SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* DENGAN BILANGAN *FUZZY* SIGMOID MENGGUNAKAN METODE GAUSS-SEIDEL

SKRIPSI

OLEH:
MARIA SYIFAUS SA'ADAH
NIM. 200601110089

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER FUZZY DENGAN BILANGAN *FUZZY* SIGMOID MENGGUNAKAN METODE GAUSS-SEIDEL

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Maria Syifaus Sa'adah
NIM. 200601110089

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2024

SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* DENGAN BILANGAN *FUZZY* SIGMOID MENGGUNAKAN METODE GAUSS-SEIDEL

SKRIPSI

Oleh
Maria Syifaus Sa'adah
NIM. 200601110089

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 30 Mei 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Evawati Alisah, M.Pd.	Achmad Nashichuddin, M.A.
NIP. 19720604 199903 2 001	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINIER *FUZZY* DENGAN BILANGAN *FUZZY* SIGMOID MENGGUNAKAN METODE GAUSS-SEIDEL

SKRIPSI

Oleh
Maria Syifaus Sa'adah
NIM. 200601110089

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal, 06 Juni 2024

Ketua Penguji	:	Dr. Usman Pagalay, M.Si.	....
Anggota Penguji 1	:	Intan Nisfulaila, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	:	Evawati Alisah, M.Pd.	....
Anggota Penguji 3	:	Achmad Nashichuddin, M.A.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Maria Syifaus Sa'adah
NIM	:	200601110089
Program Studi	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	:	Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Sigmoid Menggunakan Metode Gauss-Seidel

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan karya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti skripsi ini adalah hasil jiplakan atau tiruan, maka saya bersedia menerima sanksi yang berlaku atas perbuatan tersebut.

Malang, 06 Juni 2024

Maria Syifaus Sa'adah
NIM. 200601110089

MOTO

اَلَّذِيْنَ ءَامَنُوْا وَتَطْمَئِنُّ قُلُوْبُهُمْ بِذِكْرِاللَّهِ اَلاَ بِذِكْرِاللَّهِ تَطْمَئِنُّ الْقُلُوْبُ

"(Yaitu) orang-*orang yang beriman dan hati mereka menjadi tentram dengan mengingat Allah. Ingatlah, hanya mengingat Allahlah hati menjadi tentram"*

(Q.S Ar-Ra'd/13: 28)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:
Kedua orang tua yang penulis sayangi, yaitu Ayahanda Edy Santoso dan Ibunda Khoirul Ummah yang telah mendidik penulis, memotivasi, memberikan dukungan, serta tak henti-hentinya untuk selalu mendoakan anaknya hingga penulis mampu menyelesaikan studinya sampai sarjana. Kepada kakakku dan kakak iparku, Khoirul Ony Santoso, Fifitri Jumrotul Faricha, Ratna Alfianti yang telah memberikan dukungan dan semangat dalam menyelesaikan studi sampai sarjana. Kepada adik dan ponakanku, Muhammad Luthfi Ramdhani dan Nisrina Jinan Elshanum. Teman-teman yang selalu membantu dalam menyelesaikan setiap kesulitan penulis. Dosen-dosen yang selalu membantu dalam menyelesaikan skripsi penulis.

KATA PENGANTAR

Penulis panjatkan puji syukur dan berterima kasih kepada Allah SWT atas rahmat dan bimbingan-Nya yang telah diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan draft skripsi berjudul "Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Sigmoid Menggunakan Metode Gauss-Seidel". Sholawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menuntun ke jalan kebenaran yaitu agama Islam. Skripsi ini disusun sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang membantu dan memberikan arahan selama proses penyusunan skripsi. Ucapan terima kasih disampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.SC., selaku ketua Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd., selaku dosen pembimbing I yang dengan sabar memberikan bimbingan, motivasi, nasihat, serta memberikan ilmu-ilmu baru selama menyusun skripsi.
5. Achmad Nashichuddin, M.A., selaku dosen pembimbing II dan dosen wali yang telah memberikan motivasi, saran, dan pengetahuan selama menyusun skripsi.
6. Dr. Usman Pagalay, M.Si., selaku ketua penguji yang telah memberikan saran dan masukkan selama menguji serta memberikan banyak ilmu dan pengetahuan.
7. Intan Nisfulaila, M.Si., selaku anggota penguji I yang telah memberikan saran dan masukkan selama menguji serta memberikan banyak ilmu dan pengetahuan.

8. Segenap dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Kedua orang tua, saudara, kakak ipar, dan keluarga besar yang selalu mendoakan, memberikan dukungan, dan motivasi.
10. Ibu dan Abah pengasuh Pondok Pesantren Al-Hikmah Al-Fathimiyyah yang senantiasa mendoakan dan memberikan dukungan.
11. Seluruh mahasiswa angkatan 2020 yang saling mendukung.
12. Teman-teman seperjuangan di Pondok Pesantren Al-Hikmah Al-Fathimiyyah yang saling mendukung satu sama lain.
13. Semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak bisa satu per satu.

Malang, 06 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna sebagai berikut:

X_A	: Fungsi karakteristik himpunan A dalam himpunan semesta X
$\mu_A(x)$	: Nilai keanggotaan x pada himpunan A
$\mu_{\tilde{A}}(x)$	: Nilai keanggotaan x pada himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$
$\tilde{A}$	: Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$
$\tilde{A}_\alpha$	: Potongan$-\alpha$ pada himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$
$\tilde{A}_\alpha^+$	: Potongan$-\alpha$ kuat pada himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$
$S(\tilde{A})$	: *Support* pada himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$
x_α^-	: Potongan$-\alpha$ x dari sebelah kiri
x_α^+	: Potongan$-\alpha$ x dari sebelah kanan
b_α^-	: Potongan$-\alpha$ b dari sebelah kiri
b_α^+	: Potongan$-\alpha$ b dari sebelah kanan
a_{ij}	: Elemen matriks A pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$
s_{ij}	: Elemen matriks S pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$
$x_i^{(k+1)}$	: x_i pada iterasi ke$-(k+1)$
x_i^k	: x_i pada iterasi ke$-(k)$
k	: Banyaknya iterasi
$[0,1]$	: Interval tertutup 0 sampai 1

ABSTRAK

Sa'adah, Maria Syifaus, 2024. **Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Sigmoid Menggunakan Metode Gauss-Seidel.** Skripsi Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing I) Evawati Alisah, M.Pd., II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*, Bilangan *Fuzzy* Sigmoid, Potongan$-\alpha$, Metode Gauss-Seidel.

Sistem persamaan linier dapat digabungkan dengan suatu bilangan *fuzzy* yang menghasilkan persamaan baru, yaitu sistem persamaan linier *fuzzy*. Sistem persamaan linier *fuzzy* memiliki bentuk umum $A\tilde{X} = \tilde{b}$, A sebagai elemen dengan bilangan riil, $\tilde{X}$ sebagai variabel dari bilangan *fuzzy*, serta $\tilde{b}$ sebagai konstanta dari bilangan *fuzzy*. Salah satu macam bilangan *fuzzy* adalah bilangan *fuzzy* sigmoid. Permasalahan yang berkaitan dengan sistem persamaan linier *fuzzy* adalah bagaimana solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy*. Salah satu metode yang dapat digunakan adalah menggunakan Metode Gauss-Seidel. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui proses penentuan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoid menggunakan Metode Gauss-Seidel dan mengetahui hasil dari interpretasi Metode Gauss-Seidel untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy*. Langkah-langkah dalam penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoid menggunakan Metode Gauss-Seidel adalah dengan melakukan fuzzifikasi variabel dan kontanta *fuzzy* ke dalam bentuk potongan$-\alpha$ tipe pertumbuhan sigmoid. Selanjutnya mengubah bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* ke dalam matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$. Kemudian dari matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dirubah menjadi matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$. Kemudian menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan Metode Gauss-Seidel melalui proses iterasi. Hasil nilai dari setiap iterasi kemudian didefuzzifikasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Iterasi berhenti jika nilai toleransi kesalahan tercapai sehingga diperoleh solusi dalam bentuk potongan$-\alpha$. Berdasarkan hasil perhitungan menunjukkan bahwa Metode Gauss-Seidel tidak selalu memberikan solusi yang tepat untuk sistem persamaan linier *fuzzy* dengan variabel dan konstanta *fuzzy* berupa bilangan sigmoid yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$. Solusi dianggap tepat apabila apabila hasil substitusi solusi terhadap sistem persamaan linier *fuzzy* dan defuzzifikasi $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ menunjukkan hasil yang sama.

ABSTRACT

Sa'adah, Maria Syifaus, 2024. **Solution of Fuzzy Linear Equation System with Sigmoid Fuzzy Numbers Using Gauss-Seidel Method.** Thesis of Mathematics Study Program, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University Malang. Advisor I) Evawati Alisah, M.Pd., II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Keywords: Fuzzy Linear Equation System, Sigmoid Fuzzy Numbers, $\alpha -$cuts, Gauss-Seidel Method.

A system of linear equations can be combined with a fuzzy number that produces a new equation, namely a system of fuzzy linear equations. The system of fuzzy linear equations has the general form $A\tilde{X} = \tilde{b}$, A as an element with real numbers, $\tilde{X}$ as a variable of fuzzy numbers, and $\tilde{b}$ as a constant of fuzzy numbers. One kind of fuzzy number is sigmoid fuzzy number. The problem related to the system of fuzzy linear equations is how to solve the system of fuzzy linear equations. One method that can be used is using the Gauss-Seidel Method. This study aims to determine the process of determining the solution of a system of fuzzy linear equations with sigmoid fuzzy numbers using the Gauss-Seidel Method and to know the results of the interpretation of the Gauss-Seidel Method to determine the solution of a system of fuzzy linear equations. The steps in solving a system of fuzzy linear equations with sigmoid fuzzy numbers using the Gauss-Seidel Method are to fuzzify the fuzzy variables and constants into the form of sigmoid growth type $\alpha -$cuts. Then transform the form of a fuzzy linear equation system into a matrix $A\tilde{X} = \tilde{b}$. Then from the matrix $A\tilde{X} = \tilde{b}$ it is converted into a matrix $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$. Then solve the fuzzy linear equation system using the Gauss-Seidel Method through an iteration process. The result of the value of each iteration is then defuzzified with $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$. Iteration stops if the error tolerance value is reached so that a solution in the form of $\alpha -$cuts is obtained. Based on the calculation results, it shows that the Gauss-Seidel Method does not always provide the right solution for fuzzy linear equation systems with fuzzy variables and constants in the form of sigmoid numbers expressed as $\alpha -$cuts. The solution is considered correct if the substitution of the solution to the system of fuzzy linear equations and defuzzification $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$ shows the same result.

مستخلص البحث

السادة، ماري شفاء،٢٠٢٤. **حل نظام المعادلات الخطية الضبابية مع الأعداد الضبابية الجيبية باستخدام طرق غاوس–سايدل**. البحث العلمي قسم الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة الأولى: ١) ايفاواتي اليساه، الماجستير. المشرف الثاني: ٢) أحمد ناصح الدين، الماجستير.

الكلمات المفتاحية: نظام المعادلات الخطية الضبابية، الأعداد الضبابية السيجيمية، القطعة– α، و طريقة غاوس–سايدل.

يمكن دمج نظام من المعادلات الخطية مع رقم عمض لإنتاج معادلة جديدة، وهي نظام المعادلات الخطية الضبابية. يحتوى نظام المعادلات الخطية الضبابية على الشكل العام $A\tilde{X} = \tilde{b}$، A كعنصر برقم حقيقى، $\tilde{X}$ لمتغيرلعدد غامض،$\tilde{b}$ كثوابت الأعداد الضبابية. أحد أنواع الضبابية هو العد الضابي السيجيمى. المشكة المتعلقة بنطام المعادلات الخطية هي كيفية حل نظام المعادلات الخطية الضبابية. إحدى الطرق التى يمكن استخدا مها هي استخدام طريقة غاوس–سايدل. تهدف هذه الدراسة إلى تحديد عملية تحديد حل نظام من المعادلات الخطية الضبابية ذات الأعداد السهمية الضبابية باستخدام طريقة غاوس–سايدل ومعرفة نتائج تفسير طريقة غاوس–سايدل لتحديد حل نظام المعادلة الخطية الضبابية. تتمتل حطوات حل نظام المعادلات الخطية الضبابية ذات الأعداد الضبابية السهمية با ستخدام طريقة غاوس–ساديل فى تشويش المتغيرات و الثوابت الضبابية فى صورة قطع من نوع الدمو السهمي α ثم تغيير صورة نظام المعادلات الخطية الضبابية إلى المصفوفة $A\tilde{X} = \tilde{b}$ ثم من المصفوفة $A\tilde{X} = \tilde{b}$ يتم تحويلها إلى مصفوفة $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$ ثم حل نظام المعادلة الخطية الضبابية باستخدام طريقة غاوس–سايدل من عملية التكرار ثم يتم إلغا تشويش ننيجة قيمة كل تكرار باستخدام $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ تتوفق عملية التكرار إذا تم الوصول إلى قيمة تحمل الخطأ بحيث يتم الحصول على حل على شكل قطع – α. استنادًا إلى نتائج الحسابات. يتبين أن طريقة غاوس–سايدل لا توفر دائما الحل الصحيح لنظام من المعادلات الخطية الضبابية مع متغيرات. يعتبر الحل صحيحا إذا كان استبدال حل نظام المعادلات الخطية الضبابية وإزالة الضبابية $\alpha = 0$ و $\alpha = 1$ يظهرالنتيجة نفسها.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan linier didefinisikan sebagai persamaan di mana setiap sukunya berupa konstanta atau perkalian koefisien dengan suatu variabel berderajat satu yang mewakili suatu solusi yang tidak diketahui. Umumnya suatu persamaan linier dengan n variabel dapat ditulis dengan $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang berbentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$, dengan $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta riil yang menghubungkan variabel-variabel dengan hasil b. Adanya persamaan linier bertujuan untuk dapat menemukan nilai-nilai atau solusi yang memenuhi persamaan (Sari & Alisah, 2012).

Kumpulan dua atau lebih dari suatu persamaan linier disebut sebagai sistem persamaan linier. Sistem persamaan linier adalah himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier dengan variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ sebagai variabel yang masih belum diketahui solusi dan konstanta b. Solusi persamaan linier merupakan kumpulan dari n bilangan $s_1, s_2, \dots, s_n$ yang memenuhi suatu persamaan linier sehingga $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \dots, s_n = x_n$ (Andari, 2017).

Menyelesaikan suatu sistem persamaan linier dibutuhkan metode yang digunakan untuk mendapatkan suatu solusi. Ada dua metode yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan linier, yaitu metode langsung dan tidak langsung. Metode langsung merupakan metode di mana prosesnya melalui langkah-langkah berhingga untuk mendapatkan solusi yang memenuhi suatu persamaan linier. Metode Eliminasi Gauss, Metode Eliminasi Gauss-Jordan, Metode Matriks Invers, aturan Cramer, dan Metode Dekomposisi *Lower-Upper* (LU) merupakan contoh metode langsung. Metode tidak langsung dikenal sebagai metode iteratif dan membutuhkan nilai awal (solusi). Metode Iterasi Jacobi, Metode Gauss-Seidel, dan Metode *Successive Over Relaxation* (SOR) merupakan beberapa contoh metode tidak langsung (Sukarna dkk., 2020).

Metode Gauss-Seidel adalah salah satu metode tidak langsung yang digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier melalui proses berulang atau iterasi untuk mendapatkan nilai solusi. Pada Metode Gauss-Seidel ini menggunakan nilai awal kemudian nilai yang diperoleh dari iterasi sebelumnya digunakan untuk iterasi berikutnya. Metode Gauss-Seidel dapat diterapkan pada matriks koefisien dengan syarat bahwa matriks tersebut bersifat "*strictly diagonally dominant*" di mana elemen diagonalnya memiliki nilai yang lebih besar dibandingkan dengan jumlah nilai dari non-diagonal pada setiap baris. Kelebihan Metode Gauss-Seidel adalah proses iteratifnya lebih cepat untuk mencapai solusi konvergen (Sukarna dkk., 2020).

Metode Gauss-Seidel tidak hanya digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dengan variabel dan konstanta bilangan riil tetapi dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dengan variabel dan konstanta berupa bilangan *fuzzy* (Sukarna dkk., 2020). Bilangan *fuzzy* merupakan teori fundamental yang ada pada logika *fuzzy*. Logika *fuzzy* adalah evolusi dari logika *Boolean* yang hanya menerima nilai salah (0) atau benar (1). Pada logika *fuzzy* memungkinkan adanya nilai antara salah (0) dan benar (1). Nilai fungsi keanggotaan yang berada di antara 0 sampai 1 disebut sebagai bilangan *fuzzy*. Bilangan *fuzzy* didefinisikan sebagai perluasan dari bilangan tegas (*crisp*), sebab dalam bilangan tegas (*crisp*) fungsi keanggotaannya bernilai 0 atau 1 (Sari & Alisah, 2012).

Logika memiliki peran dalam mengembangkan pemikiran yang sistematis dan rasional untuk sampai pada solusi yang tepat. Solusi adalah jawaban atas permasalahan yang muncul. Kemampuan berpikir yang dimiliki manusia juga digunakan untuk menggabungkan hipotesis yang ada untuk sampai pada suatu solusi. Maka Allah SWT menciptakan manusia sebagai ciptaan yang paling baik (احسن تقويم). Al-Qur'an menggambarkan manusia sebagai ciptaan yang paling baik dibandingkan makhluk lainnya. Allah SWT menciptakan manusia dilengkapi dengan adanya kemampuan berpikir, merasakan, dan bertindak. Kemampuan berpikir manusia ini dimaksudkan untuk mendorong manusia agar selalu ber-*tafakkur*. *Tafakkur* merupakan aktivitas berpikir yang disertai renungan terhadap seluruh ciptaan Allah SWT di alam semesta (Idris, 2020). Dijelaskan dalam Q.S At-Tariq ayat 5-7 (Al-Mahalli & As-Suyuti, 2016):

فَلْيَنْظُرِ الْاِنْسَا نُ مِمَّ خُلِقَ(٥) خُلِقَ مِنْمَّآ ءٍدَافِقٍ(٦) يَخْرُجُ مِنْ بَيْنِ الْصُّلْبِ وَالْتَّرَآئِبِز(٧)

"Maka hendaklah manusia memperhatikan dari apa dia diciptakan, Dia diciptakan dari air (mani) yang terpancar, yang keluar dari antara tulang punggung (sulbi) dan tulang dada" (Q.S At-Tariq/86: 5-7)

Perlu diketahui bahwa makna dari kata "*falyangzhuril-ingsaanu"* yang memiliki arti "maka hendaklah manusia memperhatikan" adalah selain ber-*tafakkur* atau merenungi ciptaan Allah SWT hendaknya dibarengi juga dengan mempelajari makna serta mengambil *'ibrah* (pelajaran) dibaliknya. Apabila manusia men-*tafakkuri* surah At-Tariq ini, maka manusia dapat mengetahui dari mana asal mula diciptakan. Hasil dari kegiatan *tafakkur* adalah manusia mengetahui bahwa Allah SWT maha kuasa yang telah menciptakan manusia dan berkuasa pula untuk menghidupkannya kembali (Al-Mahalli & As-Suyuti, 2016). Dengan melakukan *tafakkur*, manusia dapat memahami bahwa dibalik ciptaan Allah SWT pasti ada suatu pelajaran yang dapat diambil. Ini menjadi pengingat bahwa ketika dihadapkan suatu masalah, pasti ada makna atau solusi dibaliknya. Allah SWT memberikan suatu masalah bukan tanpa solusi. Permasalahan yang diberikan Allah SWT kepada manusia tidak lain hanyalah sekedar menguji keimanan manusia sekaligus memberikan solusi atas permasalahan yang dihadapi manusia. Allah SWT telah menjanjikan kepada manusia bahwa pasti ada solusi untuk setiap masalah. Sebagaimana telah difirmankan Allah SWT dalam Q.S Al-Insyirah ayat 5-6 (Al-Mahalli & As-Suyuti, 2016):

فَاِنَّ مَعَ الْعُسْرِيُسْرًا(٥) اِنَّ مَعَ الْعُسرِيُسْرًا(٦)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (Q.S Al-Insyirah/94: 5-6)

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan khususnya dalam bidang aljabar linier. Bilangan *fuzzy* dapat digabungkan ke dalam bidang aljabar linier terutama berlaku untuk sistem persamaan linier. Umumnya konstanta pada sistem persamaan linier adalah bilangan riil. Namun, sistem persamaan linier dapat digabungkan dengan suatu bilangan *fuzzy* yang menghasilkan persamaan baru yang disebut sistem persamaan linier *fuzzy*. Sistem persamaan linier *fuzzy* memiliki bentuk umum $A\tilde{X} = \tilde{b}$, A sebagai elemen dengan bilangan riil, $\tilde{X}$ sebagai variabel dari bilangan *fuzzy*, serta $\tilde{b}$ sebagai konstanta dari bilangan *fuzzy* (Permata, 2018). Salah satu macam bilangan *fuzzy* adalah bilangan *fuzzy* sigmoid.

Bilangan sigmoid adalah bilangan yang merepresentasikan bentuk kurva pertumbuhan dan penyusutan yang berkorelasi tak linier dengan kenaikan dan penurunan (Kusumadewi & Purnomo, 2013). Selain itu, bentuk bilangan sigmoid lebih mendekati kompleksitas dari masalah yang digambarkannya dibandingkan dengan yang lain. Kurva S didefinisikan sebagai fungsi keanggotaan yang menggunakan 3 parameter, yaitu nilai keanggotaan nol (a), nilai keanggotaan lengkap (b), dan titik infleksi atau *crossover* (c) yakni memiliki domain 50% benar (Kusumadewi & Purnomo, 2013). Pada kurva pertumbuhan bilangan sigmoid memiliki fungsi keanggotaan yaitu:

$$S(x;a,b,c) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq a \\ 2\left(\frac{(x-a)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ 1-2\left(\frac{(c-x)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 1, & \text{untuk } x \geq c \end{cases}$$

Kurva penyusutan didefinisikan sebagai:

$$S(x;a,b,c) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } x \leq a \\ 1-2\left(\frac{(x-a)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ 2\left(\frac{(c-x)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{untuk } x \geq c \end{cases}$$

Penelitian terkait penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* dilakukan oleh Misbahul Munir Setiawan, 2019 yang melakukan penelitian tentang "Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Trapesium Menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan". Dari penelitian tersebut diberikan saran untuk dapat melanjutkan penelitian tentang penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan bilangan *fuzzy* yang memiliki kurva tak linier dan lebih mendekati kompleksitas dari pada bilangan lain, yaitu bilangan *fuzzy* sigmoid serta dengan menggunakan metode yang lebih cepat mendapatkan solusi, yaitu dengan metode Gauss-Seidel. Selanjutnya, penelitian terkait penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan metode Gauss-Seidel dilakukan oleh Sukarna, dkk., 2020 yang melakukan penelitian tentang "Perbandingan Metode Iterasi Jacobi dan Metode Iterasi Gauss-Seidel dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*". Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa penggunaan metode iterasi Gauss-Seidel lebih cepat mendapatkan solusi konvergen dibandingkan dengan metode iterasi Jacobi.

Berdasarkan informasi di atas, penulis memutuskan untuk melakukan penelitian dengan judul "Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Sigmoid Menggunakan Metode Gauss-Seidel".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan penjelasan di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana proses untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoid menggunakan Metode Gaus-Seidel?
2. Bagaimana hasil dari interpretasi Metode Gauss-Seidel untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoid?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dalam penelitian ini adalah:

1. Mengetahui proses untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoid menggunakan Metode Gauss-Seidel.
2. Mengetahui hasil dari interpretasi Metode Gauss-Seidel untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoid.

1.4 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini diharapkan pembaca dapat memperoleh pemahaman tentang proses penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoid menggunakan Metode Gauss-Seidel.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah untuk mencari solusi dari persamaan linier *fuzzy* menggunakan bilangan sigmoid pada kurva pertumbuhan sehingga pada penelitian ini tidak akan membahas solusi dari persamaan linier *fuzzy* menggunakan bilangan sigmoid kurva penyusutan.

BAB II
KAJIAN TEORI

2.1 Konsep Dasar Himpunan *Fuzzy*

Salah satu konsep matematika yang paling dasar adalah konsep himpunan. Himpunan adalah kumpulan objek yang terdefinisi jelas (*well defined*) dan tegas (*crisp*). Semua objek yang ada pada himpunan disebut dengan unsur atau anggota himpunan. Himpunan digunakan dalam berbagai bidang matematika dan memiliki banyak penerapan dalam berbagai konteks, termasuk logika, teori himpunan, aljabar, analisis, statistik, dan pemodelan matematika. Himpunan digunakan sebagai cara sistematis untuk mengelompokkan dan mengubah objek di dalam matematika (Marsudi, 2010).

Biasanya, himpunan dinotasikan dengan huruf kapital seperti A, B, C sedangkan yang ada di dalam himpunan dinotasikan menggunakan huruf kecil seperti a, b, c. Himpunan semesta dinotasikan sebagai himpunan S merupakan himpunan di mana isinya mencakup semua anggota atau objek yang sedang dibahas. Jika a termasuk dalam himpunan A, maka dapat dinotasikan dengan $a \in A$. sebaliknya, $a \notin A$ jika a tidak termasuk anggota himpunan A. Himpunan kosong yag dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$ merupakan himpunan yang tidak memiliki unsur atau anggota himpunan. Suatu himpunan dapat ditunjukkan sebagai fungsi karakteristik, di mana x dapat dianggap sebagai anggota atau bukan anggota himpunan. Himpunan A dapat ditunjukkan dengan fungsi karakteristik (X_A) sebagai berikut:

$$X_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } x \in A \\ 0 & \text{untuk } x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

Fungsi karakteristik memetakan suatu anggota himpunan x ke dalam himpunan $\{1,0\}$ yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$X_A : X \to \{1,0\} \tag{2.2}$$

(J.Klir & Yuan, 1995).

Pada himpunan tegas (*crisp*), suatu elemen x pada suatu himpunan A hanya memiliki dua kemungkinan nilai keanggotaan, yaitu suatu x menjadi anggota himpunan atau bukan (Sari & Alisah, 2012). Nilai keanggotaan adalah nilai yang digunakan untuk menunjukkan besarnya tingkat keanggotaan dari anggota himpunan x ke dalam himpunan A yang dapat dinotasikan sebagai $\mu_A(x)$. Dua nilai keanggotaan pada himpunan tegas yaitu:

1. Nilai keanggotaan satu (1) artinya $x \in A$.
2. Nilai keanggotaan nol (0) artinya $x \notin A$ (Sari & Alisah, 2012).

Fungsi karakteristik pada himpunan tegas *(crisp)* memberikan nilai 1 atau 0 untuk setiap elemen dalam suatu himpunan semesta. Dengan demikian, nilai keanggotaan setiap elemen dapat digunakan untuk membedakan apakah elemen tersebut anggota atau bukan anggota dari himpunan tegas (*crisp*). Fungsi karakteristik dari himpunan tegas *(crisp)* diperluas lagi menjadi fungsi keanggotaan yang lebih umum. Hal ini memungkinkan nilai yang diberikan pada elemen himpunan semesta berada di interval yang sudah ditentukan dan menunjukkan tingkat keanggotaan elemen-elemen dalam himpunan. Fungsi keanggotaan digunakan untuk menunjukkan derajat kesesuaian unsur dalam suatu himpunan semesta. Nilai yang ada pada fungsi keanggotaan disebut dengan derajat keanggotaan. Himpunan *fuzzy* adalah kumpulan elemen dengan derajat keanggotaan yang berbeda. Fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* dipetakan ke dalam nilai bilangan riil dengan interval 0 hingga 1 (Susilo, 2006).

Definisi 2.1 X sebagai himpunan semesta dengan fungsi keanggotaan yang menunjukkan himpunan bagian *fuzzy* $\tilde{A}$ dari X dapat didefinisikan sebagai

$$\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1] \tag{2.3}$$

Setiap elemen $x \in X$ dan $\mu_{\tilde{A}}(X)$ berada di interval $[0,1]$, serta nilai $\mu_{\tilde{A}}(x)$ menunjukkan tingkat keanggotaan elemen x yang berada di himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$. Secara matematis himpunan pasangan terurut dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ pada himpunan semesta X dapat didefinisikan

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\} \tag{2.4}$$

Fungsi keanggotaan $\mu_{\tilde{A}}$ dari x adalah pemetaan himpunan semesta X ke dalam interval tetutup $[0,1]$ (Rahmawati dkk., 2021).

Contoh

Himpunan semesta X merupakan himpunan dari jumlah mahasiswa yang mungkin diterima di Universitas. Himpunan A adalah himpunan mahasiswa yang akan diterima di Universitas.

$X = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$

$A = \{\text{Himpunan mahasiswa diterima di Universitas}\}$

Didefinisikan bahwa

$$x_1 = 10, \mu_A(x_1) = 0$$

$$x_2 = 20, \mu_A(x_2) = 0.2$$

$$x_3 = 30, \mu_A(x_3) = 0.4$$

$$x_4 = 40, \mu_A(x_4) = 0.6$$

$$x_5 = 50, \mu_A(x_5) = 0.8$$

$$x_6 = 60, \mu_A(x_6) = 1$$

Maka, diperoleh himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \{(10, 0), (20, 0.2), (30, 0.4), (40, 0.6), (50, 0.8), (60, 1)\}$$

2.2 Bilangan *Fuzzy*

Bilangan *fuzzy* didefinisikan sebagai himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ di mana semesta himpunan bilangan riil yang memenuhi tiga syarat:

1. $\tilde{A}$ adalah himpunan *fuzzy* normal.
2. Potongan$-\alpha$ pada himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ atau $\tilde{A}_\alpha$ adalah interval tertutup untuk semua $\alpha \in (0,1]$.
3. *Support* $\tilde{A}$ atau $S(\tilde{A})$ adalah himpunan yang terbatas (J.Klir & Yuan, 1995).

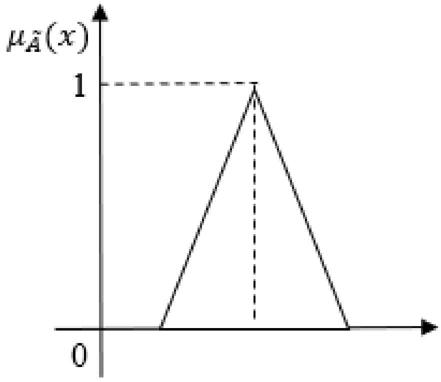
Syarat $\tilde{A}_\alpha$ adalah interval tertutup untuk semua $\alpha \in (0,1]$ sama seperti syarat bahwa $\tilde{A}$ adalah konveks. Bilangan *fuzzy* haruslah himpunan *fuzzy* yang normal dan konveks disertai potongan$-\alpha$ berada di interval tertutup. Sehingga disebut bilangan *fuzzy* apabila memenuhi empat sifat, yaitu normal, memiliki *support* terbatas, setiap potongan$-\alpha$ adalah interval tertutup dalam $\mathbb{R}$, dan konveks (Sari & Alisah, 2012).

Definisi 2.2 Normal

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ yang berada di himpunan semesta X disebut sebagai normal apabila paling sedikit ada satu elemen $x \in X$ dengan

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \tag{2.5}$$

(Nasseri dkk., 2019).



Gambar 2.1 Kurva Himpunan *Fuzzy* Normal

Definisi 2.3 Potongan$-\alpha$

Himpunan tegas (*crisp*) dengan derajat keanggotaan lebih besar atau sama dengan nilai α yang telah ditentukan disebut sebagai potongan$-\alpha$ dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$.

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \in \tilde{A} | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \tag{2.7}$$

Selain itu, potongan$-\alpha$ kuat dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ memiliki derajat keanggotaan yang lebih besar daripada nilai α yang telah ditentukan

$$\tilde{A}_\alpha^+ = \{x \in \tilde{A} | \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\} \tag{2.8}$$

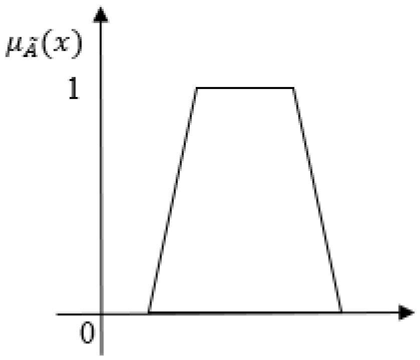
(J.Klir & Yuan, 1995).

Contoh :

Diberikan himpunan semesta X yaitu jumlah mahasiswa yang mungkin diterima di Universitas dan himpunan *fuzzy* $\tilde{A} = \{(10, 0), (20, 0.2), (30, 0.4), (40, 0.6), (50, 0.8), (60, 1)\}$. Jika α adalah 0.2, maka potongan$-\alpha$ dari himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ adalah $A_{0.2} = \{20, 30, 40, 50, 60\}$. Dan potongan$-\alpha$ kuat adalah 0.2, maka potongan $-\alpha$ kuat pada himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ adalah $A_{0.2}^+ = \{30, 40, 50, 60\}$.

Definisi 2.4 Konveks

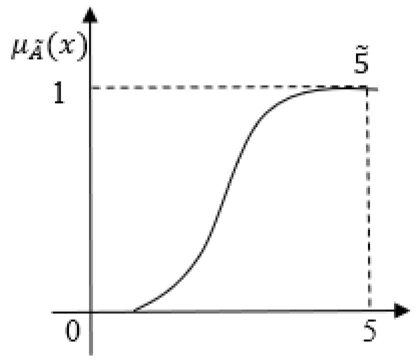
Fungsi keanggotaan dari himpunan *fuzzy* yang berada pada semesta X dikatakan konveks apabila fungsi keanggotannya cenderung monoton naik atau turun saat nilai unsur pada himpunan semesta X semakin naik atau turun (Sivanandam dkk., 2007)



Gambar 2.2 Kurva Himpunan Fuzzy Konveks

Contoh:

Diberikan bilangan *fuzzy* $\tilde{5}$ yang memiliki fungsi keanggotaan sigmoid



Gambar 2.3 Bilangan *Fuzzy* $\tilde{5}$

Definisi 2.5 *Support* Terbatas

Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ yang berada di himpunan semesta X disebut sebagai *support* dari himpunan $\tilde{A}$ apabila himpunan tegas (*crisp*) memuat anggota himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ yang memiliki derajat keanggotaan bukan nol. Didefinisikan sebagai

$$S(\tilde{A}) = \{x \in \tilde{A} | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \tag{2.6}$$

(Nasseri dkk., 2019).

Contoh :

Diberikan himpunan semesta X yaitu jumlah mahasiswa yang mungkin diterima di Universitas dan himpunan *fuzzy*

$\tilde{A} = \{(10, 0), (20, 0.2), (30, 0.4), (40, 0.6), (50, 0.8), (60, 1)\}$.

Maka *support* dari himpunan *fuzzy* A adalah

$$S(\tilde{A}) = \{20, 30, 40, 50, 60\}$$

2.3 Bilangan *Fuzzy* Sigmoid

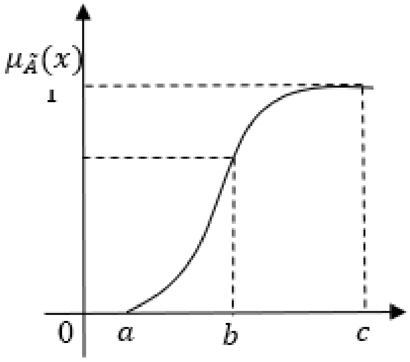
Definisi 2.6 : Bilangan *fuzzy* $\tilde{A}$ sigmoid $(x; a, b, c)$ memiliki fungsi keanggotaan berbentuk kurva pertumbuhan dan penyusutan yang berkorelasi tak linier dengan kenaikan dan penurunan permukaan.

Fungsi keanggotaan pertumbuhan bilangan *fuzzy* sigmoid

$$S(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \le a \\ 2\left(\dfrac{(x-a)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } a \le x \le b \\ 1 - 2\left(\dfrac{(c-x)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } b \le x \le c \\ 1, & \text{untuk } x \ge c \end{cases} \tag{2.9}$$

(Kusumadewi & Purnomo, 2013).

Fungsi keanggotaan sigmoid memenuhi keempat karakteristik bilangan *fuzzy*, sehingga fungsi keanggotaan sigmoid dapat disebut sebagai bilangan *fuzzy* sigmoid



Gambar 2.4 Grafik Fungsi Keanggotaan Sigmoid

Menurut Gambar 2.4, himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ memenuhi sifat normal sebab terdapat setidaknya ada satu elemen $x \in X$ yang memiliki derajat keanggotaannya $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$, yaitu $x \geq \gamma$. Selain itu, himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ memenuhi sifat yang kedua, yaitu memiliki *support* terbatas. Karena anggota himpunan $S(\tilde{A})$ memiliki derajat keanggotaan tidak nol dengan jumlah terbatas, maka bilangan *fuzzy* sigmoid memiliki *support* $\tilde{A}$ yang terbatas. Untuk semua $\alpha \in (0,1]$, maka potongan$-\alpha$ pada himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ berada dalam interval tertutup. Himpunan *fuzzy* $\tilde{A}$ memenuhi sifat konveks sebab nilai pada himpunan semesta X pada fungsi keanggotaannya monoton naik.

2.4 Operasi Aritmetika Bilangan *Fuzzy*

Ditunjukkan bahwa operasi $*$ merupakan operasi aritmetika pada interval tertutup yang memiliki empat operasi aritmetika, yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Didefinisikan sebagai berikut:

$$[a, b] * [c, d] = \{f * g | a \leq f \leq b, c \leq g \leq d\}$$

Semua operasi aritmetika ini berlaku pada interval tertutup, kecuali $\frac{[a,b]}{[c,d]}$ sebab ketika $0 \in [c, d]$ maka hasilnya tidak terdefinisi. Apabila hasil dari suatu operasi aritmetika berada pada interval tertutup juga merupakan termasuk interval tertutup (J.Klir & Yuan, 1995).

Misalkan $[a, b]$ dan $[c, d]$ merupakan interval tertutup pada $\mathbb{R}$, maka berlaku empat operasi aritmetika dari dua interval tertutup tersebut.

1. Operasi Penjumlahan

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

2. Operasi Pengurangan

$$[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$$

3. Operasi Perkalian

$$[a, b] \cdot [c, d] = [min\{ac, ad, bc, bd\}, max\{ac, ad, bc, bd\}]$$

4. Operasi Pembagian

$$\frac{[a, b]}{[c, d]} = \left[min\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}, max\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}\right]$$

Dengan $0 \notin [c, d]$. Pembagian interval $\frac{[a,b]}{[c,d]}$ tidak didefinisikan untuk $0 \in [c, d]$ (Susilo, 2006).

Contoh:

1. Penjumlahan

$$[2, 5] + [1, 3] = [2 + 1, 5 + 3] = [3, 8]$$

2. Pengurangan

$$[2, 5] - [1, 3] = [2 - 3, 5 - 1] = [-1, 4]$$

3. Perkalian

$$\begin{aligned}[-1,1] \cdot [-2, -0.5] &= [min\{(-1)(-2), (-1)(-0.5), 1(-2), 1(-0.5)\},\\ &\quad max\{(-1)(-2), (-1)(-0.5), 1(-2), 1(-0.5)\}]\\ &= [min\{2, 0.5, -2, -0.5\}, max\{2, 0.5, -2, -0.5\}]\\ &= [-2,2]\end{aligned}$$

4. Pembagian

$$\frac{[-1, 1]}{[-2, -0.5]} = \left[min\left\{\frac{-1}{-2}, \frac{-1}{-0.5}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-0.5}\right\}, max\left\{\frac{-1}{-2}, \frac{-1}{-0.5}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-0.5}\right\}\right]$$

$$= [min\{0.5, 2, -0.5, -2\}, max\{0.5, 2, -0.5, -2\}] = [-2, 2].$$

Misalkan terdapat bilangan *fuzzy* $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ berturut-turut, yaitu $a_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ serta $b_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$. Potongan$-\alpha$ dari sebelah kiri dinyatakan sebagai a_{α}^{-} dan b_{α}^{-}, sedangkan potongan$-\alpha$ dari sebelah kanan dinyatakan sebagai a_{α}^{+} dan b_{α}^{+}. Maka bilangan *fuzzy* yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ juga dapat didefinisikan dengan operasi aritmetika yang berada pada interval tertutup $[a, b]$ dan $[c, d]$.

1. Operasi Penjumlahan

   Penjumlahan bilangan *fuzzy* $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dinyatakan dengan potongan $-\alpha$ dinotasikan sebagai $\tilde{a} + \tilde{b}$

$$(a + b)_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-} + b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+} + b_{\alpha}^{+}]$$

   dengan setiap $\alpha \in [0,1]$.

2. Operasi Pengurangan

   Pengurangan bilangan *fuzzy* dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ dinotasikan sebagai $\tilde{a} - \tilde{b}$

$$(a - b)_{\alpha} = [a_{\alpha}^{-} - b_{\alpha}^{+}, a_{\alpha}^{+} - b_{\alpha}^{-}]$$

   dengan setiap $\alpha \in [0,1]$.

3. Operasi Perkalian

   Perkalian bilangan *fuzzy* $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dinyatakan dengan potongan $-\alpha$ dinotasikan sebagai $\tilde{a} \cdot \tilde{b}$

$$(a \cdot b)_{\alpha} = [min\{a_{\alpha}^{-}b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{-}b_{\alpha}^{+}, a_{\alpha}^{+}b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}b_{\alpha}^{+}\}, max\{a_{\alpha}^{-}b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{-}b_{\alpha}^{+}, a_{\alpha}^{+}b_{\alpha}^{-}, a_{\alpha}^{+}b_{\alpha}^{+}\}]$$

   dengan setiap $\alpha \in [0,1]$.

4. Operasi Pembagian

   Pembagian Bilangan *fuzzy* $\tilde{a}$ dan $\tilde{b}$ dinyatakan dengan potongan $-\alpha$ dinotasikan sebagai $\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}$

$$\left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha} = \left[min\left\{\frac{a_{\alpha}^{-}}{b_{\alpha}^{-}}, \frac{a_{\alpha}^{-}}{b_{\alpha}^{+}}, \frac{a_{\alpha}^{+}}{b_{\alpha}^{-}}, \frac{a_{\alpha}^{+}}{b_{\alpha}^{+}}\right\}, max\left\{\frac{a_{\alpha}^{-}}{b_{\alpha}^{-}}, \frac{a_{\alpha}^{-}}{b_{\alpha}^{+}}, \frac{a_{\alpha}^{+}}{b_{\alpha}^{-}}, \frac{a_{\alpha}^{+}}{b_{\alpha}^{+}}\right\}\right]$$

untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

(Susilo, 2006).

Contoh:

1. Operasi Penjumlahan

   Operasi penjumlahan bilangan *fuzzy* $\tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ yaitu $2_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$ dan $3_\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$ adalah

   $$\tilde{2} + \tilde{3} = (2+3)_\alpha = [2\alpha + \alpha + 2, 4 - 2\alpha + (4 - \alpha)] = [3\alpha + 2, 8 - 3\alpha]$$

2. Operasi Pengurangan

   Operasi pengurangan bilangan *fuzzy* $\tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ yaitu $2_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$ dan $3_\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$ adalah

   $$\begin{aligned}\tilde{2} - \tilde{3} = (2-3)_\alpha &= [2\alpha - (4 - \alpha), 4 - 2\alpha - (\alpha + 2)] \\ &= [3\alpha - 4, 2 - 3\alpha]\end{aligned}$$

3. Operasi Perkalian

   Operasi perkalian bilangan *fuzzy* $\tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ yaitu $2_\alpha = [2\alpha, 4 - 2\alpha]$ dan $3_\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$ adalah

   $$\begin{aligned}\tilde{2} \cdot \tilde{3} = (2 \cdot 3)_\alpha &= [\min\{(2\alpha)(\alpha + 2), (2\alpha)(4 - \alpha), (4 - 2\alpha)(\alpha + 2), \\ &\quad (4 - 2\alpha)(4 - \alpha)\}, \max\{(2\alpha)(\alpha + 2), (2\alpha)(4 - \alpha), \\ &\quad (4 - 2\alpha)(\alpha + 2), (4 - 2\alpha)(4 - \alpha)\}] \\ &= [\min\{(2\alpha^2 + 4\alpha), (8\alpha - 2\alpha^2), (8 - 2\alpha^2), \\ &\quad (2\alpha^2 - 12\alpha + 16)\}, \max\{(2\alpha^2 + 4\alpha), \\ &\quad (8\alpha - 2\alpha^2), (8 - 2\alpha^2), (2\alpha^2 - 12\alpha + 16)\}] \\ &= [2\alpha^2 + 4\alpha, 2\alpha^2 - 12\alpha + 16\,]\end{aligned}$$

4. Operasi Pembagian

Operasi pembagian bilangan *fuzzy* $\tilde{2}$ dan $\tilde{3}$ yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ yaitu $2_\alpha = [2\alpha, 4-2\alpha]$ dan $3_\alpha = [\alpha+2, 4-\alpha]$ adalah

$$\frac{\tilde{2}}{\tilde{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)_\alpha = [\min\left\{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+2}\right), \left(\frac{2\alpha}{4-\alpha}\right), \left(\frac{4-2\alpha}{\alpha+2}\right), \left(\frac{4-2\alpha}{4-\alpha}\right)\right\},$$

$$\max\left\{\left(\frac{2\alpha}{\alpha+2}\right), \left(\frac{2\alpha}{4-\alpha}\right), \left(\frac{4-2\alpha}{\alpha+2}\right), \left(\frac{4-2\alpha}{4-\alpha}\right)\right\}]$$

$$= \left[\frac{2\alpha}{\alpha+2}, \frac{4-2\alpha}{4-\alpha}\right]$$

Suatu bilangan *fuzzy* $\tilde{a}$ yang memiliki fungsi keanggotaan *fuzzy*, maka bilangan *fuzzy* $\tilde{a}$ dapat dinyatakan menjadi potongan$-\alpha$ sebagai pasangan terurut, yaitu $a_\alpha = [a_\alpha^-, a_\alpha^+]$ dengan memperhatikan fungsi keanggotaannya. Misalkan suatu bilangan *fuzzy* $\tilde{a}$ memiliki fungsi keanggotaan sigmoid dengan $\tilde{a} = sigmoid(x; d, e, f)$

$$\mu_{\tilde{a}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq d \\ 2\left(\frac{(x-d)}{(f-d)}\right)^2, & \text{untuk } d \leq x \leq e \\ 1 - 2\left(\frac{(f-x)}{(f-d)}\right)^2, & \text{untuk } e \leq x \leq f \\ 1, & \text{untuk } x \geq f \end{cases}$$

Maka untuk suatu $\alpha \in [0,1]$, terdapat a_α^- dengan $d \leq a_\alpha^- \leq e$ dan a_α^+ dengan $e \leq a_\alpha^+ \leq f$ sedemikian sehingga

$$\alpha = \mu_{\tilde{a}}(a_\alpha^-) = \mu_{\tilde{a}}(a_\alpha^+)$$

Yaitu

$$\alpha = 2\left(\frac{(a_\alpha^- - d)}{(f-d)}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(f - a_\alpha^+)}{(f-d)}\right)^2$$

Sehingga didapatkan $a_{\alpha}^{-} = \sqrt{\frac{(f-d)^2\alpha}{2}} + d$ dan $a_{\alpha}^{+} = f - \sqrt{\frac{(f-d)^2-(f-d)^2\alpha}{2}}$. Sehingga suatu bilangan *fuzzy* $\tilde{a}$ yang memiliki fungsi keanggotaan sigmoid, dapat dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $a_{\alpha} = \left[\sqrt{\frac{(f-d)^2\alpha}{2}} + d, f - \sqrt{\frac{(f-d)^2-(f-d)^2\alpha}{2}}\right]$.

(Susilo, 2006)

2.5 Sistem Persamaan Linier

Bentuk umum dari persamaan linier dengan banyaknya n variabel yaitu $x_1, x_2, \dots, x_n$ didefinisikan sebagai berikut

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.10}$$

Konstanta bilangan riil $\mathbb{R}$ pada persamaan linier ditunjukkan pada $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b. Sedangkan variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ menjadi faktor-faktor yang belum diketahui solusinya. Untuk menemukan solusi dari faktor yang belum diketahui dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah dengan menentukan urutan dari n angka $s_1, s_2, \dots, s_n$ sehingga memenuhi $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$. Urutan solusi yang memenuhi suatu persamaan linier dinamakan dengan himpunan penyelesaian persamaan linier.

Sistem persamaan linier didefinisikan sebagai himpunan berhingga dari persamaan variabel yang memiliki variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$. Umumnya suatu sistem persamaan linier dengan m persamaan linier serta n faktor yang belum diketahui solusinya dapat dinotasikan sebagai:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_n = b_m$$

Variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ menjadi faktor yang belum diketahui solusinya, sedangkan a dan b menjadi konstanta dari sistem persamaan linier (Anton & Rorres, 2004).

Contoh:

Diberikan sistem persamaan sebagai berikut:

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$

$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

Ditemukan solusi yang memenuhi persamaan tersebut yaitu:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$$

Sistem persamaan linier jika diubah ke dalam bentuk matriks $AX = b$, maka matriks koefisien dimisalkan dengan A, vektor kolom variabel yang belum diketahui yang dimisalkan dengan X, vektor kolom konstanta ditunjukkan dengan b.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Dapat disebut dengan matriks yang diperbesar dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

('Imrona, 2013).

2.6 Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*

Gabungan dua atau lebih dari persamaan linier *fuzzy* yang saling terkait satu sama lain disebut sebagai sistem persamaan linier *fuzzy* dengan parameter *fuzzy*. Bentuk persamaan linier *fuzzy* dinotasikan sebagai:

$$\begin{array}{c} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + a_{13}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + a_{23}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ a_{31}\tilde{x}_1 + a_{32}\tilde{x}_2 + a_{33}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{3n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\tilde{x}_1 + a_{m2}\tilde{x}_2 + a_{m3}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{nm}\tilde{x}_n = \tilde{b}_m \end{array} \tag{2.13}$$

Sistem persamaan linier *fuzzy* dapat diubah ke dalam matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$, matriks koefisien ditunjukkan oleh A, vektor kolom variabel yang belum diketahui solusinya ditunjukkan oleh $\tilde{x}$, dan vektor kolom konstanta *fuzzy* ditunjukkan oleh $\tilde{b}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ merupakan variabel dengan bilangan *fuzzy* sigmoid yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$, konstanta berupa bilangan *fuzzy* sigmoid yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ ditunjukkan pada $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$, dan a_{ij} koefisien yang berupa bilangan riil dari $i = 1,2,\ldots..m$ dan $j = 1,2,\ldots,n$ (Sukarna dkk., 2020).

Bentuk dari sistem persamaan linier *fuzzy* dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$ dan $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_n$ yang merupakan variabel dan konstanta berupa bilangan *fuzzy* yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} [x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}] \\ [x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}] \\ [x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}] \\ \vdots \\ [x_{n\alpha}^{-}, x_{n\alpha}^{+}] \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} [b_{1\alpha}^{-}, b_{1\alpha}^{+}] \\ [b_{2\alpha}^{-}, b_{2\alpha}^{+}] \\ [b_{3\alpha}^{-}, b_{3\alpha}^{+}] \\ \vdots \\ [b_{m\alpha}^{-}, b_{m\alpha}^{+}] \end{bmatrix}$$

Solusi dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy*, yaitu terdapat vektor bilangan *fuzzy* $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n)$ dengan $x_{j\alpha} = \left[x_{j\alpha}^{-}, x_{j\alpha}^{+}\right]$ untuk $1 \leq j \leq n$ sehingga memenuhi $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_{j\alpha}^{-} = b_{m\alpha}^{-}$ dan $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_{j\alpha}^{+} = b_{m\alpha}^{+}$. Akibatnya, untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy* adalah mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* ke bentuk sistem persamaan linier non-*fuzzy*, yaitu dengan mengubah dari n variabel dan n persamaan atau matriks $n \times n$ menjadi $2n$ variabel dan $2n$ persamaan atau matriks $2n \times 2n$ (Allahviranloo dkk., 2008). Tujuan mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* ke bentuk sistem persamaan linier non-*fuzzy* adalah agar sistem persamaan linier *fuzzy* dapat diselesaikan melalui penyelesaian sistem persamaan linier. Sehingga diperoleh bentuk umum sistem persamaan linier *fuzzy* yang baru, yaitu $S\tilde{X}^{*} = \tilde{b}^{*}$ (Irmawati dkk., 2017).

Koefisien matriks A dari persamaan (2.15) berbentuk $A = a_{ij}$ untuk $i, j = 1,2,\ldots,n$, maka untuk menentukan matriks S ditentukan berdasarkan:

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{i,j} = a_{ij}$ dan $s_{i+n,j+n} = a_{ij}$.
2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n,j} = -a_{ij}$.

3. $s_{i,j} = 0$ untuk lainnya (Sukarna dkk., 2020).

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,n} & s_{1,n+1} & \dots & s_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \cdots & s_{n,n} & s_{n,n+1} & \cdots & s_{n,2n} \\ s_{n+1,1} & \cdots & s_{n+1,n} & s_{n+1,n+1} & \cdots & s_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2n,1} & \cdots & s_{2n,n} & s_{2n,n+1} & \cdots & s_{2n,2n} \end{bmatrix}, \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} {x_1}_\alpha^- \\ \vdots \\ {x_n}_\alpha^- \\ {x_1}_\alpha^+ \\ \vdots \\ {x_n}_\alpha^+ \end{bmatrix}, \tilde{b}^* = \begin{bmatrix} {b_1}_\alpha^- \\ \vdots \\ {b_m}_\alpha^- \\ {b_1}_\alpha^+ \\ \vdots \\ {b_m}_\alpha^+ \end{bmatrix}$$

Dari ketentuan untuk menentukan matriks S, maka

$$S_1 = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \cdots & s_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{n+1,n+1} & \cdots & s_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2n,n+1} & \cdots & s_{2n,2n} \end{bmatrix}$$

Dan

$$S_2 = \begin{bmatrix} s_{1,n+1} & \cdots & s_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,n+1} & \cdots & s_{n,2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{n+1,1} & \cdots & s_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2n,1} & \cdots & s_{2n,n} \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* yang baru adalah $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha^- \\ x_\alpha^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_\alpha^- \\ b_\alpha^+ \end{bmatrix}$$

(Matinfar dkk., 2008).

Contoh:

Diberikan suatu sistem persamaan linier *fuzzy*

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \tilde{v}_1$$

$$\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = \tilde{v}_2$$

Bentuk dari sistem persamaan linier *fuzzy* diubah ke matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ di mana $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa bilangan *fuzzy* yang dinyatakan dengan potongan$-\alpha$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}] \\ [x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [v_{1\alpha}^{-}, v_{1\alpha}^{+}] \\ [v_{2\alpha}^{-}, v_{2\alpha}^{+}] \end{bmatrix}$$

Untuk mencari solusi suatu sistem persamaan linier *fuzzy* adalah dengan merubah menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* agar dapat diselesaikan melalui penyelesaian sistem persamaan linier, yaitu mengubah dari n varibel dan n persamaan menjadi $2n$ variabel dan $2n$ persamaan sehingga bentuk umum persamaannya berupa $S\tilde{X}^{*} = \tilde{b}^{*}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} [x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}] \\ [x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}] \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} [v_{1\alpha}^{-}, v_{1\alpha}^{+}] \\ [v_{2\alpha}^{-}, v_{2\alpha}^{+}] \end{bmatrix}$$

Matriks A dirubah menjadi matriks S dengan ketentuan:

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{ij} = a_{ij}$ dan $s_{i+n\ j+n} = a_{ij}$

$$s_{1,1} = 1, s_{2,1} = 1, s_{2,2} = 3, s_{3,3} = 1, s_{4,3} = 1, s_{4,4} = 3$$

2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i\ j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n\ j} = -a_{ij}$

$$s_{1,4} = 1, s_{3,2} = 1$$

3. $s_{ij} = 0$ untuk lainnya

Didapatkan bentuk matriks $S\tilde{X}^{*} = \tilde{b}^{*}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\alpha}^{-} \\ x_{2\alpha}^{-} \\ x_{1\alpha}^{+} \\ x_{2\alpha}^{+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1\alpha}^{-} \\ v_{2\alpha}^{-} \\ v_{1\alpha}^{+} \\ v_{2\alpha}^{+} \end{bmatrix}$$

Maka dapat dilakukan operasi perkalian terhadap persamaan matriks sehingga diperoleh sistem persamaan linier *fuzzy* yang baru, yaitu:

$$x_{1\alpha}^{-} + x_{1\alpha}^{+} = v_{1\alpha}^{-}$$

$$x_{1\alpha}^{-} + 3x_{2\alpha}^{-} = v_{2\alpha}^{-}$$

$$x_{2\alpha}^{-} + x_{1\alpha}^{+} = v_{1\alpha}^{+}$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+} + 3x_{2}{}_{\alpha}^{+} = v_{2}{}_{\alpha}^{+}$$

2.7 Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel dikenal dengan metode iteratif untuk menemukan solusi penyelesaian sistem persamaan linier. Untuk mencari solusi dari sistem persamaan linier menggunakan Metode Gauss-Seidel, yaitu melalui melalui proses iterasi sampai ditemukan nilai-nilai yang berubah. Penggunaan Metode Gauss-Seidel ini setelah diperoleh hasil hitung pada baris awal akan digunakan dalam perhitungan nilai selanjutnya (Rahmad dkk., 2016). Sistem persamaan yang berukuran besar dan proporsi koefisien nol yang besar dapat diselesaikan dengan Metode Gauss-Seidel. Bentuk umum dari sistem persamaan linier adalah:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_n = b_m \end{array} \tag{2.16}$$

Metode Gauss-Seidel berbeda dengan Metode Gauss dan Metode Gauss-Jordan. Metode Gauss dan Metode Gauss-Jordan termasuk ke dalam metode langsung sedangkan Metode Gauss-Seidel termasuk metode tidak langsung. Metode Gauss atau Metode eliminasi Gauss merupakan metode yang dilakukan dengan mengubah sistem persamaan linier menjadi bentuk matriks yang diperbesar, kemudian operasi baris elementer yang dilakukan pada matriks yang diperbesar sampai menghasilkan matriks eselon baris atau matriks segitiga atas. Operasi baris elementer yang dilakukan pada matriks yang diperbesar sampai menghasilkan matriks eselon baris tereduksi disebut dengan Metode Gauss-Jordan atau eliminasi Gauss-Jordan (Anton & Rorres, 2004).

Berbeda dengan Metode Gauss dan Metode Gauss-Jordan, Metode Gauss-Seidel merupakan metode yang dilakukan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier melalui metode iteratif atau pendekatan berulang. Secara umum, Metode Gauss dan Metode Gauss-Jordan metode yang digunakan untuk mendapatkan solusi eksak, sedangkan Metode Gauss-Seidel metode yang menggunakan pendekatan iteratif untuk mendapatkan solusi sistem persamaan linier (Sukarna dkk., 2020).

Proses dalam iterasi Metode Gauss-Seidel dibutuhkan suatu nilai awal, yaitu $x^{(0)} = 0$ yaitu $x_1, x_2, \dots, x_n = (0, 0, \dots, 0)$. Proses dalam iterasi berhenti jika toleransi kesalahan tertentu telah dicapai. Toleransi kesalahan bertujuan sebagai batasan yang digunakan untuk menentukan kapan iterasi harus dihentikan. Toleransi kesalahan didefinisikan sebagai berikut

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^k}{x_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon \tag{2.17}$$

Syarat cukup agar iterasi pada Metode Gauss-Seidel konvergen adalah koefisien matriks domain secara diagonal, yaitu

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \left| a_{ij} \right|, i = 1,2,3, \dots \tag{2.18}$$

Proses iterasi dimulai dari mengubah bentuk umum sistem persamaan linier menjadi persamaan iterasi, yaitu

Iterasi pertama:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - a_{14}x_4^{(0)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{b_1 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)} - a_{24}x_4^{(0)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(1)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)} - a_{34}x_4^{(0)}}{a_{33}}$$

$$x_4^{(1)} = \frac{b_4 - a_{41}x_1^{(1)} - a_{42}x_2^{(1)} - a_{43}x_3^{(1)}}{a_{44}}$$

Iterasi kedua:

$$x_1^{(2)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - a_{14}x_4^{(1)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{b_1 - a_{21}x_1^{(2)} - a_{23}x_3^{(1)} - a_{24}x_4^{(1)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{b_3 - a_{31}x_1^{(2)} - a_{23}x_2^{(2)} - a_{34}x_4^{(1)}}{a_{33}}$$

$$x_4^{(2)} = \frac{b_4 - a_{41}x_1^{(2)} - a_{42}x_2^{(2)} - a_{43}x_3^{(2)}}{a_{44}}$$

Sehingga didapatkan persamaan umum dari metode Gauss-Seidel adalah:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2,... \quad (2.19)$$

(Munir, 2015).

Contoh:

Diberikan dua sistem persamaan linier *fuzzy* dengan masing masing koefisien dan konstanta berupa bilangan *fuzzy* segitiga sebagai berikut.

$$5\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 = \widetilde{13}$$

$$2\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = \tilde{8}$$

Masing-masing konstanta berupa bilangan *fuzzy* segitiga

$$\widetilde{13} = \text{segitiga}(x; 11, 13{,}15)$$

$$\tilde{8} = \text{segitiga}(x; 6, 8, 10)$$

Mengubah konstanta berupa bilangan *fuzzy* yang dinyatakan ke dalam bentuk potongan$-\alpha$

Bilangan *fuzzy* $\widetilde{\mathbf{13}} = \mathbf{segitiga}(\boldsymbol{x}; \mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{15})$ memiliki fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\widetilde{13}} = \begin{cases} 0, & x \leq 11 \text{ atau } x \geq 15 \\ \dfrac{(x-11)}{2}, & 11 \leq x \leq 13 \\ \dfrac{(15-x)}{2}, & 13 \leq x \leq 15 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{13}}(13_\alpha^-) = \mu_{\widetilde{13}}(13_\alpha^+)$ atau dapat dinyatakan sebagai $13_\alpha = [13_\alpha^-, 13_\alpha^+]$, yaitu

$$\alpha = \frac{(13_\alpha^- - 11)}{2} = \frac{(15 - 13_\alpha^+)}{2}$$

Untuk 13_α^- diperoleh yaitu

$$\alpha = \frac{(13_\alpha^- - 11)}{2}$$

$$2\alpha = 13_\alpha^- - 11$$

$$13_\alpha^- = 2\alpha + 11$$

Untuk 13_α^+ diperoleh yaitu

$$\alpha = \frac{(15 - 13_\alpha^+)}{2}$$

$$2\alpha = 15 - 13_\alpha^+$$

$$13_\alpha^+ = 15 - 2\alpha$$

Maka didapatkan potongan $-\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\widetilde{13}$ adalah $13_\alpha = [2\alpha + 11, 15 - 2\alpha]$

Bilangan *fuzzy* $\tilde{\mathbf{8}} = \mathbf{segitiga}(\boldsymbol{x}; \mathbf{6}, \mathbf{8}, \mathbf{10})$ memiliki fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\widetilde{13}} = \begin{cases} 0, & x \leq 6 \text{ atau } x \geq 10 \\ \dfrac{(x-6)}{2}, & 6 \leq x \leq 8 \\ \dfrac{(10-x)}{2}, & 8 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\tilde{8}}(8_{\alpha}^{-}) = \mu_{\tilde{8}}(8_{\alpha}^{+})$ atau dapat dinyatakan sebagai $8_{\alpha} = [8_{\alpha}^{-}, 8_{\alpha}^{+}]$, yaitu

$$\alpha = \frac{(8_{\alpha}^{-} - 6)}{2} = \frac{(10 - 8_{\alpha}^{+})}{2}$$

Untuk 8_{α}^{-} diperoleh yaitu

$$\alpha = \frac{(8_{\alpha}^{-} - 6)}{2}$$

$$2\alpha = 8_{\alpha}^{-} - 6$$

$$8_{\alpha}^{-} = 2\alpha + 6$$

Untuk 8_{α}^{+} diperoleh yaitu

$$\alpha = \frac{(10 - 8_{\alpha}^{+})}{2}$$

$$2\alpha = 10 - 8_{\alpha}^{+}$$

$$8_{\alpha}^{+} = 10 - 2\alpha$$

Maka didapatkan potongan$-\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\tilde{8}$ adalah $8_{\alpha} = [2\alpha + 6, 10 - 2\alpha]$.

Sistem persamaan linier *fuzzy* dapat dinyatakan ke dalam bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ di mana variabel dan konstanta berupa potongan$-\alpha$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} [x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}] \\ [x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}] \end{bmatrix}, \text{dan } \tilde{b} = \begin{bmatrix} [2\alpha + 11, 15 - 2\alpha] \\ [2\alpha + 6, 10 - 2\alpha] \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dibuktikan persamaan linier *fuzzy* memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel, yaitu koefisien matriks domain secara diagonal

$$|a_{11}| > |a_{12}| \rightarrow |5| > |-2|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| \rightarrow |2| > |2|$$

Persamaan diatas memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel, yaitu koefisien matriks domain secara diagonal.

Selanjutnya mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan mengubah dari sistem n variabel dan n persamaan menjadi $2n$ variabel dan $2n$ persamaan sehingga didapatkan bentuk persamaan umumnya menjadi $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$ dengan syarat:

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{ij} = a_{ij}$ dan $s_{i+n\ j+n} = a_{ij}$

$$s_{1,1} = 5, s_{2,1} = 2, s_{2,2} = 2, s_{3,3} = 5, s_{4,3} = 2, s_{4,4} = 2$$

2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i\ j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n\ j} = -a_{ij}$

$$s_{1,4} = -(-2), s_{3,2} = -(-2)$$

3. $s_{ij} = 0$ untuk lainnya

Didapatkan bentuk persamaan umum dengan bentuk $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} x_{1\alpha}^- \\ x_{2\alpha}^- \\ x_{1\alpha}^+ \\ x_{2\alpha}^+ \end{bmatrix}, \text{dan } \tilde{b}^* = \begin{bmatrix} 2\alpha + 11 \\ 2\alpha + 6 \\ 15 - 2\alpha \\ 10 - 2\alpha \end{bmatrix}$$

Menjadi

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\alpha}^- \\ x_{2\alpha}^- \\ x_{1\alpha}^+ \\ x_{2\alpha}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + 11 \\ 2\alpha + 6 \\ 15 - 2\alpha \\ 10 - 2\alpha \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan operasi perkalian terhadap persamaan matriks maka didapatkan persamaan linier non-*fuzzy* sebagai berikut:

$$5{x_1}_\alpha^- + 2{x_2}_\alpha^+ = 2\alpha + 11$$

$$2{x_1}_\alpha^- + 2{x_2}_\alpha^- = 2\alpha + 6$$

$$2{x_2}_\alpha^- + 5{x_1}_\alpha^+ = 15 - 2\alpha$$

$$2{x_1}_\alpha^+ + 2{x_2}_\alpha^+ = 10 - 2\alpha$$

Dari persamaan linier non-*fuzzy* didapatkan suatu persamaan iterasi yang selanjutnya dapat diproses menggunakan Metode Gauss-Seidel

$${x_1}_\alpha^- = \frac{2\alpha + 11 - 2{x_2}_\alpha^+}{5}$$

$${x_2}_\alpha^- = \frac{2\alpha + 6 - 2{x_1}_\alpha^-}{2}$$

$${x_1}_\alpha^+ = \frac{15 - 2\alpha - 2{x_2}_\alpha^-}{5}$$

$${x_2}_\alpha^+ = \frac{10 - 2\alpha - 2{x_1}_\alpha^+}{2}$$

Misalkan diberikan nilai awal $\left({x_1}_\alpha^{-(0)}, {x_2}_\alpha^{-(0)}, {x_1}_\alpha^{+(0)}, {x_2}_\alpha^{+(0)} = 0\right)$, kemudian substitusikan nilai awal ke dalam persamaan iterasi yang sudah diperoleh

Iterasi pertama

$$\begin{aligned}
{x_1}_\alpha^{-(1)} &= \frac{2\alpha + 11 - 2{x_2}_\alpha^{+(0)}}{5} \\
&= \frac{2\alpha + 11 - 2(0)}{5} \\
&= \frac{2\alpha + 11}{5}
\end{aligned}$$

$${x_2}_\alpha^{-(1)} = \frac{2\alpha + 6 - 2{x_1}_\alpha^{-(1)}}{2}$$

$$= \frac{2\alpha + 6 - 2\left(\frac{2\alpha + 11}{5}\right)}{2}$$

$$= \frac{3\alpha + 4}{5}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(1)} = \frac{15 - 2\alpha - 2x_{2_\alpha}^{-(1)}}{5}$$

$$= \frac{15 - 2\alpha - 2\left(\frac{3\alpha + 4}{5}\right)}{5}$$

$$= \frac{67 - 16\alpha}{25}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(1)} = \frac{10 - 2\alpha - 2x_{1_\alpha}^{+(1)}}{2}$$

$$= \frac{10 - 2\alpha - 2\left(\frac{67 - 16\alpha}{25}\right)}{2}$$

$$= \frac{58 - 9\alpha}{25}$$

Jadi hasil iterasi pertama, yaitu:

$$\left[\frac{2\alpha + 11}{5}, \frac{3\alpha + 4}{5}, \frac{67 - 16\alpha}{25}, \frac{58 - 9\alpha}{25}\right]$$

Iterasi kedua

$$x_{1_\alpha}^{-(2)} = \frac{2\alpha + 11 - 2x_{2_\alpha}^{+(1)}}{5}$$

$$= \frac{2\alpha + 11 - 2\left(\frac{58 - 9\alpha}{25}\right)}{5}$$

$$= \frac{68\alpha + 159}{125}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(2)} = \frac{2\alpha + 6 - 2x_{1_\alpha}^{-(2)}}{2}$$

$$= \frac{2\alpha + 6 - 2\left(\frac{68\alpha + 159}{125}\right)}{2}$$

$$= \frac{57\alpha + 216}{125}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(2)} = \frac{15 - 2\alpha - 2x_{2_\alpha}^{-(2)}}{5}$$

$$= \frac{15 - 2\alpha - 2\left(\frac{57\alpha + 216}{125}\right)}{5}$$

$$= \frac{1443 - 364\alpha}{625}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(2)} = \frac{10 - 2\alpha - 2x_{1_\alpha}^{+(2)}}{2}$$

$$= \frac{10 - 2\alpha - 2\left(\frac{1443 - 364\alpha}{625}\right)}{2}$$

$$= \frac{1682 - 261\alpha}{625}$$

Jadi hasil iterasi kedua, yaitu:

$$\left[\frac{68\alpha + 159}{125}, \frac{57\alpha + 216}{125}, \frac{1443 - 364\alpha}{625}, \frac{1682 - 261\alpha}{625}\right]$$

Iterasi ketiga

$$x_{1_\alpha}^{-(3)} = \frac{2\alpha + 11 - 2x_{2_\alpha}^{+(2)}}{5}$$

$$= \frac{2\alpha + 11 - 2\left(\frac{1682 - 261\alpha}{625}\right)}{5}$$

$$= \frac{1772\alpha + 3511}{3125}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(3)} = \frac{2\alpha + 6 - 2x_{1_\alpha}^{-(3)}}{2}$$

$$= \frac{2\alpha + 6 - 2\left(\frac{1772\alpha + 3511}{3125}\right)}{2}$$

$$= \frac{1353\alpha + 5864}{3125}$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+(3)} = \frac{15 - 2\alpha - 2x_{2}{}_{\alpha}^{-(3)}}{5}$$

$$= \frac{15 - 2\alpha - 2\left(\frac{1353\alpha + 5864}{3125}\right)}{5}$$

$$= \frac{35147 - 8956\alpha}{15625}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+(3)} = \frac{10 - 2\alpha - 2x_{1}{}_{\alpha}^{+(3)}}{2}$$

$$= \frac{10 - 2\alpha - 2\left(\frac{35147 - 8956\alpha}{15625}\right)}{2}$$

$$= \frac{42978 - 6669\alpha}{15625}$$

Jadi hasil iterasi ketiga, yaitu:

$$\left[\frac{1772\alpha + 3511}{3125}, \frac{1353\alpha + 5864}{3125}, \frac{35147 - 8956\alpha}{15625}, \frac{42978 - 6669\alpha}{15625}\right]$$

Jadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy* adalah

$$x_{1}{}_{\alpha}^{-} = \frac{1772\alpha + 3511}{3125}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{-} = \frac{1353\alpha + 5864}{3125}$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+} = \frac{35147 - 8956\alpha}{15625}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \frac{42978 - 6669\alpha}{15625}$$

2.8 Ber-*Tafakkur* Dalam Islam

Allah SWT menciptakan manusia dengan sebaik-baiknya ciptaan yaitu dengan struktur yang paling baik (احسن تقويم) dan paling sempurna di antara makhluk-Nya yang lain. Manusia dikatakan sebagai ciptaan yang paling baik karena manusia memiliki kelebihan yang luar biasa yakni akal. Allah SWT menganugerahkan akal kepada manusia tidak lain sebagai alat berpikir agar manusia dapat mengambil pelajaran dari apa yang dilihat, mengetahui yang benar dan yang salah, dan dapat mengembangkan potensi dan kemampuan yang dimilikinya. Kemampuan berpikir manusia menjadi ciri khas yang membedakan dengan makhluk lainnya. Ahli *manthiq* mengatakan bahwa manusia sebagai hewan berpikir, yaitu الإِنْسَانُ حَيَوَان نَاطِق (Idris, 2020). Manusia dikategorikan sebagai hewan karena memiliki kesamaan seperti hal dalam kebutuhan biologis seperti makan dan minum. Tetapi, yang membedakan antara manusia dengan hewan adalah pada istilah حَيَوَان نَاطِق mengartikan bahwa manusia memiliki kemampuan berpikir dan berbicara digunakan untuk mengekspresikan dirinya dalam berinteraksi sosial (Abdullah, 2017).

Sebagaimana tersirat dalam Q.S Ali-Imran ayat 190 -191 (Al-Sheikh, 2005):

اِنَّ فِيْ خَلْقِ السَّمَوَتِ وَالْاَرْضِ وَاخْتِلَافِ الَّيْلِ وَالنَّهَارِلَاَيَتٍ لِّاُولِى الْاَلْبَابِ(١٩٠) اَلَّذِيْنَ يَذْكُرُوْنَ اللّٰهَ قِيَامًا وَّقُعُوْدًا وَّعَلَى جُنُوْبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُوْنَ فِيْ خَلْقِ السَّمَوَتِ وَالْاَرْضِ رَبَّنَامَا خَلَقْتَ هَذَا بَاطِلاً سُبحَنَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ(١٩١)

"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Rabb kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, maha suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa Neraka" (Q.S Ali-Imran/3: 190-191)

Dari tafsir Ibnu Katsir, makna ayat di atas tanda-tanda bagi orang yang berakal (*Ulul Albab*) yaitu orang-orang yang mempunyai akal yang sempurna lagi bersih, yang mengetahui hakikat banyak hal secara jelas dan nyata dengan pemahaman yang benar. Allah SWT telah menciptakan keluasan langit dan kerendahan bumi sebagai tanda-tanda kekuasaan-Nya baik berupa bintang-bintang, bulan, tanaman, pegunungan, dan masih banyak lagi. Selain itu, terdapatnya penciptaan langit dan bumi juga terdapat pergantian silih bergantinya malam dan siang. Bagi orang yang berakal (*Ulul Albab*) akan berpikir dan merenungkan segala penciptaan langit dan bumi yang sedemikian besar. Apabila seseorang sedang berpikir dan merenungkan tentang penciptaan Allah SWT, maka orang tersebut akan selalu mengingat akan kekuasaan Allah SWT dalam semua keadaan baik dengan hati maupun dengan lisan (Al-Sheikh, 2005).

Disamping itu, pada ayat di atas juga mendorong manusia untuk selalu ber-*tafakkur*. *Tafakkur* merupakan istilah dari berpikir yang mendalam. *Tafakkur* secara bahasa berasal dari bahasa arab yaitu *al-tafakkur* (التفكر) yang artinya berpikir atau memikirkan. Secara terminologi, *tafakkur* dapat didefinisikan sebagai proses berpikir yang memungkinkan manusia untuk berpikir secara mendalam tentang segala sesuatu seperti apa yang diciptakan Allah SWT, hakikat kejadian manusia, tujuan hidup di dunia, dan sebagainya. Oleh karena itu, *tafakkur* adalah proses mencari dan memperoleh pengetahuan yang akan memungkinkan seseorang untuk lebih dekat dengan Allah SWT (Noffiyanti, 2020).

Antara *tafakkur* dengan berpikir biasa sangatlah berbeda. Berpikir biasa hanyalah berpikir pada objek masalah-masalah dunia tanpa dilandasi oleh keimanan. Sedangkan seseorang yang ber-*tafakkur* akan mampu melewati realitas dunia menuju akhirat, dari ciptaan menuju Allah SWT yang akhirnya akan menghasilkan suatu pelajaran dan solusi yang dapat diambil (Mawarni dkk., 2006). Allah SWT menganjurkan agar hambanya senantiasa ber-*tafakkur* mengenai kitab suci Al-Qur'an serta fenomena alam yang sudah diciptakan oleh Allah SWT. Perlu diketahui bahwa hasil dari *tafakkur* adalah ilmu, pengetahuan, dan perubahan baik lahir maupun batin dalam hati. Apabila keadaan hati berubah menjadi lebih baik dengan adanya aktivitas *tafakkur,* maka akan berupa pula aktivitas semua anggota tubuh lainnya. Seseorang yang selalu ber-*tafakkur* akan selalu mengingat Allah SWT dengan rasa syukur atas nikmat yang telah diberikan, meningkatkan keimanan dan ibadah, mengasah kecerdasan, membentuk kesehatan mental, serta mempertajam kepekaan sosial (Noffiyanti, 2020).

Pada hakikatnya, *tafakkur* adalah upaya untuk mendapatkan bukti tentang keberadaan dan kekuatan Allah SWT yang kemudian mengarah pada keyakinan. Jika seseorang tidak suka ber-*tafakkur* atas fenomena alam atau peristiwa yang sudah diciptakan oleh Allah SWT, maka orang tersebut akan susah menjadi hamba yang bersyukur karena dalam hati hamba tersebut akan dipenuhi ole kegelapan yang mengantarkan menjadi manusia yang *takabbur* dan *kufur* terhadap nikmat yang sudah dianugerahkan Allah SWT (Enghariano, 2019).

BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan metode literatur dengan pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat, dan pengolahan bahan penelitian (Juliangkary & Pujilestari, 2022). Dalam proses penelitian menggunakan beberapa literatur yang berkaitan dengan penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan metode Gauss-Seidel.

3.2 Pendekatan Penelitian

Pada penelitian ini dilakukan dengan menggunakan pendekatan kualitatif. Pendekatan kualitatif pada penelitian ini tidak hanya mendeskripsikan pada angka atau data kuantitatif. Pendekatan kualitatif ini juga melibatkan pengumpulan, analisis, dan interpretasi data kualitatif.

3.3 Pra Penelitian

Pra penelitian yang dilakukan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan Metode Gauss-Seidel, yaitu dengan menyusun permasalahan yang konsisten berupa aplikasi contoh dan perhitungan sistem persamaan linier *fuzzy* dengan menggunakan variabel dam konstanta berupa bilangan *fuzzy* sigmoid.

3.4 Langkah-Langkah dalam Penelitian

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan Metode Gauss-Seidel sebagai berikut:

1. Fuzzifikasi variabel dan konstanta *fuzzy* ke dalam bentuk potongan$-\alpha$ tipe pertumbuhan sigmoid.
2. Mengubah bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* ke dalam matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$.
3. Mengubah matriks sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$.
4. Menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy* dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel. Iterasi berhenti jika toleransi kesalahan telah tercapai dengan defuzzifikasi nilai iterasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ sehingga diperoleh solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dalam bentuk potongan$-\alpha$.
5. Hasil dan analisis dari solusi sistem persamaan linier *fuzzy*.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Fuzzifikasi Variabel dan Konstanta *Fuzzy* ke dalam Bentuk Potongan$-\alpha$ Bilangan Sigmoid Tipe Pertumbuhan

Bentuk umum dari sistem persamaan linier *fuzzy* sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + a_{13}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + a_{23}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ a_{31}\tilde{x}_1 + a_{32}\tilde{x}_2 + a_{33}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{3n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}\tilde{x}_1 + a_{m2}\tilde{x}_2 + a_{m3}\tilde{x}_3 + \cdots + a_{nm}\tilde{x}_n = \tilde{b}_m \end{array} \tag{4.1}$$

Sistem persamaan linier *fuzzy* dapat diubah ke dalam matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$, yaitu matriks koefisien ditunjukkan oleh A, vektor kolom variabel *fuzzy* ditunjukkan oleh $\tilde{X}$, vektor kolom konstanta *fuzzy* ditunjukkan oleh $\tilde{b}$.

Variabel *fuzzy* $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ dan konstanta *fuzzy* $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$ pada persamaan (4.1) menggunakan bilangan *fuzzy* sigmoid kurva pertumbuhan yang dinyatakan dengan potongan $-\alpha$. Bilangan *fuzzy* sigmoid dalam bentuk potongan $-\alpha$ dinyatakan sebagai pasangan terurut, yaitu $x_\alpha = [x_\alpha^-, x_\alpha^+]$ dan $b_\alpha = [b_\alpha^-, b_\alpha^+]$. Variabel *fuzzy* dan konstanta *fuzzy* dari sebelah kiri atau fungsi yang kontinu terbatas di kiri pada interval tertutup [0,1] ditunjukkan x_α^- dan b_α^-. Variabel *fuzzy* dan konstanta *fuzzy* dari sebelah kanan atau fungsi yang kontinu di kanan pada interval tertutup [0,1] ditunjukkan x_α^+ dan b_α^+. Variabel *fuzzy* dan konstanta *fuzzy* yang dinyatakan potongan$-\alpha$, yaitu

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n = \left[{x_1}_\alpha^-, {x_1}_\alpha^+\right], \left[{x_2}_\alpha^-, {x_2}_\alpha^+\right], \left[{x_3}_\alpha^-, {x_3}_\alpha^+\right], \dots, \left[{x_n}_\alpha^-, {x_n}_\alpha^+\right]$$

$$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \dots, \tilde{b}_n = \left[{b_1}_\alpha^-, {b_1}_\alpha^+\right], \left[{b_2}_\alpha^-, {b_2}_\alpha^+\right], \left[{b_3}_\alpha^-, {b_3}_\alpha^+\right], \dots, \left[{b_m}_\alpha^-, {b_m}_\alpha^+\right].$$

Bilangan *fuzzy* sigmoid yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$ diperoleh dari fungsi keanggotaan bilangan sigmoid. Misalkan terdapat bilangan *fuzzy* sigmoid $\tilde{x}_1 = \text{sigmoid}(x; a, b, c\ )$ dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy*, maka memiliki fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$S(x;a,b,c) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq a \\ 2\left(\dfrac{(x-a)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ 1 - 2\left(\dfrac{(c-x)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 1, & \text{untuk } x \geq c \end{cases} \tag{4.2}$$

Bilangan *fuzzy* sigmoid $\tilde{x}_1$ dapat dinyatakan sebagai potongan $-\alpha$ yang mempunyai fungsi keanggotaan sigmoid berdasarkan persamaan (4.2). Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\tilde{x}_1}\left({x_1}_\alpha^-\right) = \mu_{\tilde{x}_1}\left({x_1}_\alpha^+\right)$, yaitu

$$\alpha = 2\left(\frac{\left({x_1}_\alpha^- - a\right)}{(c-a)}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{\left(c - {x_1}_\alpha^+\right)}{(c-a)}\right)^2$$

Maka untuk ${x_1}_\alpha^- = \sqrt{\frac{(c-a)^2\alpha}{2}} + a$ dan ${x_1}_\alpha^+ = c - \sqrt{\frac{(c-a)^2-(c-a)^2\alpha}{2}}$. Sehingga bilangan *fuzzy* sigmoid $\tilde{x}_1$ yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$ adalah ${x_1}_\alpha = \left[\sqrt{\frac{(c-a)^2\alpha}{2}} + a, c - \sqrt{\frac{(c-a)^2-(c-a)^2\alpha}{2}}\ \right]$.

4.2 Mengubah Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* ke dalam Matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ Berupa Potongan$-\alpha$

Setelah variabel *fuzzy* dan konstanta *fuzzy* dinyatakan sebagai bentuk potongan$-\alpha$, maka bentuk umum sistem persamaan linier *fuzzy* akan dirubah ke dalam matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$, maka bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ menjadi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_{1\alpha}^-, x_{1\alpha}^+] \\ [x_{2\alpha}^-, x_{2\alpha}^+] \\ [x_{3\alpha}^-, x_{3\alpha}^+] \\ \vdots \\ [x_{n\alpha}^-, x_{n\alpha}^+] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_{1\alpha}^-, b_{1\alpha}^+] \\ [b_{2\alpha}^-, b_{2\alpha}^+] \\ [b_{3\alpha}^-, b_{3\alpha}^+] \\ \vdots \\ [b_{m\alpha}^-, b_{m\alpha}^+] \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

Dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} [x_{1\alpha}^-, x_{1\alpha}^+] \\ [x_{2\alpha}^-, x_{2\alpha}^+] \\ [x_{3\alpha}^-, x_{3\alpha}^+] \\ \vdots \\ [x_{n\alpha}^-, x_{n\alpha}^+] \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} [b_{1\alpha}^-, b_{1\alpha}^+] \\ [b_{2\alpha}^-, b_{2\alpha}^+] \\ [b_{3\alpha}^-, b_{3\alpha}^+] \\ \vdots \\ [b_{m\alpha}^-, b_{m\alpha}^+] \end{bmatrix}$$

4.3 Mengubah Matriks Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Menjadi Sistem Persamaan Linier Non-*Fuzzy* dengan Matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$

Selanjutnya untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy*, maka terlebih dahulu mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi bentuk sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan mengubah dari n variabel dan n persamaan menjadi $2n$ variabel dan $2n$ persamaan sehingga dari persamaan umum yang awalnya $A\tilde{X} = \tilde{b}$ berdasarkan persamaan (4.3) akan menjadi $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$. Tujuan dari mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* adalah agar sistem persamaan linier *fuzzy* dapat diselesaikan melalui penyelesaian sistem persamaan linier.

Berdasarkan persamaan (4.3), maka untuk mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* perhatikan koefisien matriks $A = a_{ij}$ untuk $i, j = 1,2, \dots, n$, untuk menentukan matriks S ditentukan berdasarkan:

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{i,j} = a_{ij}$ dan $s_{i+n,j+n} = a_{ij}$.
2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n,j} = -a_{ij}$.

3. $s_{i,j} = 0$ untuk lainnya.

Maka didapatkan matriks S, yaitu

$$S = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,n} & s_{1,n+1} & \dots & s_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \cdots & s_{n,n} & s_{n,n+1} & \cdots & s_{n,2n} \\ s_{n+1,1} & \cdots & s_{n+1,n} & s_{n+1,n+1} & \cdots & s_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2n,1} & \cdots & s_{2n,n} & s_{2n,n+1} & \cdots & s_{2n,2n} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Untuk matriks koefisien *fuzzy* dan konstanta *fuzzy* dirubah dari $n \times n$ menjadi matriks ukuran $2n \times 2n$, maka didapatkan variabel *fuzzy*

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+] \\ [x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+] \\ [x_{3_\alpha}^-, x_{3_\alpha}^+] \\ \vdots \\ [x_{n_\alpha}^-, x_{n_\alpha}^+] \end{bmatrix} \text{ menjadi } \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} x_{1_\alpha}^- \\ \vdots \\ x_{n_\alpha}^- \\ x_{1_\alpha}^+ \\ \vdots \\ x_{n_\alpha}^+ \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Dan konstanta *fuzzy*

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \vdots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [b_{1_\alpha}^-, b_{1_\alpha}^+] \\ [b_{2_\alpha}^-, b_{2_\alpha}^+] \\ [b_{3_\alpha}^-, b_{3_\alpha}^+] \\ \vdots \\ [b_{m_\alpha}^-, b_{m_\alpha}^+] \end{bmatrix} \text{ menjadi } \tilde{b}^* = \begin{bmatrix} b_{1_\alpha}^- \\ \vdots \\ b_{m_\alpha}^- \\ b_{1_\alpha}^+ \\ \vdots \\ b_{m_\alpha}^+ \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

Sehingga bentuk dari matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$ adalah

$$\begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,n} & s_{1,n+1} & \dots & s_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \cdots & s_{n,n} & s_{n,n+1} & \cdots & s_{n,2n} \\ s_{n+1,1} & \cdots & s_{n+1,n} & s_{n+1,n+1} & \cdots & s_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{2n,1} & \cdots & s_{2n,n} & s_{2n,n+1} & \cdots & s_{2n,2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1_\alpha}^- \\ \vdots \\ x_{n_\alpha}^- \\ x_{1_\alpha}^+ \\ \vdots \\ x_{n_\alpha}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1_\alpha}^- \\ \vdots \\ b_{m_\alpha}^- \\ b_{1_\alpha}^+ \\ \vdots \\ b_{m_\alpha}^+ \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Dengan melakukan perkalian pada matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$, maka didapatkan sistem persamaan linier non-*fuzzy* adalah

$$s_{1,1}x_{1_\alpha}^- + \cdots + s_{1,n}x_{n_\alpha}^- + s_{1,n+1}x_{1_\alpha}^+ + \cdots + s_{1,2n}x_{n_\alpha}^+ = b_{1_\alpha}^- \tag{4.8}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$s_{n,1}x_{1}{}_{\alpha}^{-} + \cdots + s_{n,n}x_{n}{}_{\alpha}^{-} + s_{n,n+1}x_{1}{}_{\alpha}^{+} + \cdots + s_{n,2n}x_{n}{}_{\alpha}^{+} = b_{m}{}_{\alpha}^{-}$$

$$s_{n+1,1}x_{1}{}_{\alpha}^{-} + \cdots + s_{n+1,n}x_{n}{}_{\alpha}^{-} + s_{n+1,n+1}x_{1}{}_{\alpha}^{+} + \cdots + s_{n+1,2n}x_{n}{}_{\alpha}^{+} = b_{1}{}_{\alpha}^{+}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$s_{2n,1}x_{1}{}_{\alpha}^{-} + \cdots + s_{2n,n}x_{n}{}_{\alpha}^{-} + s_{2n,n+1}x_{1}{}_{\alpha}^{+} + \cdots + s_{2n,2n}x_{n}{}_{\alpha}^{+} = b_{m}{}_{\alpha}^{+}$$

4.4 Proses Pencarian Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Menggunakan Metode Gauss-Seidel

Metode Gauss-Seidel dapat dikenal dengan metode iteratif merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mencari nilai solusi dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy*. Metode Gauss-Seidel ini dilakukan melalui proses iterasi dengan cara memberikan nilai awal, yaitu $\tilde{X} = \left(x_{1}{}_{\alpha}^{-}, \dots, x_{n}{}_{\alpha}^{-}, x_{1}{}_{\alpha}^{+}, \dots, x_{n}{}_{\alpha}^{+}\right)^{t} = (0)$. Syarat cukup agar iterasi yang dihasilkan konvergen, maka sistem persamaan linier *fuzzy* pada persamaan (4.1) adalah memenuhi syarat koefisien matriks domain secara diagonal, yaitu

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1,2,3, \dots \tag{4.9}$$

Persamaan umum dari Metode Gauss-Seidel yang digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2, \dots \tag{4.10}$$

Persamaan umum dari Metode Gauss-Seidel ini digunakan untuk menentukan persamaan iterasi yang akan dilakukan untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan linier. Berdasarkan persamaan umum Metode Gauss-Seidel (4.10), maka proses iterasi untuk mencari nilai solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* adalah dengan cara mengubah bentuk umum sistem persamaan linier non-*fuzzy* pada persamaan (4.8) menjadi persamaan iterasi, yaitu

$$\begin{aligned}
{x_1}_\alpha^- &= \frac{{b_1}_\alpha^- - s_{1,2}{x_2}_\alpha^- - s_{1,3}{x_1}_\alpha^+ - s_{1,4}{x_2}_\alpha^+}{s_{1,1}} \\
{x_2}_\alpha^- &= \frac{{b_2}_\alpha^- - s_{2,1}{x_1}_\alpha^- - s_{2,3}{x_1}_\alpha^+ - s_{2,4}{x_2}_\alpha^+}{s_{2,2}} \\
{x_1}_\alpha^+ &= \frac{{b_1}_\alpha^+ - s_{3,1}{x_1}_\alpha^- - s_{3,2}{x_2}_\alpha^- - s_{3,4}{x_2}_\alpha^+}{s_{3,3}} \\
{x_2}_\alpha^+ &= \frac{{b_2}_\alpha^+ - s_{4,1}{x_1}_\alpha^- - s_{4,2}{x_2}_\alpha^- - s_{4,3}{x_1}_\alpha^+}{s_{4,4}}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Setelah didapatkan persamaan iterasi, maka proses iterasi diawali dengan mensubstitusikan nilai awal yang telah diberikan ke baris awal, kemudian nilai yang telah diperoleh akan digunakan dalam berhitungan nilai berikutnya. Proses iterasi berhenti jika toleransi tertentu telah dicapai dengan cara memberikan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Toleransi kesalahan didefinisikan sebagai berikut:

$$\left|\frac{\tilde{x}_i^{(k+1)} - \tilde{x}_i^{(k)}}{\tilde{x}_i^{(k+1)}}\right| < \varepsilon \tag{4.12}$$

4.5 Analisis Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*

Solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* didapatkan jika iterasi yang dihasilkan menggunakan Metode Gauss-Seidel mencapai batas toleransi yang sudah ditentukan. Kemudian solusi yang telah diperoleh disubstitusikan ke dalam persamaan awal untuk membuktikan bahwa solusi tersebut memenuhi suatu sistem persamaan linier *fuzzy*.

Contoh 1:

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* berikut dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} 4\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 &= \widetilde{14} \\ 2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 &= \widetilde{14} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dengan $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^{-}, x_{1_\alpha}^{+}\right]$ dan $x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^{-}, x_{2_\alpha}^{+}\right]$. Proses iterasi dengan diberikan nilai awal, yaitu $\left(x_{1_\alpha}^{-(0)}, x_{2_\alpha}^{-(0)}, x_{1_\alpha}^{+(0)}, x_{2_\alpha}^{+(0)}\right) = 0$ dan toleransi kesalahan $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$. Iterasi berhenti ketika batas toleransi telah tercapai dengan mensubsitusikan setiap nilai iterasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Masing-masing konstanta berupa bilangan *fuzzy* sigmoid

$$\widetilde{14} = \text{sigmoid}(x; 10, 12, 14)$$

Penyelesaian:

Pertama, mengubah konstanta *fuzzy* menjadi potongan$-\alpha$ tipe pertumbuhan dengan menggunakan fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* sigmoid tipe pertumbuhan.

Untuk bilangan *fuzzy* $\boldsymbol{\widetilde{14} = \text{sigmoid}(x; 10, 12, 14)}$, maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\widetilde{14}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq 10 \\ 2\left(\dfrac{(x-10)}{(14-10)}\right)^2, & \text{untuk } 10 \leq x \leq 12 \\ 1 - 2\left(\dfrac{(14-x)}{(14-10)}\right)^2, & \text{untuk } 12 \leq x \leq 14 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 14 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{14}}(14_\alpha^-) = \mu_{\widetilde{14}}(14_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(14_\alpha^- - 10)}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(14 - 14_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Untuk 14_α^- diperoleh, yaitu

$$\alpha = 2\left(\frac{(14_\alpha^- - 10)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 2\left(\frac{(14_\alpha^- - 10)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{(14_\alpha^- - 10)^2}{8}$$

$$8\alpha = (14_\alpha^- - 10)^2$$

$$\sqrt{8\alpha} = 14_\alpha^- - 10$$

$$14_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 10$$

Untuk 14_α^+ diperoleh, yaitu

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(14 - 14_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(14 - 14_\alpha^+)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{16 - 2(14 - 14_\alpha^+)^2}{16}$$

$$16\alpha = 16 - 2(14 - 14_\alpha^+)^2$$

$$-16 + 16\alpha = -2(14 - 14_\alpha^+)^2$$

$$8 - 8\alpha = (14 - 14_\alpha^+)^2$$

$$\sqrt{8 - 8\alpha} = 14 - 14_\alpha^+$$

$$14_\alpha^+ = 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}$$

Maka didapatkan untuk $14_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 10$ dan $14_\alpha^+ = 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}$. Jadi, potongan$-\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\widetilde{14}$ adalah $14_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right]$.

Sedangkan untuk variabel *fuzzy* $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right]$ dan $x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right]$.

Kedua, bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* pada persamaan (4.13) akan dirubah menjadi matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right] \\ \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right] \end{bmatrix}, \text{dan}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \widetilde{14} \\ \widetilde{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right] \\ \left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right] \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

Menjadi bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right] \\ \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right] \\ \left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right] \end{bmatrix}$$

Ketiga, memeriksa sistem persamaan linier *fuzzy* memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel, yaitu koefisien matriks domain secara diagonal berdasarkan persamaan (4.9). Perhatikan matriks koefisien A pada persamaan (4.14).

$$|a_{11}| > |a_{12}| \rightarrow |4| > |-1|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| \rightarrow |3| > |2|$$

Semua persamaan terbukti memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel sehingga penyelesaian menggunakan Metode Gauss-Seidel dapat dilanjutkan.

Keempat, untuk mencari solusi dari sistem persamaan *fuzzy* (4.13), maka selanjutnya mengubah bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi bentuk sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan mengubah dari n variabel dan n persamaan atau matriks $n \times n$ menjadi $2n$ variabel dan $2n$ persamaan atau matriks $2n \times 2n$ sehingga bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ menjadi $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$. Berdasarkan matriks A pada

(4.14) dengan koefisien matriks $A = a_{ij}$ untuk $i, j = 1,2, \dots, n$, maka untuk mengubah menjadi matriks S berukuran $2n \times 2n$ ditentukan berdasarkan:

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{i,j} = a_{ij}$ dan $s_{i+n,j+n} = a_{ij}$.

$$s_{1,1} = 4, s_{2,1} = 2, s_{2,2} = 3, \text{dan } s_{3,3} = 4, s_{4,3} = 2, s_{4,4} = 3$$

2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n,j} = -a_{ij}$.

$$s_{1,4} = -(-1), \text{dan } s_{3,2} = -(-1)$$

3. $s_{ij} = 0$ untuk lainnya.

Didapatkan matriks perluasan S adalah:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks variabel *fuzzy* $\tilde{X}$ dan konstanta *fuzzy* $\tilde{b}$ dirubah menjadi matriks ukuran $2n \times 2n$, maka didapatkan variabel *fuzzy*

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [{x_1}_\alpha^-, {x_1}_\alpha^+] \\ [{x_2}_\alpha^-, {x_2}_\alpha^+] \end{bmatrix} \text{ menjadi } \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} {x_1}_\alpha^- \\ {x_2}_\alpha^- \\ {x_1}_\alpha^+ \\ {x_2}_\alpha^+ \end{bmatrix}$$

Dan konstanta *fuzzy*

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \widetilde{14} \\ \widetilde{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}] \\ [\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}] \end{bmatrix} \text{ menjadi } \tilde{b}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{8\alpha} + 10 \\ \sqrt{8\alpha} + 10 \\ 14 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 14 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk matriks dari $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$ adalah

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}_\alpha^- \\ {x_2}_\alpha^- \\ {x_1}_\alpha^+ \\ {x_2}_\alpha^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{8\alpha} + 10 \\ \sqrt{8\alpha} + 10 \\ 14 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 14 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan perkalian pada matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$, didapatkan sistem persamaan linier non-*fuzzy* adalah

$$
\begin{aligned}
4x_{1\alpha}^{-} + x_{2\alpha}^{+} &= \sqrt{8\alpha} + 10 \\
2x_{1\alpha}^{-} + 3x_{2\alpha}^{-} &= \sqrt{8\alpha} + 10 \\
x_{2\alpha}^{-} + 4x_{1\alpha}^{+} &= 14 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\
2x_{1\alpha}^{+} + 3x_{2\alpha}^{+} &= 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Kelima, berdasarkan rumusan umum Metode Gauss-Seidel pada persamaan (4.12), maka didapatkan persamaan iterasi yaitu:

$$
\begin{aligned}
x_{1\alpha}^{-} &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - x_{2\alpha}^{+}}{4} \\
x_{2\alpha}^{-} &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2x_{1\alpha}^{-}}{3} \\
x_{1\alpha}^{+} &= \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{2\alpha}^{-}}{4} \\
x_{2\alpha}^{+} &= \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2x_{1\alpha}^{+}}{3}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Setelah persamaan iterasi didapatkan, maka substitusikan nilai awal yang telah diberikan, yaitu $\left(x_{1\alpha}^{-(0)}, x_{2\alpha}^{-(0)}, x_{1\alpha}^{+(0)}, x_{2\alpha}^{+(0)}\right) = 0$ pada iterasi pertama

Iterasi pertama

$$
\begin{aligned}
x_{1\alpha}^{-(1)} &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - x_{2\alpha}^{+(0)}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - (0)}{4} \\
&= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{4}
\end{aligned}
$$

$$x_{2_\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2x_{1_\alpha}^{-(1)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2\left(\frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{4}\right)}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{6}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(1)} = \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{2_\alpha}^{-(1)}}{4}$$

$$= \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - \left(\frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{6}\right)}{4}$$

$$= \frac{74 - \sqrt{8\alpha} - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{24}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(1)} = \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2x_{1_\alpha}^{+(1)}}{3}$$

$$= \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2\left(\frac{74 - \sqrt{8\alpha} - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{24}\right)}{3}$$

$$= \frac{94 - 6\sqrt{8 - 8\alpha} + \sqrt{8\alpha}}{36}$$

Jadi hasil iterasi pertama yaitu:

$$\left[\frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{4}, \frac{\sqrt{8\alpha} + 10}{6}, \frac{74 - \sqrt{8\alpha} - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{24}, \frac{94 - 6\sqrt{8 - 8\alpha} + \sqrt{8\alpha}}{36}\right]$$

Iterasi kedua

$$x_{1_\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - x_{2_\alpha}^{+(1)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - \left(\frac{94 - 6\sqrt{8 - 8\alpha} + \sqrt{8\alpha}}{36}\right)}{4}$$

$$= \frac{35\sqrt{8\alpha} + 266 + 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{144}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2x_{1_\alpha}^{-(2)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2\left(\frac{35\sqrt{8\alpha} + 266 + 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{144}\right)}{3}$$

$$= \frac{37\sqrt{8\alpha} + 454 - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{216}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(2)} = \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{2_\alpha}^{-(2)}}{4}$$

$$= \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - \left(\frac{37\sqrt{8\alpha} + 454 - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{216}\right)}{4}$$

$$= \frac{2570 - 210\sqrt{8 - 8\alpha} - 37\sqrt{8\alpha}}{864}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(2)} = \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2x_{1_\alpha}^{+(2)}}{3}$$

$$= \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2\left(\frac{2570 - 210\sqrt{8 - 8\alpha} - 37\sqrt{8\alpha}}{864}\right)}{3}$$

$$= \frac{3478 - 222\sqrt{8 - 8\alpha} + 37\sqrt{8\alpha}}{1296}$$

Jadi hasil iterasi kedua yaitu:

$$\left[\frac{35\sqrt{8\alpha} + 266 + 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{144}, \frac{37\sqrt{8\alpha} + 454 - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{216}, \right.$$

$$\left. \frac{2570 - 210\sqrt{8 - 8\alpha} - 37\sqrt{8\alpha}}{864}, \frac{3478 - 222\sqrt{8 - 8\alpha} + 37\sqrt{8\alpha}}{1296}\right]$$

Iterasi ketiga

$$x_{1_\alpha}^{-(3)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - x_{2_\alpha}^{+(2)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - \left(\frac{3478 - 222\sqrt{8 - 8\alpha} + 37\sqrt{8\alpha}}{1296}\right)}{4}$$

$$= \frac{1259\sqrt{8\alpha} + 9482 + 222\sqrt{8 - 8\alpha}}{5184}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(3)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2x_{1_\alpha}^{-(3)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 10 - 2\left(\frac{1259\sqrt{8\alpha} + 9482 + 222\sqrt{8 - 8\alpha}}{5184}\right)}{3}$$

$$= \frac{1333\sqrt{8\alpha} + 16438 - 222\sqrt{8 - 8\alpha}}{7776}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(3)} = \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{2_\alpha}^{-(3)}}{4}$$

$$= \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - \left(\frac{1333\sqrt{8\alpha} + 16438 - 222\sqrt{8 - 8\alpha}}{7776}\right)}{4}$$

$$= \frac{92426 - 7554\sqrt{8 - 8\alpha} - 1333\sqrt{8\alpha}}{31104}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(3)} = \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2x_{1_\alpha}^{+(3)}}{3}$$

$$= \frac{14 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2\left(\frac{92426 - 7554\sqrt{8 - 8\alpha} - 1333\sqrt{8\alpha}}{31104}\right)}{3}$$

$$= \frac{125302 - 7998\sqrt{8 - 8\alpha} + 1333\sqrt{8\alpha}}{46656}$$

Jadi hasil iterasi ketiga, yaitu

$$\left[\frac{1259\sqrt{8\alpha}+9482+222\sqrt{8-8\alpha}}{5184},\frac{1333\sqrt{8\alpha}+16438-222\sqrt{8-8\alpha}}{7776},\right.$$

$$\left.\frac{92426-7554\sqrt{8-8\alpha}-1333\sqrt{8\alpha}}{31104},\frac{125302-7998\sqrt{8-8\alpha}+1333\sqrt{8\alpha}}{46656}\right]$$

Iterasi keempat

$$\begin{aligned}
{x_1}_\alpha^{-(4)} &= \frac{\sqrt{8\alpha}+10-{x_2}_\alpha^{+(3)}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{8\alpha}+10-\left(\frac{125302-7998\sqrt{8-8\alpha}+1333\sqrt{8\alpha}}{46656}\right)}{4}\\
&= \frac{45323\sqrt{8\alpha}+341258+7998\sqrt{8-8\alpha}}{186624}\\
{x_2}_\alpha^{-(4)} &= \frac{\sqrt{8\alpha}+10-2{x_1}_\alpha^{-(4)}}{3}\\
&= \frac{\sqrt{8\alpha}+10-2\left(\frac{45323\sqrt{8\alpha}+341258+7998\sqrt{8-8\alpha}}{186624}\right)}{3}\\
&= \frac{47989\sqrt{8\alpha}+591862-7998\sqrt{8-8\alpha}}{279936}\\
{x_1}_\alpha^{+(4)} &= \frac{14-\sqrt{8-8\alpha}-{x_2}_\alpha^{-(4)}}{4}\\
&= \frac{14-\sqrt{8-8\alpha}-\left(\frac{47989\sqrt{8\alpha}+591862-7998\sqrt{8-8\alpha}}{279936}\right)}{4}\\
&= \frac{3327242-271938\sqrt{8-8\alpha}-47989\sqrt{8\alpha}}{1119744}\\
{x_2}_\alpha^{+(4)} &= \frac{14-\sqrt{8-8\alpha}-2{x_1}_\alpha^{+(4)}}{3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{14-\sqrt{8-8\alpha}-2\left(\frac{3327242-271938\sqrt{8-8\alpha}-47989\sqrt{8\alpha}}{1119744}\right)}{3}$$

$$= \frac{4510996-287934\sqrt{8-8\alpha}+47989\sqrt{8\alpha}}{1679616}$$

Jadi hasil iterasi keempat, yaitu:

$$\left[\frac{45323\sqrt{8\alpha}+341258+7998\sqrt{8-8\alpha}}{186624}, \frac{47989\sqrt{8\alpha}+591862-7998\sqrt{8-8\alpha}}{279936},\right.$$

$$\left.\frac{3327242-271938\sqrt{8-8\alpha}-47989\sqrt{8\alpha}}{1119744}, \frac{4510996-287934\sqrt{8-8\alpha}+47989\sqrt{8\alpha}}{1679616}\right]$$

Iterasi kelima

$$x_{1_\alpha}^{-(5)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+10-x_{2_\alpha}^{+(4)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+10-\left(\frac{4510996-287934\sqrt{8-8\alpha}+47989\sqrt{8\alpha}}{1679616}\right)}{4}$$

$$= \frac{1631627\sqrt{8\alpha}+12285194+287934\sqrt{8-8\alpha}}{6718464}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(5)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+10-2x_{1_\alpha}^{-(5)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+10-2\left(\frac{1631627\sqrt{8\alpha}+12285194+287934\sqrt{8-8\alpha}}{6718464}\right)}{3}$$

$$= \frac{1727605\sqrt{8\alpha}+21307126-287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(5)} = \frac{14-\sqrt{8-8\alpha}-x_{2_\alpha}^{-(5)}}{4}$$

$$= \frac{14-\sqrt{8-8\alpha}-\left(\frac{1727605\sqrt{8\alpha}+21307126-287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}\right)}{4}$$

$$= \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784}$$

$$x_{2\alpha}^{+(5)} = \frac{14 - \sqrt{8-8\alpha} - 2x_{1\alpha}^{+(5)}}{3}$$

$$= \frac{14 - \sqrt{8-8\alpha} - 2\left(\frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784}\right)}{3}$$

$$= \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

Jadi hasil iterasi kelima adalah

$$\left[\frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8\alpha}}{6718464},\right.$$

$$\frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696},$$

$$\frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784},$$

$$\left.\frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}\right]$$

Berdasarkan hasil iterasi pertama sampai kelima, simulasikan hasil iterasi dengan mensubstitusi $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Hasil simulasi dapat dilihat pada tabel (4.1) dan tabel (4.2).

Tabel 4.1 Simulasi α=0

Ketika $\alpha = 0$				
Iterasi Ke-n	$x_{1\alpha}^{-}$	$x_{2\alpha}^{-}$	$x_{1\alpha}^{+}$	$x_{2\alpha}^{+}$
1	2,500	1,600	2,376	2,140
2	1,965	2,023	2,287	2,199
3	1,950	2,033	2,285	2,201
4	1,950	2,033	2,285	2,201
5	1,950	2,033	2,285	2,201

Tabel 4.2 Simulasi α=1

Ketika $\alpha = 1$				
Iterasi Ke-n	$\boldsymbol{x_1}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-}$	$\boldsymbol{x_2}_{\boldsymbol{\alpha}}^{-}$	$\boldsymbol{x_1}_{\boldsymbol{\alpha}}^{+}$	$\boldsymbol{x_2}_{\boldsymbol{\alpha}}^{+}$
1	3,207	2,138	2,965	2,690
2	2,535	2,586	2,853	2,764
3	2,516	2,599	2,850	2,766
4	2,515	2,599	2,850	2,767
5	2,515	2,599	2,850	2,767

Berdasarkan tabel simulasi (4.1) dan (4.2), maka iterasi dari Metode Gauss-Seidel berhenti pada iterasi ke-5 karena toleransi kesalahan telah dicapai yaitu

1. Simulasi $\alpha = 0$

   Batas toleransi yang diberikan adalah $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$

$$\left|\frac{{x_1}_{\alpha}^{-(5)} - {x_1}_{\alpha}^{-(4)}}{{x_1}_{\alpha}^{-(5)}}\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{1{,}950 - 1{,}950}{1.950}\right| < 0{,}001$$

$$0 < 0{,}001$$

2. Simulasi $\alpha = 1$

   Batas toleransi yang diberikan adalah $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$

$$\left|\frac{{x_1}_{\alpha}^{-(5)} - {x_1}_{\alpha}^{-(4)}}{{\tilde{x}_1}_{\alpha}^{-(5)}}\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{2{,}515 - 2{,}515}{2{,}515}\right| < 0{,}001$$

$$0 < 0{,}001$$

Jadi solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* adalah:

$$\begin{aligned}
{x_1}_\alpha^- &= \frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8\alpha}}{6718464} \\
{x_2}_\alpha^- &= \frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696} \\
{x_1}_\alpha^+ &= \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784} \\
{x_2}_\alpha^+ &= \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Sehingga setiap solusi jika didefuzzifikasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka didapatkan:

Defuzzifikasi $\alpha = 0$

$$\begin{aligned}
{x_1}_\alpha^- &= \frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8\alpha}}{6718464} \\
&= \frac{1631627\sqrt{8(0)} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8(0)}}{6718464} \\
&= 1{,}950
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{x_2}_\alpha^- &= \frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696} \\
&= \frac{1727605\sqrt{8(0)} + 21307126 - 287934\sqrt{8-8(0)}}{10077696} \\
&= 2{,}033
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{x_1}_\alpha^+ &= \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784} \\
&= \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8(0)} - 1727605\sqrt{8(0)}}{40310784} \\
&= 2{,}285
\end{aligned}$$

$$x_{2\alpha}^{+} = \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

$$= \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8(0)} + 1727605\sqrt{8(0)}}{60466176}$$

$$= 2{,}201$$

Sehingga

$$x_{1\alpha} = \left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] = [(1{,}950), (2{,}285)]$$

$$x_{2\alpha} = \left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] = [(2{,}033), (2{,}201)]$$

Defuzzifikasi $\alpha = 1$

$$x_{1\alpha}^{-} = \frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8\alpha}}{6718464}$$

$$= \frac{1631627\sqrt{8(1)} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8(1)}}{6718464}$$

$$= 2{,}515$$

$$x_{2\alpha}^{-} = \frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}$$

$$= \frac{1727605\sqrt{8(1)} + 21307126 - 287934\sqrt{8-8(1)}}{10077696}$$

$$= 2{,}599$$

$$x_{1\alpha}^{+} = \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784}$$

$$= \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8(1)} - 1727605\sqrt{8(1)}}{40310784}$$

$$= 2{,}850$$

$$x_{2\alpha}^{+} = \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

$$= \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8(1)} + 1727605\sqrt{8(1)}}{60466176}$$

$$= 2{,}767$$

Sehingga

$$x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right] = [(2{,}515),(2{,}850)]$$

$$x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right] = [(2{,}599),(2{,}767)]$$

Untuk membuktikan kebenarannya, solusi yang sudah didapatkan pada (4.17) akan disubstitusikan ke dalam setiap sistem persamaan linier *fuzzy*.

Persamaan I

$$4\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \widetilde{14}$$

$$4\left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right] - \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[4x_{1_\alpha}^-, 4x_{1_\alpha}^+\right] - \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[4x_{1_\alpha}^- - x_{2_\alpha}^+\right], \left[4x_{1_\alpha}^+ - x_{2_\alpha}^-\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Untuk $4x_{1_\alpha}^-, 4x_{1_\alpha}^+, x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+$ diperoleh sebagai berikut:

$$4x_{1_\alpha}^- = 4\left(\frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8\alpha}}{6718464}\right)$$

$$= \frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8\alpha}}{1679616}$$

$$4x_{1_\alpha}^+ = 4\left(\frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784}\right)$$

$$= \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{10077696}$$

$$x_{2_\alpha}^- = \frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

Hasil pengurangan bilangan *fuzzy* yang dinyatakan bentuk potongan$-\alpha$ adalah:

$$4x_{1}{}_{\alpha}^{-} - x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \left(\frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8\alpha}}{1679616}\right)$$

$$- \left(\frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}\right)$$

$$= \frac{57010967\sqrt{8\alpha} + 279872114 + 20731254\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}$$

$$4x_{1}{}_{\alpha}^{+} - x_{2}{}_{\alpha}^{-} = \left(\frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{10077696}\right)$$

$$- \left(\frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}\right)$$

$$= \frac{49236746 - 4750914\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{5038848}$$

Jadi diperoleh

$$\left[\left[4x_{1}{}_{\alpha}^{-} - x_{2}{}_{\alpha}^{+}\right], \left[4x_{1}{}_{\alpha}^{+} - x_{2}{}_{\alpha}^{-}\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8\alpha} + 279872114 + 20731254\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{49236746 - 4750914\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan didefuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka:

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8\alpha}+279872114+20731254\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{49236746-4750914\sqrt{8-8\alpha}-1727605\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+10\,,14-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8(0)}+279872114+20731254\sqrt{8-8(0)}}{60466176}, \frac{49236746-4750914\sqrt{8-8(0)}-1727605\sqrt{8(0)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(0)}+10\,,14-\sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(5{,}593),(7{,}105)] = [(10),(11{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8\alpha}+279872114+20731254\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{49236746-4750914\sqrt{8-8\alpha}-1727605\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+10\,,14-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8(1)}+279872114+20731254\sqrt{8-8(1)}}{60466176}, \frac{49236746-4750914\sqrt{8-8(1)}-1727605\sqrt{8(1)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(1)}+10\,,14-\sqrt{8-8(1)}\right]$$

$$[(7{,}295),(8{,}802)] = [(12{,}183),(14)]$$

Persamaan II

$$2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = \widetilde{14}$$

$$2\left[{x_1}_\alpha^-\,,{x_1}_\alpha^+\right] + 3\left[{x_2}_\alpha^-\,,{x_2}_\alpha^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+10\,,14-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[2{x_1}_\alpha^-, 2{x_1}_\alpha^+\right] + \left[3{x_2}_\alpha^-, 3{x_2}_\alpha^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[2{x_1}_\alpha^- + 3{x_2}_\alpha^-\right], \left[2{x_1}_\alpha^+ + 3{x_2}_\alpha^+\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

Untuk $2{x_1}_\alpha^-, 2{x_1}_\alpha^+, 3{x_2}_\alpha^-, 3{x_2}_\alpha^+$ diperoleh sebagai berikut

$$2{x_1}_\alpha^- = 2\left(\frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8 - 8\alpha}}{6718464}\right)$$

$$= \frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8 - 8\alpha}}{3359232}$$

$$2{x_1}_\alpha^+ = 2\left(\frac{119780618 - 9789762\sqrt{8 - 8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784}\right)$$

$$= \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8 - 8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{20155392}$$

$$3{x_2}_\alpha^- = 3\left(\frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8 - 8\alpha}}{10077696}\right)$$

$$= \frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8 - 8\alpha}}{3359232}$$

$$3{x_2}_\alpha^+ = 3\left(\frac{162394870 - 10365630\sqrt{8 - 8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}\right)$$

$$= \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8 - 8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{20155392}$$

Hasil penjumlahan bilangan *fuzzy* yang dinyatakan bentuk potongan$-\alpha$ adalah:

$$2{x_1}_\alpha^- + 3{x_2}_\alpha^- = \left(\frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8 - 8\alpha}}{3359232}\right)$$

$$+ \left(\frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8 - 8\alpha}}{3359232}\right)$$

$$= \sqrt{8\alpha} + 10$$

$$
\begin{aligned}
2x_{1\alpha}^{+} + 3x_{2\alpha}^{+} &= \left(\frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{20155392}\right) \\
&\quad + \left(\frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{20155392}\right) \\
&= 14 - \sqrt{8-8\alpha}
\end{aligned}
$$

Jadi diperoleh

$$
\begin{aligned}
\left[\left[2x_{1\alpha}^{-} + 3x_{2\alpha}^{-}\right], \left[2x_{1\alpha}^{+} + 3x_{2\alpha}^{+}\right]\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right] \\
\left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\,\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan didefuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka:

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$
\begin{aligned}
\left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\,\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right] \\
\left[\sqrt{8(0)} + 10, 14 - \sqrt{8-8(0)}\,\right] &= \left[\sqrt{8(0)} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8(0)}\right] \\
[(10), (11{,}172)] &= [(10), (11{,}172)]
\end{aligned}
$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$
\begin{aligned}
\left[\sqrt{8\alpha} + 10, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\,\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8\alpha}\right] \\
\left[\sqrt{8(1)} + 10, 14 - \sqrt{8-8(1)}\,\right] &= \left[\sqrt{8(1)} + 10\,, 14 - \sqrt{8-8(1)}\right] \\
[(12{,}828), (14)] &= [(12{,}828), (14)]
\end{aligned}
$$

Contoh 2

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* berikut dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel

$$
\begin{aligned}
6\tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 &= \widetilde{18} \\
\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 &= \widetilde{10}
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Dengan $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right]$ dan $x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right]$. Proses iterasi dengan diberikan nilai awal, yaitu $\left(x_{1_\alpha}^{-(0)}, x_{2_\alpha}^{-(0)}, x_{1_\alpha}^{+(0)}, x_{2_\alpha}^{+(0)}\right) = 0$ dan toleransi kesalahan $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$. Iterasi berhenti ketika batas toleransi telah tercapai dengan mensubsitusikan setiap nilai iterasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Masing-masing konstanta berupa bilangan *fuzzy* sigmoid

$$\widetilde{18} = \text{sigmoid}(x; 14, 16, 18)$$

$$\widetilde{10} = \text{sigmoid}(x; 6, 8, 10)$$

Penyelesaian:

Pertama, mengubah konstanta *fuzzy* menjadi potongan$-\alpha$ tipe pertumbuhan dengan menggunakan fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* sigmoid tipe pertumbuhan.

Untuk bilangan *fuzzy* $\boldsymbol{\widetilde{18} = \textbf{sigmoid}(x; 14, 16, 18)}$, maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\widetilde{18}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq 14 \\ 2\left(\dfrac{(x-14)}{(18-14)}\right)^2, & \text{untuk } 14 \leq x \leq 16 \\ 1 - 2\left(\dfrac{(18-x)}{(18-14)}\right)^2, & \text{untuk } 16 \leq x \leq 18 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 18 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{18}}(18_\alpha^-) = \mu_{\widetilde{18}}(18_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(18_\alpha^- - 14)}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(18 - 18_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Untuk 18_α^- diperoleh, yaitu

$$\alpha = 2\left(\frac{(18_\alpha^- - 14)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 2\left(\frac{(18_\alpha^- - 14)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{(18_\alpha^- - 14)^2}{8}$$

$$8\alpha = (18_\alpha^- - 14)^2$$

$$\sqrt{8\alpha} = 18_\alpha^- - 14$$

$$18_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 14$$

Untuk 18_α^+ diperoleh, yaitu

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(18 - 18_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(18 - 18_\alpha^+)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{16 - 2(18 - 18_\alpha^+)^2}{16}$$

$$16\alpha = 16 - 2(18 - 18_\alpha^+)^2$$

$$-16 + 16\alpha = -2(18 - 18_\alpha^+)^2$$

$$8 - 8\alpha = (18 - 18_\alpha^+)^2$$

$$\sqrt{8 - 8\alpha} = 18 - 18_\alpha^+$$

$$18_\alpha^+ = 18 - \sqrt{8 - 8\alpha}$$

Maka didapatkan untuk $18_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 14$ dan $18_\alpha^+ = 18 - \sqrt{8 - 8\alpha}$. Jadi, potongan$-\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\widetilde{18}$ adalah $18_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha} + 14\,, 18 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right]$.

Untuk bilangan *fuzzy* $\boldsymbol{\widetilde{10} = \mathbf{sigmoid}(x; 6, 8, 10)}$, maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\widetilde{10}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq 6 \\ 2\left(\dfrac{(x-6)}{(10-6)}\right)^2, & \text{untuk } 6 \leq x \leq 8 \\ 1-2\left(\dfrac{(10-x)}{(10-6)}\right)^2, & \text{untuk } 8 \leq x \leq 10 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 10 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{10}}(10_\alpha^-) = \mu_{\widetilde{10}}(10_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(10_\alpha^- - 6)}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(10 - 10_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Untuk 10_α^- diperoleh, yaitu

$$\alpha = 2\left(\frac{(10_\alpha^- - 6)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 2\left(\frac{(10_\alpha^- - 6)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{(10_\alpha^- - 6)^2}{8}$$

$$8\alpha = (10_\alpha^- - 6)^2$$

$$\sqrt{8\alpha} = 10_\alpha^- - 6$$

$$10_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 6$$

Untuk 10_α^+ diperoleh, yaitu

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(10 - 10_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(10 - 10_\alpha^+)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{16 - 2(10 - 10_\alpha^+)^2}{16}$$

$$16\alpha = 16 - 2(10 - 10_\alpha^+)^2$$

$$-16 + 16\alpha = -2(10 - 10_\alpha^+)^2$$

$$8 - 8\alpha = (10 - 10_\alpha^+)^2$$

$$\sqrt{8 - 8\alpha} = 10 - 10_\alpha^+$$

$$10_\alpha^+ = 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}$$

Maka didapatkan untuk $10_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 6$ dan $10_\alpha^+ = 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}$. Jadi, potongan $-\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\widetilde{10}$ adalah $10_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right]$. Sedangkan untuk variabel *fuzzy* $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^-\,, x_{1_\alpha}^+\right]$ dan $x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^-\,, x_{2_\alpha}^+\right]$.

Kedua, bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* pada persamaan (4.18) akan dirubah menjadi matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[x_{1_\alpha}^-\,, x_{1_\alpha}^+\right] \\ \left[x_{2_\alpha}^-\,, x_{2_\alpha}^+\right] \end{bmatrix}, \text{dan}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \widetilde{18} \\ \widetilde{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sqrt{8\alpha} + 14\,, 18 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] \\ \left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

Menjadi bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left[x_{1_\alpha}^-\,, x_{1_\alpha}^+\right] \\ \left[x_{2_\alpha}^-\,, x_{2_\alpha}^+\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sqrt{8\alpha} + 14\,, 18 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] \\ \left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] \end{bmatrix}$$

Ketiga, memeriksa sistem persamaan linier memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel, yaitu koefisien matriks domain secara diagonal berdasarkan persamaan (4.9). Perhatikan matriks koefisien A pada persamaan (4.19).

$$|a_{11}| > |a_{12}| \ \rightarrow\ |6| > |-3|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| \ \rightarrow\ |3| > |1|$$

Semua persamaan terbukti memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel sehingga penyelesaian menggunakan Metode Gauss-Seidel dapat dilanjutkan.

Keempat, untuk mencari solusi dari sistem persamaan *fuzzy* (4.18), maka selanjutnya mengubah bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi bentuk sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan mengubah dari n variabel dan n persamaan atau matriks $n \times n$ menjadi $2n$ variabel dan $2n$ persamaan atau matriks $2n \times 2n$ sehingga bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ menjadi $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$. Berdasarkan matriks A pada (4.19) dengan koefisien matriks $A = a_{ij}$ untuk $i, j = 1,2, \dots, n$, maka untuk mengubah menjadi matriks S berukuran $2n \times 2n$ ditentukan berdasarkan:

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{i,j} = a_{ij}$ dan $s_{i+n,j+n} = a_{ij}$.

$$s_{1,1} = 6, s_{2,1} = 1, s_{2,2} = 3, \text{dan } s_{3,3} = 6, s_{4,3} = 1, s_{4,4} = 3$$

2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n,j} = -a_{ij}$.

$$s_{1,4} = -(-3), \text{dan } s_{3,2} = -(-3)$$

3. $s_{ij} = 0$ untuk lainnya.

Didapatkan matriks perluasan S adalah:

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks variabel *fuzzy* $\tilde{X}$ dan konstanta *fuzzy* $\tilde{b}$ dirubah menjadi matriks ukuran $2n \times 2n$, maka didapatkan variabel *fuzzy*

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [x_{1\alpha}^-, x_{1\alpha}^+] \\ [x_{2\alpha}^-, x_{2\alpha}^+] \end{bmatrix} \text{ menjadi } \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} x_{1\alpha}^- \\ x_{2\alpha}^- \\ x_{1\alpha}^+ \\ x_{2\alpha}^+ \end{bmatrix}$$

Dan konstanta *fuzzy*

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \widetilde{18} \\ \widetilde{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sqrt{8\alpha} + 14 , 18 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,] \\ [\sqrt{8\alpha} + 6 , 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,] \end{bmatrix} \text{ menjadi } \tilde{b}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{8\alpha} + 14 \\ \sqrt{8\alpha} + 6 \\ 18 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 10 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk matriks dari $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$ adalah

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}_\alpha^- \\ {x_2}_\alpha^- \\ {x_1}_\alpha^+ \\ {x_2}_\alpha^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{8\alpha} + 14 \\ \sqrt{8\alpha} + 6 \\ 18 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 10 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan perkalian pada matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$, didapatkan sistem persamaan linier non-*fuzzy* adalah

$$\begin{aligned} 6{x_1}_\alpha^- + 3{x_2}_\alpha^+ &= \sqrt{8\alpha} + 14 \\ {x_1}_\alpha^- + 3{x_2}_\alpha^- &= \sqrt{8\alpha} + 6 \\ 3{x_2}_\alpha^- + 6{x_1}_\alpha^+ &= 18 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ {x_1}_\alpha^+ + 3{x_2}_\alpha^+ &= 10 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Kelima, berdasarkan rumusan umum Metode Gauss-Seidel pada persamaan (4.12), maka didapatkan persamaan iterasi yaitu:

$$\begin{aligned} {x_1}_\alpha^- &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 14 - 3{x_2}_\alpha^+}{6} \\ {x_2}_\alpha^- &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 6 - {x_1}_\alpha^-}{3} \\ {x_1}_\alpha^+ &= \frac{18 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 3{x_2}_\alpha^-}{6} \\ {x_2}_\alpha^+ &= \frac{10 - \sqrt{8 - 8\alpha} - {x_1}_\alpha^+}{3} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Setelah persamaan iterasi didapatkan, maka substitusikan nilai awal yang telah diberikan, yaitu $\left({x_1}_\alpha^{-(0)}, {x_2}_\alpha^{-(0)}, {x_1}_\alpha^{+(0)}, {x_2}_\alpha^{+(0)}\right) = 0$ pada iterasi pertama

Iterasi pertama

$${x_1}_\alpha^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 14 - 3{x_2}_\alpha^{+(0)}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 14 - 3(0)}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 14}{6}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 6 - x_{1_\alpha}^{-(1)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 6 - \left(\frac{\sqrt{8\alpha} + 14}{6}\right)}{3}$$

$$= \frac{5\sqrt{8\alpha} + 22}{18}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(1)} = \frac{18 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 3x_{2_\alpha}^{-(1)}}{6}$$

$$= \frac{18 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 3\left(\frac{5\sqrt{8\alpha} + 22}{18}\right)}{6}$$

$$= \frac{86 - 5\sqrt{8\alpha} - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{36}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(1)} = \frac{10 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{1_\alpha}^{+(1)}}{3}$$

$$= \frac{10 - \sqrt{8 - 8\alpha} - \left(\frac{86 - 5\sqrt{8\alpha} - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{36}\right)}{3}$$

$$= \frac{274 - 30\sqrt{8 - 8\alpha} + 5\sqrt{8\alpha}}{108}$$

Jadi hasil iterasi pertama yaitu:

$$\left[\frac{\sqrt{8\alpha} + 14}{6}, \frac{5\sqrt{8\alpha} + 22}{18}, \frac{86 - 5\sqrt{8\alpha} - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{36}, \frac{274 - 30\sqrt{8 - 8\alpha} + 5\sqrt{8\alpha}}{108}\right]$$

Iterasi kedua

$$x_{1_\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 14 - 3x_{2_\alpha}^{+(1)}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 14 - 3\left(\frac{274 - 30\sqrt{8-8\alpha} + 5\sqrt{8\alpha}}{108}\right)}{6}$$

$$= \frac{31\sqrt{8\alpha} + 230 + 30\sqrt{8-8\alpha}}{216}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 6 - x_{1_\alpha}^{-(2)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 6 - \left(\frac{31\sqrt{8\alpha} + 230 + 30\sqrt{8-8\alpha}}{216}\right)}{3}$$

$$= \frac{185\sqrt{8\alpha} + 1066 - 30\sqrt{8-8\alpha}}{648}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(2)} = \frac{18 - \sqrt{8-8\alpha} - 3x_{2_\alpha}^{-(2)}}{6}$$

$$= \frac{18 - \sqrt{8-8\alpha} - 3\left(\frac{185\sqrt{8\alpha} + 1066 - 30\sqrt{8-8\alpha}}{648}\right)}{6}$$

$$= \frac{2822 - 186\sqrt{8-8\alpha} - 185\sqrt{8\alpha}}{1296}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(2)} = \frac{10 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{1_\alpha}^{+(2)}}{3}$$

$$= \frac{10 - \sqrt{8-8\alpha} - \left(\frac{2822 - 186\sqrt{8-8\alpha} - 185\sqrt{8\alpha}}{1296}\right)}{3}$$

$$= \frac{10138 - 1110\sqrt{8-8\alpha} + 185\sqrt{8\alpha}}{3888}$$

Jadi hasil iterasi kedua yaitu:

$$\left[\frac{31\sqrt{8\alpha}+230+30\sqrt{8-8\alpha}}{216},\frac{185\sqrt{8\alpha}+1066-30\sqrt{8-8\alpha}}{648},\right.$$

$$\left.\frac{2822-186\sqrt{8-8\alpha}-185\sqrt{8\alpha}}{1296},\frac{10138-1110\sqrt{8-8\alpha}+185\sqrt{8\alpha}}{3888}\right]$$

Iterasi ketiga

$$x_{1_\alpha}^{-(3)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+14-3x_{2_\alpha}^{+(2)}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+14-3\left(\frac{10138-1110\sqrt{8-8\alpha}+185\sqrt{8\alpha}}{3888}\right)}{6}$$

$$= \frac{1111\sqrt{8\alpha}+8006+1110\sqrt{8-8\alpha}}{7776}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(3)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+6-x_{1_\alpha}^{-(3)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+6-\left(\frac{1111\sqrt{8\alpha}+8006+1110\sqrt{8-8\alpha}}{7776}\right)}{3}$$

$$= \frac{6665\sqrt{8\alpha}+38650-1110\sqrt{8-8\alpha}}{23328}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(3)} = \frac{18-\sqrt{8-8\alpha}-3x_{2_\alpha}^{-(3)}}{6}$$

$$= \frac{18-\sqrt{8-8\alpha}-3\left(\frac{6665\sqrt{8\alpha}+38650-1110\sqrt{8-8\alpha}}{23328}\right)}{6}$$

$$= \frac{101318-6666\sqrt{8-8\alpha}-6665\sqrt{8\alpha}}{46656}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(3)} = \frac{10-\sqrt{8-8\alpha}-x_{1_\alpha}^{+(3)}}{3}$$

$$= \frac{10-\sqrt{8-8\alpha}-\left(\frac{101318-6666\sqrt{8-8\alpha}-6665\sqrt{8\alpha}}{46656}\right)}{3}$$

$$= \frac{365242-39990\sqrt{8-8\alpha}+6665\sqrt{8\alpha}}{139968}$$

Jadi hasil iterasi ketiga, yaitu

$$\left[\frac{1111\sqrt{8\alpha}+8006+1110\sqrt{8-8\alpha}}{7776}, \frac{6665\sqrt{8\alpha}+38650-1110\sqrt{8-8\alpha}}{23328}, \frac{101318-6666\sqrt{8-8\alpha}-6665\sqrt{8\alpha}}{46656}, \frac{365242-39990\sqrt{8-8\alpha}+6665\sqrt{8\alpha}}{139968}\right]$$

Iterasi keempat

$$x_{1_\alpha}^{-(4)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+14-3x_{2_\alpha}^{+(3)}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+14-3\left(\frac{365242-39990\sqrt{8-8\alpha}+6665\sqrt{8\alpha}}{139968}\right)}{6}$$

$$= \frac{39991\sqrt{8\alpha}+287942+39990\sqrt{8-8\alpha}}{279936}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(4)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+6-x_{1_\alpha}^{-(4)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+6-\left(\frac{39991\sqrt{8\alpha}+287942+39990\sqrt{8-8\alpha}}{279936}\right)}{3}$$

$$= \frac{239945\sqrt{8\alpha}+1391674-39990\sqrt{8-8\alpha}}{839808}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(4)} = \frac{18-\sqrt{8-8\alpha}-3x_{2_\alpha}^{-(4)}}{6}$$

$$= \frac{18-\sqrt{8-8\alpha}-3\left(\frac{239945\sqrt{8\alpha}+1391674-39990\sqrt{8-8\alpha}}{839808}\right)}{6}$$

$$= \frac{3647174 - 239946\sqrt{8-8\alpha} - 239945\sqrt{8\alpha}}{1679616}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+(4)} = \frac{10 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{1}{}_{\alpha}^{+(4)}}{3}$$

$$= \frac{10 - \sqrt{8-8\alpha} - \left(\frac{3647174 - 239946\sqrt{8-8\alpha} - 239945\sqrt{8\alpha}}{1679616}\right)}{3}$$

$$= \frac{13148968 - 1439670\sqrt{8-8\alpha} + 239945\sqrt{8\alpha}}{5038848}$$

Jadi hasil iterasi keempat, yaitu:

$$\left[\frac{39991\sqrt{8\alpha} + 287942 + 39990\sqrt{8-8\alpha}}{279936}, \frac{239945\sqrt{8\alpha} + 1391674 - 39990\sqrt{8-8\alpha}}{839808},\right.$$

$$\frac{13148968 - 1439670\sqrt{8-8\alpha} + 239945\sqrt{8\alpha}}{5038848},$$

$$\left.\frac{13148968 - 1439670\sqrt{8-8\alpha} + 239945\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right]$$

Iterasi kelima

$$x_{1}{}_{\alpha}^{-(5)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 14 - 3x_{2}{}_{\alpha}^{+(4)}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 14 - 3\left(\frac{13148968 - 1439670\sqrt{8-8\alpha} + 239945\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right)}{6}$$

$$= \frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{-(5)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 6 - x_{1}{}_{\alpha}^{-(5)}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 6 - \left(\frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}\right)}{3}$$

$$= \frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{30233088}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(5)} = \frac{18 - \sqrt{8-8\alpha} - 3x_{2_\alpha}^{-(5)}}{6}$$

$$= \frac{18 - \sqrt{8-8\alpha} - 3\left(\frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{30233088}\right)}{6}$$

$$= \frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(5)} = \frac{10 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{1_\alpha}^{+(5)}}{3}$$

$$= \frac{10 - \sqrt{8-8\alpha} - \left(\frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}\right)}{3}$$

$$= \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}$$

Jadi hasil iterasi kelima adalah

$$\left[\frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{10077696},\right.$$

$$\frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{30233088},$$

$$\frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176},$$

$$\left.\frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}\right]$$

Berdasarkan hasil iterasi pertama sampai kelima, simulasikan setiap hasil iterasi dengan mensubstitusi $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Hasil simulasi dapat dilihat pada tabel (4.3) dan (4.4)

Tabel 4.3 Simulasi α=0

Ketika $\alpha = 0$				
Iterasi Ke-n	$x_{1}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{2}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{1}{}_{\alpha}^{+}$	$x_{2}{}_{\alpha}^{+}$
1	2,300	1,200	1,917	1,751
2	1,458	1,514	1,772	1,800
3	1,433	1,522	1,767	1,801
4	1,433	1,522	1,767	1,801
5	1,433	1,522	1,767	1,801

Tabel 4.4 Simulasi α=1

Ketika $\alpha = 1$				
Iterasi Ke-n	$x_{1}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{2}{}_{\alpha}^{-}$	$x_{1}{}_{\alpha}^{+}$	$x_{2}{}_{\alpha}^{+}$
1	2,805	2,008	1,996	2,668
2	1,471	2,453	1,774	2,742
3	1,434	2,465	1,768	2,744
4	1,433	2,465	1,767	2,744
5	1,433	2,465	1,767	2,744

Berdasarkan tabel simulasi (4.3) dan (4.4), maka iterasi dari Metode Gauss-Seidel berhenti pada iterasi ke-5 karena toleransi kesalahan telah dicapai yaitu

1. Simulasi $\alpha = 0$

   Batas toleransi yang diberikan adalah $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$

$$\left|\frac{x_{1}{}_{\alpha}^{-(5)} - x_{1}{}_{\alpha}^{-(4)}}{x_{1}{}_{\alpha}^{-(5)}}\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{1{,}433 - 1{,}433}{1.433}\right| < 0{,}001$$

$$0 < 0{,}001$$

2. Simulasi $\alpha = 1$

   Batas toleransi yang diberikan adalah $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$

$$\left|\frac{x_{1\alpha}^{-(5)} - x_{1\alpha}^{-(4)}}{x_{1\alpha}^{-(5)}}\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{1{,}433 - 1{,}433}{1{,}433}\right| < 0{,}001$$

$$0 < 0{,}001$$

Jadi solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* adalah:

$$x_{1\alpha}^{-} = \frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}$$

$$x_{2\alpha}^{-} = \frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{30233088}$$

$$x_{1\alpha}^{+} = \frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176} \tag{4.22}$$

$$x_{2\alpha}^{+} = \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}$$

Sehingga setiap solusi jika didefuzzifikasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka didapatkan:

Defuzzifikasi $\alpha = 0$

$$x_{1\alpha}^{-} = \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}$$

$$= \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8(0)} + 8638025\sqrt{8(0)}}{181398528}$$

$$= 1{,}433$$

$$x_{2\alpha}^{-} = \frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{30233088}$$

$$= \frac{8638025\sqrt{8(0)} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8(0)}}{30233088}$$

$$= 1{,}522$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+} = \frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

$$= \frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8(0)} - 8638025\sqrt{8(0)}}{60466176}$$

$$= 1.767$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}$$

$$= \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8(0)} + 8638025\sqrt{8(0)}}{181398528}$$

$$= 1{,}801$$

Sehingga

$$x_{1}{}_{\alpha} = \left[x_{1}{}_{\alpha}^{-}, x_{1}{}_{\alpha}^{+}\right] = [(1{,}433),(1{,}767)]$$

$$x_{2}{}_{\alpha} = \left[x_{2}{}_{\alpha}^{-}, x_{2}{}_{\alpha}^{+}\right] = [(1{,}522),(1{,}801)]$$

Defuzzifikasi $\alpha = 1$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{-} = \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}$$

$$= \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8(1)} + 8638025\sqrt{8(1)}}{181398528}$$

$$= 1{,}433$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{-} = \frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{30233088}$$

$$= \frac{8638025\sqrt{8(1)} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8(1)}}{30233088}$$

$$= 2{,}465$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+} = \frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

$$= \frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8(1)} - 8638025\sqrt{8(1)}}{60466176}$$

$$= 1.767$$

$$x_{2\alpha}^{+} = \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}$$

$$= \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8(1)} + 8638025\sqrt{8(1)}}{181398528}$$

$$= 2{,}744$$

Sehingga

$$x_{1\alpha} = \left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] = [(1{,}433), (1{,}767)]$$

$$x_{2\alpha} = \left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] = [(2{,}465), (2{,}744)]$$

Untuk membuktikan kebenarannya, solusi yang sudah didapatkan pada (4.17) akan disubstitusikan ke dalam setiap sistem persamaan linier *fuzzy*.

Persamaan I

$$6\tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 = \widetilde{18}$$

$$6\left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] - 3\left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 14, 18 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[6x_{1\alpha}^{-}, 6x_{1\alpha}^{+}\right] - \left[3x_{2\alpha}^{-}, 3x_{2\alpha}^{+}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 14, 18 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[6x_{1\alpha}^{-} - 3x_{2\alpha}^{+}\right], \left[6x_{1\alpha}^{+} - 3x_{2\alpha}^{-}\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 14, 18 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Untuk $6x_{1\alpha}^{-}, 6x_{1\alpha}^{+}, 3x_{2\alpha}^{-}, 3x_{2\alpha}^{+}$ diperoleh sebagai berikut:

$$6x_{1\alpha}^{-} = 6\left(\frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}\right)$$

$$= \frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{1679616}$$

$$6x_{1\alpha}^{+} = 6\left(\frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}\right)$$

$$= \frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{10077696}$$

$$3x_{2\,\alpha}^{\,-} = 3\left(\frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{30233088}\right)$$

$$= \frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}$$

$$3x_{2\,\alpha}^{\,+} = 3\left(\frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}\right)$$

$$= \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

Hasil pengurangan bilangan *fuzzy* yang dinyatakan bentuk potongan$-\alpha$ adalah:

$$6x_{1\,\alpha}^{\,-} - 3x_{2\,\alpha}^{\,+} = \left(\frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{1679616}\right)$$

$$-\left(\frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}\right)$$

$$= \frac{43190131\sqrt{8\alpha} - 100200136 + 103656270\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}$$

$$6x_{1\,\alpha}^{\,+} - 3x_{2\,\alpha}^{\,-} = \left(\frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{10077696}\right)$$

$$-\left(\frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}\right)$$

$$= \frac{40598744 - 3599178\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{5038848}$$

Jadi diperoleh

$$\left[\left[6x_{1\,\alpha}^{\,-} - 3x_{2\,\alpha}^{\,+}\right], \left[6x_{1\,\alpha}^{\,+} - 3x_{2\,\alpha}^{\,-}\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 14, 18 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{43190131\sqrt{8\alpha}-100200136+103656270\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{40598744-3599178\sqrt{8-8\alpha}-8638025\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+14,18-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan didefuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka:

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\frac{43190131\sqrt{8\alpha}-100200136+103656270\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{40598744-3599178\sqrt{8-8\alpha}-8638025\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+14,18-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{43190131\sqrt{8(0)}-100200136+103656270\sqrt{8-8(0)}}{60466176}, \frac{40598744-3599178\sqrt{8-8(0)}-8638025\sqrt{8(0)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(0)}+14,18-\sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(3{,}192),(6{,}037)] = [(14),(15{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\frac{43190131\sqrt{8\alpha}-100200136+103656270\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{40598744-3599178\sqrt{8-8\alpha}-8638025\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+14,18-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{43190131\sqrt{8(1)}-100200136+103656270\sqrt{8-8(1)}}{60466176}, \frac{40598744-3599178\sqrt{8-8(1)}-8638025\sqrt{8(1)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(1)}+14,18-\sqrt{8-8(1)}\right]$$

$$[(0{,}363),(3{,}208)\ ] = [(16{,}828),(18)]$$

Persamaan II

$$\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = \widetilde{10}$$

$$\left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right] + 3\left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 6 , 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right] + \left[3x_{2_\alpha}^-, 3x_{2_\alpha}^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 6 , 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[x_{1_\alpha}^- + 3x_{2_\alpha}^-\right], \left[x_{1_\alpha}^+ + 3x_{2_\alpha}^+\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 6 , 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

Untuk $x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+, 3x_{2_\alpha}^-, 3x_{2_\alpha}^+$ diperoleh sebagai berikut

$$x_{1_\alpha}^- = \frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8 - 8\alpha}}{10077696}$$

$$x_{1_\alpha}^+ = \frac{131298008 - 8638026\sqrt{8 - 8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

$$3x_{2_\alpha}^- = 3\left(\frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8 - 8\alpha}}{30233088}\right)$$

$$= \frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8 - 8\alpha}}{10077696}$$

$$3x_{2_\alpha}^+ = 3\left(\frac{473363752 - 51828150\sqrt{8 - 8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}\right)$$

$$= \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8 - 8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

Hasil penjumlahan bilangan *fuzzy* yang dinyatakan bentuk potongan$-\alpha$ adalah:

$$x_{1_\alpha}^- + 3x_{2_\alpha}^- = \left(\frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8 - 8\alpha}}{10077696}\right)$$

$$+ \left(\frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8 - 8\alpha}}{10077696}\right)$$

$$= \sqrt{8\alpha} + 6$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+} + 3x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \left(\frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}\right)$$

$$+\left(\frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}\right)$$

$$= 10 - \sqrt{8-8\alpha}$$

Jadi diperoleh

$$\left[\left[x_{1}{}_{\alpha}^{-} + 3x_{2}{}_{\alpha}^{-}\right], \left[x_{1}{}_{\alpha}^{+} + 3x_{2}{}_{\alpha}^{+}\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan didefuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka:

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(0)} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8(0)}\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(6), (7{,}172)] = [(6), (7{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(1)} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8(1)}\right] = \left[\sqrt{8(1)} + 6\,, 10 - \sqrt{8-8(1)}\right]$$

$$[(8{,}828), (10)] = [(8{,}828), (10)]$$

Contoh 3

Tentukan solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* berikut dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel

$$\begin{aligned} 4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 &= \widetilde{15} \\ \tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 &= \tilde{7} \end{aligned} \qquad (4.23)$$

$$\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 + 8\tilde{x}_3 = \widetilde{12}$$

Dengan $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, dan $\tilde{x}_3$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $\tilde{x}_1 = \left[{x_1}_\alpha^-, {x_1}_\alpha^+\right]$, $\tilde{x}_2 = \left[{x_2}_\alpha^-, {x_2}_\alpha^+\right]$, dan $\tilde{x}_3 = \left[{x_3}_\alpha^-, {x_3}_\alpha^+\right]$. Proses iterasi dengan diberikan nilai awal, yaitu $\left({x_1}_\alpha^{-(0)}, {x_2}_\alpha^{-(0)}, {x_3}_\alpha^{-(0)}, {x_1}_\alpha^{+(0)}, {x_2}_\alpha^{+(0)}, {x_3}_\alpha^{+(0)}\right) = 0$ dan toleransi kesalahan $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$. Iterasi berhenti ketika batas toleransi telah tercapai dengan mensubstitusikan setiap nilai iterasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Masing-masing konstanta berupa bilangan *fuzzy* sigmoid

$$\widetilde{15} = \text{sigmoid}(x; 11, 13, 15)$$

$$\tilde{7} = \text{sigmoid}(x; 3, 5, 7)$$

$$\widetilde{12} = \text{sigmoid}(x; 8, 10, 12)$$

Penyelesaian:

Pertama, mengubah konstanta *fuzzy* menjadi potongan$-\alpha$ tipe pertumbuhan dengan menggunakan fungsi keanggotaan bilangan *fuzzy* sigmoid tipe pertumbuhan.

Untuk bilangan *fuzzy* $\widetilde{\mathbf{15}} = \mathbf{sigmoid}(\boldsymbol{x}; \mathbf{11}, \mathbf{13}, \mathbf{15})$, maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\widetilde{15}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq 11 \\ 2\left(\dfrac{(x-11)}{(15-11)}\right)^2, & \text{untuk } 11 \leq x \leq 13 \\ 1 - 2\left(\dfrac{(15-x)}{(15-11)}\right)^2, & \text{untuk } 13 \leq x \leq 15 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 15 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0{,}1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{15}}(15_\alpha^-) = \mu_{\widetilde{15}}(15_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(15_\alpha^- - 11)}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(15 - 15_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Untuk 15_α^- diperoleh, yaitu

$$\alpha = 2\left(\frac{(15_\alpha^- - 11)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 2\left(\frac{(15_\alpha^- - 11)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{(15_\alpha^- - 11)^2}{8}$$

$$8\alpha = (15_\alpha^- - 11)^2$$

$$\sqrt{8\alpha} = 15_\alpha^- - 11$$

$$15_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 10$$

Untuk 15_α^+ diperoleh, yaitu

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(15 - 15_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(15 - 15_\alpha^+)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{16 - 2(15 - 15_\alpha^+)^2}{16}$$

$$16\alpha = 16 - 2(15 - 15_\alpha^+)^2$$

$$-16 + 16\alpha = -2(15 - 15_\alpha^+)^2$$

$$8 - 8\alpha = (15 - 15_\alpha^+)^2$$

$$\sqrt{8 - 8\alpha} = 15 - 15_\alpha^+$$

$$15_\alpha^+ = 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}$$

Maka didapatkan untuk $15_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 11$ dan $15_\alpha^+ = 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}$. Jadi, potongan$-\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\widetilde{15}$ adalah $15_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha} + 11\,, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right]$.

Untuk bilangan *fuzzy* $\tilde{7} = \mathbf{sigmoid}(x; 3, 5, 7)$, maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\tilde{7}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq 3 \\ 2\left(\frac{(x-3)}{(7-4)}\right)^2, & \text{untuk } 3 \leq x \leq 5 \\ 1 - 2\left(\frac{(7-x)}{(7-4)}\right)^2, & \text{untuk } 5 \leq x \leq 7 \\ 1, & \text{untuk } x \geq 7 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\tilde{7}}(7_\alpha^-) = \mu_{\tilde{7}}(7_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(7_\alpha^- - 3)}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{(7 - 7_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Untuk 7_α^- diperoleh, yaitu

$$\alpha = 2\left(\frac{(7_\alpha^- - 3)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 2\left(\frac{(7_\alpha^- - 3)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{(7_\alpha^- - 3)^2}{8}$$

$$8\alpha = (7_\alpha^- - 3)^2$$

$$\sqrt{8\alpha} = 7_\alpha^- - 3$$

$$7_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 3$$

Untuk 7_α^+ diperoleh, yaitu

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(7 - 7_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(7 - 7_\alpha^+)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{16 - 2(7 - 7_\alpha^+)^2}{16}$$

$$16\alpha = 16 - 2(7 - 7_\alpha^+)^2$$

$$-16 + 16\alpha = -2(7 - 7_\alpha^+)^2$$

$$8-8\alpha=(7-7_\alpha^+)^2$$

$$\sqrt{8-8\alpha}=7-7_\alpha^+$$

$$7_\alpha^+=7-\sqrt{8-8\alpha}$$

Maka didapatkan untuk $7_\alpha^- = \sqrt{8\alpha}+3$ dan $7_\alpha^+ = 7-\sqrt{8-8\alpha}$. Jadi, potongan$-\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\tilde{7}$ adalah $7_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha}+3\,, 7-\sqrt{8-8\alpha}\,\right]$.

Untuk bilangan *fuzzy* $\widetilde{\mathbf{12}} = \mathbf{sigmoid}(\boldsymbol{x};\mathbf{8},\mathbf{10},\mathbf{12})$, maka fungsi keanggotaannya adalah:

$$\mu_{\widetilde{12}} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \le 8 \\ 2\left(\dfrac{(x-8)}{(12-8)}\right)^2, & \text{untuk } 8 \le x \le 10 \\ 1-2\left(\dfrac{(12-x)}{(12-8)}\right)^2, & \text{untuk } 10 \le x \le 12 \\ 1, & \text{untuk } x \ge 12 \end{cases}$$

Untuk suatu $\alpha \in [0,1]$ dan $\alpha = \mu_{\widetilde{12}}(12_\alpha^-) = \mu_{\tilde{7}}(12_\alpha^+)$ yaitu:

$$\alpha = 2\left(\frac{(12_\alpha^- - 8)}{4}\right)^2 = 1-2\left(\frac{(12-12_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

Untuk 12_α^- diperoleh, yaitu

$$\alpha = 2\left(\frac{(12_\alpha^- - 8)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 2\left(\frac{(12_\alpha^- - 8)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{(12_\alpha^- - 8)^2}{8}$$

$$8\alpha = (12_\alpha^- - 8)^2$$

$$\sqrt{8\alpha} = 12_\alpha^- - 8$$

$$12_\alpha^- = \sqrt{8\alpha}+8$$

Untuk 12_α^+ diperoleh, yaitu

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(12 - 12_\alpha^+)}{4}\right)^2$$

$$\alpha = 1 - 2\left(\frac{(12 - 12_\alpha^+)^2}{16}\right)$$

$$\alpha = \frac{16 - 2(12 - 12_\alpha^+)^2}{16}$$

$$16\alpha = 16 - 2(12 - 12_\alpha^+)^2$$

$$-16 + 16\alpha = -2(12 - 12_\alpha^+)^2$$

$$8 - 8\alpha = (12 - 12_\alpha^+)^2$$

$$\sqrt{8 - 8\alpha} = 12 - 12_\alpha^+$$

$$12_\alpha^+ = 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}$$

Maka didapatkan untuk $12_\alpha^- = \sqrt{8\alpha} + 8$ dan $12_\alpha^+ = 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}$. Jadi, potongan$-\alpha$ dari bilangan *fuzzy* $\widetilde{12}$ adalah $12_\alpha = \left[\sqrt{8\alpha} + 8\,, 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right]$. Sedangkan untuk variabel *fuzzy* $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, dan $\tilde{x}_3$ dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$, yaitu $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^-\,, x_{1_\alpha}^+\right], x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^-\,, x_{2_\alpha}^+\right]$, dan $x_{3_\alpha} = \left[x_{3_\alpha}^-\,, x_{3_\alpha}^+\right]$.

Kedua, bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* pada persamaan (4.23) akan dirubah menjadi matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$, yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[x_{1_\alpha}^-\,, x_{1_\alpha}^+\right] \\ \left[x_{2_\alpha}^-\,, x_{2_\alpha}^+\right] \\ \left[x_{3_\alpha}^-\,, x_{3_\alpha}^+\right] \end{bmatrix}, \text{dan}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \widetilde{15} \\ \tilde{7} \\ \widetilde{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\sqrt{8\alpha} + 11\,, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] \\ \left[\sqrt{8\alpha} + 3\,, 7 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] \\ \left[\sqrt{8\alpha} + 8\,, 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

Menjadi bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}] \\ [x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}] \\ [x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}] \\ [\sqrt{8\alpha} + 3, 7 - \sqrt{8 - 8\alpha}] \\ [\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}] \end{bmatrix}$$

Ketiga, memeriksa sistem persamaan linier memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel, yaitu koefisien matriks domain secara diagonal berdasarkan persamaan (4.9). Perhatikan matriks koefisien A pada persamaan (4.24).

$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| \rightarrow |4| > |2| + |1|$$

$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| \rightarrow |5| > |1| + |-1|$$

$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \rightarrow |8| > |5| + |1|$$

Semua persamaan terbukti memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel sehingga penyelesaian menggunakan Metode Gauss-Seidel dapat dilanjutkan.

Keempat, untuk mencari solusi dari sistem persamaan *fuzzy* (4.23), maka selanjutnya mengubah bentuk sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi bentuk sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan mengubah dari n variabel dan n persamaan atau matriks $n \times n$ menjadi $2n$ variabel dan $2n$ persamaan atau matriks $2n \times 2n$ sehingga bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ menjadi $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$. Berdasarkan matriks A pada (4.24) dengan koefisien matriks $A = a_{ij}$ untuk $i, j = 1,2, \ldots, n$, maka untuk mengubah menjadi matriks S berukuran $2n \times 2n$ ditentukan berdasarkan:

1. Jika $a_{ij} \geq 0$, maka $s_{i,j} = a_{ij}$ dan $s_{i+n,j+n} = a_{ij}$.

   $s_{1,1} = 4, s_{1,2} = 2, s_{1,3} = 1, s_{2,1} = 1, s_{2,2} = 5, s_{3,1} = 1, s_{3,2} = 5, s_{3,3} = 8$ dan

   $s_{4,4} = 4, s_{4,5} = 2, s_{4,6} = 1, s_{5,4} = 1, s_{5,5} = 5, s_{6,4} = 1, s_{6,5} = 5, s_{6,6} = 8$

2. Jika $a_{ij} < 0$, maka $s_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $s_{i+n,j} = -a_{ij}$.

   $s_{2,6} = -(-1)$ dan $s_{5,3} = -(-1)$

3. $s_{ij} = 0$ untuk lainnya.

Didapatkan matriks perluasan S adalah:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks variabel *fuzzy* $\tilde{X}$ dan konstanta *fuzzy* $\tilde{b}$ dirubah menjadi matriks ukuran $2n \times 2n$, maka didapatkan variabel *fuzzy*

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}] \\ [x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}] \\ [x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}] \end{bmatrix} \text{ menjadi } \tilde{X}^* = \begin{bmatrix} x_{1\alpha}^{-} \\ x_{2\alpha}^{-} \\ x_{3\alpha}^{-} \\ x_{1\alpha}^{+} \\ x_{2\alpha}^{+} \\ x_{3\alpha}^{+} \end{bmatrix}$$

Dan konstanta *fuzzy*

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} \widetilde{15} \\ \tilde{7} \\ \widetilde{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}] \\ [\sqrt{8\alpha} + 3, 7 - \sqrt{8 - 8\alpha}] \\ [\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}] \end{bmatrix} \text{ menjadi } \tilde{b}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{8\alpha} + 11 \\ \sqrt{8\alpha} + 3 \\ \sqrt{8\alpha} + 8 \\ 15 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 7 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 12 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{bmatrix}$$

Sehingga bentuk matriks dari $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$ adalah

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1\alpha}^{-} \\ x_{2\alpha}^{-} \\ x_{3\alpha}^{-} \\ x_{1\alpha}^{+} \\ x_{2\alpha}^{+} \\ x_{3\alpha}^{+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{8\alpha} + 11 \\ \sqrt{8\alpha} + 3 \\ \sqrt{8\alpha} + 8 \\ 15 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 7 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\ 12 - \sqrt{8 - 8\alpha} \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan perkalian pada matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$, didapatkan sistem persamaan linier non-*fuzzy* adalah

$$
\begin{aligned}
4x_{1\alpha}^{-} + 2x_{2\alpha}^{-} + x_{3\alpha}^{-} &= \sqrt{8\alpha} + 11 \\
x_{1\alpha}^{-} + 5x_{2\alpha}^{-} + x_{3\alpha}^{+} &= \sqrt{8\alpha} + 3 \\
x_{1\alpha}^{-} + 5x_{2\alpha}^{-} + 8x_{3\alpha}^{-} &= \sqrt{8\alpha} + 8 \\
4x_{1\alpha}^{+} + 2x_{2\alpha}^{+} + x_{3\alpha}^{+} &= 15 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\
x_{3\alpha}^{-} + x_{1\alpha}^{+} + 5x_{2\alpha}^{+} &= 7 - \sqrt{8 - 8\alpha} \\
x_{1\alpha}^{+} + 5x_{2\alpha}^{+} + 8x_{3\alpha}^{+} &= 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

Kelima, berdasarkan rumusan umum Metode Gauss-Seidel pada persamaan (4.12), maka didapatkan persamaan iterasi yaitu:

$$
\begin{aligned}
x_{1\alpha}^{-} &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2x_{2\alpha}^{-} - x_{3\alpha}^{-}}{4} \\
x_{2\alpha}^{-} &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - x_{1\alpha}^{-} - x_{3\alpha}^{+}}{5} \\
x_{3\alpha}^{-} &= \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - x_{1\alpha}^{-} - 5x_{2\alpha}^{-}}{8} \\
x_{1\alpha}^{+} &= \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2x_{2\alpha}^{+} - x_{3\alpha}^{+}}{4} \\
x_{2\alpha}^{+} &= \frac{7 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{3\alpha}^{-} - x_{1\alpha}^{+}}{5} \\
x_{3\alpha}^{+} &= \frac{12 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{1\alpha}^{+} - 5x_{2\alpha}^{+}}{8}
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Setelah persamaan iterasi didapatkan, maka substitusikan nilai awal yang telah diberikan, yaitu $\left(x_{1\alpha}^{-(0)}, x_{2\alpha}^{-(0)}, x_{3\alpha}^{-(0)}, x_{1\alpha}^{+(0)}, x_{2\alpha}^{+(0)},\ x_{3\alpha}^{+(0)}\right) = 0$ pada iterasi pertama

Iterasi pertama

$$x_{1\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2x_{2\alpha}^{-(0)} - x_{3\alpha}^{-(0)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2(0) - (0)}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 11}{4}$$

$$x_{2\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - x_{1\alpha}^{-(1)} - x_{3\alpha}^{+(0)}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - \left(\frac{\sqrt{8\alpha} + 11}{4}\right) - (0)}{5}$$

$$= \frac{3\sqrt{8\alpha} + 1}{20}$$

$$x_{3\alpha}^{-(1)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - x_{1\alpha}^{-(1)} - 5x_{2\alpha}^{-(1)}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - \left(\frac{\sqrt{8\alpha} + 11}{4}\right) - 5\left(\frac{3\sqrt{8\alpha} + 1}{20}\right)}{8}$$

$$= \frac{5}{8}$$

$$x_{1\alpha}^{+(1)} = \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2x_{2\alpha}^{+(0)} - x_{3\alpha}^{+(0)}}{4}$$

$$= \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2(0) - (0)}{4}$$

$$= \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha}}{4}$$

$$x_{2\alpha}^{+(1)} = \frac{7 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{3\alpha}^{-(1)} - x_{1\alpha}^{+(1)}}{5}$$

$$= \frac{7-\sqrt{8-8\alpha}-\left(\frac{5}{8}\right)-\left(\frac{15-\sqrt{8-8\alpha}}{4}\right)}{5}$$

$$= \frac{21-6\sqrt{8-8\alpha}}{40}$$

$$x_{3}{}_{\alpha}^{+(1)} = \frac{12-\sqrt{8-8\alpha}-x_{1}{}_{\alpha}^{+(1)}-5x_{2}{}_{\alpha}^{+(1)}}{8}$$

$$= \frac{12-\sqrt{8-8\alpha}-\left(\frac{15-\sqrt{8-8\alpha}}{4}\right)-5\left(\frac{21-6\sqrt{8-8\alpha}}{40}\right)}{8}$$

$$= \frac{45}{64}$$

Jadi hasil iterasi pertama yaitu:

$$\left[\frac{\sqrt{8\alpha}+11}{4},\frac{3\sqrt{8\alpha}+1}{20},\frac{5}{8},\frac{15-\sqrt{8-8\alpha}}{4},\frac{21-6\sqrt{8-8\alpha}}{40},\frac{45}{64}\right]$$

Iterasi kedua

$$x_{1}{}_{\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+11-2x_{2}{}_{\alpha}^{-(1)}-x_{3}{}_{\alpha}^{-(1)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+11-2\left(\frac{3\sqrt{8\alpha}+1}{20}\right)-\left(\frac{5}{8}\right)}{4}$$

$$= \frac{28\sqrt{8\alpha}+411}{160}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+3-x_{1}{}_{\alpha}^{-(2)}-x_{3}{}_{\alpha}^{+(1)}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+3-\left(\frac{28\sqrt{8\alpha}+411}{160}\right)-\left(\frac{45}{64}\right)}{5}$$

$$= \frac{264\sqrt{8\alpha}-87}{1600}$$

$$x_{3\alpha}^{-(2)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - x_{1\alpha}^{-(2)} - 5x_{2\alpha}^{-(2)}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - \left(\frac{28\sqrt{8\alpha} + 411}{160}\right) - 5\left(\frac{264\sqrt{8\alpha} - 87}{1600}\right)}{8}$$

$$= \frac{365}{512}$$

$$x_{1\alpha}^{+(2)} = \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2x_{2\alpha}^{+(1)} - x_{3\alpha}^{+(1)}}{4}$$

$$= \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2\left(\frac{21 - 6\sqrt{8 - 8\alpha}}{40}\right) - \left(\frac{45}{64}\right)}{4}$$

$$= \frac{4239 - 224\sqrt{8 - 8\alpha}}{1280}$$

$$x_{2\alpha}^{+(2)} = \frac{7 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{3\alpha}^{-(2)} - x_{1\alpha}^{+(2)}}{5}$$

$$= \frac{7 - \sqrt{8 - 8\alpha} - \left(\frac{365}{512}\right) - \left(\frac{4239 - 224\sqrt{8 - 8\alpha}}{1280}\right)}{5}$$

$$= \frac{7617 - 2112\sqrt{8 - 8\alpha}}{12800}$$

$$x_{3\alpha}^{+(2)} = \frac{12 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{1\alpha}^{+(2)} - 5x_{2\alpha}^{+(2)}}{8}$$

$$= \frac{12 - \sqrt{8 - 8\alpha} - \left(\frac{4239 - 224\sqrt{8 - 8\alpha}}{1280}\right) - 5\left(\frac{7617 - 2112\sqrt{8 - 8\alpha}}{12800}\right)}{8}$$

$$= \frac{2925}{4096}$$

Jadi hasil iterasi kedua yaitu:

$$\left[\frac{28\sqrt{8\alpha} + 411}{160}, \frac{264\sqrt{8\alpha} - 87}{1600}, \frac{365}{512}, \frac{4239 - 224\sqrt{8 - 8\alpha}}{1280}, \frac{7617 - 2112\sqrt{8 - 8\alpha}}{12800}, \frac{2925}{4096}\right]$$

Iterasi ketiga

$$x_{1_\alpha}^{-(3)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2x_{2_\alpha}^{-(2)} - x_{3_\alpha}^{-(2)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2\left(\frac{264\sqrt{8\alpha} - 87}{1600}\right) - \left(\frac{365}{512}\right)}{4}$$

$$= \frac{8576\sqrt{8\alpha} + 133067}{51200}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(3)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - x_{1_\alpha}^{-(3)} - x_{3_\alpha}^{+(2)}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - \left(\frac{8576\sqrt{8\alpha} + 133067}{51200}\right) - \left(\frac{2925}{4096}\right)}{5}$$

$$= \frac{85248\sqrt{8\alpha} - 32059}{512000}$$

$$x_{3_\alpha}^{-(3)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - x_{1_\alpha}^{-(3)} - 5x_{2_\alpha}^{-(3)}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - \left(\frac{8576\sqrt{8\alpha} + 133067}{51200}\right) - 5\left(\frac{85248\sqrt{8\alpha} - 32059}{512000}\right)}{8}$$

$$= \frac{23405}{32768}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(3)} = \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2x_{2_\alpha}^{+(2)} - x_{3_\alpha}^{+(2)}}{4}$$

$$= \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2\left(\frac{7617 - 2112\sqrt{8 - 8\alpha}}{12800}\right) - \left(\frac{2925}{4096}\right)}{4}$$

$$= \frac{1341003 - 68608\sqrt{8 - 8\alpha}}{409600}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(3)} = \frac{7 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{3_\alpha}^{-(3)} - x_{1_\alpha}^{+(3)}}{5}$$

$$= \frac{7 - \sqrt{8-8\alpha} - \left(\frac{23405}{32768}\right) - \left(\frac{1341003 - 68608\sqrt{8-8\alpha}}{409600}\right)}{5}$$

$$= \frac{2467269 - 681984\sqrt{8-8\alpha}}{4096000}$$

$$x_{3_\alpha}^{+(3)} = \frac{12 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{1_\alpha}^{+(3)} - 5x_{2_\alpha}^{+(3)}}{8}$$

$$= \frac{12 - \sqrt{8-8\alpha} - \left(\frac{1341003 - 68608\sqrt{8-8\alpha}}{409600}\right) - 5\left(\frac{2467269 - 681984\sqrt{8-8\alpha}}{4096000}\right)}{8}$$

$$= \frac{187245}{262144}$$

Jadi hasil iterasi ketiga, yaitu

$$\left[\frac{8576\sqrt{8\alpha} + 133067}{51200}, \frac{85248\sqrt{8\alpha} - 32059}{512000}, \frac{23405}{32768}, \frac{1341003 - 68608\sqrt{8-8\alpha}}{409600}, \frac{2467269 - 681984\sqrt{8-8\alpha}}{4096000}, \frac{187245}{262144}\right]$$

Iterasi keempat

$$x_{1_\alpha}^{-(4)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2x_{2_\alpha}^{-(3)} - x_{3_\alpha}^{-(3)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 11 - 2\left(\frac{85248\sqrt{8\alpha} - 32059}{512000}\right) - \left(\frac{23405}{32768}\right)}{4}$$

$$= \frac{2732032\sqrt{8\alpha} + 42643319}{16384000}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(4)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - x_{1_\alpha}^{-(4)} - x_{3_\alpha}^{+(3)}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 3 - \left(\frac{2732032\sqrt{8\alpha} + 42643319}{16384000}\right) - \left(\frac{187245}{262144}\right)}{5}$$

$$= \frac{27303936\sqrt{8\alpha} - 10388263}{163840000}$$

$$x_{3_\alpha}^{-(4)} = \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - x_{1_\alpha}^{-(4)} - 5x_{2_\alpha}^{-(4)}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - \left(\frac{2732032\sqrt{8\alpha} + 42643319}{16384000}\right) - 5\left(\frac{27303936\sqrt{8\alpha} - 10388263}{163840000}\right)}{8}$$

$$= \frac{1497965}{2097152}$$

$$x_{1_\alpha}^{+(4)} = \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2x_{2_\alpha}^{+(3)} - x_{3_\alpha}^{+(3)}}{4}$$

$$= \frac{15 - \sqrt{8 - 8\alpha} - 2\left(\frac{2467269 - 681984\sqrt{8 - 8\alpha}}{4096000}\right) - \left(\frac{187245}{262144}\right)}{4}$$

$$= \frac{428638071}{131072000} - \frac{667\sqrt{8 - 8\alpha}}{4000}$$

$$x_{2_\alpha}^{+(4)} = \frac{7 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{3_\alpha}^{-(4)} - x_{1_\alpha}^{+(4)}}{5}$$

$$= \frac{7 - \sqrt{8 - 8\alpha} - \left(\frac{1497965}{2097152}\right) - \left(\frac{428638071}{131072000} - \frac{667\sqrt{8 - 8\alpha}}{4000}\right)}{5}$$

$$= \frac{790486233}{1310720000} - \frac{3333\sqrt{8 - 8\alpha}}{20000}$$

$$x_{3_\alpha}^{+(4)} = \frac{12 - \sqrt{8 - 8\alpha} - x_{1_\alpha}^{+(4)} - 5x_{2_\alpha}^{+(4)}}{8}$$

$$= \frac{12 - \sqrt{8-8\alpha} - \left(\frac{428638071}{131072000} - \frac{667\sqrt{8-8\alpha}}{4000}\right) - 5\left(\frac{790486233}{1310720000} - \frac{3333\sqrt{8-8\alpha}}{20000}\right)}{8}$$

$$= \frac{11983725}{16777216}$$

Jadi hasil iterasi keempat, yaitu:

$$\left[\frac{2732032\sqrt{8\alpha}+42643319}{16384000}, \frac{27303936\sqrt{8\alpha}-10388263}{163840000}, \frac{1497965}{2097152},\right.$$

$$\left.\frac{428638071}{131072000} - \frac{667\sqrt{8-8\alpha}}{4000}, \frac{790486233}{1310720000} - \frac{3333\sqrt{8-8\alpha}}{20000}, \frac{11983725}{16777216}\right]$$

Iterasi kelima

$${x_1}_\alpha^{-(5)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+11-2{x_2}_\alpha^{-(4)} - {x_3}_\alpha^{-(4)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+11-2\left(\frac{27303936\sqrt{8\alpha}-10388263}{163840000}\right) - \left(\frac{1497965}{2097152}\right)}{4}$$

$$= \frac{6667\sqrt{8\alpha}}{40000} + \frac{13647904083}{5242880000}$$

$${x_2}_\alpha^{-(5)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+3-{x_1}_\alpha^{-(5)} - {x_3}_\alpha^{+(4)}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+3-\left(\frac{6667\sqrt{8\alpha}}{40000} + \frac{13647904083}{5242880000}\right) - \left(\frac{11983725}{16777216}\right)}{5}$$

$$= \frac{33333\sqrt{8\alpha}}{200000} - \frac{3328356291}{52428800000}$$

$${x_3}_\alpha^{-(5)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+8-{x_1}_\alpha^{-(5)} - 5{x_2}_\alpha^{-(5)}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha} + 8 - \left(\frac{6667\sqrt{8\alpha}}{40000} + \frac{13647904083}{5242880000}\right) - 5\left(\frac{33333\sqrt{8\alpha}}{200000} - \frac{3328356291}{52428800000}\right)}{8}$$

$$= \frac{95869805}{134217728}$$

$$x_{1\alpha}^{+(5)} = \frac{15 - \sqrt{8-8\alpha} - 2x_{2\alpha}^{+(4)} - x_{3\alpha}^{+(4)}}{4}$$

$$= \frac{15 - \sqrt{8-8\alpha} - 2\left(\frac{790486233}{1310720000} - \frac{3333\sqrt{8-8\alpha}}{20000}\right) - \left(\frac{11983725}{16777216}\right)}{4}$$

$$= \frac{137148792147}{41943040000} - \frac{6667\sqrt{8-8\alpha}}{40000}$$

$$x_{2\alpha}^{+(5)} = \frac{7 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{3\alpha}^{-(5)} - x_{1\alpha}^{+(5)}}{5}$$

$$= \frac{7 - \sqrt{8-8\alpha} - \left(\frac{95869805}{134217728}\right) - \left(\frac{137148792147}{41943040000} - \frac{6667\sqrt{8-8\alpha}}{40000}\right)}{5}$$

$$= \frac{252986347581}{419430400000} - \frac{33333\sqrt{8-8\alpha}}{200000}$$

$$x_{3\alpha}^{+(5)} = \frac{12 - \sqrt{8-8\alpha} - x_{1\alpha}^{+(5)} - 5x_{2\alpha}^{+(5)}}{8}$$

$$= \frac{12 - \sqrt{8-8\alpha} - \left(\frac{137148792147}{41943040000} - \frac{6667\sqrt{8-8\alpha}}{40000}\right) - 5\left(\frac{252986347581}{419430400000} - \frac{33333\sqrt{8-8\alpha}}{200000}\right)}{8}$$

$$= \frac{766958445}{1073741824}$$

Jadi hasil iterasi kelima adalah

$$\left[\frac{6667\sqrt{8\alpha}}{40000}+\frac{13647904083}{5242880000},\frac{33333\sqrt{8\alpha}}{200000}-\frac{3328356291}{52428800000},\frac{95869805}{134217728}\right.$$

$$\left.\frac{137148792147}{41943040000}-\frac{6667\sqrt{8-8\alpha}}{40000},\frac{252986347581}{419430400000}-\frac{33333\sqrt{8-8\alpha}}{200000},\frac{766958445}{1073741824}\right]$$

Iterasi keenam

$$x_{1_\alpha}^{-(6)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+11-2x_{2_\alpha}^{-(5)}-x_{3_\alpha}^{-(5)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+11-2\left(\frac{33333\sqrt{8\alpha}}{200000}-\frac{3328356291}{52428800000}\right)-\left(\frac{95869805}{134217728}\right)}{4}$$

$$= \frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000}+\frac{4367394960031}{1677721600000}$$

$$x_{2_\alpha}^{-(6)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+3-x_{1_\alpha}^{-(6)}-x_{3_\alpha}^{+(5)}}{5}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+3-\left(\frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000}+\frac{4367394960031}{1677721600000}\right)-\left(\frac{766958445}{1073741824}\right)}{5}$$

$$= \frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000}-\frac{1065205460687}{16777216000000}$$

$$x_{3_\alpha}^{-(6)} = \frac{\sqrt{8\alpha}+8-x_{1_\alpha}^{-(6)}-5x_{2_\alpha}^{-(6)}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{8\alpha}+8-\left(\frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000}+\frac{4367394960031}{1677721600000}\right)-5\left(\frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000}-\frac{1065205460687}{16777216000000}\right)}{8}$$

$$= \frac{6135667565}{8589934592}$$

$$x_{1\alpha}^{+(6)} = \frac{15-\sqrt{8-8\alpha}-2x_{2\alpha}^{+(5)}-x_{3\alpha}^{+(5)}}{4}$$

$$= \frac{15-\sqrt{8-8\alpha}-2\left(\frac{252986347581}{419430400000}-\frac{33333\sqrt{8-8\alpha}}{200000}\right)-\left(\frac{766958445}{1073741824}\right)}{4}$$

$$= \frac{43887121298079}{13421772800000}-\frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000}$$

$$x_{2\alpha}^{+(6)} = \frac{7-\sqrt{8-8\alpha}-x_{3\alpha}^{-(6)}-x_{1\alpha}^{+(6)}}{5}$$

$$= \frac{7-\sqrt{8-8\alpha}-\left(\frac{6135667565}{8589934592}\right)-\left(\frac{43887121298079}{13421772800000}-\frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000}\right)}{5}$$

$$= \frac{80956615463217}{134217728000000}-\frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000}$$

$$x_{3\alpha}^{+(6)} = \frac{12-\sqrt{8-8\alpha}-x_{1\alpha}^{+(6)}-5x_{2\alpha}^{+(6)}}{8}$$

$$= \frac{12-\sqrt{8-8\alpha}-\left(\frac{43887121298079}{13421772800000}-\frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000}\right)-5\left(\frac{80956615463217}{134217728000000}-\frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000}\right)}{8}$$

$$= \frac{49085340525}{68719476736}$$

Jadi hasil iterasi keenam adalah

$$\left[\frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000}+\frac{4367394960031}{1677721600000},\frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000}-\frac{1065205460687}{16777216000000},\right.$$

$$\frac{6135667565}{8589934592},\frac{43887121298079}{13421772800000}-\frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000},$$

$$\frac{80956615463217}{134217728000000}-\frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000},\frac{49085340525}{68719476736}\Bigg]$$

Berdasarkan hasil iterasi pertama sampai keenam, simulasikan setiap hasil iterasi dengan mensubstitusi $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$. Hasil simulasi dapat dilihat pada tabel (4.5) dan tabel (4.6)

Tabel 4.5 Simulasi α=0

Ketika $\alpha = 0$						
Iterasi Ke-n	$x_{1\alpha}^{-}$	$x_{2\alpha}^{-}$	$x_{3\alpha}^{-}$	$x_{1\alpha}^{+}$	$x_{2\alpha}^{+}$	$x_{3\alpha}^{+}$
1	2,750	0,050	0,625	3,043	0,101	0,703
2	2,569	-0,054	0,713	2,817	0,128	0,714
3	2,599	-0.063	0.714	2,800	0,131	0,714
4	2,603	-0,063	0,714	2,798	0,132	0,714
5	2,603	-0,063	0,714	2,798	0,132	0,714
6	2,603	-0,063	0,714	2,798	0,132	0,714

Tabel 4.6 Simulasi α=1

Ketika $\alpha = 1$						
Iterasi Ke-n	$x_{1\alpha}^{-}$	$x_{2\alpha}^{-}$	$x_{3\alpha}^{-}$	$x_{1\alpha}^{+}$	$x_{2\alpha}^{+}$	$x_{3\alpha}^{+}$
1	3,457	0,474	0,625	3,750	0,525	0,703
2	3,064	0,412	0,713	3,312	0,595	0,714
3	3,073	0,408	0,714	3,274	0,602	0,714
4	3,074	0,408	0,714	3,270	0,603	0,714
5	3,075	0,408	0,714	3,270	0,603	0,714
6	3,075	0,408	0,714	3,270	0,603	0,714

Berdasarkan tabel simulasi (4.5) dan (4.6), maka iterasi dari Metode Gauss-Seidel berhenti pada iterasi ke-5 karena toleransi kesalahan telah dicapai yaitu

1. Simulasi $\alpha = 0$

   Batas toleransi yang diberikan adalah $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$

$$\left|\frac{x_{1}{}_{\alpha}^{-(6)} - x_{1}{}_{\alpha}^{-(5)}}{x_{1}{}_{\alpha}^{-(6)}}\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{2{,}603 - 2{,}603}{2{,}603}\right| < 0{,}001$$

$$0 < 0{,}001$$

2. Simulasi $\alpha = 1$

   Batas toleransi yang diberikan adalah $\varepsilon = 10^{-3} = 0{,}001$

$$\left|\frac{x_{1}{}_{\alpha}^{-(6)} - x_{1}{}_{\alpha}^{-(5)}}{x_{2}{}_{\alpha}^{-(6)}}\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{3{,}075 - 3{,}075}{3{,}075}\right| < 0{,}001$$

$$0 < 0{,}001$$

Jadi solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* adalah:

$$x_{1}{}_{\alpha}^{-} = \frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{-} = \frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000} - \frac{1065205460687}{16777216000000}$$

$$x_{3}{}_{\alpha}^{-} = \frac{6135667565}{8589934592}$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+} = \frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000} \tag{4.27}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \frac{80956615463217}{134217728000000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \frac{49085340525}{68719476736}$$

Sehingga setiap solusi jika didefuzzifikasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka didapatkan:

Defuzzifikasi $\alpha = 0$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{-} = \frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000}$$

$$= \frac{66667\sqrt{8(0)}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000}$$

$$= 2{,}750$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{-} = \frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000} - \frac{1065205460687}{16777216000000}$$

$$= \frac{333333\sqrt{8(0)}}{2000000} - \frac{1065205460687}{16777216000000}$$

$$= -0{,}063$$

$$x_{3}{}_{\alpha}^{-} = \frac{6135667565}{8589934592}$$

$$= 0{,}714$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+} = \frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000}$$

$$= \frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8(0)}}{400000}$$

$$= 2{,}798$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \frac{80956615463217}{134217728000000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000}$$

$$= \frac{80956615463217}{134217728000000} - \frac{333333\sqrt{8-8(0)}}{2000000}$$

$$= 0{,}132$$

$$x_{3}{}_{\alpha}^{+} = \frac{49085340525}{68719476736}$$

$$= 0{,}714$$

Sehingga

$$x_{1}{}_{\alpha} = \left[x_{1}{}_{\alpha}^{-}, x_{1}{}_{\alpha}^{+}\right] = [(2{,}603), (2{,}798)]$$

$$x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^- , x_{2_\alpha}^+\right] = [(-0,063), (0,132)]$$

$$x_{3_\alpha} = \left[x_{3_\alpha}^- , x_{3_\alpha}^+\right] = [(0,714), (0,714)]$$

Defuzzifikasi $\alpha = 1$

$$x_{1_\alpha}^- = \frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000}$$

$$= \frac{66667\sqrt{8(1)}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000}$$

$$= 3,075$$

$$x_{2_\alpha}^- = \frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000} - \frac{1065205460687}{16777216000000}$$

$$= \frac{333333\sqrt{8(1)}}{2000000} - \frac{1065205460687}{16777216000000}$$

$$= 0,408$$

$$x_{3_\alpha}^- = \frac{6135667565}{8589934592}$$

$$= 0,714$$

$$x_{1_\alpha}^+ = \frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000}$$

$$= \frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8(1)}}{400000}$$

$$= 3,270$$

$$x_{2_\alpha}^+ = \frac{80956615463217}{134217728000000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000}$$

$$= \frac{80956615463217}{134217728000000} - \frac{333333\sqrt{8-8(1)}}{2000000}$$

$$= 0,603$$

$$x_{3_\alpha}^+ = \frac{49085340525}{68719476736}$$

$$= \quad 0{,}714$$

Sehingga

$$x_{1\alpha} = \left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] = [(3{,}075),(3{,}270)]$$

$$x_{2\alpha} = \left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] = [(0{,}408),(0{,}603)]$$

$$x_{3\alpha} = \left[x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}\right] = [(0{,}714),(0{,}714)]$$

Untuk membuktikan kebenarannya, solusi yang sudah didapatkan pada (4.27) akan disubstitusikan ke dalam setiap sistem persamaan linier *fuzzy*.

Persamaan I

$$4\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = \widetilde{15}$$

$$4\left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] + 2\left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] + \left[x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[4x_{1\alpha}^{-}, 4x_{1\alpha}^{+}\right] + \left[2x_{2\alpha}^{-}, 2x_{2\alpha}^{+}\right] + \left[x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[4x_{1\alpha}^{-} + 2x_{2\alpha}^{-} + x_{3\alpha}^{-}\right], \left[4x_{1\alpha}^{+} + 2x_{2\alpha}^{+} + x_{3\alpha}^{+}\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

Untuk $4x_{1\alpha}^{-}, 4x_{1\alpha}^{+}, 2x_{2\alpha}^{-}, 2x_{2\alpha}^{+}, x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}$ diperoleh sebagai berikut:

$$4x_{1\alpha}^{-} = 4\left(\frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000}\right)$$

$$= \frac{66667\sqrt{8\alpha}}{100000} + \frac{4367394960031}{419430400000}$$

$$4x_{1\alpha}^{+} = 4\left(\frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8 - 8\alpha}}{400000}\right)$$

$$= \frac{43887121298079}{3355443200000} - \frac{66667\sqrt{8 - 8\alpha}}{100000}$$

$$2{x_2}_\alpha^- = 2\left(\frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000} - \frac{1065205460687}{16777216000000}\right)$$

$$= \frac{333333\sqrt{8\alpha}}{1000000} - \frac{1065205460687}{8388608000000}$$

$$2{x_2}_\alpha^+ = 2\left(\frac{80956615463217}{134217728000000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000}\right)$$

$$= \frac{80956615463217}{67108864000000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{1000000}$$

$${x_3}_\alpha^- = \frac{6135667565}{8589934592}$$

$${x_3}_\alpha^+ = \frac{49085340525}{68719476736}$$

Hasil penjumlahan bilangan *fuzzy* yang dinyatakan bentuk potongan$-\alpha$ adalah:

$$4{x_1}_\alpha^- + 2{x_2}_\alpha^- + {x_3}_\alpha^- = \left(\frac{66667\sqrt{8\alpha}}{100000} + \frac{4367394960031}{419430400000}\right) + \left(\frac{333333\sqrt{8\alpha}}{1000000} - \frac{1065205460687}{8388608000000}\right) + \frac{6135667565}{8589934592}$$

$$= \frac{1000003\sqrt{8\alpha}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}$$

$$4{x_1}_\alpha^+ + 2{x_2}_\alpha^+ + {x_3}_\alpha^+ = \left(\frac{43887121298079}{3355443200000} - \frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{100000}\right) + \left(\frac{80956615463217}{67108864000000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{1000000}\right) + \left(\frac{49085340525}{68719476736}\right)$$

$$= \frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8-8\alpha}}{1000000}$$

Jadi diperoleh

$$\left[\left[4x_{1\alpha}^{-} + 2x_{2\alpha}^{-} + x_{3\alpha}^{-}\right], \left[4x_{1\alpha}^{+} + 2x_{2\alpha}^{+} + x_{3\alpha}^{+}\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8\alpha}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}, \frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8 - 8\alpha}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan didefuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka:

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8\alpha}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}, \frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8 - 8\alpha}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8(0)}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}, \frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8 - 8(0)}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8(0)}\right]$$

$$[(11{,}000), (14{,}717)] = [(11), (12{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8\alpha}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}, \frac{16106143108499877}{1073741824000000} - \frac{100000\sqrt{8 - 8\alpha}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8(1)}}{1000000} + \frac{1476392905542053}{134217728000000}, \right. = \left[\sqrt{8(1)} + 11, 15 - \sqrt{8 - 8(1)}\right]$$

$$\left.\frac{16106143108499877}{1073741824000000}-\frac{100000\sqrt{8-8(1)}}{1000000}\right]$$

$$[(13{,}828),(15{,}000)\,] \quad = \quad [(13{,}828),(15)]$$

Persamaan II

$$\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 \quad = \quad \tilde{7}$$

$$\left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] + 5\left[x_{2\alpha}^{-}, x_{2\alpha}^{+}\right] - \left[x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}\right] \quad = \quad \left[\sqrt{8\alpha}+3, 7-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}\right] + \left[5x_{2\alpha}^{-}, 5x_{2\alpha}^{+}\right] - \left[x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}\right] \quad = \quad \left[\sqrt{8\alpha}+3, 7-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[x_{1\alpha}^{-} + 5x_{2\alpha}^{-} - x_{3\alpha}^{+}\right], \left[x_{1\alpha}^{+} + 5x_{2\alpha}^{+} - x_{3\alpha}^{-}\right]\right] \quad = \quad \left[\sqrt{8\alpha}+3, 7-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Untuk $x_{1\alpha}^{-}, x_{1\alpha}^{+}, 5x_{2\alpha}^{-}, 5x_{2\alpha}^{+}, x_{3\alpha}^{-}, x_{3\alpha}^{+}$ diperoleh sebagai berikut:

$$x_{1\alpha}^{-} \quad = \quad \frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000}+\frac{4367394960031}{1677721600000}$$

$$x_{1\alpha}^{+} \quad = \quad \frac{43887121298079}{13421772800000}-\frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000}$$

$$5x_{2\alpha}^{-} \quad = \quad 5\left(\frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000}-\frac{1065205460687}{16777216000000}\right)$$

$$= \quad \frac{333333\sqrt{8\alpha}}{400000}-\frac{1065205460687}{3355443200000}$$

$$5x_{2\alpha}^{+} \quad = \quad 5\left(\frac{80956615463217}{134217728000000}-\frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000}\right)$$

$$= \quad \frac{80956615463217}{26843545600000}-\frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{400000}$$

$$x_{3\alpha}^{-} \quad = \quad \frac{6135667565}{8589934592}$$

$$x_{3\alpha}^{+} \quad = \quad \frac{49085340525}{68719476736}$$

Hasil penjumlahan dan pengurangan bilangan *fuzzy* yang dinyatakan bentuk potongan$-\alpha$ adalah:

$$
\begin{aligned}
{x_1}_\alpha^- + 5{x_2}_\alpha^- - {x_3}_\alpha^+ &= \left(\frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000}\right) + \\
&\quad \left(\frac{333333\sqrt{8\alpha}}{400000} - \frac{1065205460687}{3355443200000}\right) - \\
&\quad \left(\frac{49085340525}{68719476736}\right) \\
&= \sqrt{8\alpha} + \frac{107987749203}{68719476736} \\
{x_1}_\alpha^+ + 5{x_2}_\alpha^+ - {x_3}_\alpha^- &= \left(\frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000}\right) + \\
&\quad \left(\frac{80956615463217}{26843545600000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{400000}\right) - \\
&\quad \left(\frac{49085340525}{68719476736}\right) \\
&= \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8\alpha}
\end{aligned}
$$

Jadi diperoleh

$$
\begin{aligned}
\left[\left[{x_1}_\alpha^- + 5{x_2}_\alpha^- - {x_3}_\alpha^+\right], \left[{x_1}_\alpha^+ + 5{x_2}_\alpha^+ - {x_3}_\alpha^-\right]\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 3,7 \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{8-8\alpha}\right] \\
\left[\sqrt{8\alpha} + \frac{107987749203}{68719476736}, \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8\alpha}\right] &= \left[\sqrt{8\alpha} + 3,7 \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{8-8\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan didefuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka:

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\sqrt{8\alpha}+\frac{107987749203}{68719476736},\frac{382865656107}{68719476736}-\sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+3,7 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(0)}+\frac{107987749203}{68719476736},\frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8(0)}\right] = \left[\sqrt{8(0)}+3,7 - \sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(15{,}716),(2{,}743)] = [(3),(4{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\sqrt{8\alpha}+\frac{107987749203}{68719476736},\frac{382865656107}{68719476736}-\sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+3,7 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(1)}+\frac{107987749203}{68719476736},\frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8(1)}\right] = \left[\sqrt{8(1)}+3,7 - \sqrt{8-8(1)}\right]$$

$$[(18{,}544),(5{,}571)\ ] = [(5{,}828),(7)]$$

Persamaan III

$$\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 + 8\tilde{x}_3 = \widetilde{12}$$

$$\left[{x_1}_\alpha^-, {x_1}_\alpha^+\right] + 5\left[{x_2}_\alpha^-, {x_2}_\alpha^+\right] + 8\left[{x_3}_\alpha^-, {x_3}_\alpha^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[{x_1}_\alpha^-, {x_1}_\alpha^+\right] + \left[5{x_2}_\alpha^-, 5{x_2}_\alpha^+\right] + \left[8{x_3}_\alpha^-, 8{x_3}_\alpha^+\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\left[{x_1}_\alpha^- + 5{x_2}_\alpha^- + 8{x_3}_\alpha^-\right], \left[{x_1}_\alpha^+ + 5{x_2}_\alpha^+ + 8{x_3}_\alpha^+\right]\ \right] = \left[\sqrt{8\alpha}+8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Untuk ${x_1}_\alpha^-, {x_1}_\alpha^+, 5{x_2}_\alpha^-, 5{x_2}_\alpha^+, 8{x_3}_\alpha^-, 8{x_3}_\alpha^+$ diperoleh sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
{x_1}_\alpha^- &= \frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000} \\
{x_1}_\alpha^+ &= \frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000} \\
5{x_2}_\alpha^- &= 5\left(\frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000} - \frac{1065205460687}{16777216000000}\right) \\
&= \frac{333333\sqrt{8\alpha}}{400000} - \frac{1065205460687}{3355443200000} \\
5{x_2}_\alpha^+ &= 5\left(\frac{80956615463217}{134217728000000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000}\right) \\
&= \frac{80956615463217}{26843545600000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{400000} \\
8{x_3}_\alpha^- &= 8\left(\frac{6135667565}{8589934592}\right) \\
&= 5{,}714 \\
8{x_3}_\alpha^+ &= 8\left(\frac{49085340525}{68719476736}\right) \\
&= 5{,}714
\end{aligned}
$$

Hasil penjumlahan bilangan *fuzzy* yang dinyatakan bentuk potongan$-\alpha$ adalah:

$$
\begin{aligned}
{x_1}_\alpha^- + 5{x_2}_\alpha^- + 8{x_3}_\alpha^- &= \left(\frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000}\right) + \\
&\quad \left(\frac{333333\sqrt{8\alpha}}{400000} - \frac{1065205460687}{3355443200000}\right) + (5{,}714) \\
&= \sqrt{8\alpha} + 8 \\
{x_1}_\alpha^+ + 5{x_2}_\alpha^+ + 8{x_3}_\alpha^+ &= \left(\frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000}\right) +
\end{aligned}
$$

$$\left(\frac{80956615463217}{26843545600000}-\frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{400000}\right)+$$

$$(5{,}714)$$

$$= \quad 12-\sqrt{8-8\alpha}$$

Jadi diperoleh

$$\left[\left[{x_1}_\alpha^- + 5{x_2}_\alpha^- + 8{x_3}_\alpha^-\right], \left[{x_1}_\alpha^+ + 5{x_2}_\alpha^+ + 8{x_3}_\alpha^+\right]\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8\alpha}+8, 12-\sqrt{8-8\alpha}\,\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+8, 12 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

Jika ruas kiri dan ruas kanan didefuzzifikasi dengan nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$, maka:

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\sqrt{8\alpha}+8, 12-\sqrt{8-8\alpha}\,\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+8, 12-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(0)}+8, 12-\sqrt{8-8(0)}\,\right] = \left[\sqrt{8(0)}+8, 12-\sqrt{8-8(0)}\,\right]$$

$$[(8),(9{,}172)] = [(8),(9{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\sqrt{8\alpha}+8, 12-\sqrt{8-8\alpha}\,\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+8, 12-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(1)}+8, 12-\sqrt{8-8(1)}\,\right] = \left[\sqrt{8(1)}+8, 12-\sqrt{8-8(1)}\,\right]$$

$$[(10{,}828),(12)] = [(10{,}828),(12)]$$

Analisis:

Bilangan *fuzzy* sigmoid dapat digabungkan dengan suatu sistem persamaan linier sehingga disebut dengan sistem persamaan linier *fuzzy* dengan variabel dan konstanta berupa bilangan *fuzzy* sigmoid yang dinyatakan berupa potongan$-\alpha$.

Bilangan *fuzzy* sigmoid adalah bilangan yang memiliki fungsi keanggotaan sigmoid yang berkorelasi tak linier. Untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* digunakan Metode Gauss-Seidel atau dapat disebut sebagai metode iteratif.

Berdasarkan simulasi soal pada contoh 1, contoh 2, dan contoh 3 maka didapatkan beberapa hasil, yaitu pada contoh 1 dan contoh 2 berdasarkan sistem persamaan linier *fuzzy* yang diberikan maka didapatkan solusi $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$ yang dinyatakan sebagai pasangan terurut potongan$-\alpha$ $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right]$ dan $x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right]$. Sedangkan, pada contoh 3 berdasarkan sistem persamaan linier *fuzzy* yang diberikan maka didapatkan solusi $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, dan $\tilde{x}_3$ dinyatakan sebagai pasangan terurut potongan$-\alpha$ $x_{1_\alpha} = \left[x_{1_\alpha}^-, x_{1_\alpha}^+\right], x_{2_\alpha} = \left[x_{2_\alpha}^-, x_{2_\alpha}^+\right]$, dan $x_{3_\alpha} = \left[x_{3_\alpha}^-, x_{3_\alpha}^+\right]$.

Solusi contoh 1

$$x_{1_\alpha}^- = \frac{1631627\sqrt{8\alpha} + 12285194 + 287934\sqrt{8-8\alpha}}{6718464}$$

$$x_{2_\alpha}^- = \frac{1727605\sqrt{8\alpha} + 21307126 - 287934\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}$$

$$x_{1_\alpha}^+ = \frac{119780618 - 9789762\sqrt{8-8\alpha} - 1727605\sqrt{8\alpha}}{40310784}$$

$$x_{2_\alpha}^+ = \frac{162394870 - 10365630\sqrt{8-8\alpha} + 1727605\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

Solusi contoh 2

$$x_{1_\alpha}^- = \frac{1439671\sqrt{8\alpha} + 10365656 + 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{10077696}$$

$$x_{2_\alpha}^- = \frac{8638025\sqrt{8\alpha} + 50100520 - 1439670\sqrt{8-8\alpha}}{30233088}$$

$$x_{1_\alpha}^+ = \frac{131298008 - 8638026\sqrt{8-8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{60466176}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \frac{473363752 - 51828150\sqrt{8-8\alpha} + 8638025\sqrt{8\alpha}}{181398528}$$

Solusi contoh 3

$$x_{1}{}_{\alpha}^{-} = \frac{66667\sqrt{8\alpha}}{400000} + \frac{4367394960031}{1677721600000}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{-} = \frac{333333\sqrt{8\alpha}}{2000000} - \frac{1065205460687}{16777216000000}$$

$$x_{3}{}_{\alpha}^{-} = \frac{6135667565}{8589934592}$$

$$x_{1}{}_{\alpha}^{+} = \frac{43887121298079}{13421772800000} - \frac{66667\sqrt{8-8\alpha}}{400000}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \frac{80956615463217}{134217728000000} - \frac{333333\sqrt{8-8\alpha}}{2000000}$$

$$x_{2}{}_{\alpha}^{+} = \frac{49085340525}{68719476736}$$

Solusi yang dihasilkan berupa potongan$-\alpha$ yang berkorelasi tak linier. Ketika masing-masing solusi yang disubstitusikan ke dalam sistem persamaan linier *fuzzy* awal menggunakan operasi aritmetika bilangan *fuzzy* yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$. Pada persamaan I yang terdapat di contoh 1 dan 2, serta persamaan I dan II yang terdapat di contoh 3 menunjukkan perbedaan antara hasil dari ruas kiri dan ruas kanan, hal ini menunjukkan bahwa solusi persamaan liniernya tidak langsung menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy* pada persamaan I. Selain itu, hasil dari defuzzifikasi untuk $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ menunjukkan perbedaan antara hasil dari ruas kiri dan ruas kanan.

Hasil contoh 1

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8\alpha}+279872114+20731254\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{49236746-4750914\sqrt{8-8\alpha}-1727605\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+10\,,14-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8(0)}+279872114+20731254\sqrt{8-8(0)}}{60466176}, \frac{49236746-4750914\sqrt{8-8(0)}-1727605\sqrt{8(0)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(0)}+10\,,14-\sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(5{,}593),(7{,}105)] = [(10),(11{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8\alpha}+279872114+20731254\sqrt{8-8\alpha}}{60466176}, \frac{49236746-4750914\sqrt{8-8\alpha}-1727605\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+10\,,14-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{57010967\sqrt{8(1)}+279872114+20731254\sqrt{8-8(1)}}{60466176}, \frac{49236746-4750914\sqrt{8-8(1)}-1727605\sqrt{8(1)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(1)}+10\,,14-\sqrt{8-8(1)}\right]$$

$$[(7{,}295),(8{,}802)] = [(12{,}1828),(14)]$$

Hasil contoh 2

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\frac{43190131\sqrt{8\alpha} - 100200136 + 103656270\sqrt{8 - 8\alpha}}{60466176}, \frac{40598744 - 3599178\sqrt{8 - 8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 14,18 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{43190131\sqrt{8(0)} - 100200136 + 103656270\sqrt{8 - 8(0)}}{60466176}, \frac{40598744 - 3599178\sqrt{8 - 8(0)} - 8638025\sqrt{8(0)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 14,18 - \sqrt{8 - 8(0)}\right]$$

$$[(3{,}192), (6{,}037)] = [(14), (15{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\frac{43190131\sqrt{8\alpha} - 100200136 + 103656270\sqrt{8 - 8\alpha}}{60466176}, \frac{40598744 - 3599178\sqrt{8 - 8\alpha} - 8638025\sqrt{8\alpha}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 14,18 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{43190131\sqrt{8(1)} - 100200136 + 103656270\sqrt{8 - 8(1)}}{60466176}, \frac{40598744 - 3599178\sqrt{8 - 8(1)} - 8638025\sqrt{8(1)}}{5038848}\right] = \left[\sqrt{8(1)} + 14,18 - \sqrt{8 - 8(1)}\right]$$

$$[(0{,}363), (3{,}208)\ ] = [(16{,}828), (18)]$$

Hasil contoh 3

Persamaan I

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8\alpha}}{1000000}+\frac{1476392905542053}{134217728000000},\frac{16106143108499877}{1073741824000000}-\frac{100000\sqrt{8-8\alpha}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+11,15-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8(0)}}{1000000}+\frac{1476392905542053}{134217728000000},\frac{16106143108499877}{1073741824000000}-\frac{100000\sqrt{8-8(0)}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8(0)}+11,15-\sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(11{,}000),(14{,}717)] = [(11),(12{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8\alpha}}{1000000}+\frac{1476392905542053}{134217728000000},\frac{16106143108499877}{1073741824000000}-\frac{100000\sqrt{8-8\alpha}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+11,15-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\frac{1000003\sqrt{8(1)}}{1000000}+\frac{1476392905542053}{134217728000000},\frac{16106143108499877}{1073741824000000}-\frac{100000\sqrt{8-8(1)}}{1000000}\right] = \left[\sqrt{8(1)}+11,15-\sqrt{8-8(1)}\right]$$

$$[(13{,}828),(15{,}000)\ ] = [(13{,}828),(15)]$$

Persamaan II

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\sqrt{8\alpha}+\frac{107987749203}{68719476736},\frac{382865656107}{68719476736}-\sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha}+3,7-\sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(0)} + \frac{107987749203}{68719476736}, \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8(0)}\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 3,7 - \sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(15{,}716),(2{,}743)] = [(3),(4{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + \frac{107987749203}{68719476736}, \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 3,7 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(1)} + \frac{107987749203}{68719476736}, \frac{382865656107}{68719476736} - \sqrt{8-8(1)}\right] = \left[\sqrt{8(1)} + 3,7 - \sqrt{8-8(1)}\right]$$

$$[(18{,}544),(5{,}571)] = [(5{,}828),(7)]$$

Sedangkan, ketika masing-masing solusi yang sudah didapatkan kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan II yang terdapat pada contoh 1 dan 2, serta disubstitusikan ke dalam persamaan III yang terdapat pada contoh 3 menunjukkan hasil yang sama antara ruas kiri dan ruas kanan. Artinya solusi sistem persamaan liniernya menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy* sehingga akan kembali ke persamaan semula. Begitupun hasil defuzzifikasi nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ menunjukkan hasil yang sama

Hasil contoh 1

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 10{,}14 - \sqrt{8-8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,,14 - \sqrt{8-8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(0)} + 10{,}14 - \sqrt{8-8(0)}\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 10\,,14 - \sqrt{8-8(0)}\right]$$

$$[(10),(11{,}172)] = [(10),(11{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 10{,}14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 10\,, 14 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(1)} + 10{,}14 - \sqrt{8 - 8(1)}\,\right] = \left[\sqrt{8(1)} + 10\,, 14 - \sqrt{8 - 8(1)}\right]$$

$$[(12{,}828), (14)] = [(12{,}828), (14)]$$

Hasil contoh 2

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(0)} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8(0)}\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8(0)}\right]$$

$$[(6), (7{,}172)] = [(6), (7{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(1)} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8(1)}\right] = \left[\sqrt{8(1)} + 6\,, 10 - \sqrt{8 - 8(1)}\right]$$

$$[(8{,}828), (10)] = [(8{,}828), (10)]$$

Hasil contoh 3

Untuk hasil $\alpha = 0$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(0)} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8(0)}\,\right] = \left[\sqrt{8(0)} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8(0)}\,\right]$$

$$[(8), (9{,}172)] = [(8), (9{,}172)]$$

Untuk hasil $\alpha = 1$

$$\left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}\,\right] = \left[\sqrt{8\alpha} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8\alpha}\right]$$

$$\left[\sqrt{8(1)} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8(1)}\,\right] = \left[\sqrt{8(1)} + 8, 12 - \sqrt{8 - 8(1)}\,\right]$$

$$[(10{,}828), (12)] = [(10{,}828), (12)]$$

Solusi yang diperoleh akan menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy* jika hasil dari kedua sisi persamaan sama dan hasil defuzzifikasi nilai $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$ memberikan hasil yang sama. Jika terdapat perbedaan hasil dari kedua sisi persamaan, maka solusi yang didapatkan tidak langsung menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy*. Berdasarkan hasil dari contoh 1, contoh 2, dan contoh 3, untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel. Hasil yang diberikan menunjukkan bahwa dalam beberapa kasus seperti pada persamaan I dari contoh 1 dan 2, serta pada persamaan I dan II dari contoh 3, solusi yang ditemukan tidak langsung menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy*. Sedangkan dibeberapa kasus seperti pada persamaan II dari contoh 1 dan 2, serta persamaan III dari contoh 3, solusi yang ditemukan menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy* sehingga akan kembali ke persamaan semula. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun Metode Gauss-Seidel merupakan metode numerik atau metode iteratif yang umum digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, belum tentu memberikan solusi yang tepat atau langsung untuk memenuhi suatu sistem persamaan linier *fuzzy* dengan variabel dan konstanta *fuzzy* berupa bilangan *fuzzy* yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$.

4.6 Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dalam Pandangan Islam

Manusia merupakan makhluk ciptaan Allah SWT yang paling sempurna dan mulia di antara makhluk-Nya yang lain. Dibandingkan dengan makhluk ciptaan-Nya yang lain, Allah SWT menganugerahkan akal kepada manusia yang digunakan sebagai alat berpikir karena manusia lahir ke dunia dalam keadaaan tidak memiliki pengetahuan sama sekali. Akal digunakan sebagai alat berpikir agar manusia dapat mengontrol diri supaya tidak terjerumus dalam kesesatan karena semakin tinggi pemahaman manusia semakin besar pula untuk dapat mengendalikan dirinya, sehingga untuk mengetahui suatu kebenaran-kebenaran dari suatu peristiwa maka diperlukan cara berpikir yang benar, yakni *tafakkur*. *Tafakkur* merupakan aktivitas berpikir secara mendalam tentang segala hal, baik tentang segala ciptaan-Nya maupun cara memperoleh suatu ilmu pengetahuan yang akan mengantarkan untuk lebih dekat kepada Allah SWT. Adanya aktivitas *tafakkur* dapat membuahkan pengetahuan dan menghasilkan ilmu yang nantinya ilmu akan mengubah keadaan hati menjadi tenang dan akan selalu mengingat Allah SWT dengan berdzikir. Oleh karena itu, *tafakkur* menjadi kunci utama dari amal ibadah.

Manusia yang senantiasa menggunakan lisan dan hatinya untuk berdzikir, dan berpikir menggunakan akal untuk memahami suatu fenomena yang Allah SWT berikan merupakan salah satu ciri dari *Ulul Albab*. *Ulul Albab* didefinisikan sebagai manusia yang mempunyai ciri-ciri, yakni senantiasa berdzikir dalam segala situasi dan kondisi, senantiasa ber-*tafakkur*, dan berusaha memaksimalkan segala potensi yang telah dianugerahkan Allh SWT mulai dari penglihatan, pendengaran, untuk beribadah kepada-Nya. Sebagaimana dijelaskan dalam Q.S Ali-Imran ayat 190-191 (Al-Sheikh, 2005):

اِنَّ فِيْ خَلْقِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ وَاخْتِلَافِ الَّيْلِ وَالنَّهَارِلَاٰيٰتٍ لِّاُولِى الْاَلْبَابِ(١٩٠) اَلَّذِيْنَ يَذْكُرُوْنَ اللّٰهَ قِيَامًا وَّقُعُوْدًا وَّعَلٰى جُنُوْبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُوْنَ فِيْ خَلْقِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ رَبَّنَامَا خَلَقْتَ هٰذَا بَاطِلاً سُبحٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ(١٩١)

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan pergantian malam dan siang terdapat tanda-tanda (kebesaran Allah) bagi orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): “Ya Rabb kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, maha suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa Neraka” (Q.S Ali-Imran/3: 190-191)

Pada Q.S Ali-Imran ayat 190-191 menjelaskan bahwa karakter *Ulul Albab*, yaitu senantiasa berdzikir dalam segala kondisi dan senantiasa ber-*tafakkur* mengenai suatu masalah dengan tujuan untuk mencari solusi dari masalah tersebut. Salah satu bentuk *tafakkur* dalam bidang ilmu pengetahuan khususnya dalam bidang aljabar liner yang dikombinasikan dengan logika *fuzzy* adalah menemukan solusi dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy*. Untuk menentukan solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* didalamnya terdapat aktivitas ber-*tafakkur*, yaitu melibatkan proses berpikir saat mendapatkan suatu informasi yang kemudian membentuk konsep, memecahkan masalah serta dapat menghasilkan solusi dari suatu persamalahan. Mencari solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dimulai dengan menggali berbagai informasi untuk merumuskan masalah yang konsisten. Selanjutnya, mengubah koefisien dan konstanta *fuzzy* berupa bilangan *fuzzy* menjadi potongan$-\alpha$ dari sistem persamaan linier *fuzzy* yang telah diberikan. Setelah mengubah koefisien dan konstanta *fuzzy* menjadi potongan$-\alpha$ maka ditentukan bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$. Bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dari sistem persamaan linier *fuzzy* nantinya akan dirubah menjadi sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan bentuk matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$, tujuannya adalah agar dapat diselesaikan menggunakan metode penyelesaian sistem persamaan linier. Langkah berikutnya adalah menentukan persamaan iterasi yang nantinya akan dilanjutkan perhitungan dengan menggunakan Metode Gauss-Seidel sampai dengan didapatkan suatu solusi yang memenuhi sistem persamaan linier *fuzzy*.

Dengan demikian, proses ber-*tafakkur* untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* tidak hanya digunakan sebagai media untuk mengembangkan suatu ilmu pengetahuan tetapi juga sebagai media ibadah dan pengabdian kepada Allah SWT. Dalam proses berpikir untuk mencari solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* juga termasuk ke dalam salah satu karakter *Ulul Albab*. Hal ini dikarenakan, karakter dari *Ulul Albab* adalah manusia yang senantiasa berdzikir, menggunakan akalnya untuk berpikir untuk melakukan penalaran serta mengkaji suatu peristiwa yang nantinya akan menghasilkan suatu ilmu pengetahuan yang berguna untuk kepentingan masyarakat.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Bentuk umum sistem persamaan linier *fuzzy* dengan koefisien dan konstanta bilangan *fuzzy* sigmoid, yaitu $A\tilde{X} = \tilde{b}$. Untuk mencari solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* dapat menggunakan Metode Gauss-Seidel. Adapun langkah-langkah untuk mencari solusi sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan Metode Gauss-Seidel adalah:
   a. Menyatakan koefisien dan konstanta bilangan *fuzzy* sigmoid pada suatu permasalahan sistem permasalahan linier *fuzzy* diubah ke dalam bentuk potongan $-\alpha$ menggunakan fungsi keanggotaan sigmoid kurva pertumbuhan.

$$S(x;a,b,c) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } x \leq a \\ 2\left(\frac{(x-a)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } a \leq x \leq b \\ 1 - 2\left(\frac{(c-x)}{(c-a)}\right)^2, & \text{untuk } b \leq x \leq c \\ 1, & \text{untuk } x \geq c \end{cases}$$

   b. Sistem persamaan linier *fuzzy* dirubah ke dalam bentuk matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dengan $\tilde{X}$ dan $\tilde{b}$ berupa potongan$-\alpha$.
   c. Memeriksa bahwa matriks A memenuhi syarat cukup dari Metode Gauss-Seidel, yaitu koefisien matriks domain secara diagonal dengan rumus.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, i = 1,2,3, \dots$$

d. Mengubah persamaan matriks $A\tilde{X} = \tilde{b}$ dari sistem persamaan linier *fuzzy* menjadi sistem persamaan linier-*fuzzy* dengan matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$, yaitu dengan cara mengubah matriks berukuran $n \times n$ menjadi matriks berukuran $2n \times 2n$.

e. Menyatakan bentuk sistem persamaan linier non-*fuzzy* dengan cara melakukan perkalian pada matriks $S\tilde{X}^* = \tilde{b}^*$.

f. Mengubah sistem persamaan linier non-*fuzzy* menjadi persamaan iterasi dengan rumusan umum Metode Gauss-Seidel.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}, k = 0,1,2, \ldots$$

g. Melakukan proses perhitungan Metode Gauss-Seidel dengan nilai awal $\left(x_{1_\alpha}^{-(0)}, x_{2_\alpha}^{-(0)}, \tilde{x}_{1_\alpha}^{+(0)}, \tilde{x}_{2_\alpha}^{+(0)}\right) = 0$ yang disubstitusikan pada iterasi pertama. Selanjutnya nilai yang sudah diperoleh pada perhitungan baris awal akan dipergunakan pada perhitungan selanjutanya.

h. Nilai yang diperoleh dari setiap iterasi, kemudian didefuzzifikasi dengan $\alpha = 0$ dan $\alpha = 1$.

i. Iterasi berhenti jika toleransi kesalahan telah dicapai. Toleransi kesalahan didefinisikan sebagai:

$$\left| \frac{\tilde{x}_i^{(k+1)} - \tilde{x}_i^{(k)}}{\tilde{x}_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon$$

j. Diperoleh solusi untuk sistem persamaan linier *fuzzy*.

2. Solusi dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy* yang diperoleh menggunakan Metode Gauss-Seidel akan menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy* jika hasil dari kedua sisi persamaan sama dan hasil defuzzifikasi dengan nilai $\alpha =$

0 dan $\alpha = 1$ memberikan hasil yang sama. Jika menunjukkan perbedaan hasil dari kedua sisi persamaan, maka solusi yang diperoleh tidak langsung menjadi solusi sistem persamaan linier *fuzzy*. Berdasarkan interpretasi Metode Gauss-Seidel untuk menentukan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan bilangan *fuzzy* sigmoid, solusi yang didapatkan hanya dapat memenuhi beberapa kasus saja. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun Metode Gauss-Seidel merupakan metode numerik atau metode iteratif yang umum digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, belum tentu memberikan solusi yang tepat atau langsung untuk memenuhi suatu sistem persamaan linier *fuzzy* dengan variabel dan konstanta *fuzzy* berupa bilangan *fuzzy* sigmoid yang dinyatakan sebagai potongan$-\alpha$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, penulis memberikan saran supaya penelitian dapat dilanjutkan dan dikembangkan lebih baik, diantaranya:

1. Menggabungkan bilangan *fuzzy* lain dengan sistem persamaan linier, seperti menggunakan bilangan *fuzzy* sigmoid kurva penyusutan/penurunan, dan bilangan *fuzzy* lonceng.
2. Menggunakan metode lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy*, seperti Metode *Successive Over Relaxation* (SOR) yang merupakan generalisasi dan penyempurna Metode Gauss-Seidel. Tujuan utamanya adalah untuk mempercepat konvergensi terutama pada sistem yang memiliki matriks koefisien yang tidak teratur atau tidak simetris. Selain itu diharapkan penelitian dapat dilanjutkan menggunakan Metode Dekomposisi Crout

karena metode ini dikenal lebih baik dari waktu eksekusi dan analisis algoritma dibandingkan dengan Metode Dekomposisi LU dalam menyelesaikan sistem persamaan linier yang berukuran besar.

3. Menggunakan pemrograman komputer untuk menyelesaikan perhitungan untuk mendapatkan hasil yang lebih akurat dan cepat, seperti menggunakan program MATLAB dan Maple.

DAFTAR PUSTAKA

’Imrona, M. (2013). *Aljabar Linear Dasar*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Abdullah, D. (2017). KONSEP MANUSIA DALAM AL- QUR’AN (Telaah Kritis tentang Makna dan Eksistensi). *Al-Daulah : Jurnal Hukum Pidana dan Ketatanegaraan*, *6*(2), 331–344.

Al-Mahalli, I. J., & As-Suyuti, I. J. (2016). *Tafsir Tafsir Jalalain Jilid 2*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Al-Sheikh, D. A. bin M. bin A. bin I. (2005). *Tafsir Ibnu Katsir*. Surabaya: Pustaka Imam Asy-Syafi’i.

Allahviranloo, T., Mikaeilvand, N., Kiani, N. A., & Shabestari, R. M. (2008). Signed decomposition of fully fuzzy linear systems. *An International Journal of Application and Applied Mathematics (AAM)*, *3*(1), 77–88.

Andari, A. (2017). *Aljabar Linier Elementer*. Malang: UB Press.

Anton, H., & Rorres, C. (2004). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Enghariano, D. A. (2019). Tafakkur Dalam Perspektif Al-Qur’an. *Jurnal Ilmu Kesyariahan dan Pranata Sosial*, *5*, 134–148.

Idris, M. (2020). Karakteristik Manusia dalam Perspektif Al-Qur’an. *Jurnal Kajian Al-Qur’an dan Hadis*, *1*, 1–16.

Irmawati, I., Sukarsih, I., & Respitawulan, R. (2017). Solusi Sistem Persamaan Linear Fuzzy. *Jurnal Teori dan Terapan Matematika*, *16*(2), 1–8. https://doi.org/10.29313/jmtm.v16i2.3412

J.Klir, G., & Yuan, B. (1995). Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications. In *Endeavour* (Vol. 20, Nomor 1). New York: Prentice-Hall Internasional. https://doi.org/10.1016/s0160-9327(96)90083-6

Juliangkary, E., & Pujilestari, P. (2022). Kajian Literatur Metode Tanya Jawab Pada Pembelajaran Matematika. *Jurnal Ilmiah Mandala Education*, *8*(3), 2571–2575. https://doi.org/10.58258/jime.v8i3.3839

Kusumadewi, S., & Purnomo, H. (2013). *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Marsudi. (2010). *Logika dan Teori Himpunan*. Malang: UB Press.

Matinfar, M., Nasseri, S. H., & Sohrabi, M. (2008). Solving Fuzzy Linear System of Equations by Using Householder Decomposition Method. *Applied Mathematical Sciences*, *2*(52), 2569–2575.

Mawarni, N. I., Indriyana, Y., & Masykur, A. M. (2006). Dinamika Psikologis Tafakur Pada Anggota Thariqah Qadiriyyah Wa Naqsyabandiyyah di Pondok Pesantren Futhuhiyyah, Mranggen, Demak. *Semarang : Jurnal Undip*, *3*(2), 57–58.

Munir, R. (2015). *Metode Numerik*. Bandung: Penerbit Informatika.

Nasseri, S. H., Ebrahimnejad, A., & Cao, B.-Y. (2019). *Fuzzy Linear Programming: Solution Techniques and Applications* (Vol. 379). http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-17421-7

Noffiyanti. (2020). Tafakkur dalam Kehidupan Persfektif Al-Qur'an dan Hadits. *Mau'idhoh Hasanah : Jurnal Dakwah dan Ilmu Komunikasi*, *1*(2), 11–20. https://doi.org/10.47902/mauidhoh.v1i2.67

Permata, A. R. (2018). Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy Menggunakan Metode Dekomposisi Crout. *Journal of mathematics*, *1*, 20–27.

Rahmad, C., Deasy, I., & Sandhya, E. (2016). *Metode Numerik*. Malang: Polinema Press.

Rahmawati, D., Ubaidillah, A., & Setiawan, H. (2021). *Sistem Kendali Logika Fuzzy dan Aplikasinya*. Malang: Media Nusa Creative.

Sari, E. R., & Alisah, E. (2012). Studi Tentang Persamaan Fuzzy. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, *2*(2), 55–65. https://doi.org/10.18860/ca.v2i2.2228

Setiawan, M. M. (2019). *Solusi Sistem Persamaan Linier Fuzzy dengan Bilangan Fuzzy Trapesium Menggunakan Metode Gauss-Jordan*. (Skripsi Sarjana, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang). http://etheses.uin-malang.ac.id/15023/1/13610105.pdf

Sivanandam, S. N., Sumathi, S., & Deepa, S. N. (2007). Introduction to fuzzy logic using MATLAB. In *Introduction to Fuzzy Logic using MATLAB*. Berlin: Springer-Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-540-35781-0

Sukarna, S., Abdy, M., & Rahmat, R. (2020). Perbandingan Metode Iterasi Jacobi dan Metode Iterasi Gauss-Seidel dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Fuzzy. *Journal of Mathematics, Computations, and Statistics*, *2*(1), 1. https://doi.org/10.35580/jmathcos.v2i1.12447

Susilo, F. (2006). *Himpunan & Logika Kabur Serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

RIWAYAT HIDUP

Maria Syifaus Sa'adah bisa dipanggil dengan Maria, lahir di Sidoarjo pada tanggal 02 November 2001. Anak ketiga dari 4 bersaudara dari pasangan Bapak Edy Santoso dan Ibu Khoirul Ummah. Bertempat tinggal di Desa Terik Kecamatan Krian Kabupaten Sidoarjo. Penulis menempuh pendidikan formal mulai dari RA Mambaul Ulum dan lulus pada tahun 2008. Selanjutnya penulis menempuh pendidikan dasar di MI Mambaul Ulum Terik dan lulus pada tahun 2014. Menempuh pendidikan sekolah menengah pertama di MTsN Krian dan lulus pada tahun 2017. Setelah menempuh pendidikan di sekolah menengah pertama, selanjutnya penulis menempuh pendidikan di SMAN 1 Wonoayu dan lulus pada tahun 2020. Pada tahun yang sama, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi negeri, yaitu Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Selama perkuliahan, penulis diberi kesempatan menjadi mahasiswa pemegang beasiswa KIP-K. Selain itu, penulis juga menempuh pendidikan non-formal di Pondok Pesantren Putri Al-Hikmah Al-Fathimiyyah Malang.

Pengalaman organisasi penulis, yaitu menjabat sebagai sekretaris pada tahun 2019-2020 di Pramuka Ambalan Pattimura dan Dewi Sinta SMAN 1 Wonoayu. Saat perkuliahan penulis juga menjabat sebagai sekretaris pada tahun 2021-2022. Ditahun yang sama penulis diberi amanah mengemban tugas menjadi pengurus Pondok Pesantren Putri Al-Hikmah Al-Fathimiyyah sebagai sekretaris.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	:	Maria Syifaus Sa'adah
NIM	:	200601110089
Fakultas/Jurusan	:	Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi	:	Solusi Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* dengan Bilangan *Fuzzy* Sigmoid Menggunakan Metode Gauss-Seidel
Pembimbing I	:	Evawati Alisah, M.Pd.
Pembimbing II	:	Achmad Nashichuddin, M.A.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	09 Oktober 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	1.
2.	20 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama	2.
3.	23 Oktober 2023	Konsultasi Revisi Kajian Agama	3.
4.	24 Oktober 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	4.
5.	26 Oktober 2023	Konsultasi Revisi Bab III	5.
6.	01 November 2023	ACC Bab I, II, dan III	6.
7.	09 November 2023	ACC Seminar Proposal	7.
8.	13 Desember 2023	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	8.
9.	19 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	9.
10.	20 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	10.
11.	23 Februari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	11.
12.	26 Februari 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	12.
13.	04 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	07 Maret 2024	ACC Bab IV dan V	14.
15.	15 Maret 2024	ACC Seminar Hasil	15.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	01 April 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	16. Ef.
17.	06 Mei 2024	ACC Sidang Skripsi	17. Ef.
18.	06 Juni 2024	ACC Keseluruhan	18. Ef.

Malang, 06 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005