan sebagai berikut:



Gambar 4.3 Grafik Sistem Persamaan 4.3 Saat $t \in [0, 10]$ Parameter: $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = 0,5$; $h = 0,001$;



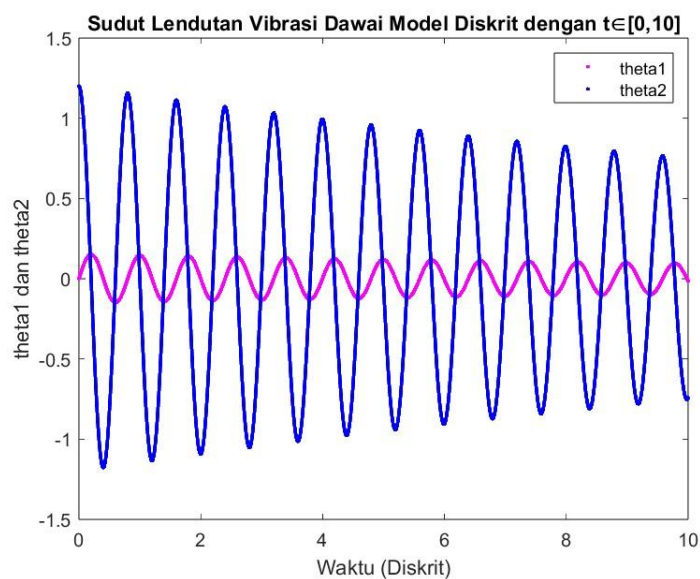
Gambar 4.4 Grafik Sistem Persamaan 4.3 Saat $t \in [0, 120]$ Parameter: $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = 0,5$; $h = 0,001$;

Grafik pada Gambar 4.3 menampilkan hasil simulasi numerik dari model diskrit lendutan pada dawai dikenai massa menggeling di atasnya dalam rentang waktu $t \in [0, 10]$ atau 10 detik. Kondisi awal $y_1(0) = 0$ dan $y_2(0) = 0,5$ digunakan sebagai syarat khusus dalam persamaan diferensial biasa. Dari grafik tersebut terlihat bahwa hasil simulasi menunjukkan eksistensi titik kesetimbangan yang stabil. Ini dapat dilihat dari arah solusi menuju titik kesetimbangan. Begitu

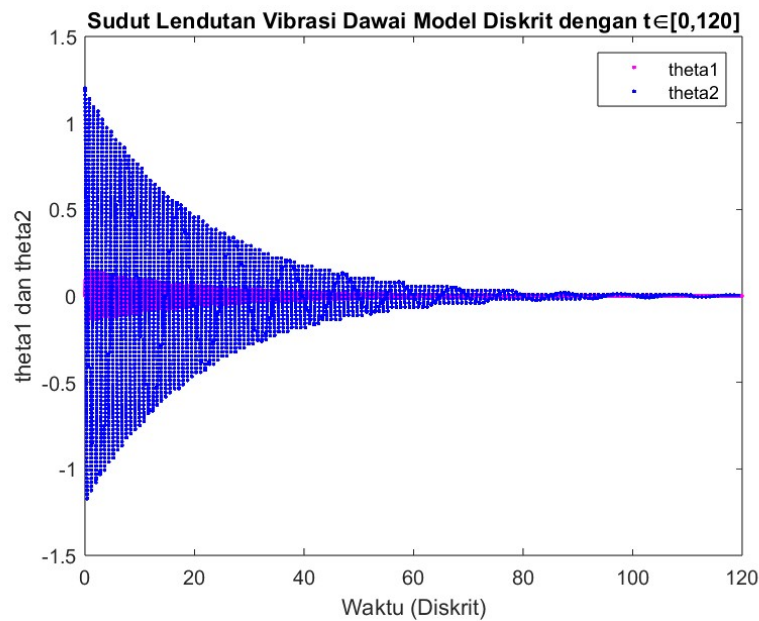
juga dengan hasil nilai eigen berupa bilangan negatif kompleks. Dengan demikian model yang dianalisis bersifat stabil dengan parameter yang digunakan. Pada gambar 4.4 terlihat bahwa pergerakan lendutan pada grafik $y(t)$ mulai stabil pada detik ke 120, ketika waktu lendutan dawai diperpanjang menjadi $t \in [0,120]$. Ini mengindikasikan bahwa seiring berjalannya waktu, nilai lendutan dawai menunjukkan perilaku realistik dimana dawai akan kembali stabil seperti posisi semula dengan penambahan waktu.

Kedua: Simulasi Sudut Lendutan Vibrasi Dawai Dikenai Massa Menggelinding di Atasnya

Berdasarkan hasil analisis yang diperoleh, model diskrit vibrasi dawai dikenai massa menggelinding di atasnya khususnya persamaan sudut lendutan mempunyai titik kesetimbangan yang dapat ditentukan jenis kestabilannya yaitu $E_1(\theta_1^*, \theta_2^*) = (0,0)$ dan $E_2(\theta_1^*, \theta_2^*) = (\frac{\beta}{-\alpha-\gamma}, 0)$. Menghasilkan nilai eigen kompleks $\lambda_3 = 0,99995 + 0,000789i$ dan $\lambda_4 = 0,99995 - 0,000789i$. Secara diskrit simulasinya dapat dipaparkan sebagai berikut:



Gambar 4.5 Grafik Sistem Persamaan 4.4 Saat $t \in [0,10]$ dengan Parameter: $\theta_1(0) = 0$; $\theta_2(0) = 1,2$; $h = 0,00001$; $\alpha = 0,001582$; $\beta = 0,0066667$; $\gamma = 62,399999$

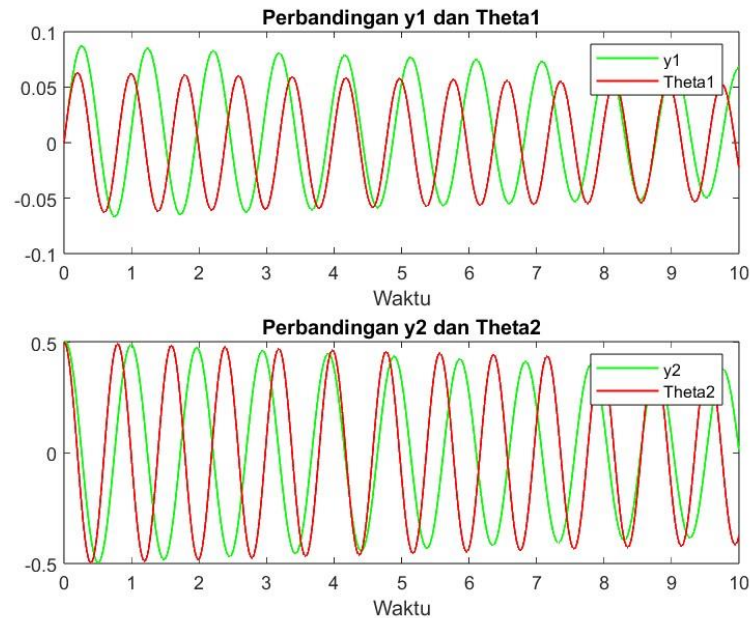


Gambar 4.6 Grafik Sistem Persamaan 4.4 Saat $t \in [0,120]$ dengan Parameter: $\theta_1(0) = 0$; $\theta_2(0) = 1,2$; $h = 0,00001$; $\alpha = 0,001582$; $\beta = 0,0066667$; $\gamma = 62,399999$

Grafik pada Gambar 4.5 menunjukkan hasil simulasi numerik dari model diskrit sudut lendutan pada dawai yang dikenai massa menggeling di atasnya dalam rentang waktu $t \in [0,10]$ dengan kondisi awal $\theta_1(0) = 0$ dan $\theta_2(0) = 1,2$ sebagai syarat khusus pada persamaan diferensial biasa. Dari grafik tersebut, terlihat bahwa hasil simulasi menunjukkan eksistensi dan stabilitas titik kesetimbangan, yang dapat dilihat dari arah solusi yang konvergen ke titik kesetimbangan, seiring dengan nilai eigen yang menghasilkan bilangan kompleks negatif. Dengan demikian, model yang dianalisis menunjukkan sifat kestabilan dengan parameter yang digunakan. Ketika waktu lendutan dawai diperpanjang hingga $t \in [0,120]$ atau pada detik ke 120 yang ditunjukkan dalam Gambar 4.6, pergerakan lendutan pada grafik $\theta(t)$ mulai stabil pada detik ke 80. Hal ini menunjukkan bahwa perilaku realistik dimana, seiring dengan penambahan waktu, nilai lendutan dawai kembali stabil seperti posisi semula.

4.2.2 Perbandingan $y_1(t)$ dengan $\theta_1(t)$ dan $y_2(t)$ dengan $\theta_2(t)$

Pada bagian ini digambarkan perbandingan $y_1(t)$ dengan $\theta_1(t)$ dan $y_2(t)$ dengan $\theta_2(t)$ diperoleh profil grafik sebagai berikut:



Gambar 4.7 Perbandingan $y_1(t)$ dengan $\theta_1(t)$ dan $y_2(t)$ dengan $\theta_2(t)$ pada Sistem Persamaan 4.3 dan 4.4 Saat $t \in [0,10]$

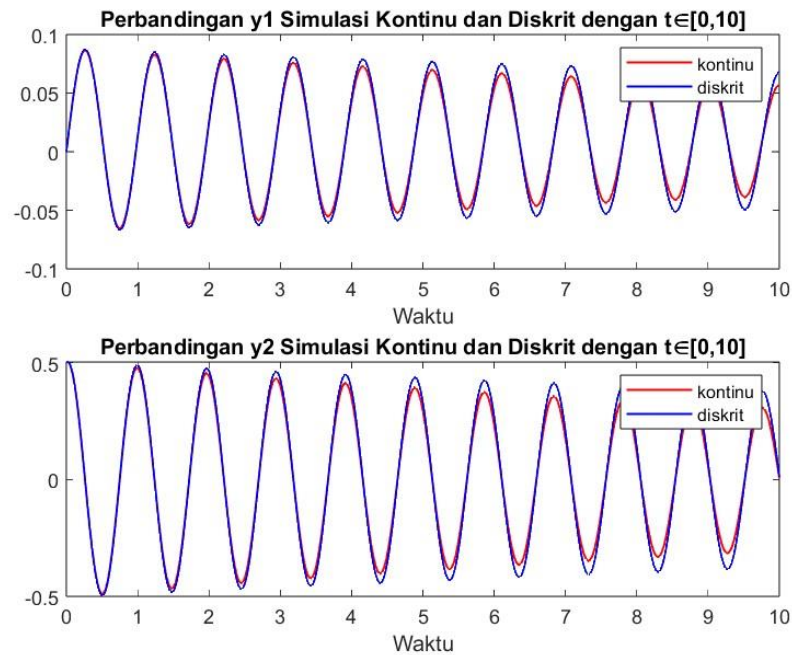
Pada Gambar 4.7 merupakan hasil perbandingan solusi antara $y_1(t)$ dengan $\theta_1(t)$ dan $y_2(t)$ dengan $\theta_2(t)$ model diskrit pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai ketika $t \in [0,10]$. Kedua grafik menunjukkan bahwa $y_1(t)$ dan $\theta_1(t)$ serta $y_2(t)$ dan $\theta_2(t)$ memiliki hubungan yang nonlinear. Perubahan $\theta_1(t)$ dan $\theta_2(t)$ memengaruhi nilai $y_1(t)$ dan $y_2(t)$, dengan amplitudo yang bervariasi tergantung pada nilai parameter.

4.3 Perbandingan Hasil Simulasi Model Diskrit dan Kontinu

Pada bagian ini akan disajikan perbandingan (selisih nilai) $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\theta_1(t)$, dan $\theta_2(t)$ pada kondisi diskrit dan kontinu untuk vibrasi dawai

yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai. Pada hasil simulasi numerik kontinu akan diasumsikan $y_1 = \widehat{y}_1$, $y_2 = \widehat{y}_2$, $\theta_1 = \widehat{\theta}_1$ dan $\theta_2 = \widehat{\theta}_2$.

Perbandingan solusi $y(t)$ kondisi diskrit dan kontinu pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai dapat digambarkan pada profil grafik berikut ini:



Gambar 4.8 Perbandingan y_1 dan y_2 Model Kontinu dan Diskrit pada Sistem Persamaan 4.1 dan 4.3, dengan $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = 0,5$

Pada gambar 4.8 merupakan grafik solusi $y(t)$ pada kondisi diskrit dan kontinu untuk vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai ketika $t \in [0,10]$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa sistem persamaan diskrit sudah mendekati persamaan kontinunya. Untuk menunjukkan perbedaan yang signifikan antara hasil numerik dengan menggunakan model diskrit dan kontinu tersebut dapat dilihat pada tabel sebagai berikut.

Tabel 4.1 Perbandingan Hasil Simulasi Numerik Model Diskrit dan Kontinu y_1

Waktu	Nilai y_1		
	$\hat{y}_1$ (Kontinu)	y_1 (Diskrit)	Selisih $ \hat{y}_1 - y_1 $
0	0	0	0
0.2	0.0811	0.0799	0.0012
0.4	0.0485	0.0603	0.0118
0.6	-0.0381	-0.0324	0.0057
0.8	-0.0619	-0.0633	0.0014
1	0.0169	0.0109	0.006
1.2	0.0826	0.0823	0.0003
1.4	0.0434	0.0488	0.0054
1.6	-0.048	-0.0409	0.0071
1.8	-0.0519	-0.0566	0.0047
2	0.0322	0.0226	0.0096
2.2	0.0794	0.0825	0.0031
2.4	0.0272	0.0364	0.0092
2.6	-0.046	-0.0473	0.0013
2.8	-0.0409	-0.0484	0.0075
3	0.0435	0.0342	0.0093
3.2	0.0752	0.0806	0.0054
3.4	0.0124	0.0249	0.0125
3.6	-0.05	-0.0521	0.0021
3.8	-0.0295	-0.0391	0.0096
4	0.0422	0.044	0.0018
4.2	0.0683	0.0768	0.0085
4.4	0.0118	0.0131	0.0013
4.6	-0.0509	-0.0551	0.0042
4.8	-0.018	-0.029	0.011
5	0.0502	0.0519	0.0017
5.2	0.06	0.0715	0.0115
5.4	-0.0008	0.0019	0.0027
5.6	-0.0492	-0.0558	0.0066
5.8	-0.0054	-0.0184	0.013
6	0.0559	0.0586	0.0027
6.2	0.0574	0.0647	0.0073
6.4	-0.0116	-0.0084	0.0032
6.6	-0.0453	-0.0548	0.0095
6.8	-0.0044	-0.0076	0.0032
7	0.0593	0.0635	0.0042
7.2	0.0485	0.0568	0.0083
7.4	-0.0203	-0.0177	0.0026
7.6	-0.0426	-0.052	0.0094
7.8	0.0073	0.003	0.0043
8	0.0606	0.0667	0.0061
8.2	0.0388	0.048	0.0092
8.4	-0.027	-0.026	0.001
8.6	-0.0369	-0.0476	0.0107
8.8	0.0181	0.0133	0.0048
9	0.0583	0.0681	0.0098
9.2	0.0285	0.0386	0.0101

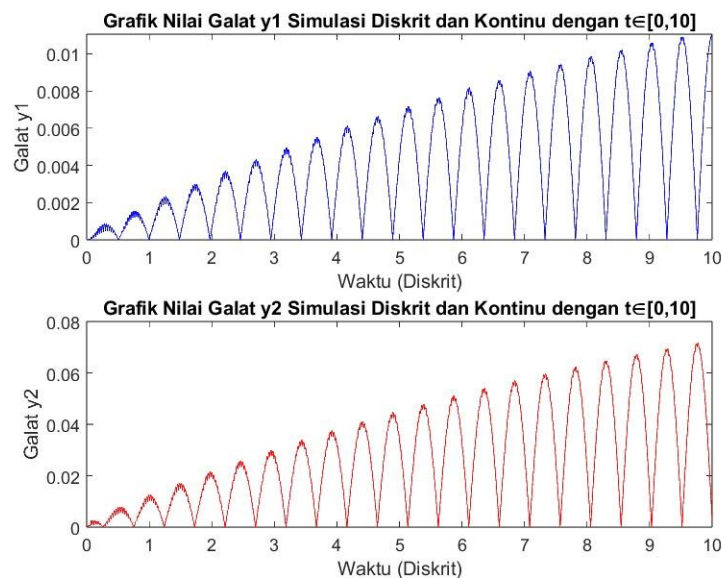
Waktu	Nilai y_1		
	$\hat{y}_1$ (Kontinu)	y_1 (Diskrit)	Selisih $ \hat{y}_1 - y_1 $
9.4	-0.026	-0.0325	0.0065
9.6	-0.03	-0.0419	0.0119
9.8	0.0282	0.0228	0.0054
10	0.0568	0.0678	0.011

Tabel 4.2 Perbandingan Hasil Simulasi Numerik Model Diskrit dan Kontinu y_2

Waktu	Nilai y_2		
	$\hat{y}_2$ (Kontinu)	y_2 (Diskrit)	Selisih $ \hat{y}_2 - y_2 $
0	0.5	0.5	0
0.2	0.1851	0.2081	0.023
0.4	-0.4261	-0.3775	0.0486
0.6	-0.3766	-0.4119	0.0353
0.8	0.1495	0.1481	0.0014
1	0.4759	0.4888	0.0129
1.2	0.0453	0.126	0.0807
1.4	-0.4169	-0.4138	0.0031
1.6	-0.2751	-0.3504	0.0753
1.8	0.2358	0.2174	0.0184
2	0.4297	0.4668	0.0371
2.2	0.0273	0.042	0.0147
2.4	-0.4321	-0.4376	0.0055
2.6	-0.2548	-0.2851	0.0303
2.8	0.2941	0.2768	0.0173
3	0.3716	0.4319	0.0603
3.2	-0.0709	-0.0326	0.0383
3.4	-0.4237	-0.4459	0.0222
3.6	-0.1658	-0.2135	0.0477
3.8	0.3325	0.3251	0.0074
4	0.3524	0.3876	0.0352
4.2	-0.1535	-0.1049	0.0486
4.4	-0.4036	-0.4423	0.0387
4.6	-0.08	-0.1374	0.0574
4.8	0.3543	0.3616	0.0073
5	0.2891	0.3368	0.0477
5.2	-0.2127	-0.1702	0.0425
5.4	-0.3774	-0.4267	0.0493
5.6	0.0002	-0.0642	0.0644
5.8	0.3638	0.386	0.0222
6	0.2204	0.2782	0.0578
6.2	-0.2045	-0.2271	0.0226
6.4	-0.3371	-0.4002	0.0631
6.6	0.0724	0.0066	0.0658
6.8	0.3469	0.3984	0.0515
7	0.1482	0.2153	0.0671
7.2	-0.2472	-0.2744	0.0272
7.4	-0.2868	-0.364	0.0772
7.6	0.0711	0.0732	0.0021
7.8	0.34	0.399	0.059
8	0.0696	0.1499	0.0803

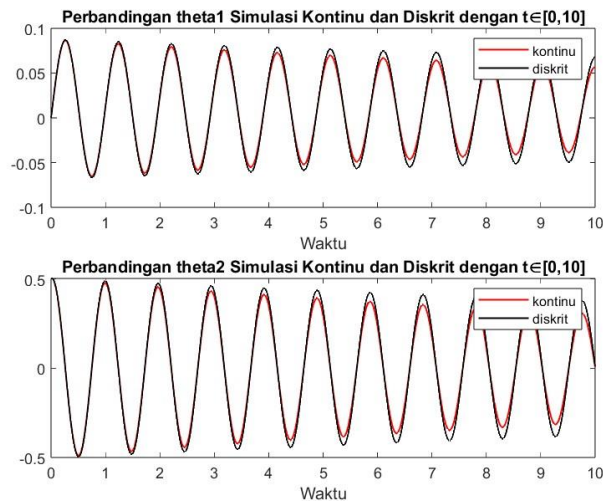
Waktu	Nilai y_2		
	$\hat{y}_2$ (Kontinu)	y_2 (Diskrit)	Selisih $ \hat{y}_2 - y_2 $
8.2	-0.2766	-0.3115	0.0349
8.4	-0.2284	-0.3183	0.0899
8.6	0.1312	0.134	0.0028
8.8	0.3182	0.3884	0.0702
9	0.0611	0.084	0.0229
9.2	-0.2936	0.2028	0.4964
9.4	-0.2125	0.1601	0.3726
9.6	0.1789	0.1876	0.0087
9.8	0.2822	0.0654	0.2168
10	0.0049	0.0196	0.0147

Selisih pada kondisi diskrit dan kontinu untuk lendutan vibrasi dawai pada grafik diatas akan disajikan dalam bentuk plot grafik. Berikut ini merupakan grafik selisih y_1 dan y_2 :



Gambar 4.9 Grafik Nilai Galat y_1 dan y_2 Model Diskrit dan Model Kontinu

Selanjutnya perbandingan solusi $\theta(t)$ model diskrit dan kontinu pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai dapat digambarkan pada profil grafik berikut ini:



Gambar 4.10 Perbandingan θ_1 dan θ_2 Model Kontinu dan Diskrit pada Sistem Persamaan 4.2 dan 4.4 dengan $\theta_1(0) = 0$; $\theta_2(0) = 1,2$

Pada gambar 4.10 merupakan grafik solusi $\theta(t)$ model diskrit dan kontinu pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggeling di sepanjang dawai ketika $t \in [0,10]$. Pada grafik tersebut dapat dilihat bahwa sistem persamaan diskrit sudah mendekati persamaan kontinunya. Untuk menunjukkan perbedaan yang signifikan antara hasil numerik dengan menggunakan model diskrit dan kontinu tersebut dapat dilihat lampiran. pada tabel sebagai berikut:

Tabel 4.3 Perbandingan Hasil Simulasi Numerik Model Diskrit dan Kontinu θ_1

Waktu	Nilai θ_1		
	$\widehat{\theta}_1$ (Kontinu)	θ_1 (Diskrit)	Selisih $ \widehat{\theta}_1 - \theta_1 $
0	0	0	0
0.2	0.1508	0.1509	0.0001
0.4	-0.017	0.0057	0.0227
0.6	-0.1481	-0.1483	0.0002
0.8	0.0071	-0.0057	0.0128
1	0.1443	0.1453	0.001
1.2	-0.0152	0.0051	0.0203
1.4	-0.1411	-0.1428	0.0017
1.6	0.0181	-0.0049	0.023
1.8	0.1378	0.14	0.0022
2	-0.0195	0.0043	0.0238
2.2	-0.1351	-0.1376	0.0025
2.4	0.0195	-0.004	0.0235
2.6	0.1321	0.1348	0.0027
2.8	-0.0195	0.0031	0.0226

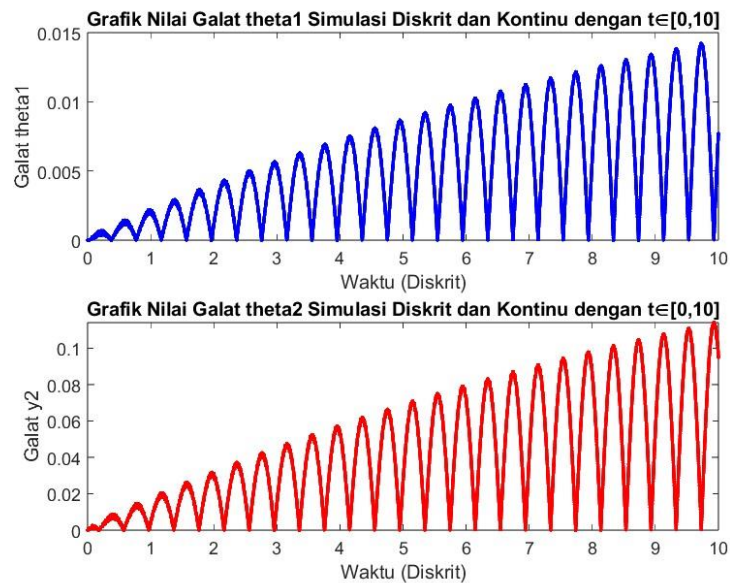
Waktu	Nilai θ_1		
	$\widehat{\theta}_1$ (Kontinu)	θ_1 (Diskrit)	Selisih $ \widehat{\theta}_1 - \theta_1 $
3	-0.1297	-0.1325	0.0028
3.2	0.019	-0.0028	0.0218
3.4	0.1269	0.1298	0.0029
3.6	-0.0188	0.0019	0.0207
3.8	-0.1246	-0.1276	0.003
4	0.0181	-0.0014	0.0195
4.2	0.1219	0.1251	0.0032
4.4	-0.0179	0.0005	0.0184
4.6	-0.1197	-0.1229	0.0032
4.8	0.0173	0.0002	0.0171
5	0.1171	0.1204	0.0033
5.2	-0.0171	-0.0011	0.016
5.4	-0.115	-0.1184	0.0034
5.6	0.0165	0.0017	0.0148
5.8	0.1125	0.116	0.0035
6	-0.0163	-0.0028	0.0135
6.2	-0.1104	-0.114	0.0036
6.4	0.0157	0.0033	0.0124
6.6	0.108	0.1116	0.0036
6.8	-0.0156	-0.0045	0.0111
7	-0.1061	-0.1097	0.0036
7.2	0.015	0.005	0.01
7.4	0.1038	0.1074	0.0036
7.6	-0.0149	-0.0061	0.0088
7.8	-0.1019	-0.1056	0.0037
8	0.0143	0.0067	0.0076
8.2	0.0997	0.1033	0.0036
8.4	-0.0142	-0.0079	0.0063
8.6	-0.0979	-0.1016	0.0037
8.8	0.0137	0.0085	0.0052
9	0.0958	0.0994	0.0036
9.2	-0.0136	-0.0095	0.0041
9.4	-0.0941	-0.0976	0.0035
9.6	0.013	0.0102	0.0028
9.8	0.092	0.0955	0.0035
10	-0.0159	-0.0112	0.0047

Tabel 4.4 Perbandingan Hasil Simulasi Numerik Model Diskrit dan Kontinu θ_2

Waktu	Nilai θ_2		
	$\widehat{\theta}_2$ (Kontinu)	$\widehat{\theta}_2$ (Kontinu)	$\widehat{\theta}_2$ (Kontinu)
0	1.2	1.2000	0
0.2	-0.0292	0.038	0.0672
0.4	-1.1669	-1.1774	0.0105
0.6	0.0016	-0.0359	0.0375
0.8	1.1508	1.1556	0.0048
1	-0.0996	0.0341	0.1337
1.2	-1.1222	-1.1343	0.0121
1.4	0.1383	-0.0324	0.1707

Waktu	Nilai θ_2		
	$\widehat{\theta}_2$ (Kontinu)	$\widehat{\theta}_2$ (Kontinu)	$\widehat{\theta}_2$ (Kontinu)
1.6	1.0963	1.1333	0.037
1.8	-0.1537	0.0293	0.183
2	-1.0728	-1.0927	0.0199
2.2	0.158	-0.0257	0.1837
2.4	1.0507	1.0725	0.0218
2.6	-0.1583	0.0215	0.1798
2.8	-1.0296	-1.0527	0.0231
3	0.1559	-0.017	0.1729
3.2	1.0091	1.0333	0.0242
3.4	-0.1534	0.0121	0.1655
3.6	-0.9891	-1.0142	0.0251
3.8	0.1498	-0.0068	0.1566
4	0.9695	0.9954	0.0259
4.2	-0.1469	0.0013	0.1482
4.4	-0.9504	-0.9769	0.0265
4.6	0.1432	0.0044	0.1388
4.8	0.9316	0.9588	0.0272
5	-0.1403	-0.0104	0.1299
5.2	-0.9132	-0.9409	0.0277
5.4	0.1368	0.0166	0.1202
5.6	0.8952	0.9234	0.0282
5.8	-0.1341	-0.0236	0.1105
6	-0.8775	-0.906	0.0285
6.2	0.1307	0.0293	0.1014
6.4	0.8602	0.889	0.0288
6.6	-0.1281	-0.0359	0.0922
6.8	-0.8432	-0.8722	0.029
7	0.1249	0.0431	0.0818
7.2	0.8265	0.8557	0.0292
7.4	-0.1225	-0.0491	0.0734
7.6	-0.8102	-0.8393	0.0291
7.8	0.1194	0.0557	0.0637
8	0.7942	0.8233	0.0291
8.2	-0.1172	-0.0624	0.0548
8.4	-0.7785	-0.8073	0.0288
8.6	0.1142	0.069	0.0452
8.8	0.7631	0.7917	0.0286
9	-0.1121	-0.0756	0.0365
9.2	-0.748	-0.7762	0.0282
9.4	0.1093	0.0828	0.0265
9.6	0.7332	0.7609	0.0277
9.8	-0.1073	-0.0893	0.018
10	-0.7147	-0.7459	0.0312

Selisih pada kondisi diskrit dan kontinu untuk lendutan vibrasi dawai pada grafik diatas akan disajikan dalam bentuk plot grafik. Berikut ini merupakan grafik selisih θ_1 dan θ_2 :



Gambar 4.11 Grafik Nilai Galat θ_1 dan θ_2 Model Diskrit dan Model Kontinu

4.4 Janji Kemudahan Allah dalam Diskritisasi

Pada Bab 1 telah dijelaskan mengenai keterkaitan Q.S Al-Lail ayat 5-7 dan diskritisasi yakni pada kata pada kata “yusra” yang berarti mudah. Kata “yusra” juga telah dijelaskan pada surah Al-Insyirah ayat 5-6. Ayat ini menurut tafsir Ibnu Katsir, menunjukkan bahwa Allah mengulangi apa yang telah Dia katakan bahwa akan ada kemudahan setelah kesulitan (Al-Sheikh, 2021). Pada Tafisr Al-Mukhtashar (Ebook Sunnah, 2021) dijelaskan bahwa, bersamaan dengan kesulitan, ada juga kemudahan. Jika kamu menyadari hal ini, jangan biarkan ketakutan akibat gangguan dari orang-orang membuatmu takut, dan jangan biarkan hal tersebut menghambatmu dalam menyebarkan dakwah di jalan Allah.

Hal ini dikaitkan dengan kegunaan dari diskritisasi yaitu membuat data lebih mudah dipahami dengan mereduksi dan menyederhanakannya. Diskritisasi, sebagai salah satu cara yang Allah berikan kemudahan kepada manusia, untuk memecah masalah kompleks yang harus diselesaikan. Dalam konteks ilmiah, diskritisasi melibatkan pemisahan fenomena ke dalam langkah-langkah diskrit, memungkinkan pemahaman yang lebih sistematis tentang dunia dan memfasilitasi pemahaman yang lebih baik, inovasi, dan kemajuan di berbagai bidang, termasuk sains dan teknologi. Hal ini dapat dilihat sebagai bentuk rahmat dan kemudahan yang diberikan Allah kepada manusia, sehingga memungkinkan mereka untuk hidup lebih baik dalam kompleksitas kehidupan.

Islam meyakini bahwa setiap masalah pasti memiliki jalan keluar dan ada penyelesaiannya. Jika seseorang menghadapi masalah tidak segera menemukan solusinya, Islam mengharuskan untuk tetap konsisten (istiqamah) dalam menjalani jalan yang diberikan oleh Allah SWT. Tujuannya adalah agar seseorang tidak terputus dari rahmat-Nya. Dengan tetap istiqamah di jalan Allah SWT., diyakini bahwa Allah SWT. akan memberikan kemudahan dari jalan yang tidak terduga. Melihat janji Allah yang demikian, diharapkan bahwa seorang hamba akan tetap istiqamah dalam ketaatannya kepada-Nya.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dipaparkan pada Bab IV diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penelitian ini menggunakan model diskrit vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai. Model persamaan vibrasi dawai pada penelitian ini berbentuk persamaan diferensial biasa orde dua direduksi sehingga menghasilkan persamaan diferensial biasa orde satu. Dilakukan diskritisasi menggunakan metode *Euler Forward* menghasilkan sistem dinamik linier dan non linier. Linierisasi dilakukan pada persamaan diferensial yang bersifat non linier. Pada masing-masing sistem dinamik didapatkan titik kesetimbangan yaitu $E_1(y_1^*, y_2^*) = (0,0)$, $E_2(y_1^*, y_2^*) = (\frac{gm_b + gm_d - F_r m_d}{4k_p}, 0)$ dan $E_1(\theta_1^*, \theta_2^*) = (0,0)$, $E_2(\theta_1^*, \theta_2^*) = (\frac{\beta}{-\alpha - \gamma}, 0)$, sehingga dapat ditentukan jenis kestabilannya. Titik kesetimbangan $E_2(y_1^*, y_2^*)$ dan $E_2(\theta_1^*, \theta_2^*)$ bersifat stabil bersifat stabil (sink) jika $h < \delta$.
2. Pada bagian simulasi dan interpretasi dilakukan simulasi numerik model diskrit vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai dapat disimpulkan bahwa pergerakan lendutan grafik mencapai kestabilan pada $t = 120$. Sedangkan sudut lendutan grafik mencapai kestabilan pada $t = 80$. Hal ini mengindikasikan bahwa amplitudo lendutan dan sudut lendutan dawai semakin mengecil seiring berjalannya waktu dan akhirnya mencapai titik stabil pada waktu tertentu.

3. Dari Perbandingan grafik simulasi diskrit dan kontinu pada vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding, terlihat bahwa keduanya menunjukkan adanya titik kesetimbangan eksis dan bersifat stabil. Selisih nilai pada simulasi kondisi diskrit dan kontinu untuk $y_1(t)$ secara bertahap meningkat hingga mencapai $y_1 = 0.0015$ pada $t = 0.27$, kemudian turun perlahan hingga mencapai 0,0000192 di $t = 0.5$ dan kembali naik pada $t = 0.56$ dalam rentang waktu $t \in [0,10]$. Sementara itu, nilai selisih pada $y_2(t)$ juga mengalami kenaikan bertahap hingga mencapai $y_2 = 0.01$ pada $t = 0.7$, turun perlahan hingga mencapai 0,00192 di $t = 0.8$ dan kembali naik pada $t = 0.81$ dalam rentang waktu $t \in [0,10]$. Demikian pula, selisih nilai pada $\theta_1(t)$ secara bertahap naik hingga mencapai $\theta_1 = 0.9$ pada $t = 0.25$, kemudian turun perlahan hingga mencapai 0,192 di $t = 0,45$ dan naik kembali pada $t = 0.46$, sedangkan nilai selisih pada $\theta_2(t)$ naik secara bertahap hingga mencapai $\theta_2 = 0.0078$ pada $t = 0.45$, kemudian turun perlahan hingga mencapai nilai 0,0019 di $t = 0,65$ dan kembali naik pada $t = 0.66$ dalam rentang waktu $t \in [0,10]$. Kondisi ini menyebabkan grafik yang dihasilkan pada kedua persamaan yaitu $y(t)$ dan $\theta(t)$ menunjukkan fluktuatif, dengan kenaikan dan penurunan yang teratur

5.2 Saran

Penelitian ini memfokuskan pada eksplorasi analisis dinamik model diskrit vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai. Pada penelitian selanjutnya diharapkan membahas tentang analisis kestabilan dari model

matematika vibrasi dawai yang dikenai massa menggelinding di sepanjang dawai dengan mengeksplorasi nilai parameter real yang relevan dengan model.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Sheikh, D. A. B. M. B. A. B. I. (2021). *Tafsir Ibnu Katsir Lengkap Jilid 1-8*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2009). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (9th ed.). Laurie Rosatone.
- Creswell, J. W. (2010). *Research design pendekatan kualitatif, kuantitatif, dan mixed*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Ebook Sunnah. (2021). *Terjemah Tafsir As Sa'diy (Al Fatihah dan Juz 'Amma)*. Indonesia Bertauhid. https://ebooksunnah.com/id_ID/ebooks/terjemah-tafsir-as-sadiy-al-fatihah-dan-juz-amma
- Elaydi, S. (2005). *An Introduction to Difference Equations* (Third). Springer.
- Haidar, H., Muslim, M., Ismai'il, A. A., & Basyir, H. (2016). *At-Tafsir al-Muyassar*. Jakarta: Darul Haq.
- Hardani, Auliya, N. H., Andriani, H., Fardani, R. A., Ustiawaty, J., Sukmana, D. J., & Istiqomah, R. R. (2020). *Buku Metode Penelitian Kualitatif & Kuantitatif* (H. Abdadi (ed.); Cetakan I:). Yogyakarta: Pustaka Ilmu.
- Hussain, F., Tan, C., Dash, M., & Liu, H. (2002). Discretization: An Enabling Technique. *Data Mining and Knowledge Discovery*, 6(4), 393–423.
- Janah, M. (2022). Model Matematika Vibrasi Dawai Dikenai Massa yang Berjalan di Atasnya. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, 1(4), 165–174. <https://doi.org/10.18860/jrmm.v1i4.14446>
- Kementrian Agama RI. (2022). *Quran Kemenag*. Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an. <https://quran.kemenag.go.id/>
- Lapidus, L. (1999). Numerical solution of partial differential equations in science and engineering. *Advances in Water Resources*, 5(4), 254. [https://doi.org/10.1016/0309-1708\(82\)90014-8](https://doi.org/10.1016/0309-1708(82)90014-8)
- Maya, R. (2014). *Persamaan Diferensial Biasa* (6th ed., Issue 6). Bandung: Diklat Kuliah UIN Sunan Gunung Djati.
- McKenna. (1999). *Large Torsional Oscillations in Suspension Bridges Revisited : Fixing an Old Approximation Author (s) : P . J . McKenna Source : The American Mathematical Monthly , Vol . 106 , No . 1 (Jan . , 1999) , pp . 1-18 Published by : Mathematical Association of . 106(1), 1–18.*
- McKenna, P. J., & Walter, W. (1990). Travelling waves in a suspension bridge. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50(3), 703–715.

<https://doi.org/10.1137/0150041>

- Millenia, C. T. (2022). *Solusi Analitik untuk Model Matematika Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di sepanjang Dawai* [UIN Maulana Malik Ibrahim Malang]. <http://etheses.uin-malang.ac.id/43024/1/18610083.pdf>
- Munandar, A. (2017). *Analisis Konsistensi Dan Kestabilan Model Dinamik Diskret Pada Masalah Predator-Prey Dengan Fungsi Respon Ratio Dependent Dan Pemanenan Pada Predator* [UIN Maulana Malik Ibrahim Malang]. <http://etheses.uin-malang.ac.id/10571/1/12610074.pdf>
- Pratiwi, Y. M. (2022). *Solusi Numerik Model Matematika Vibrasi Dawai Yang Dikenai Massa Menggelinding Di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams- Dawai Yang Dikenai Massa Menggelinding Di Sepanjang Dawai Menggunakan Metode Adams-* [UIN Maulana Malik Ibrahim Malang]. <http://etheses.uin-malang.ac.id/43025/1/18610079.pdf>
- Ross, S. L. (2010). *Differential Equations Third Edition* (Wiley (ed.); Third Edit). New York: John Willey & Sons, Inc.
- Roza, I. Z. N., Pagalay, U., & Widayani, H. (2021). *Simulasi Model Diskrit Respon Sistem Imun Pada Penyebaran Tumor Otak Dengan Metode Beda Hingga Standar. Volume1(1)*, 79–92. <https://doi.org/10.18860/jrmm/v1i1.14045>
- Sinaga, L. P., Kartika, D., & Nasution, H. (2021). *Pengantar Sistem Dinamik*. Amal Insani Publisher.

LAMPIRAN

Lampiran 1 Program Maple untuk Analisis Dinamik Persamaan Lendutan di Sekitar Titik Keseimbangan

```

> restart; unprotect('gamma'); with(linalg) :
> dy1 := h*y2;
                                     dy1 := h y2
> dy2 := -h*delta*y2 - h*lambda*y1 + h*(mb + md)*g/md - hFr,
                                     dy2 := -h delta y2 - h lambda y1 + h (mb + md) g/md - hFr
> fixed := solve({dy1, dy2}, {y1, y2});
                                     fixed := {y1 = h g mb + h g md - hFr md / h lambda md, y2 = 0}
> titik1 := fixed[1];
                                     titik1 := y1 = h g mb + h g md - hFr md / h lambda md
> titik2 := fixed[2];
                                     titik2 := y2 = 0

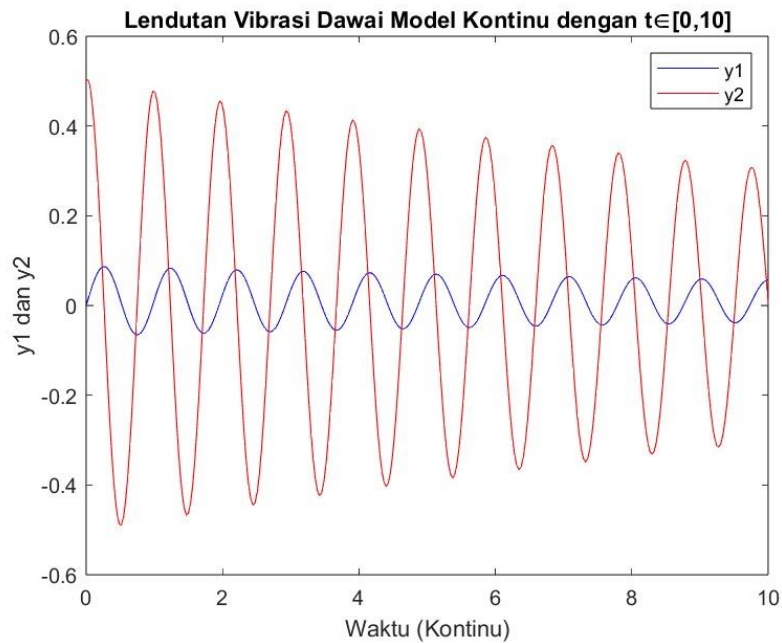
```


Lampiran 3 Tabel Perbandingan K dengan U dan L dengan V Model Vibrasi Dawai yang Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai dengan $t \in [0, 10]$

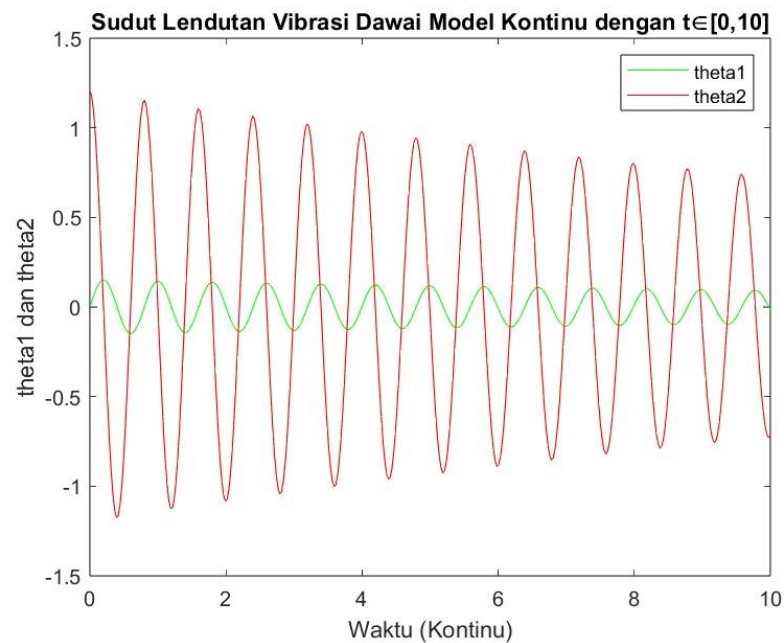
Waktu	y_1 (Diskrit)	θ_1 ((Diskrit)	y_2 (Diskrit)	θ_2 (Diskrit)
0	0	0	0.5	1.2000
0.2	0.0799	0.1509	0.2081	0.038
0.4	0.0603	0.0057	-0.3775	-1.1774
0.6	-0.0324	-0.1483	-0.4119	-0.0359
0.8	-0.0633	-0.0057	0.1481	1.1556
1.01	0.0109	0.1453	0.4888	0.0341
1.21	0.0823	0.0051	0.126	-1.1343
1.41	0.0488	-0.1428	-0.4138	-0.0324
1.62	-0.0409	-0.0049	-0.3504	1.1333
1.81	-0.0566	0.14	0.2174	0.0293
2.02	0.0226	0.0043	0.4668	-1.0927
2.2	0.0825	-0.1376	0.042	-0.0257
2.4	0.0364	-0.004	-0.4376	1.0725
2.6	-0.0473	0.1348	-0.2851	0.0215
2.81	-0.0484	0.0031	0.2768	-1.0527
3.02	0.0342	-0.1325	0.4319	-0.017
3.2	0.0806	-0.0028	-0.0326	1.0333
3.42	0.0249	0.1298	-0.4459	0.0121
3.62	-0.0521	0.0019	-0.2135	-1.0142
3.81	-0.0391	-0.1276	0.3251	-0.0068
4	0.044	-0.0014	0.3876	0.9954
4.22	0.0768	0.1251	-0.1049	0.0013
4.4	0.0131	0.0005	-0.4423	-0.9769
4.61	-0.0551	-0.1229	-0.1374	0.0044
4.8	-0.029	0.0002	0.3616	0.9588
5	0.0519	0.1204	0.3368	-0.0104
5.22	0.0715	-0.0011	-0.1702	-0.9409
5.4	0.0019	-0.1184	-0.4267	0.0166
5.62	-0.0558	0.0017	-0.0642	0.9234
5.8	-0.0184	0.116	0.386	-0.0236
6.01	0.0586	-0.0028	0.2782	-0.906
6.2	0.0647	-0.114	-0.2271	0.0293
6.41	-0.0084	0.0033	-0.4002	0.889
6.62	-0.0548	0.1116	0.0066	-0.0359
6.8	-0.0076	-0.0045	0.3984	-0.8722
7.01	0.0635	-0.1097	0.2153	0.0431
7.2	0.0568	0.005	-0.2744	0.8557
7.41	-0.0177	0.1074	-0.364	-0.0491
7.6	-0.052	-0.0061	0.0732	-0.8393
7.8	0.003	-0.1056	0.399	0.0557
8	0.0667	0.0067	0.1499	0.8233
8.2	0.048	0.1033	-0.3115	-0.0624
8.4	-0.026	-0.0079	-0.3183	-0.8073
8.6	-0.0476	-0.1016	0.134	0.069
8.8	0.0133	0.0085	0.3884	0.7917

Waktu	y_1 (Diskrit)	θ_1 ((Diskrit)	y_2 (Diskrit)	θ_2 (Diskrit)
9	0.0681	0.0994	0.084	1.1433
9.2	0.0386	-0.0095	0.2028	1.1410
9.4	-0.0325	-0.0976	0.1601	1.1386
9.6	-0.0419	0.0102	0.1876	1.1362
9.8	0.0228	0.0955	0.0654	1.1337
10	0.0678	-0.0112	0.0196	1.1309

Lampiran 4 Grafik Sistem Persamaan 4.1 dan 4.2



Gambar 1 Grafik Persamaan 4.1 Saat $t \in [0,10]$ dengan Parameter: $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = 0,5$; $m_d = 250$; $m_b = 10$; $F_r = 10$; $g = 10$; $k_p = 2600$;



Gambar 2 Grafik Persamaan 4.2 Saat $t \in [0,10]$ dengan Parameter: $\theta_1(0) = 0$; $\theta_2(0) = 1,2$; $\alpha = 0,001582$; $\beta = 0,0066667$; $\gamma = 62,399999$

RIWAYAT HIDUP



Hana Intan Wahyu Wijayanti, biasa dipanggil Hana, lahir di Blitar, 25 Desember 2001. Penulis merupakan anak kedua dari 2 bersaudara dari pasangan Bapak Karyanto dan Ibu Siti Mujiati. Penulis bertempat tinggal di Kecamatan Sutojayan, Kabupaten Blitar.

Penulis menempuh pendidikan dasar di SD Negeri 01 Sukorejo (2008-2014), SMP Negeri 01 Sutojayan (2014-2017), SMA Negeri 01 Sutojayan (2017-2020). Selanjutnya penulis menempuh pendidikan tinggi di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2020 melalui jalur SNMPTN.

Selama menempuh pendidikan tinggi, penulis mengikuti organisasi HMPS “Integral” Matematika sebagai anggota divisi EPR, di periode berikutnya penulis melanjutkan menjadi Kadiv divisi EPR. Selain itu, penulis juga aktif di kegiatan eksternal seperti IKAHIMATIKA Indonesia Wilayah V sebagai Wakil Koordinator Sub-Wilayah VI (2021-2023), IYOIN Lc Malang sebagai *Treasury* (2022-2023), Relawan Komunitas Belajar Al-Qur'an Braille Malang (2022-2023), dan anggota Komunitas YN Malang (2023-sekarang). Penulis juga mengasah *skill* nya dengan mengikuti Program *Talent Class 8 Talenthub Desain Graphic with Canva* (Juli 2023). Penulis juga pernah menjadi asisten laboratorium Praktikum Pemodelan Matematika selama satu semester, mengikuti Riset Kompetitif Mahasiswa tahun 2023 serta menjadi tutor privat matematika (2022-sekarang). Penulis dapat dihubungi melalui *e-mail*: hwijayanti20@gmail.com.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Hana Intan Wahyu Wijayanti
NIM : 200601110025
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Diskrit Pada Vibrasi Dawai Dikenai Massa Menggelinding di Sepanjang Dawai
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd., M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	11 September 2023	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	18 September 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	10 Oktober 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	26 Oktober 2023	ACC Bab I, II, dan III	4.
5.	27 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	02 November 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	6.
7.	16 November 2023	ACC Seminar Proposal	7.
8.	11 Januari 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	1 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	07 Maret 2024	ACC Bab IV dan V	10.
11.	05 Februari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	11.
12.	05 Februari 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	12.
13.	19 Maret 2024	ACC Seminar Hasil	13.
14.	13 Mei 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	14.



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

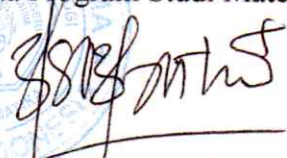
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
15.	27 Mei 2024	ACC Sidang Skripsi	15. 
16.	10 Juni 2024	ACC Keseluruhan	16. 

Malang, 10 Juni 2024

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika


Dr. Elly Susanti, M.Sc.

NIP. 19741129 200012 2 005