

**COLOR DIGRAPH DAN CAYLEY COLOR DIGRAPH
DARI GRUP SIKLIK z_n DENGAN n BILANGAN PRIMA**

SKRIPSI

Oleh:
ABDUL JALIL
NIM. 04510009



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009**

**COLOR DIGRAPH DAN CAYLEY COLOR DIGRAPH
DARI GRUP SIKLIK Z_n DENGAN N BILANGAN PRIMA**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Universitas Islam Negeri Malang

**Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Oleh:

ABDUL JALIL

NIM. 04510009

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG**

2009

**COLOR DIGRAPH DAN CAYLEY COLOR DIGRAPH
DARI GRUP SIKLIK Z_n DENGAN n BILANGAN PRIMA**

SKRIPSI

Oleh:

ABDUL JALIL

NIM. 04510009

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 06 Januari 2008

Pembimbing I

Pembimbing II

Abdussakir, M.Pd

NIP. 150 327 247

Abdul Aziz, M. Si

NIP. 150 377 256

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si

NIP. 150 318 321

**COLOR DIGRAPH DAN CAYLEY COLOR DIGRAPH
DARI GRUP SIKLIK Z_n DENGAN N BILANGAN PRIMA**

SKRIPSI

OLEH:

ABDUL JALIL

NIM 04510009

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: Januari 2009

Susunan Dewan Penguji:

Tanda Tangan

- | | | | |
|------------------|-------------------------|---|---|
| 1. Penguji Utama | : Evawati Alisah, M.Pd | (|) |
| 2. Ketua | : Wahyu H. Irawan, M.Pd | (|) |
| 3. Sekretaris | : Abdussakir, M.Pd | (|) |
| 4. Anggota | : Abdul Azis, M.Si | (|) |

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si

NIP 150 318 321

Motto

*Argumen terbaik adalah yang
produktif walaupun sedikit*

Karya sederhana ini kupersembahkan kepada:

Ayahanda Ahmad Suruji Zakariyya dan Ibunda Khudzaifah Abdul Hamid

Karena kalianlah ananda dapat merasakan manis dan indahnya ilmu.

*Istriku tercinta, Nurul Imamah yang memberikanku warna-warni indah
kehidupan, terima kasih dan jadilah sahabatku seumur hidupku, Dambaan
hatiku, Penggerak jiwa yang kaku. terimakasih tuk semuanya.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Shalawat dan salam semoga senantiasa dilimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, para Shahabat, segenap orang yang mengikuti dan menjalankan Sunnahnya serta mencintainya.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, utamanya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Bapak Abdussakir, M.Pd yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang matematika..
5. Bapak Abdul Azis, M.Si yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang agama..

6. Segenap dosen Matematika UIN Malang yang telah banyak mengajarkan ilmu kepada penulis.
7. Kedua orang tua tercinta, Ayahanda Ach. Suruji Zakariya dan Umi Khuzaifah Abdul Hamid yang senantiasa dan selalu mendidik, mencintai dan menyayangi. Dan karena dorongan semangat beliau yang memberikakanku kekuatan, semoga Allah selalu memberikan kesehatan, kebahagiaan dunia-akhirat dan umur panjang. Amin
8. Istri tercinta Nurul Imamah S.Si dan segenap keluarga yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis.
9. Mba' Khuzairoh dan adik Misbahul Munir serta Pamanda Ach. Syafi'ie, S.Pd beserta keluarga besar Bani Abdillah yang telah memberikan dorongan dan semangat untuk segera menyelesaikan penulisan skripsi ini.
10. Ustad Syamsul Ulum beserta keluarga terimakasih atas dukungan dan do'anya.
11. Temanteman seperjuangan dan komonitas Ta'mir Mushallla At-Taubah, Anwar, Zainuddin, Umam, Iqbal, dan Dimas yang telah berjuang bersama dalam menyelesaikan studi.
12. Teman-teman Matematika, terutama angkatan 2004 beserta semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 06 Januari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN

KATA PENGANTAR..... i

DAFTAR ISI iii

DAFTAR GAMBAR iv

ABSTRAK vi

BAB I: PENDAHULUAN..... 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Rumusan Masalah 6

1.3 Tujuan Penulisan 7

1.4 Batasan Masalah..... 7

1.5 Metode Penelitian 7

1.6 Manfaat Penulisan 8

1.7 Sistematika Pembahasan..... 9

BAB II: KAJIAN TEORI..... 11

2.1 Digraf..... 11

2.1.1 Definisi Digraf..... 11

2.1.2 Derajat Titik 12

2.1.3 Digraf Terhubung (*Connected*)..... 13

2.1.4 Digraf Hamilton..... 16

2.2 *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph*..... 16

2.3 Operasi Biner	17
2.4 Grup	17
2.4.1 Definisi Grup	17
2.4.2 Grup Siklik	17
2.5 Kajian tentang Grup Dan Digraf dalam Al-Qur'an dan Hadits	24
BAB III: PEMBAHASAN	31
3.1 <i>Color Digraph</i> dan <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_3	32
3.1.1 <i>Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_3	32
3.1.2 <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_3	34
3.2 <i>Color Digraph</i> dan <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_5	37
3.2.1 <i>Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_5	37
3.2.2 <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_5	40
3.3 <i>Color Digraph</i> dan <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_7	45
3.3.1 <i>Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_7	45
3.3.2 <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_7	51
BAB IV: PENUTUP	60
4.1 Kesimpulan	60
4.2 Saran	60
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
1.1 Representasi Ayat 190-191 Surat Ali Imran dengan Digraf	6
2.1 Digraf D	12
2.2 Digraf D	12
2.3 Jalan	14
2.4 Macam-Macam Digraf	15
2.5 Digraf K_4	15
2.7 Himpunan dalam Q.S Al-Fatihah ayat 7	25
2.8 Grup dan Digraf Dalam Al-Qur'an dan Hadits	26
2.9 Representasi Puasa dengan Digraf	30
3.1 <i>Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_3	33
3.2 Sikel Hamilton dari <i>Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_3	33
3.3 <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_3	35
3.4 <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_3	36
3.5 Sikel Hamilton dari <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_3	36
3.6 <i>Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_5	39
3.7 Sikel Hamilton dari <i>Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_5	40
3.8 <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_5	43
3.9 <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_5	44
3.10 Sikel Hamilton dari <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_5	44
3.11 <i>Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_7	50
3.12 Sikel Hamilton dari <i>Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_7	50
3.13 <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_7	55
3.14 <i>Cayley Color Digraph</i> dari Grup iklik Z_7	56

3.15 Cayley Color Digraph dari Grup iklik Z_7	58
3.16 Sikel Hamilton dari Cayley Color Digraph dari Grup iklik Z_5	59



ABSTRAK

Jalil, Abdul. 2009. **Color Digraph dan Cayley Color Digraph dari Grup Siklik Z_n dengan n Bilangan Prima. Skripsi**, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
Pembimbing: I. Abdussakir, M.Pd

II. Abdul Azis, M.Si

Kata kunci: *Digraph, Color Digraph, Cayley Color Digraph, Grup, Grup Siklik.*

Misal (G, o) adalah grup, (G, o) dikatakan grup siklik jika dan hanya jika terdapat $a \in G$ yang sedemikian hingga setiap elemen dari G dapat dibangkitkan/dibangun oleh a , dengan kata lain setiap elemen dari G dapat dituliskan sebagai perpangkatan dari a (*Integral power of a*).

Color digraph dari grup G adalah *digraph* yang titik-titiknya adalah semua anggota G , dan busur dari a ke b diwarnai $a^{-1}b$, untuk setiap $a, b \in G$. *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ yaitu misal diberikan Γ grup nontrivial yang berhingga dengan $\Delta = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ sebagai himpunan generator untuk Γ . Untuk $g_1, g_2 \in \Gamma$ akan terdapat suatu busur (g_1, g_2) yang berwarna h_i di $D_\Delta(\Gamma)$ jika dan hanya jika $g_2 = g_1 h_i$. Jika h_i adalah suatu elemen yang berorder 2 (inversnya dirinya sendiri atau $(h_i)^2 = 1$) $g_2 = g_1 h_i$, maka diperoleh $g_1 = g_2 h_i$.

Cara menentukan *Color Digraph* dari grup siklik adalah: (1). Menentukan warna dari titik u menuju v dengan cara mencari $u^{-1}v$ pada grup siklik Z_n dengan n bilangan Prima dan $3 \leq n \leq 7$. (2). Menggambarkan bentuk *Color digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan Prima dan $3 \leq n \leq 7$. (3). Menyimpulkan bentuk dari *Color Digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan Prima dan $3 \leq n \leq 7$ dan meneliti apakah terdapat siklus Hamilton pada digraph tersebut.

Cara menentukan *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik adalah: (1). Memilih generator yang merupakan subset dari grup siklik Z_n dengan n bilangan Prima dan $3 \leq n \leq 7$. (2). Menentukan warna busur dari dua titik yang *adjacent*. (3). Menentukan hasil *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik Z_n dengan n bilangan Prima dan $3 \leq n \leq 7$. (4). Menggambarkan bentuk *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik Z_n dengan n bilangan Prima dan $3 \leq n \leq 7$. (5). Menyimpulkan bentuk dari *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik Z_n dengan n bilangan Prima dan $3 \leq n \leq 7$ dan meneliti apakah terdapat Siklus Hamilton pada digraph tersebut.

Setelah dilakukan pengujian, maka dapat diketahui bahwa bentuk dari *color digraph* dan *cayley color digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan prima dan $3 \leq n \leq 7$ adalah digraf Hamilton

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak akan pernah lepas dari berbagai permasalahan-permasalahan yang menyangkut berbagai aspek, sehingga dalam penyelesaiannya diperlukan sebuah pemahaman melalui suatu metode atau ilmu bantu tertentu yang di antaranya adalah ilmu matematika. Matematika merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah. Dalam bahasa matematika, suatu masalah dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan. Untuk keperluan tersebut, pertama dicari pokok masalahnya, kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya.

Seiring dengan kemajuan dan perkembangan teknologi, ilmu matematika terus berkembang dan bercabang-cabang dan salah satu cabang ilmu matematika yang bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf dan teori digraf. Pada teori graf dan teori digraf diberikan model matematika untuk setiap himpunan dari sejumlah obyek diskret, dan beberapa pasangan unsur dari himpunan tersebut terikat menurut suatu aturan tertentu. Obyek diskret dari suatu himpunan misalnya dapat berupa orang-orang dengan aturan kenal, atau juga himpunan nama kota dengan aturan jalan yang menghubungkan antara kota satu ke kota yang lain. Aturan jalan yang menghubungkan antara kota satu dengan kota yang lainnya dapat diselesaikan dengan memakai teori graf ataupun teori digraf.

Sebagai salah satu dari cabang ilmu, teori graf dan teori digraf banyak manfaatnya dan sering digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, salah satu contohnya adalah masalah jembatan Konisberg dan merupakan suatu masalah yang pertama kali menggunakan graf (tahun 1736). Di kota Königsberg (sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman), sekarang bernama kota Kaliningrad, terdapat sungai Pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua anak sungai yang mempunyai tujuh jembatan yang menghubungkan daratan dan dibelah oleh sungai tersebut. Masalahnya adalah “Apakah mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali ke tempat semula? Seorang matematikawan Swiss, L. Euler, adalah orang pertama yang berhasil menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian yang sederhana. Ia memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakan sebagai titik (noktah)-yang disebut simpul (*vertex*) dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut busur (*edge*).

Selain itu, teori graf dan teori digraf juga dapat diaplikasikan pada cabang-cabang ilmu matematika yang lain, di antaranya aljabar abstrak, matematika diskret, dan lain sebagainya. Salah satu pembahasan yang menarik dari aplikasi teori graf pada cabang ilmu matematika yang lain adalah graf yang dibentuk dari suatu grup. Pembahasan tentang teori graf yang dibentuk dari grup di sini menjelaskan suatu digraf yang dikaitkan dengan grup dan subset dari grup yang disebut generator. Hal ini menunjukkan bahwa semakin ilmu itu didalami, maka ilmu tersebut akan terus berkembang dan membutuhkan kajian yang lebih mendalam lagi. Perkembangan-perkembangan ini, menunjukkan bahwa semakin lama dan semakin ilmu itu ditekuni, maka ilmu itu tidak akan pernah habis dan tidak akan ada batasnya. Al-Qur'an telah

menyebutkan bahwa ilmu itu tidak akan ada batasnya, sebagaimana Firman Allah SWT dalam surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:

قُلْ لَوْ كَانَ الْبَحْرُ مِدَادًا لِّكَلِمَاتِ رَبِّي لَنَفِدَ الْبَحْرُ قَبْلَ أَنْ تَنفَدَ كَلِمَاتُ رَبِّي وَلَوْ

جِئْنَا بِمِثْلِهِ مَدَدًا ﴿١٠٩﴾

Artinya: Katakanlah: sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(Q. S. Al-Kahfi:109)

Oleh karena luasnya ilmu pengetahuan yang tidak terbatas sebagaimana telah disebutkan di atas, maka dalam ayat Al-Qur'an yang lain, Allah SWT menantang para hamba-Nya, baik bangsa jin ataupun manusia untuk selalu menambah pengetahuan, karena pada hakikatnya, seorang hamba tidak akan pernah dapat melakukan apapun atau menyelesaikan suatu permasalahan yang mereka hadapi tanpa kemampuan khusus yang berupa ilmu pengetahuan. Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Ar-Rahman 33:

يَمْعَشَرِ الْجِنَّ وَالْإِنْسِ إِنَّ اسْتَطَعْتُمْ أَنْ تَنْفُذُوا مِنْ أَقْطَارِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ

فَأَنْفُذُوا لَا تَنْفُذُونَ إِلَّا بِسُلْطَانٍ ﴿٣٣﴾

Artinya: Hai jama'ah jin dan manusia, jika kamu sanggup menembus (melintasi) penjuru langit dan bumi, maka lintasilah, kamu tidak dapat menembusnya kecuali dengan kekuatan. (QS; A-Rahman 33)

Dari kedua ayat tersebut di atas jelaslah bahwa ilmu amatlah luas dan tidak terbatas, sehingga seyogyanya bagi umat muslim untuk selalu menggali dan memperdalam suatu ilmu, karena pada dasarnya seorang muslim memang wajib untuk menuntut ilmu, sebagaimana hadits yang berbunyi:

Menuntut ilmu wajib bagi setiap ummat muslim baik laki-laki maupun perempuan (H.R Bukhari dan muslim)

Berdasarkan hadist di atas yang isinya adalah mewajibkan manusia untuk mencari ilmu, para pencari ilmu haruslah tidak hanya mengandalkan kecerdasan (IQ) saja, melainkan harus diimbangi dengan kemampuan Spritual (SQ), hal ini sesuai dengan tuntunan Al-Qur'an dalam surat Ali – Imron ayat 190-191 yang berbunyi:

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ
 الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ
 السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَنَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ

Artinya: Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan Ini dengan sia-sia,

Maha Suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka. (Q.S Ali-Imron:190-191)

Pada ayat 191 dalam surat Ali-Imron tersebut di atas, terdapat dua kalimat majemuk yang dihubungkan oleh huruf 'Athaf (*wawu*) yaitu:

(1)..... الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ

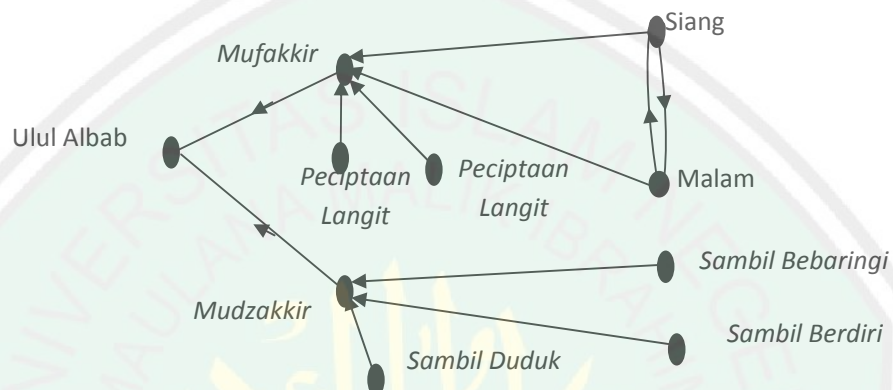
dan ayat

(2) وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ

Gabungan kedua kalimat majemuk tersebut di atas memiliki makna dua hal yang harus dilaksanakan secara bersamaan, dalam artian bahwa mencari ilmu tidaklah hanya mengandalkan kemampuan otak saja melainkan harus dibarengi dengan kemampuan spiritual, yaitu dengan jalan mendekatkan diri kepada sang Khaliq. Karena menurut ilmu nahwu setiap kalimat yang digabung dengan memakai huruf 'ataf (و) mempunyai arti

musytarokah baina amraini yakni mempunyai arti bersamaan (Ghilayaini: 2004). Ayat 191 surat Ali-Imron tersebut dapat diinterpretasikan dalam matematika yaitu pergantian siang dan malam dimisalkan dengan dua buah titik yang saling berhubungan. Oleh karena kedua titik tersebut merupakan tanda-tanda kebesaran Allah SWT yang melekat pada diri *Ulul Albab*, maka kedua titik-titik tersebut mempunyai arah yang menuju titik (*Ulul Albab*). Sedangkan titik (*Ulul Albab*) adalah gabungan dari dua kriteria yang juga dimisalkan dengan sebuah titik-titik, yaitu sebagaimana pada kalimat (1) dan kalimat (2),

sehingga apabila ayat tersebut diinterpretasikan dalam bentuk gambar akan tampak gambar digraf sebagaimana berikut:



Gambar 1.1 Representasi Ayat 190-191 surat Ali-Imron dengan digraf

Berdasarkan uraian tersebut dalam penelitian ini penulis akan mengkaji tentang digraf yang diperoleh dari suatu grup, dengan mengambil judul skripsi "***Color Digraph dan Cayley Color Digraph dari Grup Siklik Z_n dengan n Bilangan Prima***".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagaimana bentuk dari *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* pada grup siklik Z_n dengan n bilangan prima?
2. Apakah terdapat siklus Hamilton pada *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan prima?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Untuk mengetahui bentuk dari *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* pada grup siklik Z_n dengan n bilangan prima.
2. Untuk mengetahui apakah terdapat siklus Hamilton pada bentuk *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan prima.

1.4 Batasan Masalah

Untuk tetap menjaga kedalaman pembahasan materi, penulisan skripsi ini dibatasi pada grup siklik Z_n , n bilangan prima dengan $3 \leq n \leq 7$.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai siklus Hamilton pada *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan prima.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya teori digraf mengenai siklus Hamilton pada *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik.
3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori digraf dan mata kuliah Aljabar Abstrak.

1.6 Metode Penelitian

1.5.1 Pendekatan dan Jenis Penelitian

Pendekatan yang digunakan dari penelitian ini adalah pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan dengan Jenis penelitian yang berupa deskriptif kualitatif.

Dalam pendekatan deskriptif kualitatif ini, penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (Library Research) yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku dan dokumen yang ada.

1.5.2 Sumber data

Sumber data dalam penulisan skripsi ini diperoleh melalui buku-buku antara lain: Gery Chartrand & Linda Lesniak (Graph and Digraph second edition; 1986), Robin J.

Wilson dan John J. Watkins (Graph an Introductory Approach; 1990) dan sumber-sumber lain yang relevan.

1.5.3 Teknik Analisis Data

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari dan mengumpulkan berbagai literatur yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang digraf dan aljabar abstrak serta sumber lain yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
2. Memahami dan mempelajari konsep *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph*.
3. Menentukan bentuk dari *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* pada grup siklik Z_n dengan n bilangan prima.
4. Membuktikan apakah pada grup siklik Z_n dengan n bilangan prima memuat siklus Hamilton.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan, antara lain pengertian digraf, digraf terhubung, pewarnaan, pengertian grup, grup siklik, serta kajian digraf dan grup dalam Al-Qur'an dan Hadits.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang bagaimana menentukan *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan prima serta meneliti apakah terdapat siklus Hamilton.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.



BAB II

KAJIAN TEORI

2.1. Digraf

2.1.1 Definisi Digraf

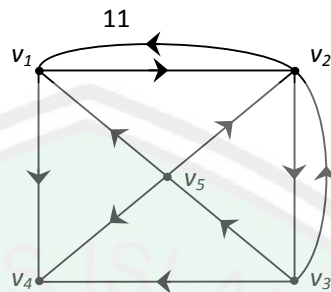
Digraf (*Graf berarah/ Directed Graf*) D adalah pasangan himpunan (V, E) di mana V adalah himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut *titik* (*vertex*) dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan terurut (u, v) , yang mempunyai arah dari u ke v , dari titik-titik u, v di V yang disebut *busur*. Himpunan titik di D dinotasikan dengan $V(D)$ dan himpunan busur dinotasikan dengan $E(D)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 14 dan Wilson dan Watkins, 1990:81).

Banyaknya unsur pada himpunan titik di digraf D disebut order dari D dan dilambangkan dengan $p(D)$, atau p , sedangkan banyaknya unsur pada himpunan busur pada digraf D adalah size $q(D)$ atau q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 15).

Jika $a = (u, v)$ merupakan busur dari digraf D , maka dikatakan bahwa a terkait langsung dengan u dan terkait langsung dengan v , jika u terkait langsung dengan a dan v juga terkait langsung dengan a , maka u dikatakan terhubung langsung pada v dan v terhubung langsung dengan u . Selanjutnya busur (u, v) akan ditulis uv .

Perhatikan digraf D dengan himpunan titik $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, dan himpunan busur $E(D) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_1, v_5v_2, v_5v_1, v_5v_4, v_3v_5, v_3v_4, v_3v_2, v_2v_3\}$ berikut ini, maka

$$|V(D)| = 5, |E(D)| = 10.$$



Gambar 2.1. Digraf D

2.1.2 Derajat Titik

Pada graf suatu titik hanya mempunyai satu macam derajat, pada digraf suatu titik mempunyai dua macam derajat. Misalkan D suatu digraf dan v suatu titik di D . Derajat keluar (out degree) dari v yang dinyatakan dengan $od(v)$, adalah banyak busur di D yang terkait dari v . Derajat masuk (in degree) dari v dinyatakan dengan $id(v)$ adalah banyak busur di D yang terkait ke v . Derajat titik v dari suatu digraf D dinyatakan dengan $deg(v)$ didefinisikan dengan:

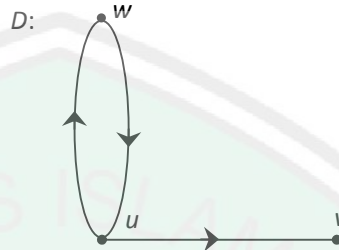
$$deg(v) = od(v) + id(v)$$

Suatu digraf disebut beraturan- r (r -regular) jika $od(v) = id(v)$ untuk setiap v di $V(D)$.

Barisan derajat keluar (outdegree sequence) dari suatu digraf D adalah barisan bilangan $d_1, d_2, \dots, d_n$, $n = |V(D)|$, sehingga titik-titik di D dapat diberi nama $v_1, v_2, \dots, v_n$ dengan $od(v_i) = d_i$. Barisan derajat

masuk (indegree sequence) didefinisikan dengan cara yang sama (Chartrand dan Lesniak, 1986:15).

Perhatikan Gambar 2.2 di bawah ini:



Berdasarkan Gambar 2.2. Digraf D oleh:

$$od(u) = 2,$$

$$id(u) = 1,$$

$$od(w) = 1,$$

$$id(w) = 1,$$

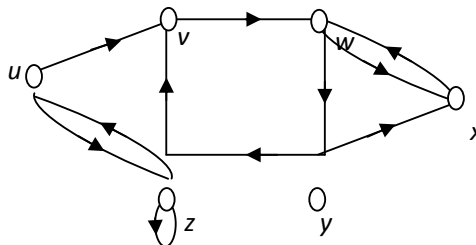
$$od(v) = 0,$$

$$id(v) = 1.$$

Oleh karena itu $deg(u) = 3$, $deg(w) = 2$, dan $deg(v) = 1$.

2.1.3 Digraf Terhubung (Connected)

Perhatikan gambar berikut ini:

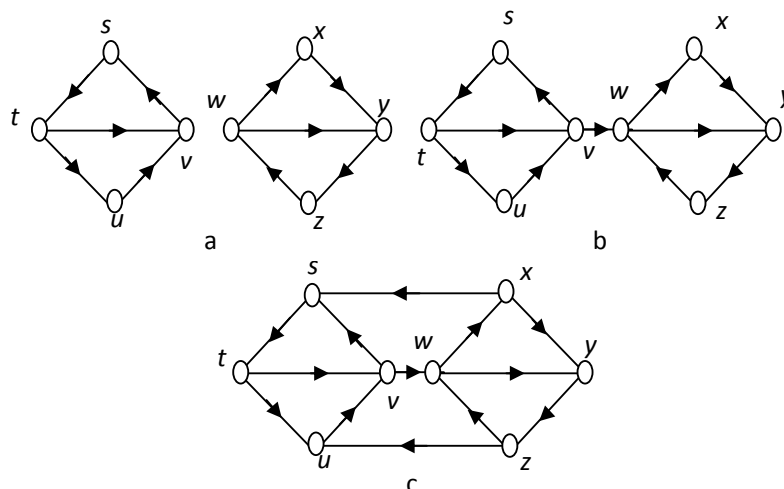


Gambar 2.3. Jalan

Sebuah jalan atau *walk* k pada digraf D pada Gambar 2.3 di atas adalah rangkaian titik-titik $uv, vw, wx \dots yz$ atau dapat dinotasikan dengan $uvw \dots yz$. Jika semua busur (tetapi tidak perlu semua titik) suatu jalan berbeda, maka jalan tersebut disebut sebagai *trail*, dan jika semua titiknya berbeda maka trail itu disebut lintasan (*path*). Panjang suatu jalan adalah jumlah busur pada jalan tersebut.

Jalan tertutup k pada digraf D adalah rangkaian busur pada D dengan bentuk $uv, uw, wx, \dots yz, zu$. Jalan tertutup k yang semua busurnya berbeda maka disebut *trail tertutup*. Sedangkan jika semua titiknya berbeda maka disebut *sikel* (Robin J Wilson, 1990:88). Jadi dari hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa: trail tertutup dan taktrivial pada graf D disebut *sirkuit* di D . Sirkuit yang semua titik internalnya berbeda disebut *sikel*. Sikel dengan panjang k disebut sikel- k (Robin J Wilson, 1990:88)..

Suatu digraf disebut terhubung jika graf dasarnya merupakan graf terhubung, dan sebaliknya disebut tidak terhubung jika graf dasarnya merupakan graf tidak terhubung, serta disebut digraf terhubung kuat jika terdapat lintasan dari satu titik ke titik yang lainnya. Berikut adalah contoh digraf tak terhubung, terhubung, terhubung kuat:



Keterangan:

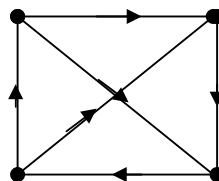
Digraf (a) tidak terhubung karena graf dasarnya tidak terhubung

Digraf (b) terhubung, tetapi tidak terhubung kuat karena tidak ada lintasan dari w ke v .

Digraf (c) terhubung kuat karena ada lintasan yang menghubungkan semua pasangan titiknya.

2.1.4 Digraf Hamilton

Digraf G disebut Digraf Hamilton apabila pada digraf (graf berarah) tersebut terdapat siklus Hamilton atau *Spanning Cycle* (siklus merentang) yaitu setiap titik yang ada pada digraf tersebut hanya terlewati tepat satu kali dan kembali kepada titik yang semula. Berikut ini adalah contoh gambar digraf K_4 beserta siklus Hamilton pada digraf K_4 :



Gambar 2.5 Digraf K_4

2.2 Color Digraph dan Cayley Color Digraph

Misal G grup nontrivial, maka *Color Digraph* dari grup G adalah digraph yang titik-titiknya adalah semua anggota G , dan busur dari a ke b diwarnai $a^{-1}b$, untuk setiap $a, b \in G$.

Misal diberikan Γ grup nontrivial yang berhingga dengan $\Delta = \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ sebagai himpunan generator untuk Γ . Digraf yang dikaitkan dengan Γ dan Δ disebut *Cayley Color Digraph* dari Γ atas Δ dan dinotasikan dengan $D_\Delta(\Gamma)$. Himpunan titik dari $D_\Delta(\Gamma)$ adalah himpunan dari elemen grup Γ , oleh karena itu $D_\Delta(\Gamma)$ mempunyai order $|\Gamma|$. Masing-masing generator h_i disebut color atau warna. Untuk $g_1, g_2 \in \Gamma$ akan terdapat suatu busur (g_1, g_2) yang berwarna h_i di $D_\Delta(\Gamma)$ jika dan hanya jika

$g_2 = g_1 h_i$. Jika h_i adalah suatu elemen yang berorder 2 (inversnya dirinya sendiri atau $(h_i)^2 = 1$) dan $g_2 = g_1 h_i$, maka diperoleh $g_2 = g_1 h_i$ (jika ruas kanan dan kiri sama-sama dikalikan h_i) yaitu $g_2 h_i = g_1 h_i h_i$, maka $g_2 h_i = g_1 h_i^2$ sehingga $g_2 h_i = g_1 1$ atau $g_1 = g_2 h_i$. Jadi *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ memuat busur (g_1, g_2) dan (g_2, g_1) , dan jika kedua-duanya sama-sama berwarna h_i maka untuk pasangan busur ini cukup diwakili oleh busur tunggal g_1, g_2 . Sedangkan untuk busur (g_1, g_2) dan (g_2, g_1) yang berwarna h_i berbeda tetap diwakili oleh busur itu sendiri.

2.3 Operasi Biner

Misalkan S suatu himpunan yang tidak kosong. Operasi $\circ$ pada elemen-elemen S disebut biner, apabila setiap dua elemen $a, b \in S$ maka $(a \circ b) \in S$. Atau dapat dikatakan operasi $\circ$ merupakan pemetaan dari $S \times S$ ke S . Operasi $\circ$ pada S yang merupakan operasi biner bersifat tertutup (Sukirman, 2005: 35).

Misalkan operasi $\circ$ pada S adalah suatu operasi biner, maka

1. Jika $\forall a, b \in S$ berlaku $a \circ b = b \circ a$, maka dikatakan bahwa operasi $\circ$ pada S bersifat komutatif.
2. Jika $\forall a, b \in S$ berlaku $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, maka dikatakan bahwa operasi biner $\circ$ pada S bersifat asosiatif.

3. Jika ada $e \in S$ sedemikian hingga $\forall a \in S$ berlaku $a \circ e = e \circ a = a$, maka e disebut elemen identitas terhadap $\circ$.
4. Jika $\forall a \in S, \exists b \in S$ sedemikian hingga $a \circ b = b \circ a = e$ maka b disebut invers dari a terhadap operasi $\circ$. Invers dari a ditulis a^{-1} .

2.4 Grup

2.4.1 Definisi Grup

Grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G, *)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \emptyset$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk semua $a, b, c \in G$ (yaitu $*$ asosiatif).
2. Ada suatu elemen e di G sehingga $a * e = e * a = a$, untuk semua $a \in G$ (e disebut identitas di G).
3. Untuk setiap $a \in G$ ada suatu element a^{-1} di G sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} di sebut invers dari a)

Sebagai tambahan, grup $(G, *)$ disebut *abelian* (grup komutatif) jika $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 31 dan Dummit dan Foote, 1991:13-14).

Contoh:

Selidiki apakah himpunan bilangan Z dengan operasi penjumlahan $(Z, +)$ adalah grup abelian.

Jawab:

Misalkan $a, b, c \in Z$ dan $+$ adalah operasi biner, $(Z, +)$ adalah grup abelian jika memenuhi:

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$, untuk semua $a, b, c \in Z$ (yaitu $+$ asosiatif).
2. Untuk semua $a \in Z$ ada suatu element 0 di Z sehingga $a + 0 = 0 + a = a$ (0 disebut identitas di Z).
3. Untuk setiap $a \in Z$ ada suatu elemen $-a$ di Z sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ di sebut invers dari a).
4. Untuk semua $a, b \in G$ maka $a + b = b + a$ (komutatif)

Jadi $(Z, +)$ adalah grup abelian.

Contoh:

Selidiki apakah himpunan bilangan Z dengan operasi kotak $(Z, \boxtimes)$ adalah grup, dengan $\boxtimes$ didefinisikan $a \boxtimes b = a - 2ab + 1$, di mana $a, b \in Z$.

Jawab:

1. Untuk setiap $a, b \in Z$ maka $a \boxtimes b = a - 2ab + 1 \in Z$
2. Untuk setiap $a, b, c \in Z$ maka

$$(a \boxtimes b) \boxtimes c = a \boxtimes (b \boxtimes c)$$

$$\text{Untuk } (a \oplus b) \oplus c = (a - 2ab + 1) \oplus c$$

$$= (a - 2ab + 1) - 2(a - 2ab + 1)c + 1$$

$$= a - 2ac - 2ab + 4abc - 2c + 1$$

$$\text{Untuk } a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b - 2bc + 1)$$

$$= a - 2a(b - 2bc + 1) + 1$$

$$= a - 2ab + 4abc - 2a + 1$$

Karena $(a \oplus b) \oplus c \neq a \oplus (b \oplus c)$, maka $(Z, \oplus)$ bukan grup.

Pada pembahasan tentang grup perlu dibedakan antara pengertian order dari suatu grup dan order dari elemen. Order dari suatu elemen memiliki definisi sebagai berikut:

Definisi:

Misal $(G, \circ)$ adalah sembarang grup. Misal a adalah sembarang elemen dari G .

Jika ada suatu bilangan bulat positif terkecil m yang memenuhi $a^m = e$ (e adalah elemen identitas di G) maka m dikatakan sebagai order dari a , dan dituliskan sebagai $|a| = m$

Dalam kasus ini jika tidak ada m yang memenuhi $a^m = e$, maka dikatakan bahwa a berorder infinite atau nol.

Contoh: Diberikan grup modulo 6 dengan operasi penjumlahan atau $(M_6, +)$

$M_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Elemen identitas pada M_6 adalah 0

$$0=0 \quad \text{maka } |0|=1$$

$$1+1+1+1+1+1=0 \quad \text{maka } |1|=6$$

$$2+2+2=0 \quad \text{maka } |2|=3$$

$$3+3=0 \quad \text{maka } |3|=2$$

$$4+4+4=0 \quad \text{maka } |4|=3$$

$$5+5+5+5+5=0 \quad \text{maka } |5|=6$$

Sedangkan order dari suatu grup menunjukkan banyaknya elemen yang dimiliki oleh suatu grup. Berikut ini akan diberikan contoh order dari suatu grup.

Contoh : Suatu grup K dengan operasi perkalian $(K, \times)$ dan $K = \{1, -1, i, -i\}$, maka K dikatakan berorder 4 atau memiliki 4 elemen yaitu $1, -1, i, -i$.

2.4.2 Grup Siklik

Z_n didefinisikan sebagai grup siklik dengan order n .

Definisi:

Misal (G, o) adalah grup. (G, o) dikatakan grup siklik jika dan hanya jika terdapat $a \in G$ sedemikian hingga setiap elemen dari G dapat dibangkitkan/dibangun

oleh a , dengan kata lain setiap elemen dari G dapat dituliskan sebagai perpangkatan dari a (*Integral power of a*).

G yang dibangun oleh a ditulis sebagai $G = \langle a \rangle$ atau $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

$a \in G$ disebut sebagai generator atau pembangkit.

Jika G dibangun oleh elemen tunggal maka (G, o) disebut sebagai monogenik.

Dalil 1 : H merupakan grup siklik jika terdapat $x \in H$ sehingga $H = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

H merupakan grup siklik jika $H = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Pada beberapa kasus dituliskan

$H = \langle x \rangle$ dan dikatakan bahwa H dibangun oleh x (x adalah generator dari H). Grup

siklik juga dapat memiliki lebih dari satu generator, misal jika $H = \langle x \rangle$, maka

$H = \langle x^{-1} \rangle$ karena $(x^{-1})^n = x^{-n} \forall n \in \mathbb{Z}$. Jadi:

$$\{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(x^{-1})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Dalil 2 : Jika $H = \langle x \rangle$ maka $|H| = |x|$, jika tak terhingga maka sebaliknya.

- (1) Jika $|H| = n < \infty$ maka $x^n = 1$ dan $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1} \in H$
- (2) Jika $|H| = \infty$, maka $x^n \neq 1, \forall n \neq 0$ dan $x^n \neq x^b, \forall a \neq b \in \mathbb{Z}$

Bukti:

Diberikan $|x| = n$, langkah awal kita bandingkan kasus jika $n < \infty$, maka elemen-elemen $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$ jelas, karena jika $x^a = x^b$, $0 \leq a < b < n$, sebaliknya jika n merupakan bilangan positif terkecil dari x yang merupakan identitas, H mempunyai n elemen yang selanjutnya adalah menunjukkan elemen-elemennya. Berdasarkan contoh jika x^t merupakan pembangkit x , maka menurut algoritma divisi berlaku $t = nq + k$, $0 \leq k < n$. Jadi:

$$x^t = x^{nq+k} = (x^n)^q x^k = 1^q x^k = x^k \in \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}$$

selanjutnya ditunjukkan $|x| = \infty$, oleh karena itu tidak ada bilangan bulat positif x yang menjadi identitas, jika $x^a = x^b$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a < b$, maka $x^{b-a} = x^0 = 1$. Kontradiksi dengan pembangkit elemen dari H . Jadi $|H| = \infty$.

Berikut ini diberikan cara untuk mengetahui generator pada M_6 dengan operasi penjumlahan:

Contoh : Diberikan grup $(M_6, +)$ dengan $M_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$1 = 1 \dots\dots\dots 1 = 1^1$$

$$1+1=2 \dots\dots\dots 2 = 1^2$$

$$1+1+1=3 \dots\dots\dots 3 = 1^3$$

$$1+1+1+1=4 \dots\dots\dots 4 = 1^4$$

$$1+1+1+1+1=5 \dots\dots\dots 5 = 1^5$$

$$1+1+1+1+1+1=6 \dots\dots\dots 0 = 1^6$$

1 adalah generator karena membangkitkan semua elemen $M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ yang

berarti $M_6 = \langle 1 \rangle$

$$2 = 2 \dots\dots\dots 2 = 2^1$$

$$2+2=4 \dots\dots\dots 4 = 2^2$$

$$2+2+2=0 \dots\dots\dots 0 = 2^3$$

$$2+2+2+2=2 \dots\dots\dots 2 = 2^4$$

$$2+2+2+2+2=4 \dots\dots\dots 4 = 2^5$$

$$2+2+2+2+2+2=0 \dots\dots\dots 0 = 2^6$$

2 bukan merupakan generator dari M_6 karena hanya membangkitkan 0,2,4

$$3 = 3 \dots\dots\dots 3 = 3^1$$

$$3+3=0 \dots\dots\dots 0 = 3^2$$

$$3+3+3=3 \dots\dots\dots 3 = 3^3$$

$$3+3+3+3=0 \dots\dots\dots 0 = 3^4$$

$$3+3+3+3+3=3 \dots\dots\dots 3 = 3^5$$

$$3+3+3+3+3+3=0 \dots\dots\dots 0 = 3^6$$

3 bukan merupakan generator dari M_6 karena hanya membangkitkan 0 dan 3

$$4 = 4 \dots\dots\dots 4 = 4^1$$

$$4+4=2 \dots\dots\dots 2 = 4^2$$

$$4+4+4=0 \dots\dots\dots 0 = 4^3$$

$$4+4+4+4=4 \dots\dots\dots 4 = 4^4$$

$$4+4+4+4+4=2 \dots\dots\dots 2 = 4^5$$

$$4+4+4+4+4+4=0 \dots\dots\dots 0 = 4^6$$

4 bukan merupakan generator dari M_6 karena hanya membangkitkan 0, 2, dan 4

$$5 = 5 \dots\dots\dots 5 = 5^1$$

$$5+5=10 \dots\dots\dots 4 = 5^2$$

$$5+5+5=15 \dots\dots\dots 3 = 5^3$$

$$5+5+5+5=20 \dots\dots\dots 2 = 5^4$$

$$5+5+5+5+5=25 \dots\dots\dots 1 = 5^5$$

$$5+5+5+5+5+5=0 \dots\dots\dots 0 = 5^6$$

5 merupakan generator dari M_6 karena membangkitkan semua elemen

$M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ yang berarti $M_6 = \langle 5 \rangle$

Jadi $(M_6, +)$ dengan $M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ memiliki dua generator yaitu $\langle 1 \rangle$ dan $\langle 5 \rangle$

2.5 Kajian tentang Grup dan Digraf dalam Al-Qur'an dan Hadits

Pada dasarnya semua cabang ilmu bersumber dari Al-Qur'an baik itu ilmu agama maupun ilmu umum, dan salah satu dari cabang ilmu tersebut adalah disiplin ilmu matematika. Sedangkan salah satu cabang dari ilmu matematika tersebut adalah Grup.

Definisi dari grup adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,*)$ dengan G tidak sama dengan himpunan kosong ($G \neq \emptyset$) dan $*$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat asosiatif, ada identitas, dan ada invers dalam grup tersebut. Himpunan dalam grup mempunyai elemen atau anggota, seperti makhluk dari ciptaan-Nya dengan operasi biner berupa interaksi di antara mereka dan memenuhi sifat-sifat yang harus dipenuhi yaitu berupa aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya suatu grup yang diartikan dengan sekelompok manusia sekalipun berinteraksi (dioperasikan) dengan sesama makhluk yang lain, maka ia harus tetap berada dalam koridor (sifat-sifat) yang telah ditetapkan Allah.

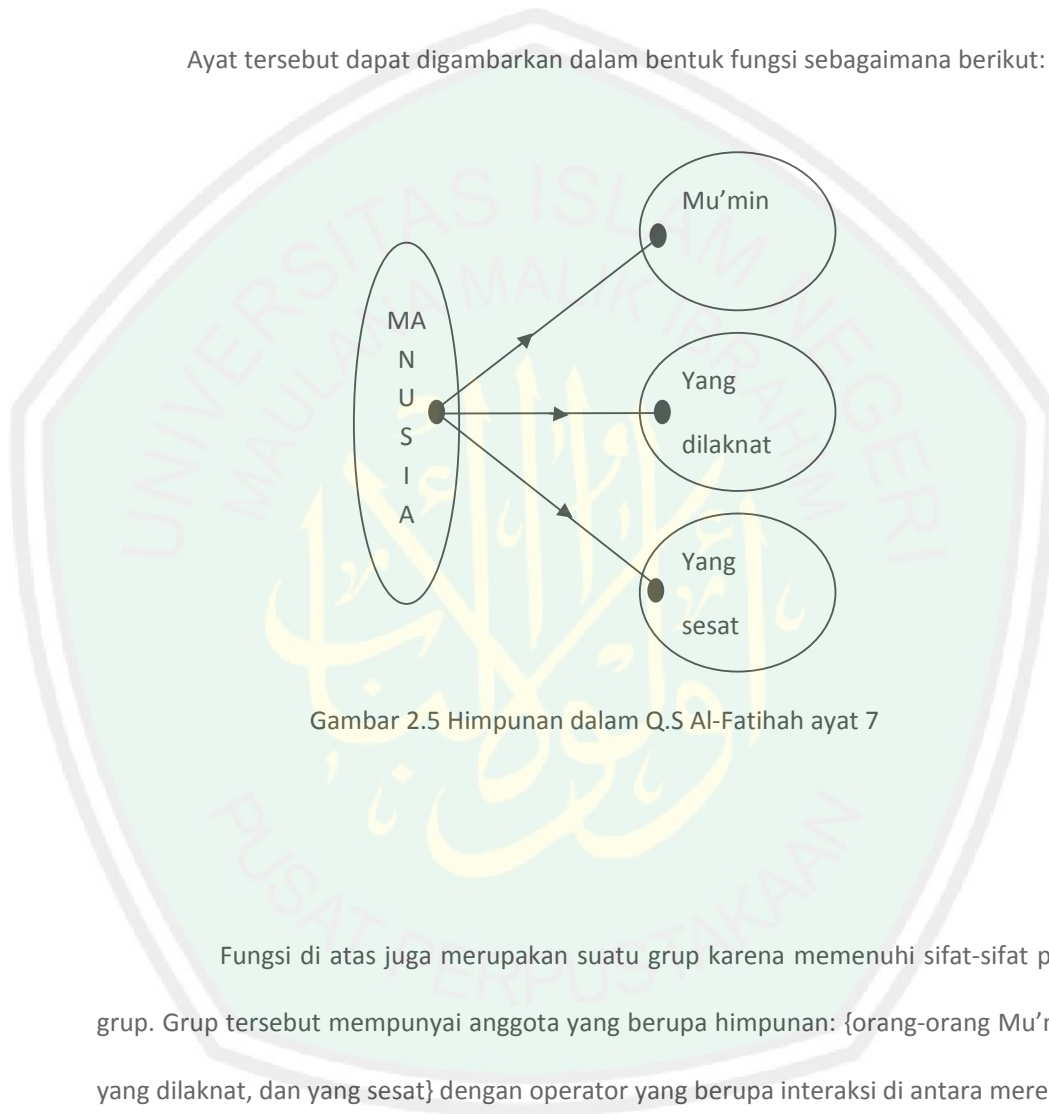
Dalam Al-Qur'an kajian mengenai grup yang diartikan sebagai himpunan atau kelompok sudah ada seperti kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan, dimana golongan merupakan bagian dari himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam al-Quran surat al-Fatihah ayat 7 disebutkan.

صِرَاطَ الَّذِينَ أَنْعَمْتَ عَلَيْهِمْ غَيْرِ الْمَغْضُوبِ عَلَيْهِمْ وَلَا الضَّالِّينَ ﴿٧﴾

Artinya: "(yaitu) Jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat" (Q. S. Al-Fatihah: 7).

Ayat ini menjelaskan bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT (Mu'min), (2) kelompok yang dilaknat, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2006:47).

Ayat tersebut dapat digambarkan dalam bentuk fungsi sebagaimana berikut:



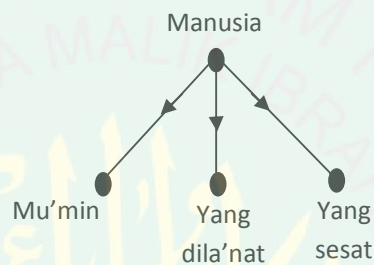
Gambar 2.5 Himpunan dalam Q.S Al-Fatihah ayat 7

Fungsi di atas juga merupakan suatu grup karena memenuhi sifat-sifat pada grup. Grup tersebut mempunyai anggota yang berupa himpunan: {orang-orang Mu'min, yang dilaknat, dan yang sesat} dengan operator yang berupa interaksi di antara mereka.

Adapun sifat-sifat pada grup ini adalah (1). Interaksi sosial yang berupa kerjasama di antara mereka yang diartikan dengan assosiatif. (2). (Identitas) walaupun seorang mu'min diperbolehkan bekerjasama dengan orang-orang yang dilaknat, dan yang sesat, akan tetapi ia harus tetap mempertahankan identitas dirinya yaitu seorang

hamba yang hanya menyembah kepada-Nya. (3). (Invers) jika pada diri manusia terdapat sifat dari Malaikat (baik), maka juga akan terdapat sifat Syaithan (buruk), karena pada hakikatnya manusia merupakan gabungan dari dua sifat yang dimiliki oleh para Malaikat dan Syaithan.

Ayat ke 7 dari surat al-Fatihah tersebut juga dapat diinterpretasikan dalam bentuk gambar digraf, sebagaimana pada gambar berikut:



Gambar 2.6 Grup dan Digraph dalam Q.S Al-Fatihah ayat 7

Dari ketiga kelompok tersebut hanyalah satu saja yang dapat diambil untuk dicari pewarnaannya, yaitu kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT (*Mu'min*). Kelompok ini merupakan salah satu elemen dari kelompok atau grup yang mendapatkan *Khithab* (perintah) untuk melaksanakan rukun Islam yang ketiga yaitu puasa sebagaimana firman-Nya:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا كُتِبَ عَلَيْكُمُ الصِّيَامُ كَمَا كُتِبَ عَلَى الَّذِينَ مِن قَبْلِكُمْ

لَعَلَّكُمْ تَتَّقُونَ ﴿١٨٣﴾

Artinya: Hai orang-orang yang beriman, diwajibkan atas kamu berpuasa sebagaimana diwajibkan atas orang-orang sebelum kamu agar kamu bertakwa. (QS: Al-Baqarah 183)

Menurut bahasa, puasa adalah mempunyai arti “menahan”, baik menahan diri dari lapar, dahaga, berbicara ataupun lain sebagainya. Berikut ini ayat Al-Qur’an yang mengartikan puasa sebagai menahan diri dari berbicara:

فَكُلِيْ وَاشْرَبِيْ وَقَرِّيْ عَيْنًا فَاِمَّا تَرَيَنَّ مِنَ الْبَشَرِ اَحَدًا فَقُوْلِيْ اِنِّىْ نَذَرْتُ لِلرَّحْمٰنِ صَوْمًا فَلَنْ اُكَلِّمَ الْيَوْمَ اِنْسِيًّا ﴿١٦﴾

Artinya: Maka makan, minum dan bersenang hatilah kamu. jika kamu melihat seorang manusia, Maka Katakanlah: "Sesungguhnya Aku Telah bernazar berpuasa untuk Tuhan yang Maha pemurah, Maka Aku tidak akan berbicara dengan seorang manusiapun pada hari ini (QS; Maryam :26).

Maksud dari kata “Shawman” dalam ayat tersebut di atas adalah menahan diri dari berbicara.

Sedangkan arti puasa menurut istilah adalah menahan dari segala yang membatalkan puasa seperti makan, minum, bersetubuh, dan lain-lainnya yang telah disebutkan oleh syara’. Juga menahan diri dari berkata keji dan berbuat kefasikan sejak terbitnya fajar shadiq yaitu ketika pagi hari warna putih telah menyebar secara horisontal di cakrawala dan berakhir hingga terbenamnya matahari dengan disertai niat, sebagaimana firman-Nya:

أَحِلَّ لَكُمْ لَيْلَةَ الصِّيَامِ الرَّفَثُ إِلَى نِسَائِكُمْ ۚ هُنَّ لِبَاسٌ لَكُمْ وَأَنْتُمْ لِبَاسٌ لَهُنَّ ۚ عَلِمَ اللَّهُ أَنَّكُمْ كُنْتُمْ تَخْتَانُونَ أَنْفُسَكُمْ فَتَابَ عَلَيْكُمْ وَعَفَا عَنْكُمْ ۚ فَالْآنَ بَاشِرُوهُنَّ وَابْتَغُوا مَا كَتَبَ اللَّهُ لَكُمْ ۚ وَكُلُوا وَاشْرَبُوا حَتَّى يَتَبَيَّنَ لَكُمُ الْخَيْطُ الْأَبْيَضُ مِنَ الْخَيْطِ الْأَسْوَدِ مِنَ الْفَجْرِ ۚ ثُمَّ أَتُمُوا الصَّيَامَ إِلَى اللَّيْلِ ۚ وَلَا تُبَاشِرُوهُنَّ وَأَنْتُمْ عَاكِفُونَ فِي الْمَسَجِدِ ۚ تِلْكَ حُدُودُ اللَّهِ فَلَا تَقْرُبُوهَا ۚ كَذَلِكَ يُبَيِّنُ اللَّهُ آيَاتِهِ لِلنَّاسِ لَعَلَّهُمْ يَتَّقُونَ ﴿١٨٧﴾

Artinya: Dihalalkan bagi kamu pada malam hari bulan puasa bercampur dengan isteri-isteri kamu; mereka adalah Pakaian bagimu, dan kamupun adalah Pakaian bagi mereka. Allah mengetahui bahwasanya kamu tidak dapat menahan nafsumu, Karena itu Allah mengampuni kamu dan memberi ma'af kepadamu. Maka sekarang campurilah mereka dan ikutilah apa yang Telah ditetapkan Allah untukmu, dan makan minumlah hingga terang bagimu benang putih dari benang hitam, yaitu fajar. Kemudian sempurnakanlah puasa itu sampai (datang) malam, (tetapi) janganlah kamu campuri mereka itu, sedang kamu beri'tikaf dalam mesjid. Itulah larangan Allah, Maka janganlah kamu mendekatinya. Demikianlah Allah menerangkan ayat-ayat-Nya kepada manusia, supaya mereka bertakwa. (QS: Al-Baqarah 187).

Puasa itu adalah merupakan satu-satunya perbuatan seorang hamba yang oleh Allah diklaim milik diri-Nya dan Dia pulalah yang akan membalasnya. Sebagaimana sabda Rasulullah SAW:

عن ابي هريرة رضي الله عنه يقول: قال رسول الله صلى الله عليه وسلم قال الله كل عمل ابن آدم له إلا الصيام فإنه لي وأنا اجزي به والصيام جنة. (الحديث)

Artinya: Allah SWT berfirman: semia amal manusia adalah untuk dirinya, kecuali puasa, karena itu adalah untuk-Ku dan aku yang akan memberinya ganjaran. Dan puasa itu merupakan bebteng dari perbuatan maksiat. (HR. Ahmad, Muslim dan Nasa'i)

Dalam hadits ini menunjukkan adanya hubungan timbal balik antara puasa dan Dzat penciptanya yaitu puasa itu milik Allah dan Allah yang akan membalasnya.

Sementara itu orang-orang yang melaksanakannya telah membentengi diri dari perbuatan maksiat sebagaimana dalam hadits di atas serta telah membuktikan bahwa dirinya benar-benar seorang hamba yang taat kepada tuhan-Nya. Hal ini sesuai dengan esensi dari penciptaan dari seorang manusia yaitu senantiasa menyembah-Nya. Allah berfirman:

وَمَا خَلَقْتُ الْجِنَّ وَالْإِنْسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ﴿٥٦﴾

artinya: Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdikan kepada-Ku. (QS: Ad-Dzariyat; 56).

Selain itu, orang-orang yang melaksanakan puasa itu, berarti ia telah mengokohkan salah satu pondasi dari rukun Islam yang lima, karena jika diibaratkan

suatu bangunan, maka Islam itu terdiri dari lima pondasi sebagaimana sabda Rasulullah SAW:

عَنْ أَبِي عَبْدِ الرَّحْمَنِ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ الْخَطَّابِ رَضِيَ اللَّهُ عَنْهُمَا قَالَ: سَمِعْتُ رَسُولَ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ يَقُولُ: بَنِيَ الْإِسْلَامُ عَلَى خَمْسٍ شَهَادَةِ أَنْ لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ، وَإِنْ مُحَمَّدًا رَسُولَ اللَّهِ، وإِقَامَ الصَّلَاةِ، وَإِيتَاءَ الزَّكَاةِ، وَحَجَّ الْبَيْتِ، وَصَوْمَ رَمَضَانَ (راوه البخاري ومسلم)

Artinya: Dari Abdillah (yakni) Abdillah bin Al-Khatthab. ra. berkata: saya mendengar Rasulullah SAW bersabda: Islam dibangun dari lima hal yaitu: kesaksian bahwa tiada tuhan selain Allah dan Muhammad utusan Allah, mendirikan shalat, membayar zakat, menunaikan ibadah haji dan melaksanakan puasa. (HR: Bukhari Muslim)

Ayat-ayat dan hadits-hadits tersebut di atas jika diinterpretasikan dalam matematika, maka akan terdapat bentuk digraf, karena jika dimisalkan dengan titik-titik, maka akan terdapat tiga titik yang saling berhubungan yaitu {1 yang dimisalkan dengan (الله), x yang dimisalkan dengan (صائم) dan x^2 yang dimisalkan (الصَّوْم)}. Titik (1) menuju titik (x) menggambarkan suatu perintah dari Sang Khaliq kepada hambanya yang mu'min (صائم) yaitu berupa puasa, dan titik (x) menuju (x^2) menggambarkan seorang hamba yang telah menegakkan salah satu dari pondasi Islam yaitu puasa, sedangkan dari titik (x^2) menuju titik (1) menunjukkan bahwa puasa itu adalah amal ibadah dari seorang hamba yang oleh Allah diklaim milik-Nya. Adapun titik dari arah sebaliknya yaitu dari titik (1) menuju titik (x^2) menjelaskan bahwa dengan puasa Allah akan membalas orang-orang yang telah melaksanakannya, dan dari titik (x^2) menuju titik (x) menggambarkan bahwa puasa itu adalah benteng bagi orang-orang yang melaksanakannya, dan dari titik (x)

menuju titik (1) menunjukkan suatu esensi dari penciptaan manusia yaitu hanya untuk menyembah kepada-Nya. Penjelasan-penjelasan tersebut jika digambarkan dengan suatu gambar akan tampak sebagaimana berikut:



Gambar 2.7. Representasi Puasa pada digraf

BAB III

PEMBAHASAN

Pada Bab III ini, akan dibahas mengenai masalah *Color Digraf* dan *Cayley color Digraf* dari grup siklik Z_n pada bilangan prima dengan $3 \leq n \leq 7$, serta menyajikannya dalam bentuk gambar. Pada setiap penentuan *Color Digraf* dari grup siklik dilakukan dengan mewarnai busur-busur pada digraf tersebut dengan warna dari invers titik awal dikalikan dengan titik yang akhir. Misal G grup nontrivial, maka *Color Digraph* dari grup G adalah digraph yang titik-titiknya adalah semua anggota G , dan busur dari a ke b diwarnai $a^{-1}b$, untuk setiap $a, b \in G$.

Cara menentukan *Color Digraph* dari grup siklik adalah sebagai berikut:

1. Menentukan warna dari titik u menuju v dengan cara mencari $u^{-1}v$ pada grup siklik Z_n dengan n bilangan prima dan $3 \leq n \leq 7$.
2. Menggambarkan bentuk *Color Digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan prima dan $3 \leq n \leq 7$.
3. Menyimpulkan bentuk dari *Color Digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan prima dan $3 \leq n \leq 7$ dan meneliti apakah terdapat Sikel Hamilton pada digraf tersebut.

Cara menentukan *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik adalah sebagai berikut:

1. Memilih generator yang merupakan subset dari grup siklik Z_n dengan $3 \leq n \leq 7$.
2. Menentukan warna busur dari dua ²⁹ adjacent.
3. Menentukan hasil *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik Z_n dengan $3 \leq n \leq 7$.
4. Menggambarkan bentuk *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik Z_n pada bilangan prima dengan $3 \leq n \leq 7$.
5. Menyimpulkan bentuk dari *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik Z_n dan meneliti apakah terdapat Sikel Hamilton pada digraph tersebut.

3.1 *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari Grup siklik Z_3

3.1.1 Color Digraph dari grup siklik Z_3

Misalkan terdapat suatu digraph Z_3 yang mempunyai busur u menuju v . Busur tersebut diwarnai dengan $u^{-1}v$.

Pewarnaan tersebut akan diuji satu persatu sebagaimana berikut:

a. Pewarnaan di mulai dari titik $1 \rightarrow$ titik x .

$$\begin{aligned} 1. 1 \rightarrow x \text{ diwarnai dengan } 1^{-1} \circ x &= 1 \circ x \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. x \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } x^{-1} \circ x^2 &= x^2 \circ x^2 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. x^2 \rightarrow 1 \text{ diwarnai dengan } (x)^2 \circ 1 &= x \circ 1 \\ &= x \end{aligned}$$

b. Pewarnaan dimulai dari titik $1 \rightarrow$ titik x^2 .

$$\begin{aligned} 1. 1 \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } 1 \circ x^2 &= 1 \circ x^2 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. x^2 \rightarrow x \text{ diwarnai dengan } (x^2)^{-1} \circ x &= x^2 \circ x^2 \\ &= x^2 \end{aligned}$$

$$3. x \rightarrow 1 \text{ diwarnai dengan } x^{-1} \circ 1 = x^2 \circ x^2$$

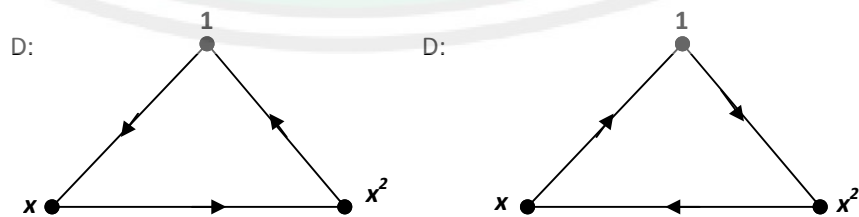
$$= x$$

Jadi *Color Digraph* dari Z_3 adalah sebagaimana pada gambar berikut:



Gambar 3.1 *Color Digraph* dari Grup Siklik Z_3

Dari gambar *Color Digraph* diatas dapat diketahui bahwa *Color Digraph* dari grup siklik Z_3 memuat Sikel Hamilton, sehingga *Color Digraph* dari grup siklik Z_3 disebut Digraf Hamilton. Adapun sikel Hamilton pada *Color Digraph* dari grup siklik Z_3 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 Sikel Hamilton pada *Color Digraph* dari Grup Siklik Z_3

3.1.2 Cayley Color Digraph dari Grup Siklik Z_3

Untuk menentukan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_3 dapat dilakukan dengan cara memilih generator dari elemen grup siklik. Untuk menentukan elemen-elemen yang akan digunakan adalah dengan cara mengambil warna pada *color digraph*nya.

Misal Γ dinotasikan sebagai grup siklik Z_3 di mana himpunannya tersebut beranggotakan 3 yaitu: $\{1, x, x^2\}$. Adapun pasangan generator yang dapat membangkitkan grup siklik Z_3 yaitu: $\{x, x^2\}$. Pasangan generator tersebut akan diuji satu persatu sebagaimana berikut:

$$1 \dots\dots\dots 1 = 1^1$$

$$1 \otimes 1 = 1 \dots\dots\dots 1 = 1^2$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = 1 \dots\dots\dots 1 = 1^3$$

1 hanya bisa membangkitkan dirinya sendiri sehingga 1 bukan generator dari Z_3

$$x \dots\dots\dots x = x$$

$$x \otimes x = x^2 \dots\dots\dots x^2 = x^2$$

$$x \otimes x \otimes x = x^3 \dots\dots\dots x^3 = 1$$

x dapat membangkitkan semua elemen pada Z_3 , oleh karena itu x adalah generator pada Z_3

$$x^2 \cdot \dots \cdot x^2 = x^2$$

$$x \cdot x^2 = x^4 \cdot \dots \cdot x^4 = x$$

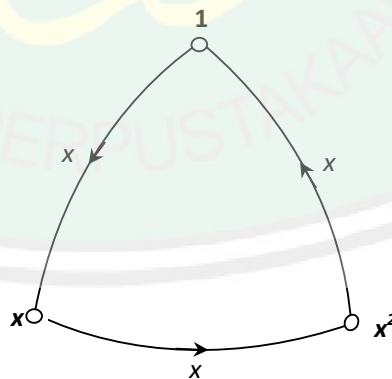
$$x \cdot x^2 \cdot x^2 = x^6 \cdot \dots \cdot x^6 = 1$$

x^2 dapat membangkitkan semua elemen Z_3 , oleh karena itu x^2 adalah generator pada Z_3 .

Berikut hasil *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dengan warna $\Delta = \{x\}$:

1. $1 = x^2 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke 1 yang berwarna x
2. $x = 1 \circ x$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x yang berwarna x
3. $x^2 = x \circ x$, sehingga terdapat busur dari x ke x^2 yang berwarna x

Jadi *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik Z_3 dengan generator $\{x\}$ adalah sebagaimana gambar berikut:

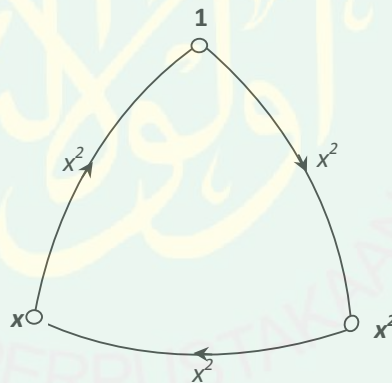


Gambar 3.3 *Cayley Color Digraph* dari Grup Siklik Z_3

Sedangkan hasil *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator x^2 adalah:

1. $1 = x \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x ke 1 yang berwarna x^2
2. $x = x^2 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x yang berwarna x^2
3. $x^2 = 1 \circ x^2$ sehingga terdapat busur dari 1 ke x^2 yang berwarna x^2

Jadi *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup siklik Z_3 tersebut dapat digambarkan dengan digraph berikut:

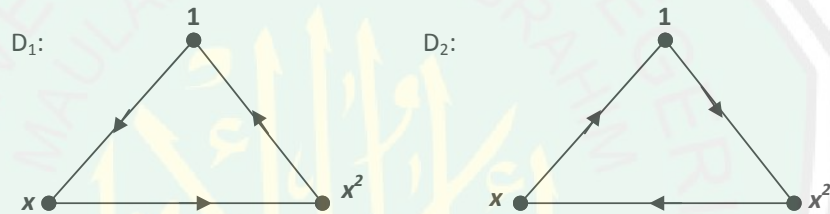


Gambar 3.4 *Cayley Color Digraph* dari Grup Siklik Z_3

Dari kedua gambar *Cayley Color Digraph* diatas dengan masing-masing generator $\{x\}$ dan $\{x^2\}$ dapat diketahui bahwa *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_3

juga memuat siklus Hamilton, sehingga *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_3 disebut digraf Hamilton.

Adapun siklus Hamilton pada *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_3 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.5 Siklus Hamilton pada *Cayley Color Digraph* dari Grup Siklik Z_3

3. 2 Color Digraph dan Cayley Color Digraph Pada Grup Siklik Z_5

3.2.1. Color Digraph Pada Grup Siklik Z_5

Misalkan terdapat suatu digraph Z_5 yang mempunyai busur u menuju v . Busur tersebut diwarnai dengan $u^{-1}v$.

Pewarnaan tersebut akan diuji satu persatu sebagaimana berikut:

a. Pewarnaan dimulai dari titik $1 \rightarrow x$.

$$\begin{aligned} 1. 1 \rightarrow x \text{ diwarnai dengan } 1^{-1} \circ x &= 1 \circ x \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. x \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } x^{-1} \circ x^2 &= x^2 \circ x^2 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. x^2 \rightarrow x^3 \text{ diwarnai dengan } (x^2)^{-1} \circ x^3 &= x^3 \circ x^3 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. x^3 \rightarrow x^4 \text{ diwarnai dengan } (x^3)^{-1} \circ x^4 &= x^4 \circ x^4 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. x^4 \rightarrow 1 \text{ diwarnai dengan } (x^4)^{-1} \circ 1 &= 1 \circ 1 \\ &= x \end{aligned}$$

b. Pewarnaan dimulai dari titik $1 \rightarrow x^2$.

$$1. 1 \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } 1^{-1} \circ x^2 = x^2 \circ x^2$$

$$= x^2$$

2. $x^2 \rightarrow x^4$ diwarnai dengan $(x^2)^{-1} \circ x^4 = x^3 \circ x^4$

$$= x^2$$

3. $x^4 \rightarrow x$ diwarnai dengan $(x^4)^{-1} \circ x = x^2 \circ x^2$

$$= x^2$$

4. $x \rightarrow x^3$ diwarnai dengan $(x)^{-1} \circ x^3 = x^2 \circ x^3$

$$= x^2$$

5. $x^3 \rightarrow 1$ diwarnai dengan $(x^3)^{-1} \circ 1 = x^2 \circ 1$

$$= x^2$$

c. Pewarnaan dimulai dari titik $1 \rightarrow x^3$.

1. $1 \rightarrow x^3$ diwarnai dengan $1^{-1} \circ x^3 = 1 \circ x^3$

$$= x^3$$

2. $x^3 \rightarrow x$ diwarnai dengan $(x^3)^{-1} \circ x = x^2 \circ x$

$$= x^3$$

3. $x \rightarrow x^4$ diwarnai dengan $x^{-1} \circ x^4 = x^3 \circ x^4$

$$= x^3$$

4. $x^4 \rightarrow x^2$ diwarnai dengan $(x^4)^{-1} \circ x^2 = x \circ x^2$

$$= x^3$$

5. $x^2 \rightarrow 1$ diwarnai dengan $(x^2)^{-1} \circ 1 = x^3 \circ 1$

$$= x^3$$

d. Pewarnaan dimulai dari titik $1 \rightarrow x^4$.

1. $1 \rightarrow x^4$ diwarnai dengan $1^{-1} \circ x^4 = 1 \circ x^4$

$$= x^4$$

2. $x^4 \rightarrow x^3$ diwarnai dengan $(x^4)^{-1} \circ x^3 = x \circ x^3$

$$= x^4$$

3. $x^3 \rightarrow x^2$ diwarnai dengan $(x^3)^{-1} \circ x^2 = x^2 \circ x^2$

$$= x^4$$

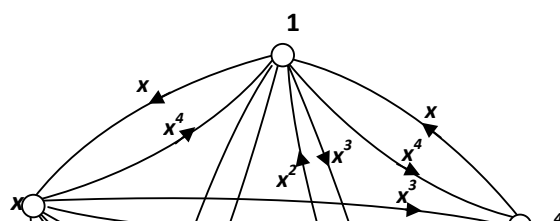
4. $x^2 \rightarrow x$ diwarnai dengan $(x^2)^{-1} \circ x = x^3 \circ x$

$$= x^4$$

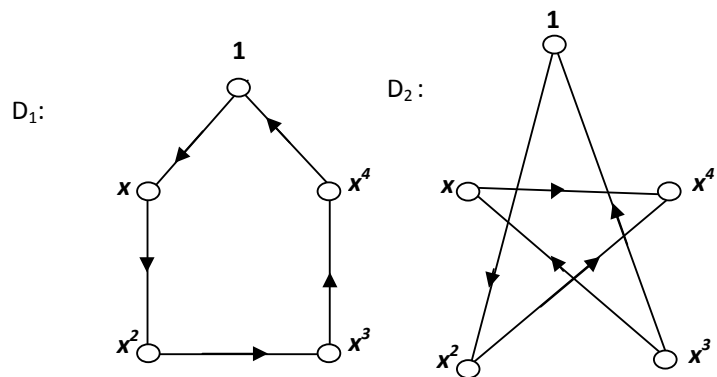
5. $x \rightarrow 1$ diwarnai dengan $x^{-1} \circ 1 = x^4 \circ x^4$

$$= x^4$$

Sehingga pewarnaan tersebut akan tampak seperti gambar berikut:



Dari gambar *Color Digraph* diatas dapat diketahui bahwa *Color Digraph* dari grup siklik Z_5 memuat siklus Hamilton, sehingga *Color Digraph* dari grup siklik Z_5 disebut digraf Hamilton. Adapun siklus Hamilton pada *Color Digraph* dari grup siklik Z_5 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.7 Siklus Hamilton pada *Color Digraph* dari Grup Siklik Z_5

3.2.2. Cayley Color Digraph Pada Grup Siklik Z_5

Untuk menentukan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_5 juga dapat dilakukan dengan memilih generator dari elemen grup siklik sebagaimana pada grup siklik Z_3 .

Misal Γ dinotasikan sebagai grup siklik Z_5 di mana himpunannya tersebut beranggotakan 5 yaitu: $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. Pasangan generator yang dapat membangkitkan grup siklik Z_5 adalah: $\{x, x^2, x^3, x^4\}$. Pasangan generator tersebut juga akan diuji satu persatu sebagaimana berikut:

$$1 \dots\dots\dots 1 = 1^1$$

$$1 \otimes 1 = 1 \dots\dots\dots 1 = 1^2$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = 1 \dots\dots\dots 1 = 1^3$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1 \dots\dots\dots 1 = 1^4$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1 \dots\dots\dots 1 = 1^5$$

1 hanya bisa membangkitkan dirinya sendiri sehingga 1 bukan generator dari Z_5

$$x \cdot \dots \cdot x = x$$

$$x \cdot x = x^2 \cdot \dots \cdot x^2 = x^2$$

$$x \cdot x \cdot x = x^3 \cdot \dots \cdot x^3 = x^3$$

$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4 \cdot \dots \cdot x^4 = x^4$$

$$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5 \cdot \dots \cdot x^5 = 1$$

x dapat membangkitkan semua elemen pada Z_5 , oleh karena itu x adalah generator pada Z_5

$$x^2 \cdot \dots \cdot x^2 = x^2$$

$$x^2 \cdot x^2 = x^4 \cdot \dots \cdot x^4 = x^4$$

$$x^2 \circ x^2 \circ x^2 = x^6 \cdot \dots \cdot x^6 = x$$

$$x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 = x^8 \cdot \dots \cdot x^8 = x^3$$

$$x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 = x^{10} \cdot \dots \cdot x^{10} = 1$$

x^2 dapat membangkitkan semua elemen Z_5 , oleh karena itu x^2 adalah generator pada Z_5 .

$$x^3 \cdot \dots \cdot x^3 = x^3$$

$$x^3 \circ x^3 = x^6 \cdot \dots \cdot x^6 = x$$

$$x^3 \circ x^3 \circ x^3 = x^9 \cdot \dots \cdot x^9 = x^4$$

$$x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 = x^{12} \dots\dots\dots x^{12} = x^2$$

$$x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 = x^{15} \dots\dots\dots x^{15} = 1$$

x^3 dapat membangkitkan semua elemen Z_5 , oleh karena itu x^3 adalah generator pada Z_5 .

$$x^4 \dots\dots\dots x^4 = x^4$$

$$x^4 \circ x^4 = x^8 \dots\dots\dots x^8 = x^3$$

$$x^4 \circ x^4 \circ x^4 = x^{12} \dots\dots\dots x^{12} = x^2$$

$$x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 = x^{16} \dots\dots\dots x^{16} = x$$

$$x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 = x^{20} \dots\dots\dots x^{20} = 1$$

x^4 dapat membangkitkan semua elemen Z_5 , oleh karena itu x^4 adalah generator pada Z_5 .

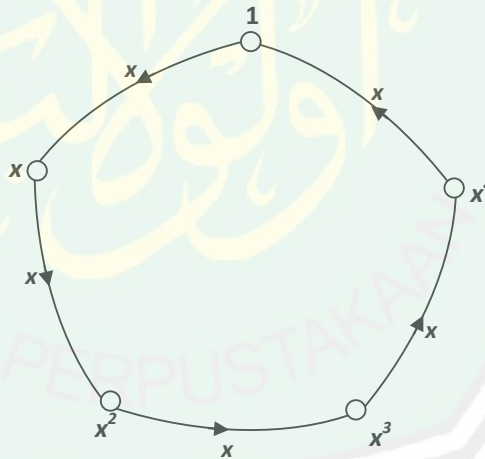
Sebagaimana pengujian yang telah dilakukan, maka generator dari Z_5 adalah $\{x, x^2, x^3, x^4\}$. akan tetapi pembahasan mengenai *Cayley Color Graph* dari grup siklik Z_5 disini hanya memilih generator $\{x\}$ dan atau pasangan generator yang berpangkat genap yaitu: dan $\{x^2, x^4\}$.

Berikut hasil *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan warna $\Delta = \{x\}$:

Hasil *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator x adalah:

1. $1 = x^4 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke 1 yang berwarna x
2. $x = 1 \circ x$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x yang berwarna x
3. $x^2 = x \circ x$, sehingga terdapat busur dari x ke x^2 yang berwarna x
4. $x^3 = x^2 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x^3 yang berwarna x
5. $x^4 = x^3 \circ x$ sehingga terdapat busur dari x^3 ke x^4 yang berwarna x

Jadi *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup siklik Z_5 dengan generator $\{x\}$ adalah sebagaimana gambar berikut:



Gambar 3.8 *Cayley Color Digraph* Pada Grup Siklik Z_5

Adapun hasil *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator $\Delta = \{x^2, x^4\}$:

adalah:

a. Hasil *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator x^2 adalah:

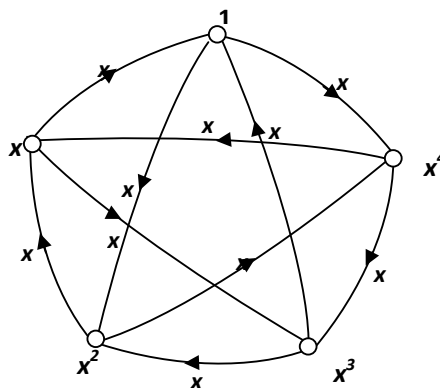
1. $1 = x^3 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^3 ke 1 yang berwarna x^2
2. $x = x^4 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke x yang berwarna x^2
3. $x^2 = 1 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x^2 yang berwarna x^2
4. $x^3 = x \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x ke x^3 yang berwarna x^2
5. $x^4 = x^2 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x^4 yang berwarna x^2

b. Hasil *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator x^4 adalah

1. $1 = x \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x ke 1 yang berwarna x^4
2. $x = x^2 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x yang berwarna x^4
3. $x^2 = x^3 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^3 ke x^2 yang berwarna x^4
4. $x^3 = x^4 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke x^3 yang berwarna x^4
5. $x^4 = 1 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x^4 yang berwarna x^4

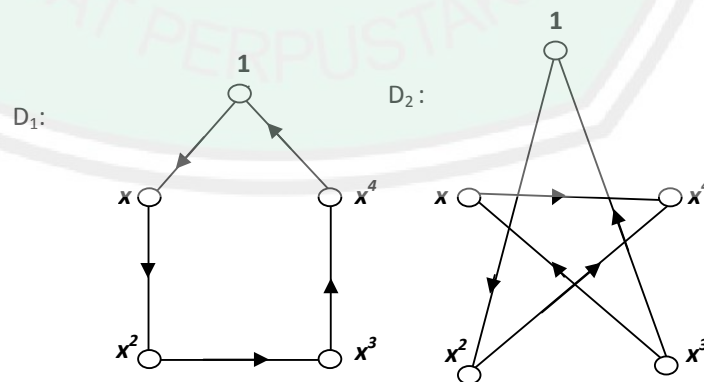
Jadi *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup siklik Z_5 tersebut dapat digambarkan

dengan digraf berikut:



Dari kedua gambar *Cayley Color Digraph* diatas dengan masing-masing generator $\{x\}$ dan $\{x^2, x^4\}$ dapat diketahui bahwa *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_5 juga memuat siklus Hamilton, sehingga *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_5 disebut digraf Hamilton.

Adapun siklus Hamilton pada *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_5 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.10 Siklus Hamilton pada *Cayley Color Digraph* dari Grup Siklik Z_5

3.3 Color Digraph dan Cayley Color Digraph Pada Grup Siklik Z_7

3.3.1. Color Digraph Pada Grup Siklik Z_7

Misalkan terdapat suatu digraf Z_7 yang mempunyai busur u menuju v . Busur tersebut diwarnai dengan $u^{-1}v$.

Pewarnaan tersebut akan diuji satu persatu sebagaimana berikut:

a. Pewarnaan Digraf dimulai dari titik $1 \rightarrow x$.

$$\begin{aligned} 1. 1 \rightarrow x \text{ diwarnai dengan } 1^{-1} \circ x &= 1 \circ x \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. x \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } x^{-1} \circ x^2 &= x^6 \circ x^2 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. x^2 \rightarrow x^3 \text{ diwarnai dengan } (x^2)^{-1} \circ x^3 &= x^5 \circ x^3 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. x^3 \rightarrow x^4 \text{ diwarnai dengan } (x^3)^{-1} \circ x^4 &= x^4 \circ x^4 \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. x^4 \rightarrow x^5 \text{ diwarnai dengan } (x^4)^{-1} \circ x^5 &= x^3 \circ x^5 \\ &= x \end{aligned}$$

$$6. x^5 \rightarrow x^6 \text{ diwarnai dengan } (x^5)^{-1} \circ x^6 = x^2 \circ x^6$$

$$= x$$

$$7. x^6 \rightarrow 1 \text{ diwarnai dengan } (x^6)^{-1} \circ 1 = x \circ 1$$

$$= x$$

b. Pewarnaan Digraf dimulai dari titik $1 \rightarrow x^2$

$$1. 1 \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } 1^{-1} \circ x^2 = 1 \circ x^2$$

$$= x^2$$

$$2. x^2 \rightarrow x^4 \text{ diwarnai dengan } (x^2)^{-1} \circ x^4 = x^6 \circ x^2$$

$$= x^2$$

$$3. x^4 \rightarrow x^6 \text{ diwarnai dengan } (x^4)^{-1} \circ x^6 = x^3 \circ x^6$$

$$= x^2$$

$$4. x^6 \rightarrow x \text{ diwarnai dengan } (x^6)^{-1} \circ x = x \circ x$$

$$= x^2$$

$$5. x \rightarrow x^3 \text{ diwarnai dengan } x^{-1} \circ x^3 = x^6 \circ x^3$$

$$= x^2$$

$$6. x^3 \rightarrow x^5 \text{ diwarnai dengan } (x^3)^{-1} \circ x^5 = x^4 \circ x^5$$

$$= x^2$$

$$7. x^5 \rightarrow 1 \text{ diwarnai dengan } (x^5)^{-1} \circ 1 = x^2 \circ 1$$

$$= x^2$$

c. Pewarnaan Digraf dimulai dari titik $1 \rightarrow x^3$

$$1. 1 \rightarrow x^3 \text{ diwarnai dengan } 1^{-1} \circ x^3 = 1 \circ x^3$$

$$= x^3$$

$$2. x^3 \rightarrow x^6 \text{ diwarnai dengan } (x^3)^{-1} \circ x^6 = x^4 \circ x^6$$

$$= x^3$$

$$3. x^6 \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } (x^6)^{-1} \circ x^2 = x \circ x^3$$

$$= x^3$$

$$4. x^2 \rightarrow x^5 \text{ diwarnai dengan } (x^2)^{-1} \circ x^5 = x^5 \circ x^5$$

$$= x^3$$

$$5. x^5 \rightarrow x \text{ diwarnai dengan } (x^5)^{-1} \circ x = x^2 \circ x$$

$$= x^3$$

$$6. x \rightarrow x^4 \text{ diwarnai dengan } x^{-1} \circ x^4 = x^6 \circ x^4$$

$$= x^3$$

$$7. x^4 \rightarrow 1 \text{ diwarnai dengan } (x^4)^{-1} \circ 1 = x^3 \circ 1$$

$$= x^3$$

d. Pewarnaan Digraf dimulai dari titik $1 \rightarrow x^4$

$$1. 1 \rightarrow x^4 \text{ diwarnai dengan } 1^{-1} \circ x^4 = 1 \circ x^4$$

$$= x^4$$

$$2. x^4 \rightarrow x \text{ diwarnai dengan } (x^4)^{-1} \circ x = x^3 \circ x$$

$$= x^4$$

$$3. x \rightarrow x^5 \text{ diwarnai dengan } x^{-1} \circ x^5 = x^6 \circ x^5$$

$$= x^4$$

$$4. x^5 \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } (x^4)^{-1} \circ x = x^2 \circ x^2$$

$$= x^4$$

$$5. x^2 \rightarrow x^6 \text{ diwarnai dengan } (x^2)^{-1} \circ x^6 = x^5 \circ x^6$$

$$= x^4$$

$$6. x^6 \rightarrow x^3 \text{ diwarnai dengan } (x^6)^{-1} \circ x^3 = x \circ x^3$$

$$= x^4$$

$$7. x^3 \rightarrow 1 \text{ diwarnai dengan } (x^3)^{-1} \circ 1 = x^4 \circ 1$$

$$= x^4$$

e. Pewarnaan Digraf dimulai dari titik $1 \rightarrow x^5$

$$1. 1 \rightarrow x^5 \text{ diwarnai dengan } 1^{-1} \circ x^5 = 1 \circ x^5$$

$$= x^5$$

$$2. x^5 \rightarrow x^3 \text{ diwarnai dengan } (x^5)^{-1} \circ x^3 = x^2 \circ x^3$$

$$= x^5$$

$$3. x^3 \rightarrow x \text{ diwarnai dengan } (x^3)^{-1} \circ x = x^4 \circ x$$

$$= x^5$$

$$4. x \rightarrow x^6 \text{ diwarnai dengan } x^{-1} \circ x^6 = x^6 \circ x^6$$

$$= x^5$$

$$5. x^6 \rightarrow x^4 \text{ diwarnai dengan } (x^6)^{-1} \circ x^4 = x \circ x^4$$

$$= x^5$$

$$6. x^4 \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } (x^4)^{-1} \circ x^2 = x^3 \circ x^2$$

$$= x^5$$

$$7. x^2 \rightarrow 1 \text{ diwarnai dengan } (x^3)^{-1} \circ 1 = x \circ 1$$

$$= x^5$$

f. Pewarnaan Digraf dimulai dari titik $1 \rightarrow x^6$

$$1. 1 \rightarrow x^6 \text{ diwarnai dengan } 1^{-1} \circ x^6 = 1 \circ x^6$$

$$= x^6$$

$$2. x^6 \rightarrow x^5 \text{ diwarnai dengan } (x^6)^{-1} \circ x^5 = x \circ x^5$$

$$= x^6$$

$$3. x^5 \rightarrow x^4 \text{ diwarnai dengan } (x^5)^{-1} \circ x^4 = x^2 \circ x^4$$

$$= x^6$$

$$4. x^4 \rightarrow x^3 \text{ diwarnai dengan } (x^4)^{-1} \circ x^3 = x^3 \circ x^3$$

$$= x^6$$

$$5. x^3 \rightarrow x^2 \text{ diwarnai dengan } (x^3)^{-1} \circ x^2 = x^4 \circ x^2$$

$$= x^6$$

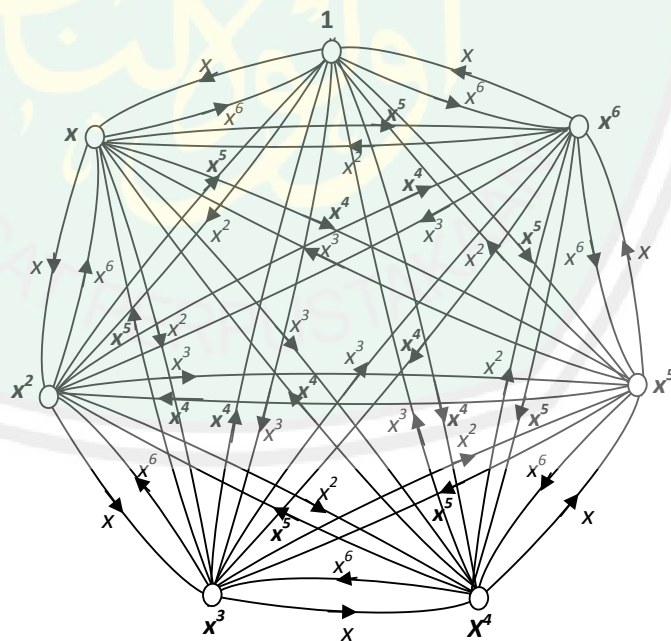
$$6. x^2 \rightarrow x \text{ diwarnai dengan } (x^2)^{-1} \circ x = x^5 \circ x$$

$$= x^6$$

7. $x \rightarrow 1$ diwarnai dengan $x^{-1} \circ 1 = x^6 \circ 1$

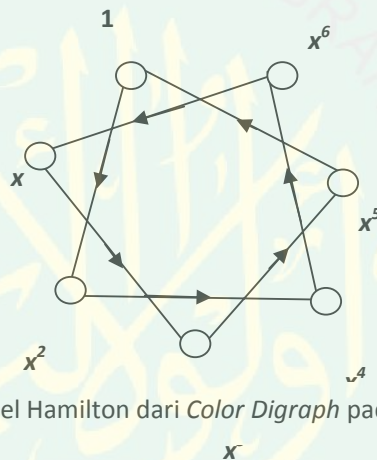
$$= x^6$$

Setelah dilakukan pengujian pewarnaan digraf pada grup siklik Z_n dengan n bilangan prima dengan $3 \leq n \leq 7$, maka hasil pewarnaan digraf (*Color Digraph*) akan tampak sebagaimana gambar berikut:



Gambar 3.11 *Color Digraph* pada Grup Siklik Z_7

Dari gambar *Color Digraph* diatas dapat diketahui bahwa *Color Digraph* dari grup siklik Z_7 memuat Sikel Hamilton, sehingga *Color Digraph* dari grup siklik Z_7 disebut Digraf Hamilton. Adapun sikel Hamilton pada *Color Digraph* dari grup siklik Z_7 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.12 Sikel Hamilton dari *Color Digraph* pada Grup Siklik Z_7

3.3.2. Cayley Color Digraph Pada Grup Siklik Z_7

Untuk menentukan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_7 juga dapat dilakukan dengan memilih generator dari elemen grup siklik sebagaimana yang dilakukan pada grup siklik Z_5 .

Misal Γ dinotasikan sebagai grup siklik Z_7 di mana himpunannya tersebut beranggotakan 7 yaitu: $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$. Pasangan generator yang dapat membangkitkan grup siklik Z_7 yaitu: $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6\}$. Pasangan generator tersebut juga akan diuji satu persatu sebagaimana berikut:

$$1 \dots\dots\dots 1 = 1$$

$$1 \otimes 1 = 1^2 \dots\dots\dots 1^2 = 1$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = 1^3 \dots\dots\dots 1^3 = 1$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1^4 \dots\dots\dots 1^4 = 1$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1^5 \dots\dots\dots 1^5 = 1$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1^6 \dots\dots\dots 1^6 = 1$$

$$1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 = 1^7 \dots\dots\dots 1^7 = 1$$

1 hanya bisa membangkitkan dirinya sendiri sehingga 1 bukan generator dari Z_7

$$x \dots\dots\dots x = x$$

$$x \otimes x = x^2 \dots\dots\dots x^2 = x^2$$

$$x \otimes x \otimes x = x^3 \dots\dots\dots x^3 = x^3$$

$$x \otimes x \otimes x \otimes x = x^4 \dots\dots\dots x^4 = x^4$$

$$x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x = x^5 \dots\dots\dots x^5 = x^5$$

$$x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x \otimes x = x^6 \dots\dots\dots x^6 = x^6$$

x dapat membangkitkan semua elemen pada Z_7 oleh karena itu x adalah generator pada Z_7

$$x^2 \dots\dots\dots x^2 = x^2$$

$$x^2 \circ x^2 = x^4 \dots\dots\dots x^4 = x^4$$

$$x^2 \circ x^2 \circ x^2 = x^6 \dots\dots\dots x^6 = x^6$$

$$x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 = x^8 \dots\dots\dots x^8 = x$$

$$x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 = x^{10} \dots\dots\dots x^{10} = x^3$$

$$x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 = x^{12} \dots\dots\dots x^{12} = x^5$$

$$x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 \circ x^2 = x^{14} \dots\dots\dots x^{14} = 1$$

x^2 dapat membangkitkan semua elemen pada Z_7 oleh karena itu x adalah generator pada Z_7

$$x^3 \dots\dots\dots x^3 = x^3$$

$$x^3 \circ x^3 = x^6 \dots\dots\dots x^6 = x^6$$

$$x^3 \circ x^3 \circ x^3 = x^9 \dots\dots\dots x^9 = x^2$$

$$x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 = x^{12} \dots\dots\dots x^{12} = x^5$$

$$x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 = x^{15} \dots\dots\dots x^{15} = x$$

$$x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 = x^{18} \dots\dots\dots x^{18} = x^4$$

$$x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 \circ x^3 = x^{21} \dots\dots\dots x^{21} = 1$$

x^3 dapat membangkitkan semua elemen pada Z_7 oleh karena itu x adalah generator pada Z_7

$$x^4 \dots\dots\dots x^4 = x^4$$

$$x^4 \circ x^4 = x^8 \dots\dots\dots x^8 = x$$

$$x^4 \circ x^4 \circ x^4 = x^{12} \dots\dots\dots x^{12} = x^5$$

$$x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 = x^{16} \dots\dots\dots x^{16} = x^2$$

$$x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 = x^{20} \dots\dots\dots x^{20} = x^6$$

$$x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 = x^{24} \dots\dots\dots x^{24} = x^3$$

$$x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 \circ x^4 = x^{28} \dots\dots\dots x^{28} = 1$$

x^4 dapat membangkitkan semua elemen pada Z_7 oleh karena itu x adalah generator pada Z_7

$$x^5 \dots\dots\dots x^5 = x^5$$

$$x^5 \circ x^5 = x^{10} \dots\dots\dots x^{10} = x^3$$

$$x^5 \circ x^5 \circ x^5 = x^{15} \dots\dots\dots x^{15} = x$$

$$x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 = x^{20} \dots\dots\dots x^{20} = x^6$$

$$x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 = x^{25} \dots\dots\dots x^{25} = x^4$$

$$x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 = x^{30} \dots\dots\dots x^{30} = x^2$$

$$x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 \circ x^5 = x^{35} \dots\dots\dots x^{35} = 1$$

x^5 dapat membangkitkan semua elemen pada Z_7 oleh karena itu x adalah generator pada Z_7

$$x^6 = x^6 \dots\dots\dots x^6 = x^6$$

$$x^6 \circ x^6 = x^{12} \dots\dots\dots x^{12} = x^5$$

$$x^6 \circ x^6 \circ x^6 = x^{18} \dots\dots\dots x^{18} = x^4$$

$$x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 = x^{24} \dots\dots\dots x^{24} = x^3$$

$$x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 = x^{30} \dots\dots\dots x^{30} = x^2$$

$$x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 = x^{36} \dots\dots\dots x^{36} = x$$

$$x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 \circ x^6 = x^{42} \dots\dots\dots x^{42} = 1$$

x^6 dapat membangkitkan semua elemen pada Z_7 oleh karena itu x adalah generator pada Z_7 .

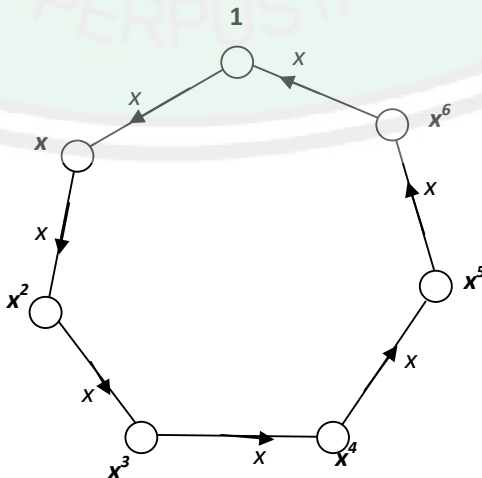
Sebagaimana pengujian yang telah dilakukan, maka generator dari Z_5 adalah $\{x, x^2, x^3, x^4\}$. akan tetapi pembahasan mengenai *Cayley Color Graph* dari grup siklik

Z_7 disini hanya memilih generator $\{x\}$ dan atau generator yang berpangkat genap yaitu: $\{x^2, x^4\}$ atau $\{x^2, x^4, x^6\}$

Adapun hasil *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dengan generator $\Delta = \{x\}$ adalah:

1. $1 = x^6 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke 1 yang berwarna x
2. $x = 1 \circ x$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x yang berwarna x
3. $x^2 = x \circ x$, sehingga terdapat busur dari x ke x^2 yang berwarna x
4. $x^3 = x^2 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x^3 yang berwarna x
5. $x^4 = x^3 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^3 ke x^4 yang berwarna x
6. $x^5 = x^4 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke x^5 yang berwarna x
7. $x^6 = x^5 \circ x$, sehingga terdapat busur dari x^5 ke x^6 yang berwarna x

Jadi hasil *Cayley Color Digraph* $D_\Delta(\Gamma)$ dari grup siklik Z_7 dengan generator $\{x\}$ dalam bentuk gambar adalah sebagaimana berikut:



Gambar 3.13. a *Cayley Color Digraph* Z_7

Untuk hasil *Cayley Color Digraf* hasil $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator $\Delta = \{x^2, x^4\}$ adalah:

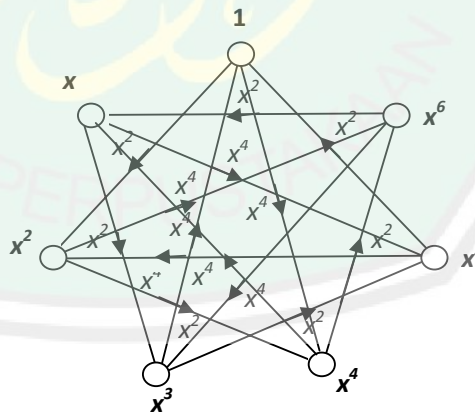
a. Hasil *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator x^2 adalah:

1. $1 = x^5 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^5 ke 1 yang berwarna x^2
2. $x = x^6 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^6 ke x yang berwarna x^2
3. $x^2 = 1 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x^2 yang berwarna x^2
4. $x^3 = x \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x ke x^3 yang berwarna x^2
5. $x^4 = x^2 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x^4 yang berwarna x^2
6. $x^5 = x^3 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^3 ke x^5 yang berwarna x^2
7. $x^6 = x^4 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke x^6 yang berwarna x^2

b. Hasil *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator x^4 adalah

1. $1 = x^3 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^3 ke 1 yang berwarna x^4
2. $x = x^4 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke x yang berwarna x^4
3. $x^2 = x^5 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^5 ke x^2 yang berwarna x^4
4. $x^3 = x^6 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^6 ke x^3 yang berwarna x^4
5. $x^4 = 1 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x^4 yang berwarna x^4
6. $x^5 = x \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x ke x^5 yang berwarna x^4
7. $x^6 = x^2 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x^6 yang berwarna x^4

Jadi *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup siklik Z_7 dengan generator $\{x^2, x^4\}$ adalah sebagaimana gambar berikut:



Gambar 3.14 *Cayley Color Digraph* Z_7

Untuk hasil *Cayley Color Digraf* hasil $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator

$\Delta = \{x^2, x^4, x^6\}$ adalah:

a. Hasil *Cayley Color Digraf* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator x^2 adalah:

1. $1 = x^5 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^5 ke 1 yang berwarna x^2
2. $x = x^6 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^6 ke x yang berwarna x^2
3. $x^2 = 1 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x^2 yang berwarna x^2
4. $x^3 = x \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x ke x^3 yang berwarna x^2
5. $x^4 = x^2 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x^4 yang berwarna x^2
6. $x^5 = x^3 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^3 ke x^5 yang berwarna x^2
7. $x^6 = x^4 \circ x^2$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke x^6 yang berwarna x^2

b. Hasil *Cayley Color Digraf* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator x^4 adalah

1. $1 = x^3 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^3 ke 1 yang berwarna x^4
2. $x = x^4 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke x yang berwarna x^4
3. $x^2 = x^5 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^5 ke x^2 yang berwarna x^4
4. $x^3 = x^6 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^6 ke x^3 yang berwarna x^4

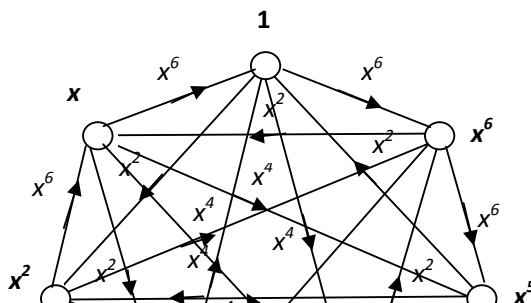
5. $x^4 = 1 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x^4 yang berwarna x^4
6. $x^5 = x \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x ke x^5 yang berwarna x^4
7. $x^6 = x^2 \circ x^4$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x^6 yang berwarna x^4

c. Hasil *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dengan generator x^6 adalah

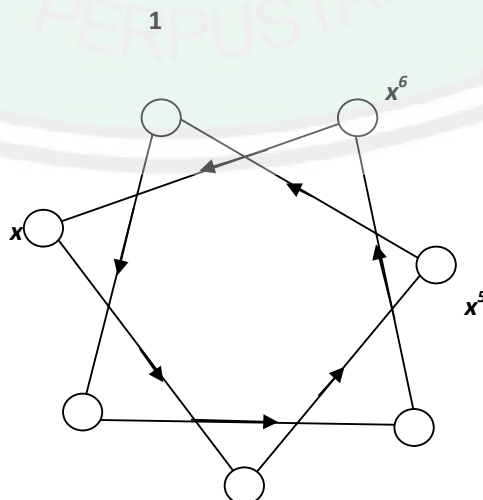
1. $1 = x \circ x^6$, sehingga terdapat busur dari x ke 1 yang berwarna x^6
2. $x = x^2 \circ x^6$, sehingga terdapat busur dari x^2 ke x yang berwarna x^6
3. $x^2 = x^3 \circ x^6$, sehingga terdapat busur dari x^3 ke x^2 yang berwarna x^6
4. $x^3 = x^4 \circ x^6$, sehingga terdapat busur dari x^4 ke x^3 yang berwarna x^6
5. $x^4 = x^5 \circ x^6$, sehingga terdapat busur dari x^5 ke x^4 yang berwarna x^6
6. $x^5 = x^6 \circ x^6$, sehingga terdapat busur dari x^6 ke x^5 yang berwarna x^6
7. $x^6 = 1 \circ x^6$, sehingga terdapat busur dari 1 ke x^6 yang berwarna x^6

Jadi *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup siklik Z_5 dengan generator $\{x^2, x^4, x^6\}$

adalah sebagaimana gambar berikut:



Dari gambar *Color Digraph* diatas dapat diketahui bahwa *Color Digraph* dari grup siklik Z_7 memuat sikel Hamilton, sehingga *Color Digraph* dari grup siklik Z_7 disebut Digraf Hamilton. Adapun sikel Hamilton pada *Color Digraph* dari grup siklik Z_7 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.16 Sikel Hamilton dari *Cayley Color Digraph* pada Grup Siklik Z_7



x^2

x^4

x^3



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian sebagaimana yang telah penulis uraikan pada BAB III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan prima dan $3 \leq n \leq 7$ adalah berbentuk Digraf Hamilton, karena *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik Z_n dengan n bilangan prima dan $3 \leq n \leq 7$ memuat siklus Hamilton.

4.2 Saran

Pada penulisan skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pembahasan masalah *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* $D_{\Delta}(\Gamma)$ dari grup siklik Z_n dengan $3 \leq n \leq 7$, maka untuk penulisan skripsi selanjutnya, kami sebagai penulis menyarankan para pembaca yang berminat untuk mengkaji lebih dalam tentang *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari suatu grup yang lain, atau dapat pula mengkaji tentang *Color Digraph* dan *Cayley Color Digraph* dari grup siklik dengan ordo yang lebih tinggi.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir, 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. UIN-Malang Press: Malang
- Al-Fauzan, Saleh. 2006. *Fiqih sehari-hari*. Gema Insani: Jakarta
- Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California.
- Departemen Agama RI. 1995. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*. Semarang: PT. Karya Toha Putra.
- Echols, John M dan Hasan Shadily. 1976. *Kamus Inggris Indonesia*. Jakarta: Gramedia
- Ghilyaini, Musthofa. 2004. *Jami'uddurusul Lughah Al-Arabiah*. Bairut
- Munawwir, Ahmad Warson. 2002. *Kamus Al-Munawwir Arab-Indonesia Terlengkap*. Pustaka Progresif: Surabaya.
- Raisinghanian. M.D. dan R.S. Aggarwal. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.
- Sarifuddin, Yahya An-Nawawi. 1999. *Syarah Al-Arba'in An-Nawawi*. Surabaya: Al-Miftah
- Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: Universitas Negeri Malang (UM PRESS).
- Sabiq, Sayyid. 2004. *Fiqih Sunnah Jilid 2*. Pena Pundi Aksara: Jakarta
- S. Dummit David dan M. Foote Richard. 1991 *Abstract Algebra*. USA.
- Wilson, Robin J dan Watkins. 1990. *Graph and introductory approach*. Open University course: Singapore

KARTU BIMBINGAN SKRIPSI

Nama : ABDUL JALIL

NIM : 04510009

Fakultas/Jurusan : SAINS DAN TEKNOLOGI/ MATEMATIKA

Judul : *COLOR DIGRAPH* DAN *CAYLEY COLOR DIGRAPH* DARI GRUP SIKLIK Z_n DENGAN n BILANGAN PRIMA

PEMBIMBING : I . Abdussakir, M.Pd
II. Abdul Azis, M.Si

No	Tanggal	Materi	Tanda Tangan Pembimbing
1.	21 Pebruari 2008	Proposal	
2.	05 Maret 2008	Persetujuan Proposal	
3.	12 Agustus 2008	Konsultasi Bab I dan II	
4.	05 September 2008	Revisi Bab I dan Bab II	
6.	29 November 2008	Konsultasi Bab III	
7.	03 Desember 2008	Revisi Bab III	
8.	12 Desember 2008	Konsultasi Kajian Keagamaan	
9.	30 Desember 2008	Revisi Kajian Keagamaan	
10.	02 Januari 2009	Revisi Kajian Keagamaan	
11.	03 Januari 2009	Revisi Bab III, IV dan Abstrak	
12.	04 Januari 2009	ACC keseluruhan	

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si

NIP. 150 318 321

