

**EFEK CASIMIR PARTIKEL FERMION DALAM PENGARUH MEDAN
MAGNETIK**

SKRIPSI

Oleh:

IMALA ENDI RAHAYU

NIM. 19640055



**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

HALAMAN PENGANTAR

**EFEK CASIMIR PARTIKEL FERMION DALAM PENGARUH MEDAN
MAGNETIK**

SKRIPSI

Diajukan kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

Imala Endi Rahayu
NIM. 19640055

**PROGRAM STUDI FISIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024**

HALAMAN PERSETUJUAN

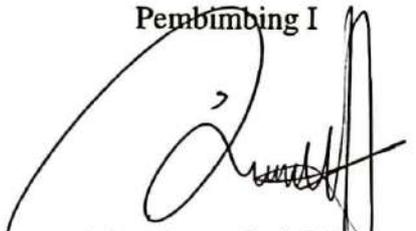
**EFEK CASIMIR PARTIKEL FERMION DALAM PENGARUH MEDAN
MAGNETIK**

SKRIPSI

Oleh:
Imala Endi Rahayu
NIM. 19640055

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Pada tanggal, 14 Juni 2024

Pembimbing I


Arista Romadani, M.Sc
NIP. 19900905 201903 1 018

Pembimbing II


Muthmainnah, M.Si
NIP. 19860325 201903 2 009

Mengetahui

Ketua Program Studi


Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740780 200312 1 002

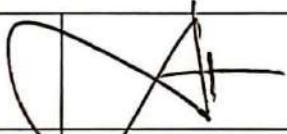
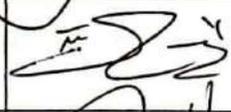
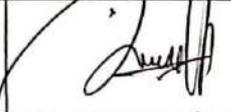
HALAMAN PENGESAHAN

EFEK CASIMIR PARTIKEL FERMION DALAM PENGARUH MEDAN MAGNETIK

SKRIPSI

Imala Endi Rahayu
NIM. 19640055

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Pada Tanggal, 14 Juni 2024

| | | |
|----------------------|---|---|
| Penguji Utama : | <u>Drs. Abdul Basid, M.Si</u> NIP. 19650504 199003 1 003 |  |
| Ketua Penguji : | <u>Muhammad Taufiqi, M.Si</u> LB. 64021 |  |
| Sekretaris Penguji : | <u>Arista Romadani, M.Sc</u> NIP. 19900905 201903 1 018 |  |
| Anggota Penguji : | <u>Muthmainnah, M.Si</u> NIP. 19860325 201903 2 009 |  |

Mengesahkan,
Ketua Program Studi,



Imam Tazi, M.Si
NIP. 19740703 200312 1 002

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : IMALA ENDI RAHAYU

NIM : 19640055

Jurusan : FISIKA

Fakultas : SAINS DAN TEKNOLOGI

Judul Penelitian : Efek Casimir Partikel Fermion dalam Pengaruh Medan Magnetik

Menyatakan bahwa tugas akhir ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengerjaan tugas akhir ini tidak ada karya atau pendapat yang ditulis atau dipublikasikan orang lain kecuali sebagai rujukan kutipan referensi dengan mengikuti tata cara penulisan karya ilmiah yang telah lazim.

Malang, 17 Juni 2024

Yang Membuat Pernyataan



Imala Endi Rahayu
NIM. 19640055

MOTTO

مَنْ جَدَّ وَجَدَ

"Barang siapa yang bersungguh-sungguh, maka ia akan berhasil"

"Saya tidak tahu apa peran saya di dunia ini. Tapi bagi saya, saya hanyalah seperti anak kecil yang sedang bermain di pantai, lalu menemukan batu kerikil yang indah. Sementara di hadapan saya terhampar luas lautan kebenaran yang menunggu untuk ditemukan"

- Isaac Newton -

HALAMAN PERSEMBAHAN

Karya yang sangat sederhana ini penulis persembahkan kepada:

1. Kedua orang tua penulis, mama Endah dan ayah Hadi yang namanya selalu melekat dalam diri ini sebagai "Endi". Terimakasih atas segala bentuk do'a, dukungan, dan nasehat untuk putri kecilnya yang pertama.
2. Kedua orang tua sambung penulis, mami Yeni dan Bapak Yayan yang senantiasa memberi kasih sayang dan perhatian seperti pada putri kandungnya sendiri.
3. Kedua nenek penulis, Emak Tanjung dan Emak Ana yang do'anya tidak pernah terputus untuk cucunya.
4. Adik penulis tercinta, Qommariyah Devanggi Endi Safitri yang sering mengalah dalam segala hal untuk kepentingan kakaknya.
5. Keluarga besar khususnya sepupu penulis, Dhiky Zhawara yang menjadi salah satu *support system*.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil 'alamiin, puji syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya yang tiada henti sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Efek Casimir Partikel Fermion dalam Pengaruh Medan Magnetik”. Semoga shalawat serta salam senantiasa terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, para sahabat, dan segenap orang yang mengikuti jejaknya.

Skripsi ini disusun bertujuan sebagai salah satu persyaratan untuk memperoleh gelar sarjana (S.Si). Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Dr. Imam Tazi, M.Si., selaku Ketua Program Studi Fisika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ibu Wiwis Sasmitaninghidayah, M.Si., selaku Dosen Wali yang selalu memberikan arahan serta nasehat kepada penulis selama perkuliahan.
5. Bapak Arista Romadani, M.Sc, selaku Dosen Pembimbing Skripsi sekaligus Dosen Fisika Teori yang telah membimbing penulis selama perkuliahan yang berkaitan dengan Fisika Teori hingga penyelesaian skripsi ini.
6. Bapak Muhammad Taufiqi, M.Si, selaku Dosen Fisika Teori yang telah memberikan pengetahuan dalam proses pembelajaran mengenai Fisika Teori.
7. Seluruh dosen, laboran, dan staf administrasi Program Studi Fisika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu, pelayanan, dan membantu kelancaran penulisan skripsi ini.

8. Para orang tua dan segenap keluarga besar yang selalu mendo'akan dan memberi dukungan untuk penulis dalam segala hal.
9. Teman-teman dekat penulis, Nindia, Ulfa, Syifa, Regita, Tata, Sofia, Pipit, Eva, Defi, Yorgita, Ursila, Yusri, dan Khozin yang telah membantu, memberikan semangat dan membagi sebagian pengetahuannya saat proses penulisan skripsi.
10. Kakak tingkat dan adik tingkat penulis di fisika teori UIN Malang.
11. Semua pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung demi kesuksesan dalam penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari tanpa bantuan, pengarahan, dan bimbingan dari berbagai pihak, skripsi ini tidak dapat terselesaikan. Semoga Allah SWT membalas kebaikan mereka dengan nikmat yang berlipat ganda baik di dunia maupun di akhirat kelak, Aamiin. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan menambah wawasan ilmiah bagi penulis dan semua pihak yang membaca, serta memberikan kontribusi bagi perkembangan ilmu pengetahuan. Oleh karena itu kritik dan saran yang bersifat membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan penelitian ini.

Malang, 9 Februari 2023

Penulis,

DAFTAR ISI

| | |
|---|------|
| COVER | i |
| HALAMAN PENGAJUAN | ii |
| HALAMAN PERSETUJUAN | iii |
| HALAMAN PENGESAHAN | iv |
| PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN | v |
| MOTTO | vi |
| HALAMAN PERSEMBAHAN | vii |
| KATA PENGANTAR | viii |
| DAFTAR ISI | x |
| DAFTAR GAMBAR | xii |
| ABSTRAK | xiii |
| ABSTRACT | xiv |
| MUSTAKHLIS AL-BAHTH | xv |
| | |
| BAB I PENDAHULUAN | 1 |
| 1.1 Latar Belakang | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah | 5 |
| 1.3 Tujuan Penelitian | 5 |
| 1.4 Batasan Masalah | 6 |
| 1.5 Manfaat Penelitian | 6 |
| | |
| BAB II KAJIAN TEORI | 7 |
| 2.1 Mekanika Kuantum Relativistik..... | 7 |
| 2.1.1 Ruang dan Waktu Relativistik | 7 |
| 2.1.2 Hubungan Energi dan Momentum Relativistik | 9 |
| 2.1.3 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg..... | 10 |
| 2.1.4 Persamaan Dirac Elektron Bebas..... | 11 |
| 2.1.5 Interpretasi Energi Negatif Persamaan Dirac dan Prediksi Antipartikel..... | 22 |
| 2.1.6 Pasangan Partikel dalam Kajian Islam | 24 |
| 2.2 Teori Medan Elektromagnetik..... | 26 |
| 2.2.1 Persamaan Maxwell..... | 27 |
| 2.3 Teori Medan Kuantum | 28 |
| 2.3.1 Prinsip Variasi | 29 |
| 2.4 Efek Casimir | 31 |
| | |
| BAB III SOLUSI PERSAMAAN DIRAC DALAM PENGARUH MEDAN MAGNETIK | 34 |
| 3.1 Persamaan Dirac dalam Pengaruh Medan Magnetik | 34 |
| 3.2 Solusi Persamaan Dirac dalam Pengaruh Medan Magnetik | 37 |
| 3.2.1 Solusi Energi Positif | 44 |
| 3.2.2 Solusi Energi Negatif | 52 |
| | |
| BAB IV ENERGI CASIMIR | 61 |

| | | |
|-----------------------------|--|-----------|
| 4.1 | Rapat Hamiltonian | 61 |
| 4.2 | Energi Vakum | 63 |
| 4.3 | Energi Casimir | 73 |
| 4.4 | Pendekatan Nilai Medan Magnet (B) | 78 |
| 4.4.1 | Medan Magnet Lemah ($B \ll 1$) | 78 |
| 4.4.2 | Kasus Medan Magnet Kuat ($B \gg 1$) | 81 |
| 4.5 | Energi Casimir dalam Tinjauan Al-Qur'an | 82 |
| BAB V PENUTUP | | 87 |
| 5.1 | Kesimpulan | 87 |
| 5.2 | Saran | 89 |
| DAFTAR PUSTAKA | | 90 |
| LAMPIRAN | | 93 |
| A. | Ortonormalitas Fungsi Gelombang Level Energi $n > 0$: | 94 |
| B. | Ortonormalitas Fungsi Gelombang Level Energi $n = 0$: | 99 |

DAFTAR GAMBAR

| | | |
|------------|--|----|
| Gambar 2.1 | Plot spektrum energi elektron bebas | 23 |
| Gambar 2.2 | Pembentukan pasangan partikel (<i>Pair production</i>) | 23 |
| Gambar 2.3 | Pemusnahan pasangan partikel (<i>Pair annihilation</i>)..... | 24 |
| Gambar 2.4 | Ilustrasi Efek Casimir | 32 |

ABSTRAK

Rahayu, Imala Endi. 2024. **Efek Casimir Partikel Fermion Dalam Pengaruh Medan Magnetik**. Skripsi. Prodi Fisika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Muthmainnah, M.Si.

Kata Kunci: Efek Casimir, Fluktuasi Kuantum, Penjumlahan Abel-Plana

Efek Casimir merupakan salah satu konsekuensi dari adanya fluktuasi kuantum dalam ruang vakum yang memungkinkan terjadinya interaksi antara dua pelat konduktor dengan jarak yang sangat dekat. Dalam penelitian ini telah dikaji bagaimana fluktuasi medan Fermion dalam pengaruh medan magnet eksternal yang tegak lurus terhadap pelat konduktor berdampak pada besarnya energi Casimir. Penelitian ini berfokus pada studi solusi persamaan Dirac dalam pengaruh medan magnetik untuk meninjau dinamika partikel Fermion dan dilakukan perhitungan analitik untuk mengetahui nilai energi Casimir yang dihasilkan. Nilai divergen yang muncul dievaluasi menggunakan metode penjumlahan Abel-Plana. Hasil penelitian menunjukkan bahwa medan magnet eksternal dapat meningkatkan energi Casimir. Penelitian ini memberikan wawasan dalam memahami interaksi kuantum pada skala mikroskopis dan berimplikasi pada pengembangan teknologi yang memanfaatkan energi Casimir dalam pengaruh medan magnet eksternal.

ABSTRACT

Rahayu, Imala Endi. 2024. **Casimir Effect of Fermion Particle in the Presence of Magnetic Field**. Thesis. Department of Physics , Sains and Technology Faculty, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Arista Romadani, M.Sc. (II) Muthmainnah, M.Si.

Keywords: Casimir Effect, Quantum Fluktuation, Abel-Plana Summation

The Casimir effect is one of the consequences of fluctuations in vacuum which allows interaction between two conductor plates at a very close distance. In this research, we have studied how the Fermion magnetic field under the influence of an external magnetic field perpendicular to the conductor plate has an impact on the magnitude of the Casimir energy. This research focuses on studying the solution of the Dirac equation under the influence of a magnetic field to review the dynamics of Fermion particles and carry out analytical calculations to determine the value of the resulting Casimir energy. The divergent values that appear are evaluated using the Abel-Plana summation method. The research results show that an external magnetic field can increase Casimir's energy. This research provides insight into understanding placement interactions on a microscopic scale and has implications for the development of technology that utilizes Casimir energy under the influence of an external magnetic field.

مستخلص البحث

راهايو، إيمالا إندي. 2024. تأثير كازيمير لجزيئات الفرميون تحت تأثير المجالات المغناطيسية. بحث جامعي. قسم الفيزياء، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأول: أريستا روماداني الماجستير، المشرفة الثانية: مطمئنة الماجستير .

الكلمة الرئيسية: تأثير كازيمير، التذبذب الكمي، جمع أويل بلانا

تأثير كازيمير هو أحد نتائج التقلبات الكمومية في الفراغ الذي يسمح بالتفاعل بين لوحين موصلين على مسافة قريبة جدا. في هذا البحث، تمت دراسة كيف أن التقلبات في مجال فرميون في تأثير المجالات المغناطيسية الخارجية المتعامدة على ألواح الموصلات لها تأثير على حجم طاقة كازيمير. يركز هذا البحث على دراسة حل معادلة ديراك في تأثير المجالات المغناطيسية لمراجعة ديناميكيات جسيمات فرميون وإجراء حسابات تحليلية لتحديد قيمة طاقة كازيمير الناتجة. يتم تقييم القيم المتباينة التي تظهر باستخدام طريقة جمع أويل بلانا أظهرت النتائج أن المجال المغناطيسي الخارجي يمكن أن يزيد من طاقة كازيمير. يقدم هذا البحث نظرة ثاقبة لفهم التفاعلات الكمومية على المقاييس المجهرية وله آثار على تطوير التقنيات التي تسخر طاقة كازيمير تحت تأثير المجالات المغناطيسية الخارجية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada tahun 1948, seorang fisikawan Belanda bernama Hendrik Casimir memprediksikan adanya interaksi antara dua pelat logam yang tidak bermuatan di dalam ruang vakum. Interaksi yang terbentuk antara dua pelat logam tersebut adalah gaya tarik menarik saat keduanya diletakkan sejajar dan didekatkan dengan jarak yang sangat dekat. Gaya ini selanjutnya dikenal sebagai gaya Casimir atau efek Casimir. Efek Casimir timbul karena adanya energi vakum dalam ruang hampa dimana terdapat pasangan partikel-antipartikel yang muncul dan lenyap dalam waktu singkat. Keberadaan dua pelat logam dengan jarak yang sangat dekat menyebabkan pasangan partikel-antipartikel yang berada di antara pelat tidak memiliki cukup ruang untuk berfluktuasi. Akibatnya jumlah pasangan partikel-antipartikel di sisi luar pelat lebih banyak daripada sisi dalam sehingga tekanan pada sisi luar lebih besar dibanding tekanan pada sisi dalam.

Dalam pandangan kuantum, keberadaan partikel di alam memiliki jumlah yang tidak terbatas. Sehingga untuk mengetahui karakteristiknya, partikel dalam jumlah banyak tersebut perlu dipandang sebagai suatu medan, yaitu ruang yang berisi partikel-partikel. Fluktuasi dari suatu medan pada dasarnya adalah konsekuensi dari prinsip ketidakpastian Heisenberg, dimana bentuk kedua dari prinsip ketidakpastian Heisenberg menyatakan bahwa partikel dapat memiliki energi tambahan dari luar selama rentang waktu tertentu (Purwanto, 2020). Akibatnya prinsip ketidakpastian Heisenberg untuk energi ini mengindikasikan bahwa dalam sudut pandang teori medan kuantum, ruang vakum bukan dianggap sebagai ruang kosong melainkan sebagai ruang yang memiliki fluktuasi kuantum, yaitu terciptanya pasangan partikel-antipartikel yang membawa energi dan dalam waktu singkat pasangan partikel-antipartikel akan saling memusnahkan.

Berdasarkan nilai spinnya, partikel dibagi menjadi dua, yaitu partikel fermion yang memiliki spin setengah dan partikel boson yang memiliki spin bulat. Partikel fermion dibagi lagi menjadi dua jenis, yakni quark dan lepton. Adapun lepton terdiri dari elektron, muon, tauon, dan neutrino (Rizqy, 2022). Elektron merupakan salah satu partikel elementer yang memiliki peran sangat penting dalam banyak fenomena fisika, seperti kelistrikan, magnetisme, dan konduktivitas termal. Dalam mekanika kuantum, persamaan gerak elektron serta partikel fermion lainnya dapat dijelaskan menggunakan persamaan Dirac.

Partikel atau materi selalu identik dengan sesuatu yang sangat kecil atau halus. Salah satu ayat Al-Qur'an yang membahas tentang sesuatu yang sangat kecil terdapat dalam Surah Yunus (10):61 berikut.

وَمَا تَكُونُ فِي شَأْنٍ وَمَا تَتْلُوا مِنْهُ مِنْ قُرْآنٍ وَلَا تَعْمَلُونَ مِنْ عَمَلٍ إِلَّا كُنَّا عَلَيْكُمْ شُهُودًا إِذْ تُفِيضُونَ فِيهِ وَمَا يَعْزُبُ عَنْ رَبِّكَ مِنْ مِثْقَالِ ذَرَّةٍ فِي الْأَرْضِ وَلَا فِي السَّمَاءِ وَلَا أَصْغَرَ مِنْ ذَلِكَ وَلَا أَكْبَرَ إِلَّا فِي كِتَابٍ مُبِينٍ
(٦١)

“Engkau (Nabi Muhammad) tidak berada dalam suatu urusan, tidak membaca suatu ayat Al-Qur'an, dan tidak pula mengerjakan suatu pekerjaan, kecuali Kami menjadi saksi atasmu ketika kamu melakukannya. Tidak ada yang luput sedikit pun dari (pengetahuan) Tuhanmu, walaupun seberat zarah, baik di bumi maupun di langit. Tidak ada sesuatu yang lebih kecil dan yang lebih besar daripada itu, kecuali semua tercatat dalam kitab yang nyata (Lauh Mahfuz)” (QS Yunus [10]:61).

Kata *dzarrah* berasal dari bahasa Arab yang berarti “butiran kecil” atau “partikel”. Dalam konteks agama Islam, kata *zarrah* seringkali digunakan dalam Al-Qur'an untuk menggambarkan sesuatu yang berukuran kecil, seperti “seberat zarah” yang merujuk pada sesuatu yang sangat kecil atau menggambarkan kesalahan dan kebaikan yang sangat kecil yang dilakukan seseorang. Sementara dalam ilmu fisika, secara implisit ayat ini mengandung penafsiran yang mengarah pada keberadaan

mekanika kuantum karena membahas tentang partikel-partikel mikroskopis sekaligus perilaku dan sifat-sifat yang dibawa oleh partikel mikroskopis tersebut (Mulyono and Abtokhi, 2006). Kata *zarrah* merujuk pada konsep atom ataupun partikel-partikel penyusunnya yang merupakan unit dasar dari materi dan energi dalam dalam alam semesta.

Untuk menunjukkan bahwa dalam ruang vakum benar-benar terdapat energi, upaya eksperimental efek Casimir pertama kali dilakukan oleh Sparnaay (1958) untuk membuktikan keberadaan efek Casimir. Sparnaay menggunakan pelat logam perak dan pelat kuarsa yang disusun paralel. Eksperimen pertama ini menghasilkan nilai ketidakpastian 100%. Salah satu kesulitan besarnya adalah mempertahankan keadaan paralel yang sempurna. Lamoreaux (1997) membuktikan efek Casimir melalui eksperimen dengan mengukur gaya Casimir antara pelat datar dan bola logam dalam jarak dekat. Pengukuran dilakukan dengan sistem elektromekanis berdasarkan pendulum torsi dan memperoleh tingkat ketidakpastian dengan teori sebesar 5%. Satu tahun kemudian, dengan menggunakan mikroskop gaya atom, Mohideen and Roy (1998) mengukur gaya Casimir antara pelat dan bola logam berdiameter $196\mu m$ dengan jarak pemisahan permukaan keduanya dari 0,1 hingga $0,9\mu m$. Hasil pengamatan konsisten dengan perhitungan teoretis termasuk konduktivitas terbatas, kekasaran, dan koreksi suhu. Hasil standar deviasi menunjukkan nilai 1% pada jarak plat terkecil.

Kesesuaian hasil pengamatan dengan perhitungan teoretik, menjadikan efek Casimir merupakan salah satu topik yang menarik untuk dikaji lebih lanjut. Dalam kasus medan elektromagnetik, penelitian efek Casimir divariasikan dalam berbagai modifikasi geometri. Roy and Mohideen (1999) mengamati gaya Casimir antara pelat berlapis aluminium dan bola dengan pengaruh gelombang periodik dengan amplitudo kecil. Pengamatan dilakukan dengan mikroskop gaya atom dan menyimpulkan bahwa gaya Casimir tidak hanya bergantung pada perubahan pemisahan jarak objek melainkan juga bergantung pada syarat batas. Harris et al. (2000) men-

gukur presisi gaya Casimir menggunakan permukaan emas metalik dengan bola berlapis emas untuk menghilangkan beberapa ketidakpastian pengukuran dengan standar deviasi sebesar 1% pada pengukuran jarak terdekat. Bressi et al. (2002) melakukan pengukuran gaya Casimir antara permukaan konduktor paralel dengan jarak pemisahan antara 0,5 hingga 3,0 mm. Eksperimen ini berhasil mencapai tingkat presisi 15% dan dapat menunjukkan adanya fluktuasi kuantum yang mempengaruhi skala makroskopis.

Selain memodifikasi geometri bahan konduktor yang bekerja, efek Casimir juga dapat dikaji secara teoretis dengan memodifikasi medan eksternal yang mempengaruhi pelat dalam ruang vakum. Langfeld et al. (1993) mengkaji efek Casimir dari interaksi kuat medan skalar yang memenuhi kondisi batas periodik di pelat persegi panjang. Cougo-Pinto et al. (1998) menurunkan rapat energi Casimir dari partikel Fermion dengan menambahkan kondisi eksternal berupa medan magnet. Metode yang digunakan adalah *Schwinger's proper time* dan menerapkan syarat batas periodik dan antiperiodik. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa dalam kondisi yang sesuai, medan magnet dapat meningkatkan densitas energi fermionik. Energi vakum dari medan skalar dan medan fermion yang terpengaruh medan magnet eksternal juga dikaji secara numerik dalam penelitian Elizalde et al. (2002). Syarat batas Dirichlet digunakan untuk medan skalar sedangkan medan fermion menggunakan syarat batas MIT. Penelitian serupa juga dilakukan oleh Ostrowski (2006) dimana energi vakum yang dikaji adalah medan skalar dengan menggunakan syarat batas Dirichlet dan medan Fermion dengan syarat batas antiperiodik.

Penelitian terbaru berkenaan dengan efek Casimir dengan medan eksternal diteliti oleh Sitenko (2015) dengan menambahkan medan magnet sebagai medan eksternal dan mempelajari pengaruh syarat batas pada medan spinor bermuatan dalam ruang vakum yang dibatasi pelat netral paralel. Himpunan syarat batas yang mempengaruhi harus memenuhi operator Hamiltonian Dirac yang *self-adjoint*. Hasil perhitungan matematis menunjukkan bahwa dalam kasus medan magnet yang cukup

kuat dan pemisahan jarak pelat yang cukup besar, gaya Casimir mengalami interaksi tolak-menolak. Namun sejauh ini belum ada pengamatan eksperimental yang dilakukan untuk mengevaluasi medan magnet eksternal seperti yang dijelaskan dalam penelitian tersebut.

Berangkat dari penelitian sebelumnya, telah terbukti bahwa interaksi partikel elementer dapat menunjukkan hal-hal baru saat dikaji dalam suatu medan eksternal dan dalam tinjauan kuantum energi dapat tercipta dari fluktuasi medan dalam ruang vakum yang merepresentasikan kemunculan pasangan partikel-antipartikel. Dalam kasus medan kuantum bermuatan listrik, menarik untuk mengetahui bagaimana medan magnetik eksternal berpengaruh terhadap fluktuasi medan fermion yang terjadi. Maka dari itu perlu dilakukan penelitian untuk mengetahui nilai energi yang dimiliki medan fermion yang terpengaruh medan magnetik eksternal, dimana dinamika medan fermion ditinjau menggunakan persamaan Dirac yang terpengaruh medan magnetik dan dibatasi oleh dua pelat logam netral sejajar serta medan magnet mengarah tegak lurus terhadap pelat logam. Penelitian ini akan berfokus pada studi solusi persamaan Dirac dalam pengaruh medan magnetik, setelah itu dilakukan perhitungan analitik untuk memperoleh besar energi Casimir.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang akan diteliti dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana solusi persamaan Dirac dalam pengaruh medan magnetik?
2. Bagaimana energi Casimir partikel Fermion dalam pengaruh medan magnetik?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, tujuan dari penelitian ini antara lain:

1. Untuk memperoleh solusi persamaan Dirac dalam pengaruh medan magnetik.
2. Untuk memperoleh energi Casimir partikel Fermion dalam pengaruh medan magnetik.

1.4 Batasan Masalah

Penelitian tentang energi casimir ini memiliki cakupan yang sangat luas. Untuk membatasi ruang lingkup pembahasan penelitian ini, penulis memberi batasan-batasan masalah agar isi pembahasan tidak melenceng dari rumusan masalah. Maka dari itu, batasan permasalahan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Partikel Fermion yang dikaji memiliki massa yang sangat kecil (*massless*)
2. Perhitungan yang dilakukan adalah perhitungan analitik.

1.5 Manfaat Penelitian

Setelah menyelesaikan dan menyusun hasil penelitian, diharapkan penelitian ini dapat memberi informasi kepada orang-orang yang membacanya, khususnya dibidang fisika teori. Manfaat penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Secara akademis, penelitian ini diharapkan memberikan ilmu yang bermanfaat kepada masyarakat ilmiah maupun berbagai pihak yang berkepentingan.
2. Secara praktis, penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai referensi untuk memahami efek Casimir dari partikel fermion dalam pengaruh medan magnetik.
3. Secara teoritis, penelitian ini diharapkan akan memberi masukan dan kontribusi yang berarti berupa teori dan analisis secara matematik, khususnya pada penelitian yang berkaitan dengan efek Casimir.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Mekanika Kuantum Relativistik

Mekanika memberikan informasi tentang bagaimana suatu sistem akan berperilaku bila sistem tersebut dikenai gaya. Mekanika Newton mampu mendeskripsikan secara tepat gerak obyek dalam kehidupan sehari-hari. Akan tetapi untuk obyek berkecepatan tinggi ($v \approx c$), mekanika Newton menjadi tidak memadai sehingga harus disempurnakan dengan teori relativitas khusus yang diperkenalkan oleh Einstein pada tahun 1905. Sementara untuk obyek yang sangat kecil ($\ll 10^{-9}m$) namun memiliki kecepatan rendah ($v \ll c$), mekanika yang memadai untuk mendeskripsikannya adalah mekanika kuantum yang dikembangkan Schrodinger, Heisenberg, Bohr, dll. Sementara mekanika yang memadai untuk mendeskripsikan obyek berkelajuan tinggi dan berdimensi sangat kecil sekaligus adalah mekanika kuantum relativistik yang dikembangkan Klein-Gordon dan Dirac.

2.1.1 Ruang dan Waktu Relativistik

Teori dasar yang berlaku dalam fisika secara umum harus dapat memenuhi prinsip relativitas sekaligus juga teori kuantum. Sebelum sampai pada kuantum relativistik, salah satu formalisme matematis yang perlu diulas adalah ruang dan waktu relativistik. Koordinat dalam teori relativitas merupakan koordinat ruang-waktu 4 dimensi yang biasa disebut koordinat Minkowski. Dalam koordinat Minkowski dikenal adanya koordinat kovarian dan kontravarian. Koordinat kontravarian dan kovarian secara berurutan diberikan oleh (Anugraha, 2005):

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \mathbf{r}) \quad (2.1)$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

Hubungan antara kontravarian dengan kovarian diperoleh dengan memperkenalkan

tensor metrik (Gautama, 2018),

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Sehingga kaitan antara kontravarian dengan kovarian dapat dihubungkan melalui persamaan

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad (2.4)$$

Diferensial parsial dalam notasi vektor-4 didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \\ \partial^\mu &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \end{aligned} \quad (2.5)$$

atau

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \\ \partial_\mu &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \end{aligned} \quad (2.6)$$

Sehingga besar nilai operator skalar-4 dapat didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \partial_\mu \partial^\mu &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

dimana $\partial_\mu \partial^\mu = \square$ disebut sebagai operator d'Alembert.

2.1.2 Hubungan Energi dan Momentum Relativistik

Dalam teori relativitas, notasi energi dan momentum partikel dalam vektor-4 diberikan oleh kontravarian (Anugraha, 2005):

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \quad (2.8)$$

atau diberikan oleh kovarian

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = \left(\frac{E}{c}, -p_x, -p_y, -p_z \right) \quad (2.9)$$

Seperti halnya koordinat ruang waktu, hubungan antara momentum kovarian dan kontravarian diberikan oleh persamaan

$$p^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu \quad (2.10)$$

Sedangkan besarnya vektor-4 momentum kontravarian dengan kovariannya diberikan oleh

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \\ p^\mu p_\mu &= (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 \\ &= m_0^2 \gamma^2 c^2 - \gamma^2 m_0^2 v_1^2 - \gamma^2 m_0^2 v_2^2 - \gamma^2 m_0^2 v_3^2 \\ &= m_0^2 \gamma^2 c^2 - \gamma^2 m_0^2 v^2 \\ p^\mu p_\mu &= \gamma^2 m_0^2 (c^2 - v^2) \\ &= \frac{m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ p^\mu p_\mu &= m_0^2 c^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) memberikan gambaran tentang hubungan energi dan momentum sebagai

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^2 \quad (2.12)$$

yang sesuai dengan hubungan energi-momentum yang dikemukakan oleh Albert Einstein dalam teori relativitasnya.

2.1.3 Prinsip Ketidakpastian Heisenberg

Salah satu asas yang dihasilkan fisika kuantum adalah asas ketidakpastian Heisenberg yang menggambarkan hubungan dua keadaan yang mencirikan suatu keadaan sistem. Werner Heisenberg (1927) mengemukakan bahwa posisi atau lokasi suatu elektron dalam atom tidak dapat ditentukan dengan pasti dan tidak dapat ditentukan dalam waktu yang bersamaan. Hal ini dikarenakan semakin akurat momentum ditentukan, maka semakin tidak akurat penentuan posisinya. Sebaliknya, semakin akurat penentuan posisinya maka semakin tidak akurat penentuan momentumnya.

Persamaan dari prinsip ketidakpastian Heisenberg secara umum dituliskan sebagai:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) menyatakan bahwa hasil ketidakpastian posisi suatu benda Δx dan ketidakpastian komponen momentum dalam arah x yaitu Δp akan lebih besar atau sama dengan $h/4\pi$, dengan h adalah konstanta Planck. Sehingga tidak mungkin untuk menentukan secara bersamaan posisi dan momentum suatu benda. Jika diatur agar Δx kecil yang bersesuaian dengan panjang gelombang yang sempit, maka Δp akan menjadi besar. Sebaliknya, jika Δp direduksi dengan suatu cara tertentu, maka panjang gelombangnya akan melebar dan Δx menjadi besar.

Dalam suatu proses atomik, bentuk prinsip ketidakpastian Heisenberg tidak hanya berlaku untuk momentum dan posisi, tetapi juga untuk energi dan waktu. Jika kita mengukur energi suatu benda maka hasil pengukuran pasti mengandung ketidakpastian, dimana ketidakpastian semakin besar jika waktu pengukuran makin

pendek. Bentuk dari prinsip ketidakpastian energi ΔE dan waktu Δt adalah

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} \quad (2.14)$$

2.1.4 Persamaan Dirac Elektron Bebas

Persamaan Dirac adalah persamaan differensial parsial dari gelombang relativistik yang diturunkan oleh Paul Dirac pada tahun 1928. Persamaan ini menggambarkan pergerakan partikel-partikel elementer yang memiliki spin setengah atau yang disebut sebagai partikel fermion, seperti elektron, proton, quark, muon, neutrino dan antipartikelnya (Pambudi, 2022). Persamaan Dirac dirumuskan sebagai upaya untuk menggabungkan teori relativitas dan mekanika kuantum dan digunakan mengatasi beberapa permasalahan pada persamaan Klein-Gordon, yaitu:

1. Persamaan Klein-Gordon tidak memenuhi persamaan kontinuitas, dimana probabilitas rapat muatan didefinisikan sebagai:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (2.15)$$

dan probabilitas rapat arus sebagai:

$$\mathbf{J} = -i\hbar c^2 (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (2.16)$$

Nampak bahwa probabilitas rapat muatan pada persamaan (2.15) tidak selalu bernilai positif. Sehingga kuantitas ini tidak dapat ditafsirkan sebagai nilai kemungkinan mendapatkan partikel.

2. Persamaan Klein-Gordon diturunkan melalui hubungan energi dan momentum relativistik seperti pada persamaan (2.12), dimana solusi dari energi adalah

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (2.17)$$

Artinya solusi dari energi tidak selalu bernilai positif, sehingga akan menghadirkan spektrum energi negatif yang tidak dapat dijelaskan oleh persamaan Klein-Gordon.

3. Persamaan Klein-Gordon mengandung turunan kedua terhadap waktu, sehingga untuk mencari solusi fungsi gelombangnya diperlukan integral dua kali. Hal ini memberikan konsekuensi terbentuknya dua derajat kebebasan yang mana tidak terdapat pada persamaan Schrodinger.

Bentuk persamaan Dirac untuk partikel bebas diberikan dari persamaan energi relativistik (2.12) yang berlaku pada sebuah fungsi gelombang ψ dengan E adalah operator energi yang didefinisikan sebagai $i\hbar\partial/\partial t$. Sehingga dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= (\sqrt{\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4})\psi \\ i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} &= c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}\psi + \beta mc^2\psi \end{aligned} \quad (2.18)$$

dengan $\mathbf{p} = i\hbar\nabla$ merupakan operator momentum, m adalah massa partikel, serta α dan β adalah konstanta yang memenuhi hubungan antikomutasi $\alpha^2 = \beta^2 = 1$.

Strategi dasar Dirac adalah dengan ”memfaktorkan” hubungan energi - momentum sehingga menghasilkan persamaan keadaan untuk partikel dengan spin tengahan. Dalam notasi vektor-4 hubungan energi-momentum dirumuskan sebagai (Griffiths, 1987)

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu - m^2c^2 &= 0 \\ p^\mu p_\mu - m^2c^2 &= (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu - m^2c^2 &= \beta^\kappa p_\kappa \gamma^\lambda p_\lambda - \beta^\kappa p_\kappa mc + mc\gamma^\lambda p_\lambda - m^2c^2 \\ p^\mu p_\mu - m^2c^2 &= \beta^\kappa p_\kappa \gamma^\lambda p_\lambda - (\beta^\kappa p_\kappa - \gamma^\kappa p_\kappa)mc - m^2c^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

dengan β^κ dan γ^κ adalah koefisien yang belum diketahui. Dari persamaan (2.20)

dapat diperoleh hubungan

$$\begin{aligned}\beta^\kappa - \gamma^\kappa p_\kappa &= 0 \\ \beta^\kappa &= \gamma^\kappa\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}p^\mu p_\mu - m^2 c^2 &= \beta^\kappa p_\kappa \gamma^\lambda p_\lambda - m^2 c^2 \\ p^\mu p_\mu &= \beta^\kappa p_\kappa \gamma^\lambda p_\lambda \\ p^\mu p_\mu &= \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda\end{aligned}\tag{2.21}$$

dengan $\mu = \kappa = \lambda = (0, 1, 2, 3)$ adalah indeks ruang waktu. Persamaan (2.21) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned}(p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 + (\gamma^2)^2 (p^2)^2 \\ &\quad + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 + \gamma^0 \gamma^1 p_0 p_1 + \gamma^0 \gamma^2 p_0 p_2 \\ &\quad + \gamma^0 \gamma^3 p_0 p_3 + \gamma^0 \gamma^3 p_0 p_3 + \gamma^1 \gamma^0 p_1 p_0 \\ &\quad + \gamma^1 \gamma^2 p_1 p_2 + \gamma^1 \gamma^3 p_1 p_3 + \gamma^2 \gamma^0 p_2 p_0 \\ &\quad + \gamma^2 \gamma^1 p_2 p_1 + \gamma^2 \gamma^3 p_2 p_3 + \gamma^3 \gamma^0 p_3 p_0 \\ &\quad + \gamma^3 \gamma^1 p_3 p_1 + \gamma^3 \gamma^2 p_3 p_2 \\ (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 + (\gamma^2)^2 (p^2)^2 \\ &\quad + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 + (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p_0 p_1 \\ &\quad + (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p_0 p_2 \\ &\quad + (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^0 \gamma^3) p_0 p_3 \\ &\quad + (\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) p_1 p_2 \\ &\quad + (\gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^1) p_1 p_3 \\ &\quad + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p_2 p_3\end{aligned}$$

sehingga diperoleh bahwa

$$\gamma^0 = 1; \gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i; \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0, \quad \text{untuk } \mu \neq \nu \quad (2.22)$$

Menggunakan konvensi standar “Bjorken and Drell”, gamma direpresentasikan sebagai (Bjorken and Drell, 1964):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

dengan σ^i adalah matriks pauli dan indeks $i = (x, y, z)$.

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya persamaan (2.19) dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu - m^2 c^2 &= (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \\ \gamma^\mu p_\mu + mc &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

karena $p^\mu = -i\hbar\partial_\mu$ dan persamaan bekerja pada fungsi gelombang ψ , maka persamaan (2.23) dapat dijabarkan menjadi:

$$\begin{aligned} -i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi + mc\psi &= 0 \\ i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) disebut sebagai persamaan Dirac, dimana jika berlaku satuan unit ($\hbar = c = 1$) maka bentuk persamaan Dirac adalah

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0 \quad (2.25)$$

Solusi Persamaan Dirac disebut sebagai spinor Dirac, yakni berupa sebuah matriks kolom (4×1) (Das, 2008),

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

dengan

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Jika ψ diasumsikan tidak bergantung terhadap posisi sehingga partikel dalam keadaan diam,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

maka persamaan (2.24) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} i\hbar\gamma^0\partial_0\psi - mc\psi &= 0 \\ \frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi &= 0 \\ \gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -i\frac{mc^2}{\hbar}\psi \end{aligned} \quad (2.28)$$

Jika didefinisikan bahwa $E = mc^2$ dan menggunakan satuan natural, maka dalam bentuk matriks, persamaan (2.28) ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_A}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_B}{\partial t} \end{pmatrix} = -iE \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_A}{\partial t} &= -iE\psi_A \\ \frac{\partial\psi_B}{\partial t} &= -iE\psi_B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\psi_A(0)}^{\psi_A(t)} \frac{\partial \psi_A}{\psi_A} &= -iE \int_0^t \partial t \\
\ln \frac{\psi_A(t)}{\psi_A(0)} &= -iEt \\
\psi_A(t) &= e^{-iEt} \psi_A(0)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Secara sama, solusi dari ψ_B adalah

$$\psi_B(t) = e^{iEt} \psi_B(0) \tag{2.31}$$

Partikel dalam keadaan diam memiliki energi diam sebesar $E = mc^2$ sehingga persamaan (2.30) menggambarkan keadaan partikel dengan energi positif (elektron) sedangkan persamaan (2.31) menggambarkan keadaan partikel dengan energi negatif ($E = -mc^2$) yang merepresentasikan anti partikel dengan energi positif (positron). Maka diperoleh empat solusi persamaan Dirac untuk partikel dengan spin $\frac{1}{2}$ yang bergantung terhadap waktu sebagai

$$\begin{aligned}
\psi^{(1)} &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \psi^{(2)} &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\psi^{(3)} &= e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \psi^{(4)} &= e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

yang secara berurutan menggambarkan elektron dengan spin up, elektron dengan spin down, positron dengan spin up, dan positron dengan spin down. Sementara, solusi gelombang bidang dapat dihitung dalam bentuk fungsi gelombang

$$\psi(x) = Ae^{-p_\mu x^\mu} u(p) \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\partial\psi(x) &= -ip_\mu A e^{-ip_\mu x^\mu} u(p) \\
\partial\psi(x) &= -ip_\mu \psi(x)
\end{aligned} \tag{2.34}$$

dengan mensubstitusi persamaan (3.24) ke persamaan (3.25), diperoleh

$$\begin{aligned}
i\gamma^\mu(-ip_\mu\psi) - m\psi &= 0 \\
(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi &= 0 \\
(\gamma^\mu p_\mu - m)(Ae^{ip_\mu x^\mu} u(p)) &= 0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Fungsi eksponensial pada persamaan (2.35) diatas tidak mungkin bernilai nol, sehingga dapat diperoleh bahwa

$$A(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0 \tag{2.36}$$

Dimana fungsi $u(p)$ merupakan bispinor berbentuk matriks kolom 1×4

$$u(p) = \begin{pmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \\ u_3(p) \\ u_4(p) \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

Jika nilai (p) memenuhi persamaan (2.36) maka pada persamaan (2.33) akan memenuhi persamaan Dirac (2.25). Dalam bentuk matriks, $\gamma^\mu p_\mu$ dapat ditulis sebagai:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu p_\mu &= \gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma}^i \cdot \mathbf{p} \\
\gamma^\mu p_\mu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}^i \\ -\boldsymbol{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu p_\mu &= \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma^\mu p_\mu &= \begin{pmatrix} E & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i & -E \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Jika persamaan (2.38) disubstitusi ke persamaan (2.36), akan diperoleh

$$\begin{aligned}
\left[\begin{pmatrix} E & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i & -E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} E - m & -\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i & -E - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix} (E - m)u_A - (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)u_B \\ (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)u_A - (E + m)u_B \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

sehingga didapatkan

$$u_A = \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)}{E - m} u_B \quad \text{dan} \quad u_B = \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)}{E + m} u_A \tag{2.40}$$

Dengan mensubstitusi nilai u_B ke nilai u_A , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
u_A &= \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)}{E - m} \left(\frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)}{E + m} \right) u_A \\
u_A &= \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)^2}{E^2 - m^2} u_A
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i$ didefinisikan sebagai

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i = p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + p_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + p_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i = \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

sehingga

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)^2 &= \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_z^2 + (p_x - ip_y)(p_x + ip_y) & p_z(p_x - ip_y) - p_z(p_x - ip_y) \\ p_z(p_x + ip_y) - p_z(p_x + ip_y) & p_z^2 + (p_x + ip_y)(p_x - ip_y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_z^2 + p_x^2 + p_y^2 & p_z p_x - ip_z p_y - p_z p_x + ip_z p_y \\ p_z p_x + ip_z p_y - p_z p_x + ip_z p_y & p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \end{pmatrix} \\ (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{p}^2 & 0 \\ 0 & \mathbf{p}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{p}^2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

dengan menggunakan definisi dari $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)^2$ maka persamaan (2.42) dapat ditulis sebagai

$$u_A = \frac{\mathbf{p}^2 c^2}{E^2 - m^2 c^4} u_A \quad (2.44)$$

Jika kedua ruas dibagi oleh u_A , didapatkan persamaan hubungan energi momentum relativistik sebagaimana pada persamaan (2.13)

$$\begin{aligned} E^2 - m^2 c^4 &= \mathbf{p}^2 c^2 \\ E &= \pm \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dimana nilai dari akar positif menunjukkan keadaan energi partikel dan akar negatif menunjukkan keadaan energi antipartikel. Dengan menggunakan persamaan (2.40) dan definisi $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i$, dapat diperoleh

1. Untuk $u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka

$$u_B = \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)}{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

2. Untuk $u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, maka

$$u_B = \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)}{E + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

3. Untuk $u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka

$$u_A = \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)}{E + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

4. Untuk $u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, maka

$$u_A = \frac{(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}^i)}{E + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Karena $u(p)$ adalah bispinor sebagaimana persamaan (2.37), maka dapat diketahui empat nilai dari $u(p)$ adalah:

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} & u^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-cp_z}{E+m} \end{pmatrix} \\
u^{(3)} &= \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & u^{(4)} &= \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-cp_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Nilai $u^{(1)}$ dan $u^{(2)}$ menunjukkan solusi persamaan Dirac dengan energi positif, sedangkan $u^{(3)}$ dan $u^{(4)}$ menunjukkan solusi persamaan Dirac dengan energi negatif. Namun energi negatif tidak dapat merepresentasikan energi positron karena semua partikel bebas membawa energi positif termasuk positron dan elektron. Maka dari itu, solusi “energi negatif” harus diubah sebagai energi positif antipartikel yang ditulis dalam $v(p)$. Sehingga besar nilai $v(p)$ untuk antipartikel adalah

$$\begin{aligned}
v^{(1)} &= \begin{pmatrix} \frac{-cp_z}{E+m} \\ \frac{-(p_x+ip_y)}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & v^{(2)} &= \begin{pmatrix} \frac{-(p_x-ip_y)}{E+m} \\ \frac{p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Maka diperoleh empat solusi dari persamaan Dirac sebagai

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= Ae^{ip_\mu x^\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} & \psi_2 &= Ae^{-ip_\mu x^\mu} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-cp_z}{E+m} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\psi_3 = Ae^{-ip_\mu x^\mu} \begin{pmatrix} \frac{-cp_z}{E+m} \\ \frac{-(p_x+ip_y)}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_4 = Ae^{-ip_\mu x^\mu} \begin{pmatrix} \frac{-(p_x-ip_y)}{E+m} \\ \frac{cp_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dengan A merupakan konstanta normalisasi. Sehingga diperoleh bahwa keadaan partikel akan memenuhi persamaan Dirac dalam bentuk:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \quad (2.53)$$

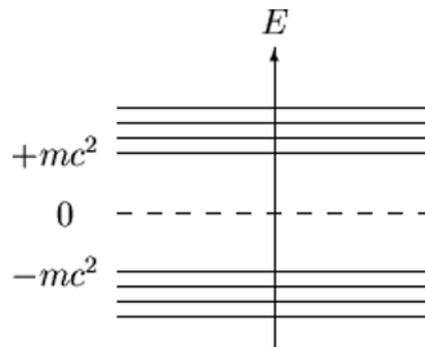
sedangkan keadaan antipartikel memenuhi:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)v = 0 \quad (2.54)$$

Solusi persamaan Dirac bertujuan untuk memberikan fungsi gelombang yang menggambarkan probabilitas keberadaan partikel dalam ruang dan waktu, dimana solusi persamaan Dirac menunjukkan adanya dua nilai energi yakni positif dan negatif seperti halnya pada persamaan Klein-Gordon. Interpretasi energi yang bernilai negatif tersebut oleh Dirac dijelaskan dalam postulatnya tentang lautan elektron yang kemudian memunculkan teori lubang (*hole theory*).

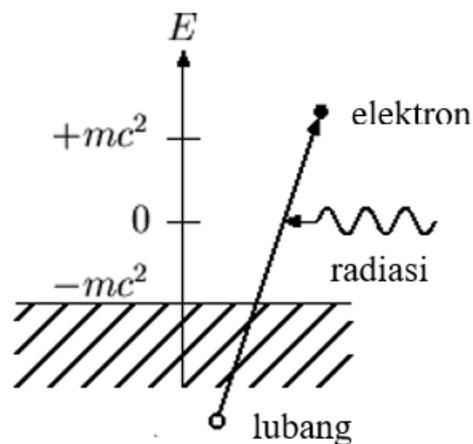
2.1.5 Interpretasi Energi Negatif Persamaan Dirac dan Prediksi Antipartikel

Dalam menggambarkan makna fisis dari persamaannya, Dirac mengusulkan untuk energi dari elektron bebas terbagi menjadi dua level energi yang simetris terhadap sumbu , seperti dalam gambar berikut.



Gambar 2.1: Plot spektrum energi elektron bebas

Hal terpenting dari interpretasi teori Dirac adalah dengan memperkenalkan sebuah model untuk keadaan vakum. Keadaan energi negatif tersebut terisi penuh oleh elektron dan secara bersama-sama elektron-elektron memiliki energi dan muatan negatif yang tak hingga.

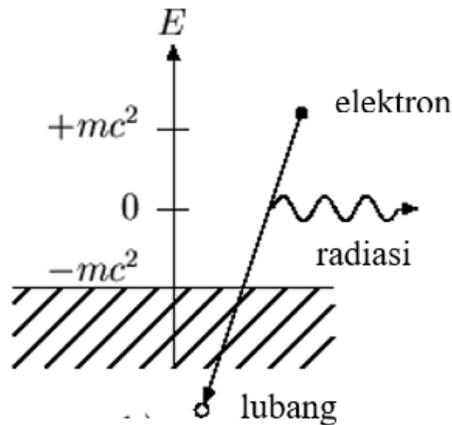


Gambar 2.2: Pembentukan pasangan partikel (*Pair production*)

Dari Gambar (2.2), dapat dijelaskan bahwa jika lautan Dirac yang terisi penuh dengan elektron terkena medan eksternal yang memiliki energi lebih besar dari $2mc^2$ dan jika radiasi tersebut diserap oleh salah satu elektron sehingga elektron tersebut memiliki energi positif, maka elektron akan tereksitasi ke dalam daerah energi positif dan terdapat lubang dalam lautan Dirac. Lubang ini didefinisikan sebagai positron, partikel baru yang merupakan antipartikel dari elektron yang bermassa dan berosilasi sama namun berbeda muatan. Peristiwa ini disebut sebagai produksi

pasangan atau *pair production*.

Sebaliknya, jika elektron yang mempunyai energi positif melepaskan energi berupa radiasi, maka elektron akan kembali menempati tempat semula dan positron yang tercipta akibat eksitasi elektron menjadi lenyap. Peristiwa ini disebut sebagai pemusnahan atau *pair annihilation*. Skema dari peristiwa tersebut dijelaskan dalam



Gambar 2.3: Pemusnahan pasangan partikel (*Pair annihilation*)

2.1.6 Pasangan Partikel dalam Kajian Islam

Telah diketahui bahwa Allah SWT menciptakan semua yang ada di dunia ini secara berpasang-pasangan, suami-istri, pria-wanita, jantan-betina, atau yang merujuk pada keadaan-keadaan seperti terang-gelap, putih-hitam, siang-malam, cinta-benci. Begitu pula untuk baik-buruk atau positif-negatif. Segala sesuatu yang diciptakan secara berpasang-pasangan ini dalam Al-Qur'an disebutkan pada Surah Adz-Zaariyaat ayat 49.

وَمِنْ كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ (٤٩)

“Segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan agar kamu mengingat (kebesaran Allah).” (QS Az-Zariyat [51]:49)

Dalam ayat tersebut Allah SWT menerangkan bahwa segala macam kejadian diciptakan dalam bentuk yang berlainan dan dengan sifat yang bertentangan. Yaitu

setiap sesuai itu merupakan lawan atau pasangan bagi yang lain. Dijadikan-Nya kebahagiaan dan kesengsaraan, petunjuk dan kesesatan, malam dan siang, langit dan bumi, hitam dan putih, lautan dan daratan, gelap dan terang, hidup dan mati, surga dan neraka, dan sebagainya. Semuanya itu dimaksudkan agar manusia ingat dan sadar serta mengambil pelajaran dari semuanya itu, sehingga mengetahui bahwa Allah SWT-lah Tuhan yang Maha Esa yang berhak disembah dan tidak ada sekutu bagi-Nya. Dia-lah yang Maha Kuasa menciptakan segala sesuatu berpasang-pasang, bermacam-macam jenis dan bentuk, sedangkan selain Allah adalah makhluk-Nya yang tidak berdaya semestinya menyadari itu (Bustami, 1991).

Ayat diatas belum sepenuhnya menjelaskan pasangan-pasangan yang bisa diketahui oleh manusia saat ini. Apalagi jika dikaitkan dengan pasangan lainnya yang sulit diketahui, seperti yang temaktub dalam Surah Yasin ayat 36:

سُبْحَانَ الَّذِي خَلَقَ الْأَزْوَاجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنْبِتُ الْأَرْضُ وَمِنْ أَنْفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ (٣٦)

“Mahasuci (Allah) yang telah menciptakan semuanya berpasang-pasangan, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka sendiri maupun dari apa yang tidak mereka ketahui.” (QS Yasin [36]:36).

Pada ayat ini diterangkan bukti kekuasaan Allah SWT bahwa Dia telah menciptakan makhluk-Nya berpasang-pasangan, baik pasangan jenis seperti lelaki dan perempuan, maupun berpasangan sifat seperti besar dan kecil, kuat dan lemah, tinggi dan rendah, kaya dan miskin, dan lain sebagainya. Itu semuanya adalah hal-hal yang berhasil diketahui manusia sampai saat sekarang ini. Akan tetapi berpasangan yang belum dapat dijangkau oleh pengetahuan dan penemuan manusia sampai masa kini masih banyak lagi. Boleh jadi, kemajuan ilmu pengetahuan dari rahasia-rahasia yang masih tersimpan tentang adanya pasangan dalam bidang-bidang yang lain belum diketahui pada masa sekarang ini.

Salah satu pasangan yang telah disebutkan ayat diatas mungkin saja adalah

pasangan partikel dan antipartikel jika dilihat dari sudut pandang fisika partikel (Purwanto, 2008). Antipartikel merupakan lawan dari partikel, yang mana mempunyai kesamaan massa dan spin, namun memiliki muatan yang berlawanan tanda dengan keadaan materinya. Jika partikel bertemu dengan antipartikelnya, keduanya akan saling memusnahkan (*pair annihilation*) dan berubah menjadi gelombang radiasi. Sebaliknya, partikel dan antipartikel dapat muncul dari gelombang radiasi yang sering dikenal sebagai (*pair production*).

2.2 Teori Medan Elektromagnetik

Seperti yang telah dibahas pada subbab sebelumnya bahwa mekanika adalah pengetahuan yang memberikan informasi tentang bagaimana perilaku suatu sistem bila sistem tersebut dikenai gaya atau interaksi. Di alam semesta ini, dikenal empat buah interaksi. Interaksi tersebut adalah sebagai berikut (Damanik, 2009):

1. Interaksi Lemah
2. Interaksi Kuat
3. Interaksi Elektromagnetik
4. Interaksi Gravitasi

Interaksi elektromagnetik merupakan satu-satunya interaksi yang telah dipahami lengkap secara teoritis. Permasalahan dasar elektromagnetik diawali untuk menyelesaikan persoalan sebuah muatan listrik di suatu tempat. Dalam elektrodinamika klasik, ruang vakum dipandang sebagai medium dimana tidak ada materi dalam sebuah volume dari suatu ruang. Oleh sebab itu, dalam ruang vakum tidak ada distribusi muatan listrik dan juga arus listrik (Hariyanto, 2006). Hukum-hukum elektrodinamika klasik ditemukan secara bertahap oleh Franklin, Coulomb, Ampere, Faraday dll. Akan tetapi penyempurna teori dalam satu kesatuan yang serasi dan kompak adalah James Clerk Maxwell.

2.2.1 Persamaan Maxwell

Interaksi elektromagnetik adalah penyatuan interaksi listrik dan magnet. Perilaku medan elektromagnetik dijelaskan oleh persamaan Maxwell yang didefinisikan sebagai

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.55)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.57)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.58)$$

Dimana \mathbf{E} menyatakan intensitas medan listrik, \mathbf{B} menyatakan kerapatan fluks magnetik, ρ adalah densitas muatan, dan \mathbf{J} adalah rapat arus. Persamaan (2.55) merupakan hukum Gauss yang menyatakan bahwa fluks medan listrik yang melalui suatu permukaan tertutup sebanding dengan total muatan listrik di dalam permukaan tersebut. Sementara persamaan (2.56) menyatakan bahwa divergensi dari medan magnet harus bernilai nol. Divergensi dari medan ini menggambarkan bahwa medan magnet memiliki loop yang tertutup dan tidak memiliki monopole magnetik yang berdiri sendiri sehingga disebut sebagai medan solenoidal (Fitzpatrick, 2008). Persamaan (2.57) merupakan hukum Faraday yang mendeskripsikan bahwa perubahan medan magnet dapat membangkitkan atau menginduksi medan listrik. Sedangkan persamaan (2.58) merupakan hukum Ampere dengan koreksi Maxwell.

Dalam kasus khusus seperti dalam tinjauan ruang hampa dimana dalam ketiadaan densitas muatan ρ dan ketiadaan rapat arus \mathbf{J} ($\rho = \mathbf{J} = 0$), keempat persamaan Maxwell tersebut akan mengalami reduksi, sehingga dinyatakan sebagai berikut,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.59)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.60)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.61)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.62)$$

Dalam mekanika kuantum, sebagian besar persamaan ditinjau menggunakan potensial daripada medan. Untuk menggambarkan medan magnet digunakan potensial vektor magnetik (A) yang dioperasikan dengan operator curl. Potensial vektor magnetik dapat digunakan di wilayah ketiadaan rapat arus ($\rho = 0$) serta dapat diperluas dalam kasus yang bervariasi. Dari persamaan (2.60), identitas vektor menunjukkan bahwa divergensi curl dari bidang vektor apapun selalu bernilai 0

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (2.63)$$

dimana A merupakan potensial vektor magnetik yang secara otomatis memenuhi syarat bahwa kerapatan fluks magnet harus memiliki divergensi nol. Sehingga dapat diperoleh bahwa

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.64)$$

2.3 Teori Medan Kuantum

Teori medan kuantum merupakan gabungan dari teori medan klasik, prinsip relativitas, dan mekanika kuantum. Fondasi mendasar dari sistematika teori medan kuantum dibangun oleh Dirac pada tahun 1927 dalam papernya yang berjudul “Teori Kuantum Radiasi Emisi dan Absorpsi”. Perbedaan dasar antara partikel dan medan adalah bahwa derajat kebebasan (cara partikel untuk berubah kondisi) partikel terbatas, sementara derajat kebebasan medan tidak terbatas. Medan merupakan entitas yang menyebar dalam ruang dan waktu. Oleh karena itu, medan merupakan kuantitas yang secara intrinsik bersifat gelombang.

Penerapan teori kuantum pada medan membuat besaran-besaran fisik (energi dan momentum) muncul dalam bentuk paket yang terpisah-pisah yang dapat dihitungkan. Kuantisasi terhadap medan elektromagnetik mengakibatkan kuantisasi terhadap beberapa medan klasik, kuantum medan menjadikan sifat-sifat partikel dapat dijelaskan dengan lebih baik (well-defined). Sebagai contoh, interaksi kelistrikan antara partikel bermuatan seperti elektron dan positron yang dibawa oleh medan elektromagnetik sebagai partikel perantara bernama foton. Elektron dan positron dapat dianggap sebagai kuantum medan elektron-positron. Alasan dilakukan kuantisasi medan partikel adalah untuk memperhitungkan sejumlah kemungkinan terjadinya perubahan jumlah partikel seperti dalam peristiwa kreasi (penciptaan) dan annihilasi (pemusnahan) pasangan elektron-positron.

Kehadiran teori penciptaan dan pemusnahan pasangan dikarenakan partikel mempunyai anti-partikelnya menyebabkan tinjauan sistem fisis menggunakan analisis partikel kurang dapat memenuhi representasi energi negatif yang dihasilkan oleh persamaan Klein-Gordon dan Dirac. Fungsi gelombang Klein-Gordon dan Dirac didesain untuk menggambarkan amplitudo probabilitas partikel tunggal, dan bukan menggambarkan amplitudo probabilitas sejumlah partikel sebagaimana yang berlaku di alam. Hal tersebut di atas memicu hadirnya pemikiran baru tentang tinjauan sistem fisis, yakni teori medan.

2.3.1 Prinsip Variasi

Teori medan kuantum pada prinsipnya merupakan generalisasi dari mekanika kuantum satu partikel ($q_r(t)$) dengan mengubahnya menjadi banyak partikel yang tak berhingga, disebut sebagai medan ($\phi(x, t)$). Akibatnya, teori Hamilton-Lagrange yang digunakan untuk menyatakan dinamika dari suatu titik dapat dipakai dalam teori medan kuantum dengan syarat bahwa digunakan fungsi rapat Lagrange (Lagrangian) dan fungsi rapat Hamilton (Hamiltonian).

Dalam teori medan klasik, persamaan prinsip aksi minimum didefinisikan se-

bagai (Aitchison and Hey, 2013):

$$S = \int dt L \quad (2.65)$$

dengan

$$L = \int dx \mathcal{L} \quad (2.66)$$

dimana \mathcal{L} merupakan rapat lagrangian yang bergantung pada ϕ , $\partial\phi/\partial x$, dan $\dot{\phi} = \partial\phi/\partial t$. Dalam kasus pendekatan medan, persamaan prinsip variasi dituliskan sebagai:

$$\delta S = \int d^4x \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \quad (2.67)$$

Didefinisikan bahwa $\delta(\partial_\mu \phi) = \partial_\mu(\delta\phi)$. Maka persamaan (2.67) menjadi:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right] \\ \delta S &= \int d^4x \left[\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

Menggunakan definisi $\int u dv = uv - \int v du$, suku kedua persamaan (2.68) menjadi:

$$\int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi - \int \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi \quad (2.69)$$

Dengan memberikan syarat batas integral terhadap persamaan diatas berupa volume seluruh ruang pada setiap suku, maka suku pertama pada persamaan ((2.69)) harus dievaluasi menuju tak terhingga. Sehingga nilai suku ini secara matematis tidak memiliki pengaruh ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi = 0$). Maka persamaan (2.68) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\delta S = \int d^4x \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi \right] \quad (2.70)$$

Dikarenakan prinsip aksi selalu berada pada keadaan stasioner ($\delta S = 0$), maka

persamaan (2.70) akan bernilai 0 untuk setiap nilai $\delta\phi$, sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (2.71)$$

Persamaan (2.70) disebut sebagai persamaan medan Euler-Lagrange.

Dalam teori medan kuantum, hamiltonian dapat dituliskan sebagai integral dari rapat hamiltonian \mathcal{H} .

$$H = \int d^3x \mathcal{H} \quad (2.72)$$

dimana H dipengaruhi oleh medan koordinat $\phi(x)$. Sementara momentum medan (rapat momentum) didefinisikan sebagai:

$$\phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \quad (2.73)$$

Secara teknik, momentum medan disebut juga sebagai rapat momentum kanonik untuk $\phi(x)$.

Dikarenakan besar rapat hamiltonian dipengaruhi oleh koordinat medan dan momentum medan, maka rapat hamiltonian dapat dirumuskan sebagai:

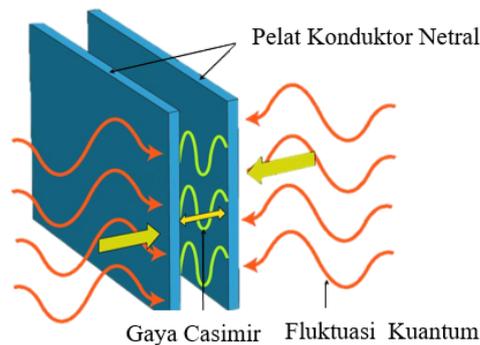
$$\mathcal{H}(x) = \phi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x) \quad (2.74)$$

dengan \mathcal{L} adalah rapat lagrangian, dan persamaan lagrangian invarian terhadap transformasi lorentz. Di sisi lain, persamaan Hamiltonian memungkinkan untuk menerapkan aturan kuantisasi kanonik.

2.4 Efek Casimir

Efek Casimir merupakan suatu kajian tentang kemunculan gaya dari ketiadaan partikel (vakum). Efek Casimir ditemukan oleh seorang fisikawan Belanda secara teoretik bernama Hendrik Casimir pada tahun 1948, yang menjelaskan bahwa

terdapat gaya tarik-menarik yang bekerja diantara dua pelat konduktor sempurna yang bersifat netral ketika didekatkan. Gaya tarik-menarik tersebut dikenal sebagai efek Casimir yang dapat muncul karena adanya fluktuasi kuantum medan elektromagnetik (Milton, 1999). Konfigurasi ini adalah kajian yang paling sederhana dalam mempelajari efek Casimir.



Gambar 2.4: Ilustrasi Efek Casimir

Penemuan efek Casimir diawali oleh adanya teori Van Der Waals. Pada tahun 1873 Van Der Waals telah membuktikan bahwa atom-atom yang netral dapat berinteraksi satu sama lain meskipun distribusi elektrisitas positif dan negatif bernilai sama. Dalam elektrodinamika klasik, tidak ada penyebab mengapa terjadi interaksi tersebut. Menurut Van Der Waals, interaksi tersebut dapat terjadi karena adanya dipole elektrik pada atom yang muncul dalam waktu singkat. Dalam percobaan untuk melanjutkan teori Van Der Waals, Hendrik Casimir mempublikasikan naskahnya di mana dia menghitung gaya antara sebuah atom netral dengan sebuah pelat konduktor sempurna. Kemudian dia juga menghitung gaya antara dua pelat konduktor sempurna tersebut (Yllka, 2019). Gaya tarik-menarik antara dua pelat seluas A yang dipisahkan oleh jarak L dapat dihitung sebagai (Casimir, 1948):

$$F = -\frac{hc\pi^2}{480L^4}A \quad (2.75)$$

dengan h adalah konstanta Planck dan c adalah kecepatan cahaya, dan $L \neq 0$.

Dalam mekanika klasik, ruang vakum didefinisikan sebagai ruang kosong. Namun dalam pandangan mekanika kuantum, ruang vakum merupakan ruang di mana terdapat medan yang berfluktuasi, seperti medan elektromagnetik. Secara realistis, ruang vakum diisi oleh pasangan partikel-partikel virtual yang terus berfluktuasi. Dari fluktuasi ini, pasangan partikel virtual dapat diciptakan dari ruang vakum dan dimusnahkan kembali ke ruang vakum dengan besar energi yang sama. Partikel-partikel virtual ini terbentuk dengan mengikuti prinsip ketidakpastian Heisenberg (Purwanto, 2020) :

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.76)$$

sehingga dalam selang waktu dengan ketidakpastian sebesar Δt , energi sistem akan memiliki ketidakpastian sebesar ΔE (Yllka, 2019). Ketika Δt cukup kecil, maka ketidakpastian ΔE cukup besar terhadap kemunculan pasangan partikel-antipartikel.

BAB III
SOLUSI PERSAMAAN DIRAC DALAM PENGARUH MEDAN
MAGNETIK

3.1 Persamaan Dirac dalam Pengaruh Medan Magnetik

Lagrangian Dirac merupakan persamaan gerak yang menggambarkan perilaku fermion, yaitu partikel yang memiliki spin setengah. Secara matematis, bentuk lagrangian Dirac diwakili oleh medan spinor ψ yang bergantung pada ruang (r) dan waktu (t). Dalam ruang datar Minkowski, rapat lagrangian Dirac dari partikel bebas bermassa m atau tanpa adanya interaksi dengan medan eksternal dapat dituliskan menggunakan matriks Dirac γ_μ sebagai (Faria and Melo, 2010)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (3.1)$$

dengan $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ merupakan spinor konjugat (*spinor adjoint*) dari ψ yang nilainya dapat diperoleh dengan mengambil kompleks konjugat dari setiap elemen spinor ψ dan mengubah baris menjadi kolom atau sebaliknya. Sementara ψ^\dagger (*psi dagger*) merupakan hermitian konjugat dari setiap elemen spinor ψ dan γ^0 adalah matriks gamma yang berfungsi untuk memastikan bahwa lagrangian Dirac invarian terhadap transformasi Lorentz.

Dalam pengaruhnya dengan medan eksternal, medan Dirac dapat digabungkan dengan medan elektromagnetik. Bentuk lagrangian dari interaksi ini dapat diperoleh dengan mengubah turunan parsial ∂_μ pada persamaan (3.1) dengan turunan kovarian D_μ yang didefinisikan sebagai

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (3.2)$$

dimana q disebut sebagai muatan yang merepresentasikan partikel fermion dan A_μ merupakan potensial vektor elektromagnetik dalam bentuk vektor empat yang

didefinisikan sebagai (Gautama, 2018)

$$A_\mu = (A_0, -A_1, -A_2, -A_3) = (\varphi, -\mathbf{A}) \quad (3.3)$$

Secara fisis, potensial vektor magnetik A_μ menggambarkan medan elektromagnetik yang terdiri dari gabungan dua medan vektor yakni medan listrik dan medan magnet. Namun dalam kasus khusus seperti pada interaksi medan magnetik eksternal, pengaruh medan listrik tidak ditinjau sehingga diasumsikan bernilai nol ($A_0 = 0$). Sehingga dapat diperoleh nilai vektor potensial magnetik sebagai

$$\begin{aligned} (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}) \\ (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} A_3 - \frac{\partial}{\partial z} A_2 \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} A_1 - \frac{\partial}{\partial x} A_3 \right) \hat{j} + \\ &\quad \left(\frac{\partial}{\partial x} A_2 - \frac{\partial}{\partial y} A_1 \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dalam penelitian ini, medan magnetik eksternal yang ditinjau merupakan medan magnetik konstan dan seragam yang searah dengan koordinat sumbu- z , sehingga tidak terjadi perubahan magnitudo pada medan magnetik dari waktu ke waktu. Oleh sebab itu, tidak terdapat magnitudo medan magnetik yang bergantung pada waktu. Maka melalui persamaan (3.4) dapat diperoleh nilai medan magnetik searah sumbu- z sebagai

$$B_z \hat{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x} A_2 - \frac{\partial}{\partial y} A_1 \right) \hat{k} \quad (3.5)$$

dimana besar nilai vektor potensial magnetik A_1 dan A_2 dapat ditentukan dari beberapa kemungkinan, diantaranya adalah

$$A_2 = 0, \quad A_1 = -yB_z + b \quad (3.6)$$

atau

$$A_1 = 0, \quad A_2 = xB_z + c \quad (3.7)$$

atau

$$A_1 = \frac{1}{2}yB_z + d, \quad A_2 = \frac{1}{2}xB_z + g \quad (3.8)$$

dengan b, c, d dan g merupakan sebuah konstanta (Bhattacharya, 2007). Dalam penelitian ini, digunakan kemungkinan nilai A_1 dan A_2 yang dianggap paling sederhana, yakni sebagaimana pada persamaan (3.6). Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2) ke dalam persamaan (3.1), persamaan lagrangian dari medan Dirac yang berinteraksi dengan medan magnetik dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi \end{aligned} \quad (3.9)$$

Karena ψ bersifat kompleks, ψ dan $\bar{\psi}$ dapat divariasikan secara independen untuk memperoleh persamaan gerak dari partikel fermion melalui persamaan Euler-Lagrange. Dengan demikian dari persamaan (3.9) dapat diperoleh persamaan Dirac yang berinteraksi dengan medan magnetik menggunakan variasi $\bar{\psi}$ sebagai

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial(\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi)}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right) &= 0 \\ \partial_\mu(0) - (i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - q\gamma^\mu A_\mu\psi - m\psi) &= 0 \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bentuk persamaan (3.10) merupakan perluasan dari persamaan Dirac pada partikel bebas. Secara sama, dengan menggunakan variasi ψ juga dapat diperoleh perluasan persamaan Dirac sebagai

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial(\bar{\psi})(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \right) - \frac{\partial(\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi)}{\partial\psi} = 0$$

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu - (-q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu - \bar{\psi}m)) &= 0 \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu + m) &= 0\end{aligned}\quad (3.11)$$

Dengan mengambil hermitian konjugat dari ψ dimana didefinisikan $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 = \psi\gamma^{0\dagger}$ dan $i = -i$, persamaan (3.11) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\psi^\dagger\gamma^0(-i\gamma^\mu\partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu + m) &= 0 \\ \psi\gamma^{0\dagger}(-i\gamma^\mu\partial_\mu + q\gamma^\mu A_\mu + m) &= 0\end{aligned}\quad (3.12)$$

Selanjutnya dengan mengubah $\gamma^{0\dagger} \rightarrow \gamma^0$ kemudian dikalikan dengan γ^0 dari kiri, serta didefinisikan bahwa $\gamma^0\gamma^0 = 1$, persamaan (3.12) menjadi

$$\begin{aligned}-i\partial_\mu\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\psi + \gamma^0\gamma^0\gamma^\mu A_\mu q\psi + \gamma^0\gamma^0 m\psi &= 0 \\ -i\partial_\mu\gamma^\mu\psi + \gamma^\mu A_\mu q\psi + m\psi &= 0 \\ (i\gamma^\mu\partial_\mu - q\gamma^\mu A_\mu - m)\psi &= 0\end{aligned}\quad (3.13)$$

Persamaan (3.13) merupakan persamaan Dirac yang berinteraksi dengan medan magnetik dan memiliki bentuk yang serupa dengan persamaan (3.10).

3.2 Solusi Persamaan Dirac dalam Pengaruh Medan Magnetik

Dalam pengaruh medan magnetik, persamaan Dirac untuk partikel bermuatan bermassa m didefinisikan sebagaimana pada persamaan (3.13). Pada solusi energi positif, fungsi gelombang bergantung ruang r dan waktu t didefinisikan sebagai

$$\Psi_{(r,t)}^+ = e^{-i\omega t}\psi^+(\mathbf{r})\quad (3.14)$$

dengan $\psi^+(\mathbf{r})$ dapat dinyatakan dalam matriks kolom 2×1 , sehingga dapat dituliskan sebagai

$$\Psi_{(r,t)}^+ = e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

dimana χ_1 dan χ_2 adalah komponen matriks, sedangkan ω adalah energi partikel.

Oleh karena itu persamaan (3.13) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned} (i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^j\partial_j - q\gamma^0A_0 - qyB\gamma^j - m)e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ (i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^j\partial_j - qyB\gamma^x - m)e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ i\gamma^0(-i\omega)e^{-i\omega t} + (i\gamma^j\partial_j - qyB\gamma^x - m)e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ (\omega\gamma^0 + i\gamma^j\partial_j - qyB\gamma^x - m)e^{-i\omega t} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

dengan j merupakan indeks ruang (1, 2, 3). Jika representasi Dirac didefinisikan sebagai

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

dan σ^j adalah matriks pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Maka dengan mengambil bagian suku yang tidak bergantung waktu, dapat diperoleh penjabaran dari persamaan (3.16) sebagai

$$\begin{pmatrix} \omega - m & i\sigma^j \partial_j - qyB\sigma^1 \\ -i\sigma^j \partial_j + qyB\sigma^1 & -(\omega + m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} (\omega - m)\chi_1 + (i\sigma^j \partial_j - qyB\sigma^1)\chi_2 \\ -i\sigma^j \partial_j + qyB\sigma^1 \chi_1 - (\omega + m)\chi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

Sehingga diperoleh dua buah persamaan berupa

$$(\omega - m)\chi_1 = (-i\sigma^j \partial_j + qyB\sigma^1)\chi_2 \quad (3.20)$$

$$(\omega + m)\chi_2 = (-i\sigma^j \partial_j + qyB\sigma^1)\chi_1 \quad (3.21)$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (3.20) ke dalam persamaan (3.21), maka diperoleh

$$\begin{aligned} (\omega - m)\chi_1 &= (-i\sigma^j \partial_j + qyB\sigma^1) \frac{(-i\sigma^j \partial_j + qyB\sigma^1)}{(\omega + m)} \\ (\omega^2 - m^2)\chi_1 &= (-i\sigma^1 \partial_1 - i\sigma^2 \partial_2 - i\sigma^3 \partial_3 + qyB\sigma^1) \\ &\quad (-i\sigma^1 \partial_1 - i\sigma^2 \partial_2 - i\sigma^3 \partial_3 + qyB\sigma^1)\chi_1 \\ (\omega^2 - m^2)\chi_1 &= (-i\sigma^1 \partial_1(-i\sigma^1 \partial_1) - i\sigma^1 \partial_1(-i\sigma^2 \partial_2) \\ &\quad -i\sigma^1 \partial_1(-i\sigma^3 \partial_3) - i\sigma^1 \partial_1(qyB\sigma^1) \\ &\quad -i\sigma^2 \partial_2(-i\sigma^1 \partial_1) - i\sigma^2 \partial_2(-i\sigma^2 \partial_2) \\ &\quad -i\sigma^2 \partial_2(-i\sigma^3 \partial_3) - i\sigma^2 \partial_2(qyB\sigma^1) \\ &\quad -i\sigma^3 \partial_3(-i\sigma^1 \partial_1) - i\sigma^3 \partial_3(-i\sigma^2 \partial_2) \\ &\quad -i\sigma^3 \partial_3(-i\sigma^3 \partial_3) - i\sigma^3 \partial_3(qyB\sigma^1) \\ &\quad + qyB\sigma^1(-i\sigma^1 \partial_1) + qyB\sigma^1(-i\sigma^2 \partial_2) \\ &\quad + qyB\sigma^1(-i\sigma^3 \partial_3) + qyB\sigma^1(qyB\sigma^1))\chi_1 \\ (\omega^2 - m^2)\chi_1 &= (-\partial_1^2 - \sigma^1 \sigma^2 \partial_1 \partial_2 - \sigma^1 \sigma^3 \partial_1 \partial_3 - iqyB\partial_1 \\ &\quad - \sigma^2 \sigma^1 \partial_2 \partial_1 - \partial_2^2 - \sigma^2 \sigma^3 \partial_2 \partial_3 - iq\sigma^2 \sigma^1 (B + yB\partial_2) \\ &\quad - \sigma^3 \sigma^1 \partial_3 \partial_1 - \sigma^3 \sigma^2 \partial_3 \partial_2 - \partial_3^2 - iqyB\sigma^3 \sigma^1 \partial_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -iqyB\partial_1 - iqyB\sigma^1\sigma^2\partial_2 - iqyB\sigma^1\sigma^3\partial_3 \\
& +q^2y^2B^2)\chi_1 \\
(\omega^2 - m^2)\chi_1 & = (-\partial_1^2 - (\sigma^1\sigma^2 + \sigma^2\sigma^1)\partial_1\partial_2 - (\sigma^1\sigma^3 + \sigma^3\sigma^1)\partial_1\partial_3 \\
& -2iqyB\partial_1 - \partial_2^2 - (\sigma^2\sigma^3 + \sigma^3\sigma^2)\partial_2\partial_3 \\
& -iqB(-i\sigma^3) - iqyB(\sigma^2\sigma^1 + \sigma^1\sigma^2)\partial_2 - \partial_3^2 \\
& -iqyB(\sigma^3\sigma^1 + \sigma^1\sigma^3)\partial_3 + q^2y^2B^2)\chi_1 \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Dengan relasi antikomutasi $\{\sigma^i, \sigma^j\} = \sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij}$, dimana δ^{ij} merupakan delta kronecker yang akan bernilai 1 ketika $i = j$ dan bernilai 0 jika $i \neq j$. Maka persamaan (3.22) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
(\omega^2 - m^2)\chi_1 & = (-\nabla^2 - 2iqyB\partial_1 + qB\sigma^3 + q^2y^2B^2)\chi_1 \\
(\omega^2 - m^2)\chi_1 & = (-\nabla^2 + q^2y^2B^2 - qB(2iy\partial_1 + \sigma^3))\chi_1 \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Dalam persamaan (3.23) terlihat bahwa koordinat sumbu x dan z hanya muncul dalam bentuk turunan, dimana untuk medan fermion yang bergerak ke kanan dengan momentum k searah sumbu- z positif, solusi χ_1 dapat menggunakan bentuk

$$\chi_1 = e^{ik_1x} e^{ik_3z} F(y) \tag{3.24}$$

dengan $F(y)$ merupakan dua komponen matriks yang bergantung pada koordinat y . Sehingga persamaan (3.23) dapat dijabarkan sebagai

$$(\omega^2 - m^2)e^{ik_1x} e^{ik_3z} F(y) = (-\nabla^2 + q^2y^2B^2 - qB(2iy\partial_1 + \sigma^3))e^{ik_1x} e^{ik_3z} F(y)$$

$$(\omega^2 - m^2 + \nabla^2 - q^2y^2B^2 + qB(2iy\partial_1 + \sigma^3))e^{ik_1x} e^{ik_3z} F(y) = 0$$

$$\left(\omega^2 - m^2 - k_1^2 + \frac{d^2}{dy^2} - k_3^2 - q^2y^2B^2 - qB(2yk_1 - \sigma^3) \right) e^{ik_1x} e^{ik_3z} F(y) = 0$$

Karena fungsi eksponensial pada persamaan diatas tidak mungkin bernilai nol, maka dapat diperoleh

$$\left(\omega^2 - m^2 - k_1^2 + \frac{d^2}{dy^2} - k_3^2 - q^2 y^2 B^2 - qB(2yk_1 - \sigma^3) \right) F(y) = 0 \quad (3.25)$$

Matriks pauli σ^3 dengan nilai eigen $s = \pm 1$ bersesuaian dengan spin partikel fermion (spin naik dan spin turun). Hal ini menyebabkan fungsi $F(y)$ memiliki dua solusi bebas berupa

$$F_+(y) = \begin{pmatrix} f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_-(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_-(y) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

dengan

$$\sigma^3 f_+(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} = F_+(y)$$

dan

$$\sigma^3 f_-(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_-(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f_-(y) \end{pmatrix} = -F_-(y)$$

dimana $F_+(y)$ merupakan komponen spinor dari partikel berspin naik dan $F_-(y)$ merupakan komponen spinor dari partikel berspin turun. Sehingga suku terakhir dari persamaan (3.25) dapat dituliskan sebagai

$$\sigma^3 F_s(y) = sF_s(y) \quad (3.27)$$

Maka secara keseluruhan persamaan (3.25) dapat dijabarkan sebagai

$$\left(\omega^2 - m^2 - k_1^2 + \frac{d^2}{dy^2} - k_3^2 - q^2 y^2 B^2 - qB(2yk_1 - s) \right) F_s(y) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{d^2}{dy^2} - q^2 y^2 B^2 - qB2yk_1 - k_1^2 + \omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs \right) F_s(y) = 0 \\
& \left(\frac{d^2}{dy^2} - (qyB + k_1)^2 + \omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs \right) F_s(y) = 0 \\
& \left(\frac{d^2}{dy^2} - \left(qB \left(y + \frac{k_1}{qB} \right) \right)^2 + \omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs \right) F_s(y) = 0 \\
& \left(\frac{d^2}{dy^2} - qB \left(\sqrt{qB} \left(y + \frac{k_1}{qB} \right) \right)^2 + \omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs \right) F_s(y) = 0 \\
& \left(\frac{1}{qB} \frac{d^2}{dy^2} - \left(\sqrt{qB} \left(y + \frac{k_1}{qB} \right) \right)^2 + \frac{\omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs}{qB} \right) F_s(y) = 0 \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Persamaan (3.28) merupakan persamaan diferensial orde dua, supaya diperoleh bentuk yang sederhana, dapat dimisalkan bahwa

$$\begin{aligned}
\xi &= \sqrt{qB} \left(y + \frac{k_1}{qB} \right) \\
d\xi &= \sqrt{qB} dy \quad (3.29)
\end{aligned}$$

dan

$$a = \left(\frac{\omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs}{qB} \right) \quad (3.30)$$

Sehingga secara sederhana persamaan (3.28) dapat dituliskan sebagai

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 + a \right) f_s(y) = 0 \quad (3.31)$$

Persamaan (3.31) merupakan bentuk khusus dari persamaan Hermite dengan nilai $a = 2\nu + 1$ dan $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ merupakan level Landau. Persamaan Hermite memiliki solusi yang dinyatakan dalam bentuk (Griffiths, 2004)

$$f_s(y) = N_\nu H_\nu(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \quad (3.32)$$

Dimana N_ν dan H_ν secara berurutan merupakan konstanta normalisasi dan fungsi hermite berorde ν . Untuk mencari nilai konstanta normalisasi N_ν dapat digunakan

sifat orthonormalitas fungsi Hermite $H_\nu(\xi)$ sehingga $f_s(y)$ ternormalisasi, yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| N_\nu H_\nu(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right|^2 \frac{d\xi}{\sqrt{qB}} = 1 \quad (3.33)$$

Didefinisikan sifat orthonormalitas dari fungsi Hermite sebagai

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) H_m(\xi) e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn} \quad (3.34)$$

dengan δ_{mn} adalah delta Kronecker yang bernilai 1 jika $m = n$ dan 0 jika $m \neq n$. Jika sifat orthonormalitas dari fungsi Hermite diterapkan pada persamaan (3.33), maka dapat diperoleh

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| N_\nu H_\nu(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right|^2 \frac{d\xi}{\sqrt{qB}}$$

$$1 = N_\nu^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_\nu(\xi)|^2 e^{-\xi^2} \frac{d\xi}{\sqrt{qB}}$$

$$1 = \frac{N_\nu^2 \sqrt{\pi} 2^\nu \nu!}{\sqrt{qB}} \quad (3.35)$$

Sehingga dapat diperoleh besar nilai konstanta normalisasi sebagai

$$N_\nu = \sqrt{\frac{(qB)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} 2^\nu \nu!}} \quad (3.36)$$

Sementara melalui persamaan (3.30) dapat diperoleh nilai eigen energi sebagai

$$\omega^2 = m^2 + k_3^2 - qBs + qBa$$

$$\omega = \pm \sqrt{m^2 + k_3^2 - |qB|s + |qB|(2\nu + 1)} \quad (3.37)$$

Dikarenakan F_s memiliki dua solusi independen, solusi F_s dicirikan oleh dua kondisi, yaitu ketika $s = +1$ maka $\nu = n$ dan untuk $s = -1$ maka $\nu = n - 1$. Hal

ini menyebabkan besar energi eigen memiliki nilai yang sama, yaitu

$$\omega_n = \pm \sqrt{m^2 + k_3^2 + 2n|qB|} \quad (3.38)$$

Persamaan (3.38) menunjukkan bahwa terdapat dua jenis solusi persamaan dirac, yakni solusi energi positif dan solusi energi negatif. Dalam konteks teori medan kuantum, solusi energi positif merujuk pada keberadaan partikel dalam ruang hampa. Sedangkan solusi energi negatif diinterpretasikan sebagai bagian dari model medan kuantum dimana keadaan vakum memungkinkan keberadaan partikel virtual.

3.2.1 Solusi Energi Positif

Dalam kasus energi positif dimana $\omega = \omega_n$, dapat ditentukan komponen spinor χ_2 dengan mensubstitusikan persamaan (3.24) ke persamaan (3.21), dimana diperoleh

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} (-i\sigma^j \partial_j + qyB\sigma^1) e^{ik_1x} e^{ik_3z} F_s(y) \\ \chi_2 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} (-i\sigma^1 \partial_1 - i\sigma^2 \partial_2 - i\sigma^3 \partial_3 + qyB) e^{ik_1x} e^{ik_3z} F_s(y) \\ \chi_2 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} \left[-i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_1 - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \partial_2 - i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_3 \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & qyB \\ qyB & 0 \end{pmatrix} \right] e^{ik_1x} e^{ik_3z} F_s(y) \\ \chi_2 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i\partial_1 \\ -i\partial_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\partial_2 \\ \partial_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\partial_3 & 0 \\ 0 & i\partial_3 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & qyB \\ qyB & 0 \end{pmatrix} \right] e^{ik_1x} e^{ik_3z} F_s(y) \end{aligned}$$

$$\chi_2 = \frac{1}{(\omega + m)} \left[\begin{pmatrix} -i\partial_3 & -i\partial_1 - \partial_2 + qyB \\ -i\partial_1 + \partial_2 + qyB & i\partial_3 \end{pmatrix} e^{ik_1x} e^{ik_3z} F_s(y) \right] \quad (3.39)$$

Berdasarkan solusi persamaan Hermite sebagaimana persamaan (3.32), pada partikel berspin naik dengan nilai $s = +1$, $f_s(y)$ didefinisikan sebagai

$$f_+(y) = \sqrt{\frac{(qB)^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \quad (3.40)$$

Dimana nilai turunannya terhadap variabel y adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(f_+(y)) &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial f_+(y)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial y}(f_+(y)) &= \sqrt{qB} \frac{\partial f_+(y)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial y}(f_+(y)) &= \sqrt{qB} \sqrt{\frac{(qB)^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) + e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} H_n(\xi) \right] \\ \frac{\partial}{\partial y}(f_+(y)) &= \sqrt{qB} \sqrt{\frac{(qB)^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} [-\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) + e^{-\frac{\xi^2}{2}} (2n H_{n-1}(\xi))] \\ \frac{\partial}{\partial y}(f_+(y)) &= -\xi \sqrt{qB} f_+(y) + 2n \sqrt{qB} \sqrt{\frac{(qB)^{\frac{1}{2}}}{2n 2^{n-1} (n-1)! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\xi) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f_+(y)) &= -\xi \sqrt{qB} f_+(y) + \sqrt{2nqB} f_-(y) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.41) ke persamaan (3.39), maka didapatkan

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \frac{e^{ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} k_3 & (k_1 + qyB) - \partial_2 \\ (k_1 + qyB) + \partial_2 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \chi_2 &= \frac{e^{ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} k_3 f_+(y) \\ (k_1 + qyB) f_+(y) + \partial_2 f_+(y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} k_3 f_+(y) \\ \xi \sqrt{qB} f_+(y) + (-\xi \sqrt{qB} f_+(y) + \sqrt{2nqB} f_-(y)) \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB} f_-(y) \end{pmatrix} \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Sehingga solusi energi positif berupa fungsi gelombang untuk medan Dirac yang bergerak dengan momentum k searah sumbu- z positif dengan spin partikel naik diperoleh sebagai

$$\psi_z^+(\mathbf{r}) = N e^{ik_1x} e^{ik_3z} \begin{pmatrix} (\omega_n + m) f_+(y) \\ 0 \\ k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB} f_-(y) \end{pmatrix}, \quad \text{untuk } n \geq 1 \quad (3.43)$$

$$\psi_z^+(\mathbf{r}) = N e^{ik_1x} e^{ik_3z} f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0 + m) \\ 0 \\ k_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{untuk } n = 0 \quad (3.44)$$

dimana N adalah konstanta normalisasi yang dapat dihitung dengan sifat orthonormalitas sebagai (Das, 2008)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{p'}^\dagger(\mathbf{r}) \psi_p(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')\mathbf{r}} d\mathbf{r} = |A|^2 2\pi \delta(p - p') \quad (3.45)$$

Secara fisis, bentuk orthonormalitas ini berfungsi untuk mempertahankan prinsip-prinsip dasar teori kuantum dan memastikan bahwa total peluang untuk menemukan partikel dalam semua keadaan adalah 1. Maka dari itu dapat diperoleh konstanta normalisasi yang memenuhi $\psi_z^+(\mathbf{r})$ sebagai

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik'_1 x} e^{-ik'_3 z} \begin{pmatrix} (\omega_n + m)f_+(y) \\ 0 \\ k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB}f_-(y) \end{pmatrix}^\dagger e^{ik_1 x} e^{ik_3 z} \begin{pmatrix} (\omega_n + m)f_+(y) \\ 0 \\ k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB}f_-(y) \end{pmatrix} dr \\
1 &= N^2 (\omega^2 + 2m\omega_n + m^2 + k_3^2 + 2nqB) 4\pi^2 \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_3 - k'_3) \\
1 &= N^2 (\omega_n^2 + 2m\omega_n + \omega_n^2) 4\pi^2 \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_3 - k'_3) \\
N^2 &= \frac{1}{2\omega_n(\omega_n + m)4\pi^2 \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_3 - k'_3)} \\
N &= \frac{1}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \tag{3.46}
\end{aligned}$$

dengan $\int (f_+(y))^2 dy = \int (f_-(y))^2 dy = 1$. Pada partikel berspin turun dengan nilai $s = -1$, f_s didefinisikan sebagai

$$f_-(y) = \sqrt{\frac{qB^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\xi) \tag{3.47}$$

dengan H_{n-1} adalah

$$H_{n-1}(\xi) = (-1)^{n-1} e^{\xi^2} \left[\frac{\partial^{n-1}}{(\partial \xi)^{n-1}} e^{-\xi^2} \right] \tag{3.48}$$

Maka bentuk turunan pertama dari persamaan (3.47) terhadap y adalah

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(f_-(y)) &= \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial f_-(y)}{\partial \xi} \\
\frac{\partial}{\partial y}(f_-(y)) &= \sqrt{qB} \sqrt{\frac{(qB)^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\xi) + e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{\partial}{\partial \xi} H_{n-1}(\xi) \right] \\
\frac{\partial}{\partial y}(f_-(y)) &= \sqrt{qB} \sqrt{\frac{(qB)^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}} \left[-\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\xi) + e^{-\frac{\xi^2}{2}} (-1)^{n-1} \right. \\
&\quad \left. \left(2\xi e^{\xi^2} \left(\frac{\partial^{n-1}}{(\partial \xi)^{n-1}} e^{-\xi^2} \right) + e^{\xi^2} \left(\frac{\partial^n}{(\partial \xi)^n} e^{-\xi^2} \right) \right) \right] \\
\frac{\partial}{\partial y}(f_-(y)) &= \sqrt{qB} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \sqrt{\frac{(qB)^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}} [-\xi H_{n-1}(\xi) + 2\xi H_{n-1} - H_n(\xi)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(f_-(y)) &= \sqrt{qB}e^{-\frac{\xi^2}{2}} \sqrt{\frac{(qB)^{\frac{1}{2}}}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}}} [\xi H_{n-1}(\xi) - H_n(\xi)] \\
\frac{\partial}{\partial y}(f_-(y)) &= \sqrt{qB}\xi f_-(y) - \sqrt{2nqB}f_+(y)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.49) ke dalam persamaan (3.39), maka dapat diperoleh komponen spinor spin turun sebagai

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x}e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} k_3 & (k_1 + qyB) - \partial_2 \\ (k_1 + qyB) + \partial_2 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_-(y) \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x}e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} (k_1 + qyB)f_-(y) - \partial_2 f_-(y) \\ -k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x}e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} \xi\sqrt{qB}f_-(y) - (\xi\sqrt{qB}f_-(y) - \sqrt{2nqB}f_+(y)) \\ -k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x}e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ -k_3 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Sehingga solusi energi positif berupa fungsi gelombang untuk medan Dirac yang bergerak dengan momentum k searah sumbu- z positif dengan spin partikel turun adalah

$$\psi_z^+(\mathbf{r}) = Ne^{ik_1x}e^{ik_3z} \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n + m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ -k_3 f_-(y) \end{pmatrix}, \quad \text{untuk } n \geq 1 \tag{3.51}$$

$$\psi_z^+(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{untuk } n = 0 \tag{3.52}$$

Maka bentuk kombinasi linier fungsi gelombang untuk medan Dirac beren-

ergi positif dan bergerak searah sumbu- z positif adalah

$$\psi_z^+(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_1x}e^{ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n+m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} (\omega_n+m)f_+(y) \\ 0 \\ k_3f_+(y) \\ \sqrt{2nqB}f_-(y) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n+m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ -k_3f_-(y) \end{pmatrix} \right],$$

untuk $n \geq 1$ (3.53)

$$\psi_z^+(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_1x}e^{ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0+m)}} C_0 f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0+m) \\ 0 \\ k_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{untuk } n=0 \quad (3.54)$$

Sementara untuk medan fermion yang bergerak ke kiri dengan momentum $-k$ searah sumbu- z negatif, solusi χ_1 dari persamaan (3.23) adalah

$$\chi_1 = e^{ik_1x}e^{-ik_3z}F(y) \quad (3.55)$$

Sehingga melalui cara yang sama, dapat ditentukan komponen spinor χ_2 dengan mensubstitusikan persamaan (3.55) ke persamaan (3.21) sebagai

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \frac{1}{(\omega_n+m)} (-i\sigma^1\partial_1 - i\sigma^2\partial_2 - i\sigma^3\partial_3 + qyB) e^{ik_1x}e^{-ik_3z}F_s(y) \\ \chi_2 &= \frac{1}{(\omega_n+m)} \left[-i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_1 - i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \partial_2 - i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_3 \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & qyB \\ qyB & 0 \end{pmatrix} \right] e^{ik_1x}e^{-ik_3z}F_s(y) \\ \chi_2 &= \frac{1}{(\omega_n+m)} \left[\begin{pmatrix} 0 & -i\partial_1 \\ -i\partial_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\partial_2 \\ \partial_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\partial_3 & 0 \\ 0 & i\partial_3 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} 0 & qyB \\ qyB & 0 \end{pmatrix} \left[e^{ik_1x} e^{-ik_3z} F_s(y) \right] \\
\chi_2 = & \frac{1}{(\omega_n + m)} \left[\begin{pmatrix} -i\partial_3 & -i\partial_1 - \partial_2 + qyB \\ -i\partial_1 + \partial_2 + qyB & i\partial_3 \end{pmatrix} \right] e^{ik_1x} e^{-ik_3z} F_s(y)
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Dimana untuk partikel berspin naik dengan nilai $s = +1$, persamaan (3.56) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x} e^{-ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -k_3 & (k_1 + qyB) - \partial_2 \\ (k_1 + qyB) + \partial_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x} e^{-ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -k_3 f_+(y) \\ (k_1 + qyB) f_+(y) + \partial_2 f_+(y) \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x} e^{-ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -k_3 f_+(y) \\ \xi \sqrt{qB} f_+(y) + (-\xi \sqrt{qB} f_+(y) + \sqrt{2nqB} f_-(y)) \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{ik_1x} e^{-ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB} f_-(y) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Sehingga solusi energi positif berupa fungsi gelombang untuk medan Dirac yang bergerak dengan momentum $-k$ searah sumbu- z negatif dengan spin partikel naik diperoleh sebagai

$$\psi_{-z}^+(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_1x} e^{-ik_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \begin{pmatrix} (\omega_n + m) f_+(y) \\ 0 \\ -k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB} f_-(y) \end{pmatrix}, \text{ untuk } n \geq 1 \tag{3.58}$$

$$\psi_{-z}^+(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_1x}e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0+m)}}f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0+m) \\ 0 \\ -k_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n=0 \quad (3.59)$$

Sedangkan pada partikel berspin turun dengan nilai $s = -1$, persamaan (3.56) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \frac{e^{ik_1x}e^{-ik_3z}}{(\omega_n+m)} \begin{pmatrix} -k_3 & (k_1+qyB) - \partial_2 \\ (k_1+qyB) + \partial_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_-(y) \end{pmatrix} \\ \chi_2 &= \frac{e^{ik_1x}e^{-ik_3z}}{(\omega_n+m)} \begin{pmatrix} (k_1+qyB)f_-(y) - \partial_2 f_-(y) \\ k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \\ \chi_2 &= \frac{e^{ik_1x}e^{-ik_3z}}{(\omega_n+m)} \begin{pmatrix} \xi\sqrt{qB}f_-(y) - (\xi\sqrt{qB}f_-(y) - \sqrt{2nqB}f_+(y)) \\ k_3 f_+(y) \end{pmatrix} \\ \chi_2 &= \frac{e^{ik_1x}e^{-ik_3z}}{(\omega_n+m)} \begin{pmatrix} \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ k_3 f_+(y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Sehingga solusi energi positif berupa fungsi gelombang untuk medan Dirac yang bergerak dengan momentum $-k$ searah sumbu- z negatif dengan spin partikel turun diperoleh sebagai

$$\psi_{-z}^+(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_1x}e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n+m)}} \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n+m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ k_3 f_-(y) \end{pmatrix}, \text{ untuk } n \geq 1 \quad (3.61)$$

$$\psi_{-z}^+(\mathbf{r}) = 0, \text{ untuk } n=0 \quad (3.62)$$

Maka bentuk kombinasi linier fungsi gelombang untuk medan Dirac berenergi positif dan bergerak searah sumbu- z negatif adalah

$$\psi_{-z}^+(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_1x}e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n+m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} (\omega_n+m)f_+(y) \\ 0 \\ -k_3f_+(y) \\ \sqrt{2nqB}f_-(y) \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n+m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ k_3f_-(y) \end{pmatrix} \right]$$

untuk $n \geq 1$ (3.63)

$$\psi_{-z}^+(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_1x}e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0+m)}} \tilde{C}_0 f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0+m) \\ 0 \\ -k_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{untuk } n = 0 \quad (3.64)$$

Sehingga solusi total energi positif medan Dirac yang terpengaruh medan magnetik dituliskan sebagai kombinasi linier antara fungsi gelombang dari medan Dirac yang bergerak searah sumbu- z positif dan medan Dirac yang bergerak searah sumbu- z negatif

$$\psi^+(\mathbf{r}) = \psi_z^+(\mathbf{r}) + \psi_{-z}^+(\mathbf{r}) \quad (3.65)$$

3.2.2 Solusi Energi Negatif

Untuk solusi energi negatif dimana $\omega = -\omega_n$, fungsi gelombang yang bergantung pada ruang r dan waktu t didefinisikan sebagai

$$\Psi_{(r,t)}^- = e^{i\omega t} \psi(\mathbf{r}) \quad (3.66)$$

dengan $\psi(\mathbf{r})$ dapat dinyatakan dalam matriks kolom 2×1 , sehingga

$$\Psi_{(r,t)}^- = e^{i\omega t} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Maka, dengan definisi energi negatif, melalui persamaan (3.19) dapat diperoleh dua buah persamaan sebagai

$$(\omega + m)\chi_1 = (i\sigma^j \partial_j - qyB\sigma^1)\chi_2 \quad (3.68)$$

$$(\omega - m)\chi_2 = (i\sigma^j \partial_j - qyB\sigma^1)\chi_1 \quad (3.69)$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (3.68) ke dalam persamaan (3.69), maka diperoleh

$$(\omega^2 - m^2)\chi_2 = (-\nabla^2 + q^2 y^2 B^2 - qB(2iy\partial_1 + \sigma^3))\chi_2 \quad (3.70)$$

dimana untuk medan fermion yang bergerak ke kanan dengan momentum k searah sumbu- z positif, solusi χ_2 dapat menggunakan bentuk

$$\chi_2 = e^{-ik_1 x} e^{-ik_3 z} F(y) \quad (3.71)$$

dengan $F(y)$ merupakan dua komponen matriks yang bergantung pada koordinat y .

Sehingga persamaan (3.70) dapat dijabarkan sebagai

$$(\omega^2 - m^2)e^{-ik_1 x} e^{-ik_3 z} F(y) = (-\nabla^2 + q^2 y^2 B^2 - qB(2iy\partial_1 + \sigma^3))e^{-ik_1 x} e^{-ik_3 z} F(y)$$

$$(\omega^2 - m^2 + \nabla^2 - q^2 y^2 B^2 + qB(2iy\partial_1 + \sigma^3))e^{-ik_1 x} e^{-ik_3 z} F(y) = 0$$

$$\left(\omega^2 - m^2 - k_1^2 + \frac{d^2}{dy^2} - k_3^2 - q^2 y^2 B^2 + qB(2yk_1 + \sigma^3) \right) e^{-ik_1 x} e^{-ik_3 z} F(y) = 0$$

Karena fungsi eksponensial pada persamaan diatas tidak mungkin bernilai nol, maka dapat diperoleh

$$\left(\omega^2 - m^2 - k_1^2 + \frac{d^2}{dy^2} - k_3^2 - q^2 y^2 B^2 + qB(2yk_1 + \sigma^3) \right) F(y) = 0 \quad (3.72)$$

dengan merubah suku terakhir berdasarkan definisi persamaan (3.27), maka persamaan (3.71) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 - m^2 - k_1^2 + \frac{d^2}{dy^2} - k_3^2 - q^2 y^2 B^2 + qB(2yk_1 + s) \right) F_s(y) = 0 \\ & \left(\frac{d^2}{dy^2} - q^2 y^2 B^2 + qB2yk_1 - k_1^2 + \omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs \right) F_s(y) = 0 \\ & \left(\frac{d^2}{dy^2} - (qyB - k_1)^2 + \omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs \right) F_s(y) = 0 \\ & \left(\frac{d^2}{dy^2} - \left(qB \left(y - \frac{k_1}{qB} \right) \right)^2 + \omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs \right) F_s(y) = 0 \\ & \left(\frac{d^2}{dy^2} - qB \left(\sqrt{qB} \left(y - \frac{k_1}{qB} \right) \right)^2 + \omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs \right) F_s(y) = 0 \\ & \left(\frac{1}{qB} \frac{d^2}{dy^2} - \left(\sqrt{qB} \left(y - \frac{k_1}{qB} \right) \right)^2 + \frac{\omega^2 - m^2 - k_3^2 + qBs}{qB} \right) F_s(y) = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Persamaan (3.72) merupakan persamaan diferensial orde dua, supaya diperoleh bentuk yang sederhana, dapat dimisalkan bahwa

$$\xi = \sqrt{qB} \left(y - \frac{k_1}{qB} \right) \quad (3.74)$$

Kemudian dengan cara sama, dapat ditentukan komponen spinor χ_1 dengan mensubstitusikan persamaan (3.71) ke persamaan (3.68) sebagai

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} \left[i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_1 + i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \partial_2 + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_3 \right. \\ & \quad \left. - \begin{pmatrix} 0 & qyB \\ qyB & 0 \end{pmatrix} \right] e^{-ik_1 x} e^{-ik_3 z} F_s(y) \\ \chi_1 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} \left[\begin{pmatrix} 0 & i\partial_1 \\ i\partial_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 \\ -\partial_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\partial_3 & 0 \\ 0 & -i\partial_3 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\chi_1 = \frac{1}{(\omega_n + m)} \left[\begin{array}{c} - \left(\begin{array}{cc} 0 & qyB \\ qyB & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc} i\partial_3 & i\partial_1 + \partial_2 - qyB \\ i\partial_1 - \partial_2 - qyB & -i\partial_3 \end{array} \right) \end{array} \right] e^{-ik_1x} e^{-ik_3z} F_s(y) \quad (3.75)$$

dimana pada partikel berspin naik dengan nilai $s = +1$ didefinisikan $f_+(y)$ sebagaimana pada persamaan (3.40). Kemudian menggunakan definisi ξ pada persamaan (3.74) dan mensubstitusikan persamaan (3.41), maka persamaan (3.75) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{-ik_3z}}{(\omega_n + m)} \left(\begin{array}{cc} k_3 & (k_1 - qyB) + \partial_2 \\ (k_1 - qyB) - \partial_2 & -k_3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} f_+(y) \\ 0 \end{array} \right) \\ \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{-ik_3z}}{(\omega_n + m)} \left(\begin{array}{c} k_3 f_+(y) \\ (k_1 - qyB) f_+(y) - \partial_2 f_+(y) \end{array} \right) \\ \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{-ik_3z}}{(\omega_n + m)} \left(\begin{array}{c} k_3 f_+(y) \\ -\xi \sqrt{qB} f_+(y) - (-\xi \sqrt{qB} f_+(y) + \sqrt{2nqB} f_-(y)) \end{array} \right) \\ \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{-ik_3z}}{(\omega_n + m)} \left(\begin{array}{c} k_3 f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB} f_-(y) \end{array} \right) \quad (3.76) \end{aligned}$$

Sehingga solusi energi negatif berupa fungsi gelombang untuk medan Dirac yang bergerak dengan momentum k searah sumbu- z positif dengan spin partikel naik diperoleh sebagai

$$\psi_z^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x}e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n+m)}} \begin{pmatrix} k_3f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB}f_-(y) \\ (\omega_n+m)f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n \geq 1 \quad (3.77)$$

$$\psi_z^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x}e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0+m)}} f_+(y) \begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ (\omega_0+m) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n = 0 \quad (3.78)$$

Pada partikel berspin turun dengan nilai $s = -1$, didefinisikan $f_-(y)$ sebagaimana pada persamaan (3.47). Dengan mensubstitusikan persamaan (3.49), maka persamaan (3.75) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x}e^{-ik_3z}}{(\omega_n+m)} \begin{pmatrix} k_3 & (k_1 - qyB) + \partial_2 \\ (k_1 - qyB) - \partial_2 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_-(y) \end{pmatrix} \\ \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x}e^{-ik_3z}}{(\omega_n+m)} \begin{pmatrix} (k_1 - qyB)f_+(y) + \partial_2 f_-(y) \\ -k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \\ \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x}e^{-ik_3z}}{(\omega_n+m)} \begin{pmatrix} -\xi\sqrt{qB}f_-(y) + (\xi\sqrt{qB}f_-(y) - \sqrt{2nqB}f_+(y)) \\ -k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \\ \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x}e^{-ik_3z}}{(\omega_n+m)} \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB}f_+(y) \\ -k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Sehingga solusi energi negatif berupa fungsi gelombang untuk medan Dirac yang bergerak dengan momentum k searah sumbu- z positif dengan spin partikel turun diperoleh sebagai

$$\psi_z^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x}e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n+m)}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB}f_+(y) \\ -k_3f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n+m)f_-(y) \end{pmatrix}, \text{ untuk } n \geq 1 \quad (3.80)$$

$$\psi_z^-(\mathbf{r}) = 0, \text{ untuk } n = 0 \quad (3.81)$$

Maka bentuk kombinasi linear fungsi gelombang Dirac dalam pengaruh medan magnetik dengan energi negatif yang bergerak dengan momentum k searah sumbu- z positif dan tidak bergantung waktu dapat dituliskan sebagai

$$\psi_z^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x}e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n+m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} k_3f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB}f_-(y) \\ (\omega_n+m)f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB}f_+(y) \\ -k_3f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n+m)f_-(y) \end{pmatrix} \right],$$

untuk $n \geq 1$ (3.82)

$$\psi_z^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x}e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0+m)}} \tilde{C}_0 f_+(y) \begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ (\omega_0+m) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n = 0 \quad (3.83)$$

Sementara untuk medan fermion yang bergerak ke kiri dengan momentum $-k$ searah sumbu- z negatif, solusi χ_2 dari persamaan (3.70) berbentuk

$$\chi_2 = e^{-ik_1x}e^{ik_3z}F(y) \quad (3.84)$$

Sehingga dengan cara yang sama, dapat ditentukan komponen spinor χ_1 dengan mensubstitusikan persamaan (3.84) ke dalam persamaan (3.68) sebagai

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} (i\sigma^1 \partial_1 + i\sigma^2 \partial_2 + i\sigma^3 \partial_3 - qyB\sigma^1) e^{-ik_1x} e^{ik_3z} F_s(y) \\
\chi_1 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} \left[i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_1 + i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \partial_2 + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_3 \right. \\
&\quad \left. - \begin{pmatrix} 0 & qyB \\ qyB & 0 \end{pmatrix} \right] e^{-ik_1x} e^{ik_3z} F_s(y) \\
\chi_1 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} \left[\begin{pmatrix} 0 & i\partial_1 \\ i\partial_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 \\ -\partial_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\partial_3 & 0 \\ 0 & -i\partial_3 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \begin{pmatrix} 0 & qyB \\ qyB & 0 \end{pmatrix} \right] e^{-ik_1x} e^{ik_3z} F_s(y) \\
\chi_1 &= \frac{1}{(\omega_n + m)} \left[\begin{pmatrix} & i\partial_3 & i\partial_1 + \partial_2 - qyB \\ i\partial_1 - \partial_2 - qyB & & -i\partial_3 \end{pmatrix} \right] e^{-ik_1x} e^{ik_3z} F_s(y)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Dimana untuk partikel berspin naik dengan nilai $s = +1$, persamaan (3.85) dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
\chi_2 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -k_3 & (k_1 - qyB) + \partial_2 \\ (k_1 - qyB) - \partial_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -k_3 f_+(y) \\ (k_1 - qyB) f_+(y) - \partial_2 f_+(y) \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -k_3 f_+(y) \\ -\xi \sqrt{qB} f_+(y) - (-\xi \sqrt{qB} f_+(y) + \sqrt{2nqB} f_-(y)) \end{pmatrix} \\
\chi_2 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -k_3 f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB} f_-(y) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Sehingga solusi energi negatif berupa fungsi gelombang untuk medan Dirac yang bergerak dengan momentum $-k$ searah sumbu- z negatif dengan spin partikel naik

diperoleh sebagai

$$\psi_{-z}^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \begin{pmatrix} -k_3 f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB} f_-(y) \\ (\omega_n + m) f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n \geq 1 \quad (3.87)$$

$$\psi_{-z}^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} f_+(y) \begin{pmatrix} -k_3 \\ 0 \\ (\omega_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n = 0 \quad (3.88)$$

Sedangkan pada partikel berspin turun dengan nilai $s = -1$, persamaan (3.85) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -k_3 & (k_1 - qyB) + \partial_2 \\ (k_1 - qyB) - \partial_2 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f_-(y) \end{pmatrix} \\ \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} (k_1 - qyB) f_-(y) + \partial_2 f_-(y) \\ k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \\ \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -\xi\sqrt{qB} f_-(y) + (\xi\sqrt{qB} f_-(y) - \sqrt{2nqB} f_+(y)) \\ k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \\ \chi_1 &= \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{(\omega_n + m)} \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB} f_+(y) \\ k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.89)$$

Sehingga solusi energi negatif berupa fungsi gelombang untuk medan Dirac yang bergerak dengan momentum $-k$ searah sumbu- z negatif dengan spin partikel turun diperoleh sebagai

$$\psi_{-z}^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB}f_+(y) \\ k_3f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n + m)f_-(y) \end{pmatrix}, \text{ untuk } n \geq 1 \quad (3.90)$$

$$\psi_{-z}^-(\mathbf{r}) = 0, \quad \text{untuk } n = 0 \quad (3.91)$$

Maka bentuk kombinasi linear fungsi gelombang Dirac dalam pengaruh medan magnetik dengan energi negatif yang bergerak dengan momentum $-k$ searah sumbu- z negatif dan tidak bergantung waktu dapat dituliskan sebagai

$$\psi_{-z}^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} -k_3f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB}f_-(y) \\ (\omega_n + m)f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB}f_+(y) \\ k_3f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n + m)f_-(y) \end{pmatrix} \right],$$

untuk $n \geq 1$ (3.92)

$$\psi_{-z}^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} C_0 f_+(y) \begin{pmatrix} -k_3 \\ 0 \\ (\omega_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{untuk } n = 0 \quad (3.93)$$

Sehingga solusi energi negatif total untuk medan Dirac yang terpengaruh medan magnetik dituliskan sebagai

$$\psi^-(\mathbf{r}) = \psi_z^-(\mathbf{r}) + \psi_{-z}^-(\mathbf{r}) \quad (3.94)$$

yang merupakan kombinasi linier antara fungsi gelombang dari medan Dirac yang bergerak searah sumbu- z positif dan medan Dirac yang bergerak searah sumbu- z negatif.

BAB IV

ENERGI CASIMIR

Energi Casimir merupakan energi yang muncul dalam ruang hampa karena fluktuasi kuantum suatu medan. Fluktuasi ini mengacu pada munculnya dan hilangnya partikel virtual secara spontan yang menghasilkan energi meskipun tidak ada partikel nyata yang hadir. Secara matematis, energi Casimir dapat diperoleh dengan mengambil selisih antara energi vakum dengan adanya kondisi batas dengan energi tanpa adanya kondisi batas (Rohim et al., 2024).

4.1 Rapat Hamiltonian

Dalam teori medan kuantum, rapat hamiltonian \mathcal{H} merujuk pada kepadatan jumlah energi sistem kuantum yang didefinisikan sebagai (Aitchison and Hey, 2013)

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\Psi} - \mathcal{L} \quad (4.1)$$

dengan π merupakan momentum kanonik, \mathcal{L} adalah rapat lagrangian, dan $\dot{\Psi} = \partial_0 \Psi$ merupakan fungsi gelombang yang diturunkan terhadap waktu, serta Ψ adalah fungsi gelombang dari medan Dirac yang memberikan deskripsi mengenai sifat-sifat kuantum partikel relativistik dalam kerangka teori medan kuantum.

Menggunakan definisi rapat lagrangian Dirac pada persamaan (3.1), maka besar rapat hamiltonian pada persamaan (4.1) adalah

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{\partial(\bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial_\mu - m))\Psi}{\partial \dot{\Psi}} \partial_0 \Psi - \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi \\ \mathcal{H} &= \frac{\partial(\Psi^\dagger \gamma^0 i\gamma^0 \partial_0 \Psi + \Psi^\dagger \gamma_0 (i\gamma^j \partial_j - m))\Psi}{\partial \dot{\Psi}} \partial_0 \Psi - \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi \\ \mathcal{H} &= \frac{\partial(i\Psi^\dagger \partial_0 \Psi + \Psi^\dagger \gamma_0 (i\gamma^j \partial_j - m))\Psi}{\partial \dot{\Psi}} \partial_0 \Psi - \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi \\ \mathcal{H} &= i\Psi^\dagger \partial_0 \Psi - \bar{\Psi}(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\Psi \end{aligned} \quad (4.2)$$

dengan $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi$ merupakan persamaan Dirac yang bernilai 0, sehingga per-

samaan (4.2) dapat disederhanakan sebagai

$$\mathcal{H} = i\Psi^\dagger \partial_0 \Psi \quad (4.3)$$

Selanjutnya fungsi gelombang medan Dirac dapat diperluas yang melibatkan penggunaan operator kreasi (penciptaan partikel) dan anihilasi (pemusnahan partikel) sebagai

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \left[\hat{a} \Psi_{(r,t)}^+(r) + \hat{b}^\dagger \Psi_{(r,t)}^-(r) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \left[\hat{a} e^{-i\omega t} \psi^+(\mathbf{r}) + \hat{b}^\dagger e^{i\omega t} \psi^-(\mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \left[\hat{a}^\dagger \Psi_{(r,t)}^{+\dagger}(r) + \hat{b} \Psi_{(r,t)}^{-\dagger}(r) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \left[\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) + \hat{b} e^{-i\omega t} \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

dengan (\hat{a}, \hat{b}) merupakan operator anihilasi, dan $(\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger)$ adalah operator kreasi. Sehingga rapat hamiltonian pada persamaan (4.3) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \left[\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) + \hat{b} e^{-i\omega t} \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \right] \\ &\quad \partial_t \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \left[\hat{a} e^{-i\omega t} \psi^+(\mathbf{r}) + \hat{b}^\dagger e^{i\omega t} \psi^-(\mathbf{r}) \right] \\ \mathcal{H} &= i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \left[\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) + \hat{b} e^{-i\omega t} \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \right] \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} dk_1' \left[-i\omega \hat{a} e^{-i\omega t} \psi^+(\mathbf{r}) + i\omega \hat{b}^\dagger e^{i\omega t} \psi^-(\mathbf{r}) \right] \\ \mathcal{H} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_1' \left[\hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) + \hat{b} e^{-i\omega t} \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \right] \\ &\quad \left[\hat{a} e^{-i\omega t} \psi^+(\mathbf{r}) - \hat{b}^\dagger e^{i\omega t} \psi^-(\mathbf{r}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_1 \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}) - \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger e^{2i\omega t} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) \psi^-(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. + \hat{b} \hat{a} e^{-2i\omega t} \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}) - \hat{b} \hat{b}^\dagger \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \psi^-(\mathbf{r}) \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Karena $\hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger$ dan $\hat{b} \hat{a}$ memiliki sifat komutatif dimana $[\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{b}] = 0$, maka suku-suku tersebut akan menghasilkan nilai nol dalam penyederhanaan. Sehingga persamaan (4.6) dapat disederhanakan sebagai

$$\mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_1 \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}) - \hat{b} \hat{b}^\dagger \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \psi^-(\mathbf{r}) \right] \quad (4.7)$$

4.2 Energi Vakum

Dalam mekanika kuantum, energi vakum mengacu pada energi minimum yang berkaitan dengan keadaan vakum, yaitu keadaan dasar suatu sistem kuantum. Dimana pada konteks medan kuantum, ruang vakum diisi oleh fluktuasi kuantum sesuai dengan prinsip ketidakpastian yang memberikan kontribusi terhadap energi sistem. Secara matematis, energi vakum E_{vac} berkaitan erat dengan rapat energi vakum (ε_0), yakni kuantitas yang berkaitan dengan energi vakum persatuan volume. Sehingga energi vakum diperoleh dengan mengintegalkan rapat energi vakum di seluruh volume ruang yang ditempati.

$$E_{vac} = \int \varepsilon_0 dV$$

Sedangkan besarnya rapat energi vakum dapat dihitung dari rapat hamiltonian dalam keadaan dasar, sebagai

$$\varepsilon_0 = \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle \quad (4.8)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.7) pada persamaan (4.8), maka diperoleh

$$\varepsilon_0 = \langle 0 | \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_1 \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}) - \hat{b} \hat{b}^\dagger \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \psi^-(\mathbf{r}) \right] | 0 \rangle$$

$$\varepsilon_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \langle 0 | \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_1 \left[\hat{a}^\dagger \hat{a} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}) - \hat{b} \hat{b}^\dagger \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \psi^-(\mathbf{r}) \right] | 0 \rangle \quad (4.9)$$

Dimana ketika operator anihilasi \hat{a} dikenakan pada keadaan dasar $|0\rangle$, akan menghasilkan nilai 0. Hal ini disebabkan oleh sifat dasar dari operator anihilasi yang bertanggung jawab untuk menghapus partikel dari suatu keadaan. Namun karena keadaan dasar $|0\rangle$ merupakan keadaan vakum atau tanpa partikel, maka tidak ada partikel yang dapat dihapuskan oleh operator anihilasi. Selanjutnya dengan menjabarkan suku kedua dengan relasi antikomutasi $[\hat{b}^\dagger, \hat{b}] = \hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{b} \hat{b}^\dagger = 1$, persamaan (4.9) menjadi

$$\varepsilon_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \langle 0 | \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_1 \left[(\hat{b}^\dagger \hat{b} - 1) \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \psi^-(\mathbf{r}) \right] | 0 \rangle \quad (4.10)$$

Kemudian menggunakan definisi delta dirac dan mengenakan operator anihilasi \hat{b} pada keadaan dasar, persamaan (4.10) dapat disederhanakan sebagai

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk'_1 \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \psi^-(\mathbf{r}) \delta(k_1 - k'_1) \\ \varepsilon_0 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) \psi^-(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Untuk tingkat energi $n > 0$, bentuk $\psi^-(\mathbf{r})$ dan $\psi^{-\dagger}(\mathbf{r})$ didefinisikan sebagai

$$\psi^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ik_1 x} e^{-ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} k_3 f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB} f_-(y) \\ (\omega_n + m) f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB} f_+(y) \\ -k_3 f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n + m) f_-(y) \end{pmatrix} \right] +$$

$$\begin{aligned}
\psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) = & \frac{e^{-ik_1x}e^{ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_n(\omega_n+m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} -k_3f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB}f_-(y) \\ (\omega_n+m)f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB}f_+(y) \\ k_3f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n+m)f_-(y) \end{pmatrix} \right] \\
& \frac{e^{ik'_1x}e^{ik'_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'}+m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} k'_3f_+(y) \\ -\sqrt{2n'qB}f_-(y) \\ (\omega_{n'}+m)f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2n'qB}f_+(y) \\ -k'_3f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_{n'}+m)f_-(y) \end{pmatrix} \right] + \\
& \frac{e^{ik'_1x}e^{-ik'_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'}+m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} -k'_3f_+(y) \\ -\sqrt{2n'qB}f_-(y) \\ (\omega_{n'}+m)f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2n'qB}f_+(y) \\ k'_3f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_{n'}+m)f_-(y) \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

Maka persamaan (4.11) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 = & - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \\
& \times \left\{ \frac{e^{ik'_1x}e^{ik'_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'}+m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} k'_3f_+(y) \\ -\sqrt{2n'qB}f_-(y) \\ (\omega_{n'}+m)f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2n'qB}f_+(y) \\ -k'_3f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_{n'}+m)f_-(y) \end{pmatrix} \right] \right. \\
& \left. + \frac{e^{ik'_1x}e^{-ik'_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'}+m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} -k'_3f_+(y) \\ -\sqrt{2n'qB}f_-(y) \\ (\omega_{n'}+m)f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2n'qB}f_+(y) \\ k'_3f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_{n'}+m)f_-(y) \end{pmatrix} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{e^{-ik_1x} e^{-ik_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} k_3 f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB} f_-(y) \\ (\omega_n + m) f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB} f_+(y) \\ -k_3 f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n + m) f_-(y) \end{pmatrix} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} -k_3 f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB} f_-(y) \\ (\omega_n + m) f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB} f_+(y) \\ k_3 f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n + m) f_-(y) \end{pmatrix} \right] \right\} \\
\varepsilon_0 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_n}{4\pi^2 \sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'} + m)} \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \\
& \times \left[e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{-i(k_3 - k'_3)z} \left(\tilde{C}_1^2 \left(k'_3 k_3 (f_+(y))^2 + \sqrt{2n'qB} \sqrt{2nqB} (f_-(y))^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_+(y))^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{-i(k_3 - k'_3)z} \left(\tilde{C}_1^* \tilde{C}_2 \left(-k'_3 \sqrt{2nqB} (f_+(y))^2 + k_3 \sqrt{2n'qB} (f_-(y))^2 \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{i(k_3 + k'_3)z} \left(\tilde{C}_1^* C_1 \left(-k'_3 k_3 (f_+(y))^2 + \sqrt{2n'qB} \sqrt{2nqB} (f_-(y))^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_+(y))^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{i(k_3 + k'_3)z} \left(\tilde{C}_1^* C_2 \left(-k'_3 \sqrt{2nqB} (f_+(y))^2 - k_3 \sqrt{2n'qB} (f_-(y))^2 \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{-i(k_3 - k'_3)z} \left(\tilde{C}_2^* \tilde{C}_1 \left(-k_3 \sqrt{2n'qB} (f_+(y))^2 + k'_3 \sqrt{2nqB} (f_-(y))^2 \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{-i(k_3 - k'_3)z} + \left(\tilde{C}_2^2 \left(\sqrt{2n'qB} \sqrt{2nqB} (f_+(y))^2 + k'_3 k_3 (f_-(y))^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_-(y))^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{i(k_3 + k'_3)z} + \left(\tilde{C}_2^* C_1 \left(k_3 \sqrt{2n'qB} (f_+(y))^2 + k'_3 \sqrt{2nqB} (f_-(y))^2 \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{i(k_3 + k'_3)z} \left(\tilde{C}_2^* C_2 \left(\sqrt{2n'qB} \sqrt{2nqB} (f_+(y))^2 - k'_3 k_3 (f_-(y))^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_-(y))^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{-i(k_3 + k'_3)z} + \left(C_1^* \tilde{C}_1 \left(-k'_3 k_3 (f_+(y))^2 + \sqrt{2n'qB} \sqrt{2nqB} (f_-(y))^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_+(y))^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{-i(k_3 + k'_3)z} \left(C_1^* \tilde{C}_2 \left(k'_3 \sqrt{2nqB} (f_+(y))^2 + k_3 \sqrt{2n'qB} (f_-(y))^2 \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{-i(k_1-k'_1)x}e^{-i(k'_3-k_3)z} \left(C_1^2 \left(k'_3k_3(f_+(y))^2 + \sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_-(y))^2 \right. \right. \\
& \left. \left. +(\omega'_n+m)(\omega+m)(f_+(y)) \right) \right) \\
& +e^{-i(k_1-k'_1)x}e^{-i(k'_3-k_3)z} \left(C_1^*C_2 \left(k'_3\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 - k_3\sqrt{2n'qB}(f_-(y))^2 \right) \right) \\
& +e^{-i(k_1-k'_1)x}e^{-i(k'_3+k_3)z} \left(C_2^*\tilde{C}_1 \left(-k_3\sqrt{2n'qB}(f_+(y))^2 - k'_3\sqrt{2nqB}(f_-(y))^2 \right) \right) \\
& +e^{-i(k_1-k'_1)x}e^{-i(k'_3+k_3)z} \left(C_2^*\tilde{C}_2 \left(\sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 - k'_3k_3(f_-(y))^2 \right. \right. \\
& \left. \left. +(\omega'_n+m)(\omega_n+m)(f_-(y))^2 \right) \right) \\
& +e^{-i(k_1-k'_1)x}e^{-i(k'_3-k_3)z} \left(C_2^*C_1 \left(k_3\sqrt{2n'qB}(f_+(y))^2 - k'_3\sqrt{2nqB}(f_-(y))^2 \right) \right) \\
& +e^{-i(k_1-k'_1)x}e^{-i(k'_3-k_3)z} \left(C_2^2 \left(\sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 + k'_3k_3(f_-(y))^2 \right. \right. \\
& \left. \left. +(\omega'_n+m)(\omega_n+m)(f_-(y))^2 \right) \right) \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Untuk nilai $k_1 = k'_1$ dan $n = n'$ dimana $\int(f_+(y))^2dk_1 = \int(f_-(y))^2dk_1 = |qB|$, maka persamaan (4.12) dapat disederhanakan sebagai

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 & = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|qB|\omega_n}{4\pi^2 2\omega_n(\omega_n+m)} \\
& \times \left\{ \left(\tilde{C}_1^2 + \tilde{C}_2^2 \right) e^{-i(k_3-k'_3)z} \left((\omega_n+m)^2 + k'_3k_3 + 2nqB \right) \right. \\
& + \left(C_1^2 + C_2^2 \right) e^{-i(k'_3-k_3)z} \left((\omega_n+m)^2 + k'_3k_3 + 2nqB \right) \\
& + \tilde{C}_1^* \tilde{C}_2 e^{-i(k_3-k'_3)z} \left(-k'_3\sqrt{2nqB} + k_3\sqrt{2nqB} \right) \\
& + \tilde{C}_1^* C_1 e^{i(k_3+k'_3)z} \left(-k'_3k_3 + 2nqB + (\omega_n+m)^2 \right) \\
& + \tilde{C}_1^* C_2 e^{i(k_3+k'_3)z} \left(-k'_3\sqrt{2nqB} - k_3\sqrt{2nqB} \right) \\
& + \tilde{C}_2^* \tilde{C}_1 e^{-i(k_3-k'_3)z} \left(-k_3\sqrt{2nqB} + k'_3\sqrt{2nqB} \right) \\
& + \tilde{C}_2^* C_1 e^{i(k_3+k'_3)z} \left(k_3\sqrt{2nqB} + k'_3\sqrt{2nqB} \right) \\
& + \tilde{C}_2^* C_2 e^{i(k_3+k'_3)z} \left(2nqB - k'_3k_3 + (\omega_n+m)^2 \right) \\
& + C_1^* \tilde{C}_1 e^{-i(k_3+k'_3)z} \left(-k'_3k_3 + 2nqB + (\omega_n+m)^2 \right) \\
& + C_1^* \tilde{C}_2 e^{-i(k_3+k'_3)z} \left(k'_3\sqrt{2nqB} + k_3\sqrt{2n'qB} \right) \\
& + C_1^* C_2 e^{-i(k'_3-k_3)z} \left(k'_3\sqrt{2nqB} - k_3\sqrt{2nqB} \right) \\
& + C_2^* \tilde{C}_1 e^{-i(k'_3+k_3)z} \left(-k_3\sqrt{2nqB} - k'_3\sqrt{2nqB} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C_2^* \tilde{C}_2 e^{-i(k'_3+k_3)z} (2nqB - k'_3 k_3 + (\omega_n + m)^2) \\
& +C_2^* C_1 e^{-i(k'_3-k_3)z} \left(k_3 \sqrt{2nqB} - k'_3 \sqrt{2nqB} \right) \} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Sehingga dengan mengintegrasikan persamaan (4.13) terhadap seluruh ruang, maka diperoleh besarnya energi vakum diantara kedua pelat pada $n > 0$ sebagai

$$\begin{aligned}
E_{vac} &= \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz \left[- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{|qB| \omega_n}{4\pi^2 2\omega_n (\omega_n + m)} \right. \\
& \times \left\{ \left(\tilde{C}_1^2 + \tilde{C}_2^2 \right) e^{-i(k_3-k'_3)z} \left((\omega_n + m)^2 + k'_3 k_3 + 2nqB \right) \right. \\
& + \left(C_1^2 + C_2^2 \right) e^{-i(k'_3-k_3)z} \left((\omega_n + m)^2 + k'_3 k_3 + 2nqB \right) \\
& + \tilde{C}_1^* \tilde{C}_2 e^{-i(k_3-k'_3)z} \left(-k'_3 \sqrt{2nqB} + k_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \tilde{C}_1^* C_1 e^{i(k_3+k'_3)z} \left(-k'_3 k_3 + 2nqB + (\omega_n + m)^2 \right) \\
& + \tilde{C}_1^* C_2 e^{i(k_3+k'_3)z} \left(-k'_3 \sqrt{2nqB} - k_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \tilde{C}_2^* \tilde{C}_1 e^{-i(k_3-k'_3)z} \left(-k_3 \sqrt{2nqB} + k'_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \tilde{C}_2^* C_1 e^{i(k_3+k'_3)z} \left(k_3 \sqrt{2nqB} + k'_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \tilde{C}_2^* C_2 e^{i(k_3+k'_3)z} \left(2nqB - k'_3 k_3 + (\omega_n + m)^2 \right) \\
& + C_1^* \tilde{C}_1 e^{-i(k_3+k'_3)z} \left(-k'_3 k_3 + 2nqB + (\omega_n + m)^2 \right) \\
& + C_1^* \tilde{C}_2 e^{-i(k_3+k'_3)z} \left(k'_3 \sqrt{2nqB} + k_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + C_1^* C_2 e^{-i(k'_3-k_3)z} \left(k'_3 \sqrt{2nqB} - k_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + C_2^* \tilde{C}_1 e^{-i(k'_3+k_3)z} \left(-k_3 \sqrt{2nqB} - k'_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + C_2^* \tilde{C}_2 e^{-i(k'_3+k_3)z} \left(2nqB - k'_3 k_3 + (\omega_n + m)^2 \right) \\
& \left. + C_2^* C_1 e^{-i(k'_3-k_3)z} \left(k_3 \sqrt{2nqB} - k'_3 \sqrt{2nqB} \right) \right\} \\
E_{vac} &= -L^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_n |qB|}{4\pi^2 2\omega_n (\omega_n + m)} \right. \\
& \times \left\{ \frac{ie^{-i(k_3-k'_3)l} - 1}{(k_3 - k'_3)} \left(\tilde{C}_1^2 + \tilde{C}_2^2 \right) \left((\omega_n + m)^2 + k'_3 k_3 + 2nqB \right) \right. \\
& \left. + \frac{ie^{-i(k_3-k'_3)l} - 1}{(k_3 - k'_3)} \left(C_1^2 + C_2^2 \right) \left((\omega_n + m)^2 + k'_3 k_3 + 2nqB \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ie^{-i(k_3-k'_3)l} - 1}{(k_3 - k'_3)} \tilde{C}_1^* \tilde{C}_2 \left(-k'_3 \sqrt{2nqB} + k_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \frac{-ie^{i(k_3+k'_3)l} - 1}{(k_3 + k'_3)} \tilde{C}_1^* C_1 \left(-k'_3 k_3 + 2nqB + (\omega_n + m)^2 \right) \\
& + \frac{-ie^{i(k_3+k'_3)l} - 1}{(k_3 + k'_3)} \tilde{C}_1^* C_2 \left(-k'_3 \sqrt{2nqB} - k_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \frac{ie^{-i(k_3-k'_3)l} - 1}{(k_3 - k'_3)} \tilde{C}_2^* \tilde{C}_1 \left(-k_3 \sqrt{2nqB} + k'_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \frac{-ie^{i(k_3+k'_3)l} - 1}{(k_3 + k'_3)} \tilde{C}_2^* C_1 \left(k_3 \sqrt{2nqB} + k'_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \frac{-ie^{i(k_3+k'_3)l} - 1}{(k_3 + k'_3)} \tilde{C}_2^* C_2 \left(2nqB - k'_3 k_3 + (\omega_n + m)^2 \right) \\
& + \frac{ie^{-i(k_3+k'_3)l} - 1}{(k_3 + k'_3)} C_1^* \tilde{C}_1 \left(-k'_3 k_3 + 2nqB + (\omega_n + m)^2 \right) \\
& + \frac{ie^{-i(k_3+k'_3)l} - 1}{(k_3 + k'_3)} C_1^* \tilde{C}_2 \left(k'_3 \sqrt{2nqB} + k_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \frac{ie^{-i(k'_3-k_3)l} - 1}{(k'_3 - k_3)} C_1^* C_2 \left(k'_3 \sqrt{2nqB} - k_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \frac{ie^{-i(k'_3+k_3)l} - 1}{(k'_3 + k_3)} C_2^* \tilde{C}_1 \left(-k_3 \sqrt{2nqB} - k'_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
& + \frac{ie^{-i(k'_3+k_3)l} - 1}{(k'_3 + k_3)} C_2^* \tilde{C}_2 \left(2nqB - k'_3 k_3 + (\omega_n + m)^2 \right) \\
& + \frac{ie^{-i(k'_3-k_3)l} - 1}{(k'_3 - k_3)} C_2^* C_1 \left(k_3 \sqrt{2nqB} - k'_3 \sqrt{2nqB} \right) \Big\} \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Selanjutnya menjabarkan bentuk eksponensial pada persamaan (4.14) ke dalam bentuk trigonometri mengikuti aturan sebagaimana pada persamaan (A.4) dan (A.5). Kemudian menyederhanakan bagian suku riil menggunakan aturan L'hospital, maka persamaan (4.14) menjadi

$$\begin{aligned}
E_{vac} &= -L^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_n |qB|}{4\pi^2 2\omega_n (\omega_n + m)} \right. \\
&\times \left\{ l \left(\tilde{C}_1^2 + \tilde{C}_2^2 + C_1^2 + C_2^2 \right) \left((\omega_n + m)^2 + k_3^2 + 2nqB \right) \right. \\
&+ l \left(\tilde{C}_1^* C_1 + C_2^* \tilde{C}_2 + C_1^* \tilde{C}_1 + C_2^* \tilde{C}_2 \right) \left((\omega_n + m)^2 - k_3^2 + 2nqB \right) \\
&+ l \left(\tilde{C}_1^* C_2 + C_2^* \tilde{C}_1 \right) \left(-2k_3 \sqrt{2nqB} \right) \\
&+ l \left(\tilde{C}_2^* C_1 + C_1^* \tilde{C}_2 \right) \left(2k_3 \sqrt{2nqB} \right) \Big\} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Dikarenakan perkalian silang (*dot product*) antara dua vektor tilde dan nontilde arahnya saling bersilangan sehingga memberikan kontribusi nol dan fungsi gelombang medan Dirac memenuhi sifat orthonormalitas

$$\int_{\Omega} d^3\mathbf{r} \psi(\mathbf{r})^\dagger \psi(\mathbf{r}) = \delta_{jj'} \delta_{nn'} \delta(k_1 - k'_1) = 1$$

Persamaan (4.15) dapat disederhanakan sebagai

$$\begin{aligned} E_{vac} &= -\frac{|qB|L^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_n \\ E_{vac} &= -\frac{|qB|L^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sqrt{m^2 + k_3^2 + 2nqB} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sedangkan untuk tingkat energi dasar ($n = 0$), bentuk $\psi^-(\mathbf{r})$ dan $\psi^{-\dagger}(\mathbf{r})$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \psi^-(\mathbf{r}) &= \frac{e^{-ik_1x} e^{-ik_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} \tilde{C}_0 f_+(y) \begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ (\omega_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{e^{-ik_1x} e^{ik_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} \\ &\quad C_0 f_+(y) \begin{pmatrix} -k_3 \\ 0 \\ (\omega_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi^{-\dagger}(\mathbf{r}) &= \frac{e^{ik'_1x} e^{ik'_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} \tilde{C}_0 f_+(y) \begin{pmatrix} k'_3 \\ 0 \\ (\omega_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix}^\dagger + \frac{e^{ik'_1x} e^{-ik'_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} \end{aligned}$$

$$\times C_0 f_+(y) \begin{pmatrix} -k'_3 \\ 0 \\ (\omega_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix}^\dagger$$

Maka persamaan (4.11) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{-\omega_0}{4\pi^2 2\omega_0(\omega_0 + m)} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \\ &\times \left[e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{-i(k_3 - k'_3)z} \left(\tilde{C}_0^2 (f_+(y))^2 (k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \right. \\ &+ e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{i(k'_3 + k_3)z} \left(\tilde{C}_0^* C_0 (f_+(y))^2 (-k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \\ &+ e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{-i(k'_3 - k_3)z} \left(C_0^* \tilde{C}_0 (f_+(y))^2 (-k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \\ &\left. + e^{-i(k_1 - k'_1)x} e^{-i(k'_3 - k_3)z} \left(C_0^2 (f_+(y))^2 (k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \right] \\ \varepsilon_0 &= - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_0 |qB|}{4\pi^2 2\omega_0(\omega_0 + m)} \\ &\times \left\{ e^{-i(k_3 - k'_3)z} \left(\tilde{C}_0^2 (k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \right. \\ &+ e^{i(k'_3 + k_3)z} \left(\tilde{C}_0^* C_0 (-k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \\ &+ e^{-i(k'_3 - k_3)z} \left(C_0^* \tilde{C}_0 (-k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \\ &\left. + e^{-i(k'_3 - k_3)z} \left(C_0^2 (k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \right\} \end{aligned}$$

Sehingga besarnya energi vakum diantara kedua pelat pada $n = 0$ adalah

$$\begin{aligned} E_{vac} &= \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^l dz \left[- \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_0 |qB|}{4\pi^2 2\omega_0(\omega_0 + m)} \right. \\ &\times \left\{ e^{-i(k_3 - k'_3)z} \left(\tilde{C}_0^2 (k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \right. \\ &+ e^{i(k'_3 + k_3)z} \left(\tilde{C}_0^* C_0 (-k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \\ &+ e^{-i(k'_3 - k_3)z} \left(C_0^* \tilde{C}_0 (-k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \\ &\left. + e^{-i(k'_3 - k_3)z} \left(C_0^2 (k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{vac} = & -L^2 \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_0 |qB|}{4\pi^2 2\omega_0 (\omega_0 + m)} \right. \\
& \times \left\{ \frac{i(e^{-i(k_3 - k'_3)l})}{(k_3 - k'_3)} \left(\tilde{C}_0^2 (k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \right. \\
& + \frac{-i(e^{i(k'_3 + k_3)l})}{(k'_3 + k_3)} \left(\tilde{C}_0^* C_0 (-k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \\
& + \frac{-i(e^{i(k'_3 - k_3)l})}{(k'_3 - k_3)} \left(C_0^* \tilde{C}_0 (-k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \\
& \left. \left. + \frac{i(e^{-i(k'_3 - k_3)l})}{(k'_3 - k_3)} \left(C_0^2 (k'_3 k_3 + (\omega_0 + m)^2) \right) \right] \right. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Dengan menjabarkan bentuk eksponensial pada persamaan (4.17) ke dalam bentuk trigonometri dan menyederhanakan bagian suku riil menggunakan aturan L'hopital, maka persamaan (4.17) dapat disederhanakan sebagai

$$\begin{aligned}
E_{vac} = & -L^2 \left[\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\omega_0 |qB|}{4\pi^2 2\omega_0 (\omega_0 + m)} \times \left\{ l \left(\tilde{C}_0^2 + C_0^2 \right) (k_3^2 + (\omega_0 + m)^2) \right. \right. \\
& \left. \left. + l \left(\tilde{C}_0^* C_0 + \tilde{C}_0 C_0^* \right) (-k_3^2 + (\omega_0 + m)^2) \right\} \right] \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Dikarenakan perkalian silang (*dot product*) antara dua vektor tilde dan nontilde arahnya saling bersilangan sehingga memberikan kontribusi nol dan fungsi gelombang medan Dirac memenuhi sifat orthonormalitas. Maka persamaan (4.18) menjadi

$$\begin{aligned}
E_{vac} &= -\frac{|qB|L^2}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \omega_0 \\
E_{vac} &= -\frac{|qB|L^2}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sqrt{m^2 + k_3^2} \right) \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Sehingga besarnya energi vakum total adalah

$$E_{vac} = -\frac{|qB|L^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + k_3^2 + 2n|qB|} \quad (4.20)$$

dimana $i_n = \frac{1}{2}$ dengan $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Syarat batas MIT berlaku pada momentum

k_3 sebagai

$$ml\sin(k_3l) + k_3l\cos(k_3l) = 0 \quad (4.21)$$

Sehingga nilai momentum yang memenuhi syarat batas (4.21) adalah k_{3l} dengan $l = 1, 2, 3, \dots$, yang mengindikasikan bahwa momentum k_3 harus bersifat diskrit. Hal ini memberikan konsekuensi pada energi medan Dirac yang terpengaruh medan magnetik dibawah kondisi syarat batas MIT juga harus bersifat diskrit. Maka persamaan (4.20) dapat dituliskan sebagai

$$E_{vac} = -\frac{|qB|L^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + \left(\frac{k'_{3l}}{l}\right)^2 + 2n|qB|} \quad (4.22)$$

dengan $k_{3l}l = k'_{3l}$ serta L adalah panjang dan lebar pelat konduktor.

4.3 Energi Casimir

Energi Casimir berkaitan erat dengan energi vakum diantara dua permukaan konduktor yang berdekatan. Secara matematis, besarnya energi Casimir dalam pengaruh medan magnetik dapat dihitung dari energi vakum pada persamaan (4.20). Namun karena energi vakum pada persamaan tersebut memiliki nilai yang tak terbatas, maka digunakan metode penjumlahan Abel Plana yang akan mengevaluasi deret dari persamaan tersebut sehingga diperoleh nilai yang konvergen, yakni didefinisikan sebagai (Rohim et al., 2024)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi f_n(k'_{3l})}{1 - \frac{\sin(2k'_{3l})}{2k'_{3l}}} = -\frac{\pi l m f_n(0)}{2(lm + 1)} + \int_0^{\infty} dz f_n(z) - i \int_0^{\infty} dt \frac{f_n(it) - f_n(-it)}{\frac{t+lm}{t-lm} e^{2t} + 1} \quad (4.23)$$

Dari batasan momentum sebagaimana persamaan (4.21), penyebut ruas kiri dapat dituliskan sebagai

$$1 - \frac{\sin(2k'_{3l})}{2k'_{3l}} = 1 + \frac{lm}{k'_{3l}{}^2 + (lm)^2} \quad (4.24)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (4.24) pada persamaan (4.23), lalu dibandingkan dengan persamaan (4.22), maka diperoleh

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\pi f_n(k'_3 l)}{1 + \frac{lm}{k'^2_{3l} + (lm)^2}} = \sum_{l=1}^{\infty} \sqrt{m^2 + \left(\frac{k'_3 l}{l}\right)^2 + 2n|qB|}$$

Sehingga

$$f_n(k'_3 l) = \frac{1}{\pi l} \sqrt{m^2 l^2 + k'^2_{3l} + 2n|qB| l^2} \left(1 + \frac{lm}{k'^2_{3l} + (lm)^2}\right) \quad (4.25)$$

Oleh karena itu, persamaan (4.22) dapat ditulis sebagai

$$E_{vac} = -\frac{|qB|L^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \left[-\frac{\pi l m f_n(0)}{2(lm + 1)} + \int_0^{\infty} dk'_3 l f_n(k'_3 l) - i \int_0^{\infty} dt \frac{f_n(it) - f_n(-it)}{\frac{t+lm}{t-lm} e^{2t} + 1} \right] \quad (4.26)$$

Persamaan (4.26) memenuhi definisi energi casimir dengan kondisi batas, yakni

$$E_{cas} = E_{vac} \text{ dengan syarat batas} - E_{vac} \text{ tanpa syarat batas} \quad (4.27)$$

Maka dapat diketahui bahwa suku pertama dari persamaan (4.26) merupakan nilai energi vakum tanpa syarat batas dan suku kedua merupakan nilai energi vakum dengan syarat batas, sedangkan suku ketiga didefinisikan sebagai nilai energi Casimir. Dengan mensubstitusikan persamaan (4.25), dapat diperoleh nilai energi Casimir sebagai

$$E_{cas} = \frac{i|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \left[\int_0^{\infty} dt \frac{\sqrt{m^2 l^2 + (it)^2 + 2n|qB| l^2} \left(1 + \frac{lm}{(it)^2 + (lm)^2}\right)}{\frac{t+lm}{t-lm} e^{2t} + 1} - \int_0^{\infty} dt \frac{\sqrt{m^2 l^2 + (it)^2 + 2n|qB| l^2} \left(1 + \frac{lm}{(-it)^2 + (lm)^2}\right)}{\frac{t+lm}{t-lm} e^{2t} + 1} \right] \quad (4.28)$$

Dari persamaan (4.28) dapat diketahui bahwa $f_n(it)$ merupakan fungsi genap, dimana $f_n(it) = f_n(-it)$ untuk setiap nilai t . Maka persamaan (4.28) dapat di-

jabarkan sebagai

$$\begin{aligned}
E_{cas} &= \frac{i|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \left[\int_0^{\infty} dt \frac{\sqrt{m^2 l^2 + (it)^2 + 2n|qB|l^2} \left(1 + \frac{lm}{(it)^2 + (lm)^2}\right)}{\frac{t+lm}{t-lm} e^{2t} + 1} \right. \\
&\quad \left. - \left(- \int_{-\infty}^0 dt \frac{\sqrt{m^2 l^2 + (it)^2 + 2n|qB|l^2} \left(1 + \frac{lm}{(it)^2 + (lm)^2}\right)}{\frac{t+lm}{t-lm} e^{2t} + 1} \right) \right] \\
E_{cas} &= 2 \frac{i|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} dt \frac{\sqrt{m^2 l^2 + (it)^2 + 2n|qB|l^2} \left(1 + \frac{lm}{(it)^2 + (lm)^2}\right)}{\frac{t+lm}{t-lm} e^{2t} + 1} \\
E_{cas} &= 2 \frac{i|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} dt \left(\frac{t-lm}{(t+lm)e^{2t} + (t-lm)} \right) \left(1 + \frac{lm}{(it)^2 + (lm)^2}\right) \\
&\quad \times \sqrt{m^2 l^2 + (it)^2 + 2n|qB|l^2} \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Jika didefinisikan bahwa $t = lu$, maka persamaan (4.29) menjadi

$$\begin{aligned}
E_{cas} &= 2 \frac{i|qB|L^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} du \left(\frac{lu-lm}{(lu+lm)e^{2lu} + (lu-lm)} \right) \\
&\quad \times \left(1 + \frac{lm}{-(lu)^2 + (lm)^2}\right) \sqrt{m^2 l^2 + (ilu)^2 + 2n|qB|l^2} \\
E_{cas} &= 2 \frac{i|qB|L^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} du \left(\frac{u-m}{(u+m)e^{2lu} + (u-m)} \right) \left(1 + \frac{m}{-lu^2 + lm^2}\right) \\
&\quad \times l \sqrt{m^2 + (iu)^2 + 2n|qB|} \\
E_{cas} &= 2 \frac{i|qB|L^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} du \left(\frac{(u-m) - (u-m)m/l(u^2 - m^2)}{(u+m)e^{2lu} + (u-m)} \right) \\
&\quad \times l \sqrt{(iu)^2 + M_n^2} \\
E_{cas} &= 2 \frac{i|qB|L^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} du \frac{1}{l} \frac{l(u-m) - m/(u+m)}{(u+m)e^{2lu} + (u-m)} l \sqrt{(iu)^2 + M_n^2} \\
E_{cas} &= -2 \frac{|qB|L^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} du \frac{(l(u-m) - m/(u+m))}{(u+m)e^{2lu} + (u-m)} \sqrt{u^2 - M_n^2} \tag{4.30}
\end{aligned}$$

dimana $M_n = \sqrt{m^2 + 2n|qB|}$. Selanjutnya didefinisikan bahwa

$$\frac{l(u-m) - m/(u+m)}{(u+m)e^{2lu} + u-m} = -\frac{1}{2} \frac{d}{du} \ln \left(1 + \frac{u-m}{u+m} e^{-2lu} \right) \quad (4.31)$$

Maka persamaan (4.30) dapat dituliskan sebagai

$$E_{cas} = -2 \frac{|qB|L^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} du \left[-\frac{1}{2} \frac{d}{du} \ln \left(1 + \frac{u-m}{u+m} e^{-2lu} \right) \sqrt{u^2 - M_n^2} \right]$$

$$E_{cas} = \frac{|qB|L^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} du \left[\frac{d}{du} \ln \left(1 + \frac{u-m}{u+m} e^{-2lu} \right) \sqrt{u^2 - M_n^2} \right]$$

Kemudian dengan mengubah variabel u dengan definisi $y = lu - lM_n$, maka nilai energi Casimir menjadi

$$\begin{aligned} E_{cas} &= \frac{|qB|L^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} \frac{dy}{l} \left[l \frac{d}{dy} \ln \left(1 + \frac{\frac{y}{l} + M_n - m}{\frac{y}{l} + M_n + m} e^{-2l(\frac{y}{l} + M_n)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\left(\frac{y}{l} + M_n \right)^2 - M_n^2} \right] \\ E_{cas} &= \frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} dy \left[l \frac{d}{dy} \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\left(\frac{y^2}{l^2} + M_n^2 + \frac{2y}{l} M_n \right) - M_n^2} \right] \\ E_{cas} &= \frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} dy \left[l \frac{d}{dy} \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{l} \sqrt{y^2 + 2lyM_n} \right] \\ E_{cas} &= \frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} dy \left[\frac{d}{dy} \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{y^2 + 2lyM_n} \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

Jika didefinisikan bahwa

$$\frac{d}{dy} (uv) = \frac{du}{dy} v + u \frac{dv}{dy}$$

dimana u dan v adalah fungsi y , maka persamaan (4.32) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned}
E_{cas} &= \frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} dy \left[\frac{d}{dy} \left(\sqrt{y^2 + 2lyM_n} \right. \right. \\
&\quad \times \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right) \left. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{d}{dy} \left(\sqrt{y^2 + 2lyM_n} \right) \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right) \right] \\
E_{cas} &= \frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \left[\int_0^{\infty} dy \frac{d}{dy} \left(\sqrt{y^2 + 2lyM_n} \right. \right. \\
&\quad \times \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right) \left. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^{\infty} dy \left(\frac{d}{dy} \left(\sqrt{y^2 + 2lyM_n} \right) \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Suku pertama dari persamaan (4.33) bernilai nol, sehingga dapat diperoleh

$$\begin{aligned}
E_{cas} &= -\frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} dy \left[\frac{1}{2} (y^2 + 2lyM_n)^{-\frac{1}{2}} (2y + 2lM_n) \right. \\
&\quad \left. \times \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right) \right] \\
E_{cas} &= -\frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^{\infty} dy \frac{y + lM_n}{\sqrt{y^2 + 2lyM_n}} \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right)
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Persamaan (4.34) merupakan formulasi dari energi Casimir partikel Fermion dalam pengaruh medan magnetik, dimana tekanan dari energi ini menghasilkan gaya yang repulsif (tolak - menolak). Hal ini disebabkan oleh sifat partikel Fermion yang memenuhi prinsip eksklusi Pauli yang menyatakan bahwa dua partikel Fermion tidak dapat menempati keadaan kuantum yang sama secara bersamaan. Ketika ruang di antara dua permukaan pelat saling mendekat, partikel Fermion di antara kedua permukaan tersebut dipaksa untuk menempati tingkat energi yang lebih tinggi

karena prinsip eksklusi Pauli. Ini meningkatkan tekanan degenerasi, yang merupakan tekanan akibat distribusi kuantum fermion dalam keadaan energi yang lebih tinggi (Wen, 2004).

Tekanan degenerasi yang meningkat menghasilkan gaya tolak menolak antara permukaan pelat, karena partikel Fermion dengan energi tinggi memberikan tekanan yang lebih besar untuk mempertahankan distribusi kuantum dalam ruang terbatas. Oleh karena itu, dalam sistem efek Casimir yang melibatkan partikel Fermion, pengurangan jarak antara permukaan meningkatkan tekanan degenerasi, menghasilkan gaya tolak menolak.

4.4 Pendekatan Nilai Medan Magnet (B)

4.4.1 Medan Magnet Lemah ($B \ll 1$)

Dalam kasus pendekatan nilai medan magnet lemah, persamaan (4.34) dapat ditulis sebagai

$$E_{cas} = -\frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \int_0^\infty dn \int_0^\infty dy \frac{y + lM_n}{\sqrt{y^2 + 2lyM_n}} \ln \left(1 + \frac{y + l(M_n - m)}{y + l(M_n + m)} e^{-2(y+lM_n)} \right)$$

dimana didefinisikan bahwa

$$x = lM_n = l(\sqrt{m^2 + 2n|qB|})$$

maka

$$x^2 = l^2(m^2 + 2n|qB|)$$

$$dx^2 = 2l^2|qB|dn$$

$$2x dx = 2l^2|qB|dn$$

$$x dx = l^2|qB|dn$$

Sehingga persamaan energi casimir menjadi

$$\begin{aligned}
 E_{cas} &= -\frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \int_{lm}^{\infty} \frac{xdx}{l^2|qB|} \int_0^{\infty} dy \frac{y+x}{\sqrt{y^2+2yx}} \ln \left(1 + \frac{y+x-lm}{y+x+lm} e^{-2(y+x)} \right) \\
 E_{cas} &= -\frac{L^2}{\pi^2 l} \int_{lm}^{\infty} \frac{xdx}{l^2} \int_0^{\infty} dy \frac{y+x}{\sqrt{y^2+2yx}} \ln \left(1 + \frac{y+x-lm}{y+x+lm} e^{-2(y+x)} \right) \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

Didefinisikan kembali variabel y dalam v sebagai $v = y/lM_n = y/x$, maka persamaan (4.35) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned}
 E_{cas} &= -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_{lm}^{\infty} xdx \int_0^{\infty} xdv \frac{(vx)+x}{\sqrt{(vx)^2+2x(vx)}} \ln \left(1 + \frac{(vx)+x-lm}{(vx)+x+lm} e^{-2((vx)+x)} \right) \\
 E_{cas} &= -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_{lm}^{\infty} x^2 dx \int_0^{\infty} dv \frac{x(v+1)}{\sqrt{x^2(v^2+2v)}} \ln \left(1 + \frac{x(v+1)-lm}{x(v+1)+x+lm} e^{-2x(v+1)} \right) \\
 E_{cas} &= -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_{lm}^{\infty} x^2 dx \int_0^{\infty} dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \ln \left(1 + \frac{x(v+1)-lm}{x(v+1)+lm} e^{-2x(v+1)} \right) \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

Berangkat dari persamaan (4.34) nampak bahwa nilai energi Casimir bergantung pada besarnya medan magnet yang mempengaruhi fungsi gelombang partikel dan massa dari partikel itu sendiri. Maka dari itu supaya energi Casimir memiliki suatu nilai, dapat dilakukan pendekatan nilai massa partikel yang bekerja dalam sistem. Dalam kasus massa partikel yang sangat ringan ($m \ll 1$), dari persamaan (4.36) diperoleh besarnya nilai energi casimir sebagai

$$\begin{aligned}
 E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^{\infty} x^2 dx \int_0^{\infty} dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \ln \left(1 + \frac{x(v+1)-0}{x(v+1)+0} e^{-2x(v+1)} \right) \\
 E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^{\infty} x^2 dx \int_0^{\infty} dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \ln (1 + e^{-2x(v+1)}) \\
 E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^{\infty} dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{1}{3} \int_0^{\infty} dx^3 \ln (1 + e^{-2x(v+1)}) \quad (4.37)
 \end{aligned}$$

dengan menggunakan definisi $\int u dv = uv - \int v du$. Maka persamaan (4.37) dapat

dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned}
E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{1}{3} \left[x^3 \ln(1 + e^{-2x(v+1)}) \Big|_0^\infty \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty dx x^3 \frac{d}{dx} \ln(1 + e^{-2x(v+1)}) \right] \\
E_{cas} &\approx \frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{1}{3} \int_0^\infty dx x^3 (1 + e^{-2x(v+1)})^{-1} (-2(v+1))
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Selanjutnya dengan mengubah fungsi $(1 + e^{-2x(v+1)})^{-1}$ menjadi deret taylor sebagai $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-2nx(v+1)}$. Maka persamaan (4.38) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{2(v+1)}{3} \int_0^\infty dx x^3 \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-2nx(v+1)} \\
E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{2(v+1)}{3} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^\infty dx x^3 e^{-2nx(v+1)}
\end{aligned}$$

Guna menyederhanakan perhitungan, dimisalkan bahwa $y = 2nx(v+1)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{2(v+1)}{3} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \\
&\quad \times \int_0^\infty \frac{dy}{2n(v+1)} \frac{y^3}{(2n(v+1))^3} e^{-y} \\
E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{1}{3} \frac{2(v+1)}{(2(v+1))^4} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{n^4} \int_0^\infty dy y^3 e^{-y} \\
E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{1}{3(2(v+1))^3} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{6}{n^4} \\
E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{3}{3(4(v+1))^3} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{n^4} \\
E_{cas} &\approx -\frac{L^2}{\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{(v+1)}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{1}{(4(v+1))^3} \frac{7\pi^4}{720}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{cas} &\approx -\frac{7\pi^4 L^2}{2880\pi^2 l^3} \int_0^\infty dv \frac{1}{\sqrt{v(v+2)}} \frac{1}{(v+1)^2} \\
E_{cas} &\approx -\frac{7\pi^2 L^2}{2880l^3}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Persamaan (4.39) menunjukkan bahwa nilai medan magnet tereduksi sehingga besarnya energi Casimir tidak dipengaruhi oleh besarnya medan magnet. Hasil ini sesuai dengan referensi (Cruz et al., 2017) yang mengkaji energi Casimir dari fluktuasi medan Fermion tanpa pengaruh medan magnet eksternal dalam kasus kerusakan simetri Lorentz ($\lambda \neq 0$)

4.4.2 Kasus Medan Magnet Kuat ($B \gg 1$)

Dalam kasus medan magnet kuat dengan massa partikel sangat ringan ($m \ll 1$), persamaan (4.34) dapat disederhanakan sebagai

$$\begin{aligned}
E_{cas} &= -\frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^\infty dy \frac{y + l\sqrt{2n|qB|}}{\sqrt{y^2 + 2yl\sqrt{2nqB}}} \ln \left(1 + \frac{y + l\sqrt{2nqB}}{y + l\sqrt{2nqB}} e^{-2(y+l\sqrt{2n|qB|})} \right) \\
E_{cas} &= -\frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^\infty dy \frac{y + l\sqrt{2n|qB|}}{\sqrt{y^2 + 2yl\sqrt{2nqB}}} \ln \left(1 + e^{-2(y+l\sqrt{2n|qB|})} \right)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Bentuk integral dapat direduksi dengan pendekatan nilai l yang sangat kecil sebagai

$$\int_0^\infty dy \frac{y \left(1 + \frac{l}{y} \sqrt{2n|qB|} \right)}{y \sqrt{1 + \frac{2l}{y} \sqrt{2nqB}}} \ln \left(1 + e^{-2y(1 + \frac{l}{y} \sqrt{2nqB})} \right) \approx \int_0^\infty dy \ln (1 + e^{-2y})$$

Sehingga persamaan (4.40) dapat dituliskan sebagai

$$E_{cas} \approx -\frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^\infty dy \ln (1 + e^{-2y}) \tag{4.41}$$

Jika dimisalkan $t = e^{-2y}$, maka persamaan (4.41) menjadi

$$E_{cas} \approx -\frac{|qB|L^2}{\pi^2 l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_1^0 -\frac{dt}{2t} \ln (1 + t)$$

$$\begin{aligned}
E_{cas} &\approx -\frac{|qB|L^2}{2\pi^2l} \sum_{n=0}^{\infty} i_n \int_0^1 \frac{dt}{t} \ln(1+t) \\
E_{cas} &\approx -\frac{|qB|L^2}{2\pi^2l} \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{12} \\
E_{cas} &\approx -\frac{|qB|L^2}{48l}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Berdasarkan hasil perhitungan, nampak bahwa kehadiran medan magnet eksternal mempengaruhi energi partikel Fermion sehingga terkuantisasi ke tingkat-tingkat Landau. Hal ini menyebabkan pengaruh pada rapat energi vakum karena partikel Fermion mendapat energi kinetik tambahan saat melintasi medan magnet. Secara kuantitatif, hasil perhitungan energi Casimir dari partikel Fermion yang dipengaruhi medan magnet kuat dapat dibandingkan dengan perhitungan energi Casimir dari partikel Fermion yang tidak dipengaruhi medan magnet sebagai

$$\begin{aligned}
\frac{E_{cas(B \gg 1)}}{E_{cas(B \ll 1)}} &\approx \frac{-\frac{|qB|L^2}{48l}}{-\frac{\pi^2 L^2}{1440l^3}} \\
\frac{E_{cas(B \gg 1)}}{E_{cas(B \ll 1)}} &\approx \frac{60|qB|l^2}{7\pi^2}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Persamaan (4.43) menunjukkan bahwa nilai rasio dari energi Casimir yang terpengaruh medan magnet kuat dengan energi Casimir yang tidak terpengaruh medan magnet memiliki nilai yang selalu positif. Hal ini memberikan pernyataan bahwa pengaruh medan magnet eksternal terhadap fluktuasi partikel Fermion dapat meningkatkan nilai energi Casimir. Pernyataan ini sesuai dengan referensi (Rohim et al., 2024).

4.5 Energi Casimir dalam Tinjauan Al-Qur'an

Energi Casimir merupakan energi yang diukur dari perbedaan energi vakum dalam ruang bebas dengan energi vakum diantara dua permukaan konduktor dalam sudut pandang kuantum. Konsep dasar energi Casimir adalah tidak menganggap

ruang vakum atau ruang hampa sebagai ruang kosong, melainkan suatu ruang berisi partikel kuantum yang membentuk medan sehingga disebut medan kuantum. Kemudian medan ini terus berfluktuasi mengikuti prinsip ketidakpastian mekanika kuantum. Hal ini memungkinkan untuk terjadi pembentukan pasangan partikel-antipartikel (*pair creation*) yang dalam waktu singkat keduanya akan saling memusnahkan saat bertemu (*pair annihilation*). Dalam Al-Qur'an, proses kreasi dan anihilasi tertuang dalam Surat Al-'Aadiyaat[100]:1-3;

وَالْعَدِيَّتِ ضَبْحًا (١) فَالْمُورِيَّتِ قَدْحًا (٢) فَالْمُغِيرَاتِ صُبْحًا (٣)

”(1) Demi kuda perang yang berlari kencang dengan terengah-engah, (2) dan kuda yang mencetuskan api dengan pukulan (kuku kakinya), (3) dan kuda yang menyerang dengan tiba-tiba di waktu pagi” (Q.S. al-'Aadiyaat [100]:1-3).

Pada ayat-ayat Surat al-'Aadiyaat di atas, Allah SWT bukan membicarakan tentang kuda, melainkan mengartikan masalah penciptaan atas suatu hal. Ketika ilmu pengetahuan modern belum berkembang, benda yang paling mudah dikenali sebagai sesuatu yang melesat cepat (*dhabhan*) adalah kuda, sehingga 'aadiyaat sering ditafsirkan sebagai kuda, meskipun orang Arab tidak pernah menyebutkan hewan itu dengan istilah 'Aadiyaat. Akan tetapi, saat ini sesuatu yang diketahui orang sebagai benda yang bergerak cepat adalah partikel. Sehingga kata kuda pada ayat di atas ditafsirkan sebagai manifestasi dari suatu partikel (Purwanto, 2008).

Setiap partikel selalu mempunyai pasangannya, yakni partikel dan antipartikel. Partikel-partikel al-'Aadiyaat inilah yang saling berbenturan dengan kecepatan melesat (*dhabhan*), sehingga bunga-bunga pi (*al-muriyat*) yaitu panas dan cahaya terpancar (*qadhan*). Maka terbentuklah partikel-partikel baru (*al-mughirat*) (dari kata *ghayara* (berubah) atau *ghair* (lain)) (Komaruddin, 2017).

Ayat lain yang menjelaskan secara tersirat konsep kreasi dan anihilasi, dimana Allah SWT secara terus-menerus mencipta dan mematikan makhluk termak-

tub dalam Surat Yunus [10] ayat 34,

قُلْ هَلْ مِنْ شُرَكَائِكُمْ مَنْ يَبْدَأُ الْخُلُقَ ثُمَّ يُعِيدُهُ قُلِ اللَّهُ يَبْدَأُ الْخُلُقَ ثُمَّ
يُعِيدُهُ فَآتِي تُوْفِكُونَ (٣٤)

“Katakanlah, “Adakah di antara sekutumu yang dapat memulai penciptaan (makhluk), kemudian mengulanginya (menghidupkannya) kembali?” Katakanlah, “Allah memulai (penciptaan) makhluk, kemudian mengulanginya. Maka bagaimana kamu dipalingkan (menyembah selain Allah)?” (QS Yunus [10]:34)

Surat Yunus ayat 34 menegaskan kebesaran dan kekuasaan Allah sebagai pencipta seluruh makhluk dan penentu kehidupan. Dalam Tafsir Al-Misbah, ayat ini menjelaskan konsep kekuasaan Allah SWT dalam menciptakan makhluk dan menghidupkannya kembali setelah mati. Allah SWT menantang orang-orang yang menyekutukan-Nya dengan pertanyaan retorik, “Adakah di antara sekutumu yang dapat memulai penciptaan (makhluk), kemudian mengulanginya (menghidupkannya) kembali?” Ini menunjukkan bahwa hanya Allah SWT yang memiliki kekuasaan mutlak dalam memulai penciptaan dan menghidupkan kembali seluruh makhluk. Tidak ada sekutu atau dewa yang mampu melakukan hal yang sama (Shihab, 2002).

Kemudian Allah SWT menyatakan dengan tegas bahwa Dialah yang memulai penciptaan makhluk dan Dialah yang akan menghidupkannya kembali setelah mati. Ini adalah kekuasaan yang hanya dimiliki oleh Allah SWT semata. Oleh karena itu, Allah SWT menanyakan kepada mereka, “Maka bagaimana kamu dipalingkan (menyembah selain Allah)?” Pertanyaan ini menyoroti ketidakkonsistenan dan kebodohan mereka yang menyembah selain Allah, yang tidak memiliki kekuasaan sejati seperti yang dimiliki oleh Allah SWT. Ayat ini menegaskan monoteisme dan eksklusivitas dalam menyembah Allah, serta menolak segala bentuk syirik atau penyekutuan dalam kekuasaan penciptaan dan menghidupkan kembali makhluk. Ini juga menekankan bahwa semua makhluk, termasuk manusia, seharusnya hanya menyembah dan tunduk kepada Allah SWT semata sebagai pencipta dan pemberi kehidupan (Shihab, 2002).

Tafsir Ibnu Katsir menjelaskan surat ini dengan menyatakan bahwa Allah menantang para musyrik Quraisy dan orang-orang kafir lainnya untuk membuktikan kebenaran sembahhan-semбахan yang mereka sembah. Allah SWT menegaskan bahwa tidak ada dari sembahhan-semбахan tersebut yang memiliki kekuasaan untuk menciptakan makhluk atau menghidupkannya kembali setelah mati. Ayat ini menunjukkan bahwa kekuasaan mutlak dalam penciptaan dan kebangkitan hanya dimiliki oleh Allah SWT. Tidak ada yang mampu menyaingi atau menyamai kekuasaan-Nya. Oleh karena itu, tindakan menyembah selain Allah merupakan tindakan yang sia-sia dan tidak masuk akal. Ayat ini juga mengandung seruan bagi manusia untuk mengingat dan memahami kebesaran Allah serta mengabdikan hanya kepada-Nya (Abdullah, 2003).

Seperti penafsiran sebelumnya, Tafsir Kementerian Agama RI menerangkan bahwa Allah SWT memerintahkan kepada Nabi Muhammad, katakanlah kepada orang-orang kafir adakah di antara sembahhan yang kamu jadikan sekutu Allah itu yang dapat memulai penciptaan makhluk, kemudian menghidupkannya kembali, jawabannya pasti tidak ada. Karena itu katakanlah wahai Nabi Muhammad SAW, Allah SWT yang memulai penciptaan makhluk, kemudian mengulanginya, yakni menghidupkannya kembali pada waktu yang sudah ditetapkannya sesuai kehendak-Nya. Maka bagaimana kamu dipalingkan oleh kebohongan dan hawa nafsu, sehingga menyembah selain Allah SWT.

Ayat 34 dari Surat Yunus adalah bagian dari serangkaian ayat yang menegaskan keesaan dan kekuasaan Allah SWT serta menyeru kepada manusia untuk memikirkan kembali kepercayaan mereka kepada berhala atau sembahhan-semбахan selain Allah SWT. Di sini, Allah SWT menantang orang-orang musyrik dengan pertanyaan yang menunjukkan keagungan-Nya sebagai pencipta dan pemulih kehidupan. Penafsiran ayat ini menekankan beberapa poin penting. Diantaranya adalah kuasa penciptaan dan menghidupkan kembali. Tertera dalam penafsiran bahwa Allah SWT menggambarkan diri-Nya sebagai pencipta yang memulai penciptaan

mahluk dan menghidupkannya kembali setelah mati. Ini menunjukkan kekuasaan Allah SWT yang mutlak atas kehidupan dan kematian, serta kemampuan-Nya untuk mengulangi proses penciptaan. Poin penting lain yakni berisi kritik terhadap sembah-sembahan selain Allah SWT. Dalam konteks yang lebih luas, ayat ini merupakan kritik terhadap penyembahan berhala atau sembah-sembahan lain selain Allah SWT. Allah SWT menunjukkan bahwa hanya Dia yang berhak disembah dan hanya Dia yang memiliki kekuasaan sejati atas penciptaan dan pemulihan kehidupan.

Dengan menghubungkan Surat Yunus ayat 34 dengan konsep penciptaan dan pemusnahan partikel, dapat direnungkan hikmah yang mendalam tentang keajaiban penciptaan dan kematian mahluk. Seperti dalam fisika kuantum dimana pasangan partikel dapat diciptakan dan dihancurkan, dapat direnungkan bahwa hanya Allah SWT yang memiliki kuasa untuk menciptakan dan menghancurkan, serta menghidupkan kembali apa yang telah dihancurkan. Konsep *pair creation* dan *pair annihilation* dapat memperkuat keyakinan manusia sebagai mahluk ciptaan Allah SWT yang Esa dan memiliki kekuasaan yang mutlak atas segala sesuatu. Selain itu ayat ini juga menjadi refleksi atas keterbatasan manusia dalam memahami ciptaan Allah SWT, sehingga konsep-konsep dalam fisika kuantum dapat menjadi jendela untuk mengagumi kompleksitas dan keagungan penciptaan Allah SWT.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

1. Persamaan Dirac dalam pengaruh medan magnetik memiliki dua solusi, yakni solusi energi positif sebagai

$$\Psi^+(\mathbf{r}) = \frac{e^{-i\omega t} e^{ik_1 x} e^{ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} (\omega_n + m)f_+(y) \\ 0 \\ k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB} f_-(y) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n + m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB} f_+(y) \\ -k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \right] +$$

$$\frac{e^{-i\omega t} e^{ik_1 x} e^{-ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} (\omega_n + m)f_+(y) \\ 0 \\ -k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB} f_-(y) \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n + m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB} f_+(y) \\ k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \right],$$

untuk $n \geq 1$ (5.1)

$$\Psi^+(\mathbf{r}) = \frac{e^{-i\omega t} e^{ik_1 x} e^{ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} C_0 f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0 + m) \\ 0 \\ k_3 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{e^{-i\omega t} e^{ik_1 x} e^{-ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} \tilde{C}_0 f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0 + m) \\ 0 \\ -k_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n = 0 \quad (5.2)$$

dan solusi energi negatif sebagai

$$\Psi^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\omega t} e^{-ik_1 x} e^{-ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} k_3 f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB} f_-(y) \\ (\omega_n + m) f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB} f_+(y) \\ -k_3 f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n + m) f_-(y) \end{pmatrix} \right] +$$

$$\frac{e^{i\omega t} e^{-ik_1 x} e^{ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} -k_3 f_+(y) \\ -\sqrt{2nqB} f_-(y) \\ (\omega_n + m) f_+(y) \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2nqB} f_+(y) \\ k_3 f_-(y) \\ 0 \\ (\omega_n + m) f_-(y) \end{pmatrix} \right]$$

, untuk $n \geq 1$ (5.3)

$$\Psi^-(\mathbf{r}) = \frac{e^{i\omega t} e^{-ik_1 x} e^{-ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} \tilde{C}_0 f_+(y) \begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ (\omega_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\frac{e^{-i\omega t} e^{ik_1 x} e^{-ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} C_0 f_+(y) \begin{pmatrix} -k_3 \\ 0 \\ (\omega_0 + m) \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ untuk } n = 0 \quad (5.4)$$

2. Energi Casimir dari fluktuasi medan Fermion dalam pengaruh medan magnet memiliki dua nilai pendekatan, yakni untuk medan lemah sebagai

$$E_{cas} \approx -\frac{7\pi^2 L^2}{2880l^3} \quad (5.5)$$

dan untuk medan kuat sebagai

$$E_{cas} \approx -\frac{|qB|L^2}{48l} \quad (5.6)$$

5.2 Saran

Penelitian mengenai Efek Casimir partikel Fermion dalam pengaruh medan magnetik dapat dikembangkan untuk menghitung besarnya tekanan Casimir dan meninjau faktor temperatur. Selain itu energi Casimir yang diperoleh dalam penelitian ini terbatas dalam ruang waktu datar, maka penelitian selanjutnya dapat dikembangkan untuk mencari besarnya energi Casimir dalam ruang waktu melengkung akibat pengaruh gravitasi black hole.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdullah (2003). *Tafsir Ibnu Katsir*. Pustaka Imam asy-Syafi'i.
- Aitchison, I. J. and Hey, A. J. (2013). *Gauge Theories in Particle Physics*, volume 1. Taylor and Francis Group CRC Press, fourth edition edition.
- Anugraha, R. (2005). *Pengantar Teori Relativitas dan Kosmologi*. Gadjah Mada University Press.
- Bhattacharya, K. (2007). *Solution of the Dirac equation in presence of an uniform magnetic field*.
- Bjorken, J. D. and Drell, S. D. (1964). *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, Inc.
- Bressi, G., Carugno, G., Onofrio, R., Ruoso, G., Onofrio, R., and Ruoso, G. (2002). Measurement of the casimir force between parallel metallic surfaces. *Physical Review Letters*, 88:4.
- Bustami, A. (1991). *Al-Qur'an dan Tafsirnya*. PT. Dana Bhakti Wakaf.
- Casimir, H. (1948). On the attraction between two perfectly conducting plates.
- Cougo-Pinto, M. V., Farina, C., and Tort, A. (1998). Fermionic casimir effect in an external magnetic field.
- Cruz, M., de Mello, E. B., and Petrov, A. (2017). Casimir effects in lorentz-violating scalar field theory. *Physical Review D*, 96(4).
- Damanik, A. (2009). *Pendidikan Sebagai Pembentukan Watak Bangsa Sebuah Refleksi Konseptual Kritis dari Sudut Pandang Fisika*. Sanata Dharma University Press.
- Das, A. (2008). *Quantum Field Theory*. World Scientific Publishing.
- Elizalde, E., Santos, F., and Tort, A. (2002). Confined quantum field under the influence of a uniform magnetic field.
- Faria, E. D. and Melo, W. D. (2010). *Mathematical Aspects of Quantum Field Theory*. Cambridge University Press.
- Fitzpatrick, R. (2008). *Maxwell's Equations and the Principles of Electromagnetism*. Infinity Science Press.
- Gautama, E. (2018). *Pengantar Teori Relativitas Umum dan Kosmologi Revisi 2.1*. Paradoks Softbook Publisher.
- Griffiths, D. J. (2004). *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson Education International, 2nd edition.
- Griffiths, D. J. D. J. (1987). *Introduction to Elementary Particles*. Wiley.

- Hariyanto, R. (2006). *Efek Casimir: Fenomena Makroskopik Fluktuasi Vakum Kuantum*. ITS.
- Harris, B. W., Chen, F., and Mohideen, U. (2000). Precision measurement of the casimir force using gold surfaces. *Physical Review A*, 62.
- Komaruddin (2017). Studi interaksi quark-antiquark (meson) dengan pendekatan integral lintas feynman-schwinger.
- Lamoreaux, S. (1997). Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 ρ m range. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5–8.
- Langfeld, K., Schmüser, F., and Reinhardt, H. (1993). Casimir effect of strongly interacting scalar fields.
- Milton, K. A. (1999). The casimir effect: Physical manifestations of zero-point energy.
- Mohideen, U. and Roy, A. (1998). Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 ρ m. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4549–4552.
- Mulyono, A. and Abtokhi, A. (2006). *Fisika dan Al-Qur'an*. UIN Malang Press.
- Ostrowski, M. (2006). Casimir effect in external magnetic field. 37.
- Pambudi, D. E. (2022). Studi efek gravitasi partikel fermion dan boson dalam ruangwaktu melengkung.
- Purwanto, A. (2008). *Ayat-Ayat Semesta Sisi-Sisi Al-Qur'an yang Terlupakan*. Mizan.
- Purwanto, A. (2020). Teori kuantum dari al-ghazali hingga einstein, dari kehendak bebas tuhan hingga teleportasi multi-qubit.
- Rizqy, L. (2022). Studi persamaan dirac versi dual pada partikel elektron.
- Rohim, A., Romadani, A., and Adam, A. S. (2024). Casimir effect of Lorentz-violating charged Dirac in background magnetic field. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, page ptae016.
- Roy, A. and Mohideen, U. (1999). Demonstration of the nontrivial boundary dependence of the casimir force.
- Shihab, M. Q. (2002). *Tafsir Al-Misbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an Vol 6*. Lentera Hati.
- Sitenko, Y. A. (2015). The casimir effect with quantized charged spinor matter in background magnetic field.
- Sparnaay, M. (1958). Measurement of attractive forces between flat plates. *Physica*, 24:751–764.

Wen, X.-G. (2004). *Quantum Field Theory of Many-Body Systems: From the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons*. Oxford University Press.

Yllka, S. K. (2019). Casimir effect. *Journal of Natural Sciences and Mathematics of UT*, 4:7–8.

LAMPIRAN

A. Ortonormalitas Fungsi Gelombang Level Energi $n > 0$:

Secara matematis, ortonormalitas fungsi gelombang Dirac dinyatakan sebagai

$$\int_{\Omega} d^3r \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}) = \delta_{ij} = 1 \quad (\text{A.1})$$

dengan fungsi gelombang $\psi^+(\mathbf{r})$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \psi^+(\mathbf{r}) = & \frac{e^{ik_1x} e^{ik_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} (\omega_n + m)f_+(y) \\ 0 \\ k_3f_+(y) \\ \sqrt{2nqB}f_-(y) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n + m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ -k_3f_-(y) \end{pmatrix} \right] + \\ & \frac{e^{ik_1x} e^{-ik_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} (\omega_n + m)f_+(y) \\ 0 \\ -k_3f_+(y) \\ \sqrt{2nqB}f_-(y) \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n + m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ k_3f_-(y) \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

dan $\psi^{+\dagger}$ sebagai

$$\begin{aligned} \psi^{+\dagger}(\mathbf{r}) = & \frac{e^{-ik'_1x} e^{-ik'_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'} + m)}} \left[C_1^* \begin{pmatrix} (\omega_{n'} + m)f_+(y) \\ 0 \\ k'_3f_+(y) \\ \sqrt{2n'qB}f_-(y) \end{pmatrix}^\dagger + C_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_{n'} + m)f_-(y) \\ \sqrt{2n'qB}f_+(y) \\ -k'_3f_-(y) \end{pmatrix}^\dagger \right] + \\ & \frac{e^{-ik'_1x} e^{ik'_3z}}{2\pi \sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'} + m)}} \left[\tilde{C}_1^* \begin{pmatrix} (\omega_{n'} + m)f_+(y) \\ 0 \\ -k'_3f_+(y) \\ \sqrt{2n'qB}f_-(y) \end{pmatrix}^\dagger + \tilde{C}_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_{n'} + m)f_-(y) \\ \sqrt{2n'qB}f_+(y) \\ k'_3f_-(y) \end{pmatrix}^\dagger \right] \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (A.1) dapat dijabarkan sebagai

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^l dz \\
&\times \left\{ \frac{e^{-ik'_1 x} e^{-ik'_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'} + m)}} \left[C_1^* \begin{pmatrix} (\omega_{n'} + m)f_+(y) \\ 0 \\ k'_3 f_+(y) \\ \sqrt{2n'qB}f_-(y) \end{pmatrix}^\dagger + C_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_{n'} + m)f_-(y) \\ \sqrt{2n'qB}f_+(y) \\ -k'_3 f_-(y) \end{pmatrix}^\dagger \right] \right. \\
&+ \left. \frac{e^{-ik'_1 x} e^{ik'_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'} + m)}} \left[\tilde{C}_1^* \begin{pmatrix} (\omega_{n'} + m)f_+(y) \\ 0 \\ -k'_3 f_+(y) \\ \sqrt{2n'qB}f_-(y) \end{pmatrix}^\dagger + \tilde{C}_2^* \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_{n'} + m)f_-(y) \\ \sqrt{2n'qB}f_+(y) \\ k'_3 f_-(y) \end{pmatrix}^\dagger \right] \right\} \\
&\times \left\{ \frac{e^{ik_1 x} e^{ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[C_1 \begin{pmatrix} (\omega_n + m)f_+(y) \\ 0 \\ k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB}f_-(y) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n + m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ -k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \right] \right. \\
&+ \left. \frac{e^{ik_1 x} e^{-ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \left[\tilde{C}_1 \begin{pmatrix} (\omega_n + m)f_+(y) \\ 0 \\ -k_3 f_+(y) \\ \sqrt{2nqB}f_-(y) \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ (\omega_n + m)f_-(y) \\ \sqrt{2nqB}f_+(y) \\ k_3 f_-(y) \end{pmatrix} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^L dy \int_0^l dz \frac{\delta(k_1 - k'_1)}{2\pi \sqrt{2\omega_{n'}(\omega_{n'} + m)} \sqrt{2\omega_n(\omega_n + m)}} \\
&\times \left\{ e^{i(k_3 - k'_3)z} \left[|C_1|^2 ((\omega_{n'} + m)(\omega_n + m)(f_+(y))^2 + k_3^2(f_+(y))^2 + \sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_-(y))^2) \right] \right. \\
&+ e^{i(k_3 - k'_3)z} \left[C_1^* C_2 \left(k_3 \sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 - k_3 \sqrt{2n'qB}(f_+(y))^2 \right) \right] \\
&+ e^{-i(k'_3 + k_3)z} \left[C_1^* \tilde{C}_1 \left((\omega_{n'} + m)(\omega_n + m)(f_+(y))^2 - k_3^2(f_+(y))^2 + \sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
&+ e^{-i(k'_3 + k_3)z} \left[C_1^* \tilde{C}_2 \left(k'_3 \sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 + k_3 \sqrt{2n'qB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
&+ e^{i(k_3 - k'_3)z} \left[C_2^* C_1 \left(k'_3 \sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 - k_3 \sqrt{2n'qB}(f_-(y))^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{i(k_3-k'_3)z} \left[|C_2|^2 \left((\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_-(y))^2 + k_3^2(f_-(y))^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{-i(k'_3+k_3)z} \left[C_2^* \tilde{C}_1 \left(-k'_3\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 - k_3\sqrt{2n'qB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{-i(k'_3+k_3)z} \left[C_2^* \tilde{C}_2 \left((\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_-(y))^2 - k_3^2(f_-(y))^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{i(k'_3+k_3)z} \left[\tilde{C}_1^* C_1 \left((\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_+(y))^2 + k_3^2(f_+(y))^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{i(k'_3+k_3)z} \left[\tilde{C}_1^* C_2 \left(-k'_3\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 - k_3\sqrt{2n'qB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{i(k'_3-k_3)z} \left[|\tilde{C}_1|^2 \left((\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_+(y))^2 + k_3^2(f_+(y))^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{i(k_3-k'_3)z} \left[\tilde{C}_1^* \tilde{C}_2 \left(-k'_3\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 + k_3\sqrt{2n'qB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{i(k_3+k'_3)z} \left[\tilde{C}_2^* C_1 \left(k'_3\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 + k_3\sqrt{2n'qB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{i(k_3+k'_3)z} \left[\tilde{C}_2^* C_2 \left((\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_-(y))^2 - k'_3k_3(f_+(y))^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{i(k'_3-k_3)z} \left[\tilde{C}_2^* \tilde{C}_1 \left(-k'_3\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 + k_3\sqrt{2n'qB}(f_-(y))^2 \right) \right] \\
& +e^{i(k'_3-k_3)z} \left[|\tilde{C}_2|^2 \left((\omega'_n + m)(\omega_n + m)(f_-(y))^2 + k_3^2(f_-(y))^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \sqrt{2n'qB}\sqrt{2nqB}(f_+(y))^2 \right) \right] \Big\} \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Karena $\int dy(f_+(y)) = \int dy(f_-(y)) = 1$, maka persamaan (A.2) disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
1 & = \frac{\delta(k_1 - k'_1)\delta_{nn'}}{2\pi 2\omega_n(\omega_n + m)} \\
& \times \left\{ \frac{-ie^{i(k_3-k'_3)l} - 1}{(k_3 - k'_3)} \left[|C_1|^2 \left((\omega_n + m)^2 + k_3^2 + 2nqB \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{ie^{-i(k'_3-k_3)l} - 1}{(k'_3 - k_3)} \left[C_1^* \tilde{C}_1 \left((\omega_n + m)^2 - k_3^2 + 2nqB \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ie^{-i(k'_3+k_3)l} - 1}{(k'_3 + k_3)} \left[C_1^* \tilde{C}_2 \left(2k_3 \sqrt{2nqB} \right) \right] \\
& + \frac{-ie^{i(k_3-k'_3)l} - 1}{(k_3 - k'_3)} \left[|C_2|^2 \left((\omega_n + m)^2 + k_3^2 + 2nqB \right) \right] \\
& + \frac{ie^{-i(k'_3+k_3)l} - 1}{(k'_3 + k_3)} \left[C_2^* \tilde{C}_1 \left(-2k_3 \sqrt{2nqB} \right) \right] \\
& + \frac{ie^{-i(k'_3+k_3)l} - 1}{(k'_3 + k_3)} \left[C_2^* \tilde{C}_2 \left((\omega_n + m)^2 - k_3^2 + 2nqB \right) \right] \\
& + \frac{-ie^{i(k'_3+k_3)l} - 1}{(k'_3 + k_3)} \left[\tilde{C}_1^* C_1 \left((\omega_n + m)^2 - k_3^2 + 2nqB \right) \right] \\
& + \frac{-ie^{i(k'_3-k_3)l} - 1}{(k'_3 - k_3)} \left[\tilde{C}_1^* C_2 \left(-2k_3 \sqrt{2nqB} \right) \right] \\
& + \frac{-ie^{i(k'_3-k_3)l} - 1}{(k'_3 - k_3)} \left[\tilde{C}_1^2 \left((\omega_n + m)^2 + k_3^2 + 2nqB \right) \right] \\
& + \frac{-ie^{i(k_3+k'_3)l} - 1}{(k_3 + k'_3)} \left[\tilde{C}_2^* C_1 \left(2k_3 \sqrt{2nqB} \right) \right] \\
& + \frac{-ie^{i(k_3+k'_3)l} - 1}{(k_3 - k'_3)} \left[\tilde{C}_2^* C_2 \left((\omega_n + m)^2 - k_3^2 + 2nqB \right) \right] \\
& + \frac{-ie^{i(k'_3-k_3)l} - 1}{(k_3 - k'_3)} \left[\tilde{C}_2^2 \left((\omega_n + m)^2 + k_3^2 + 2nqB \right) \right] \Big\}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Bentuk eksponensial pada persamaan (A.3) diubah ke dalam bentuk trigonometri mengikuti aturan

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{A.4}$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \tag{A.5}$$

Kemudian dengan menyederhanakan bagian suku riil menggunakan aturan L'hopital pada teorema limit, dimana

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{A.6}$$

Maka persamaan (A.3) menjadi

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\delta(k_1 - k'_1)\delta_{nn'}}{2\pi 2\omega_n(\omega_n + m)} \\
&\quad \left\{ \times l(|C_1|^2 + |C_2|^2)(\omega_n + m)^2 + k_3^2 + 2nqB) \right. \\
&\quad + l(|\tilde{C}_1|^2 + |\tilde{C}_2|^2)(\omega_n + m)^2 + k_3^2 + 2nqB) \\
&\quad + l(C_1^*\tilde{C}_1 + C_2^*\tilde{C}_2 + \tilde{C}_1^*C_1 + \tilde{C}_2^*C_2)(\omega_n + m)^2 - k_3^2 + 2nqB) \\
&\quad + l(C_1^*\tilde{C}_2 + \tilde{C}_2^*C_1)\left(2k_3\sqrt{2nqB}\right) \\
&\quad \left. + l(C_2^*\tilde{C}_1 + \tilde{C}_1^*C_2)\left(-2k_3'\sqrt{2nqB}\right) \right\}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Dimana perkalian silang (*dot product*) antara dua vektor tilde dan nontilde memberikan kontribusi nol karena arahnya saling bersilangan atau disebut sebagai ortogonal. Sehingga persamaan (A.7) dapat disederhanakan sebagai

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{\delta(k_1 - k'_1)\delta_{nn'}}{2\pi 2\omega_n(\omega_n + m)} \left\{ \times l\left(|C_1|^2 + |C_2|^2 + |\tilde{C}_1|^2 + |\tilde{C}_2|^2\right)(\omega_n^2 + m^2 + 2\omega_n m + k_3^2 + 2nqB) \right\} \\
&= \frac{\delta(k_1 - k'_1)\delta_{nn'}}{2\pi 2(\omega_n + m)} \left\{ \times l\left(|C_1|^2 + |C_2|^2 + |\tilde{C}_1|^2 + |\tilde{C}_2|^2\right)(2\omega_n(\omega_n + m)) \right\}
\end{aligned}$$

Untuk nilai $k_1 = k'_1$ dan $n = n'$ maka $\delta(k_1 - k'_1) = \delta_{nn'} = 1$. Maka

$$1 = \frac{l\left(|C_1|^2 + |C_2|^2 + |\tilde{C}_1|^2 + |\tilde{C}_2|^2\right)}{2\pi}$$

Sehingga dapat diperoleh bahwa

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 + |\tilde{C}_1|^2 + |\tilde{C}_2|^2 = \frac{2\pi}{l} \tag{A.8}$$

B. Ortonormalitas Fungsi Gelombang Level Energi $n = 0$:

Fungsi gelombang $\psi^+(\mathbf{r})$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \psi^+(\mathbf{r}) = & \frac{e^{ik_1x} e^{ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0+m)}} C_0 f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0+m) \\ 0 \\ k_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{e^{ik_1x} e^{-ik_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0+m)}} \tilde{C}_0 f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0+m) \\ 0 \\ -k_3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

dan $\psi^{+\dagger}$ sebagai

$$\begin{aligned} \psi^{+\dagger} = & \frac{e^{-ik'_1x} e^{-ik'_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0+m)}} C_0^* f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0+m) \\ 0 \\ k'_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{e^{-ik'_1x} e^{ik'_3z}}{2\pi\sqrt{2\omega_0(\omega_0+m)}} \tilde{C}_0^* f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0+m) \\ 0 \\ -k'_3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Secara sama, dengan mensubstitusikan $\psi^+(\mathbf{r})$ dan $\psi^{+\dagger}(\mathbf{r})$ ke persamaan (A.1), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^l dz \\
&\times \left\{ \frac{e^{-ik'_1 x} e^{-ik'_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} C_0^* f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0 + m) \\ 0 \\ k'_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\
&+ \left. \frac{e^{-ik'_1 x} e^{ik'_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} \tilde{C}_0^* f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0 + m) \\ 0 \\ -k'_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&\times \left\{ \frac{e^{ik_1 x} e^{ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} C_0 f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0 + m) \\ 0 \\ k_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\
&+ \left. \frac{e^{ik_1 x} e^{-ik_3 z}}{2\pi \sqrt{2\omega_0(\omega_0 + m)}} \tilde{C}_0 f_+(y) \begin{pmatrix} (\omega_0 + m) \\ 0 \\ -k_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
1 &= \int_0^L dy \int_0^l dz \frac{\delta(k_1 - k'_1)}{2\pi 2\omega_0(\omega_0 + m)} \\
&\times \left\{ e^{-i(k'_3 - k_3)z} [|C_0|^2 f_+(y)^2 ((\omega_0 + m)^2 + k'_3 k_3)] \right. \\
&+ e^{-i(k'_3 + k_3)z} [C_0^* \tilde{C}_0 (f_+(y))^2 ((\omega_0 + m) - k'_3 k_3)] \\
&+ e^{i(k'_3 + k_3)z} [\tilde{C}_0^* C_0 (f_+(y))^2 ((\omega_0 + m) - k'_3 k_3)] \\
&+ \left. e^{-i(k_3 - k'_3)z} [|\tilde{C}_0|^2 (f_+(y))^2 ((\omega_0 + m)^2 + k'_3 k_3)] \right\} \quad (\text{B.3})
\end{aligned}$$

Karena $\int dy(f_+(y)) = \int dy(f_-(y)) = 1$, maka persamaan (B.3) disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
1 = & \frac{\delta(k_1 - k'_1)\delta_{nn'}}{2\pi 2\omega_0(\omega_0 + m)} \times \left\{ \frac{ie^{-i(k'_3 - k_3)l} - 1}{(k'_3 - k_3)} [|C_0|^2 ((\omega_0 + m)^2 + k_3^2)] \right. \\
& + \frac{ie^{-i(k'_3 + k_3)l} - 1}{(k'_3 + k_3)} [C_0^* \tilde{C}_0 ((\omega_0 + m)^2 - k_3^2)] \\
& + \frac{-ie^{i(k'_3 + k_3)l} - 1}{(k'_3 + k_3)} [\tilde{C}_0^* C_0 ((\omega_0 + m)^2 - k_3^2)] \\
& \left. + \frac{ie^{-i(k_3 - k'_3)l} - 1}{(k_3 - k'_3)} [|\tilde{C}_0|^2 ((\omega_0 + m)^2 + k_3^2)] \right\}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Selanjutnya dengan mengubah bentuk eksponensial ke dalam bentuk trigonometri kemudian bagian suku riil disederhanakan menggunakan aturan L'hospital, maka persamaan (B.4) menjadi

$$\begin{aligned}
1 = & \frac{\delta(k_1 - k'_1)\delta_{nn'}}{2\pi 2\omega_0(\omega_0 + m)} \times \left\{ l \left(|C_0|^2 + |\tilde{C}_0|^2 \right) ((\omega_0 + m)^2 + k_3^2) \right. \\
& \left. + l \left(C_0^* \tilde{C}_0 + \tilde{C}_0^* C_0 \right) ((\omega_0 + m)^2 - k_3^2) \right\}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Perkalian silang (*dot product*) antara dua vektor tilde dan nontilde memberikan kontribusi nol karena arahnya saling bersilangan. Sehingga persamaan (B.5) dapat disederhanakan sebagai

$$\begin{aligned}
1 = & \frac{\delta(k_1 - k'_1)\delta_{nn'}}{2\pi 2\omega_0(\omega_0 + m)} \times \left\{ l \left(|C_0|^2 + |\tilde{C}_0|^2 \right) (\omega_0^2 + 2\omega m + m^2 + k_3^2) \right\} \\
1 = & \frac{\delta(k_1 - k'_1)\delta_{nn'}}{2\pi 2\omega_0(\omega_0 + m)} \times l \left(|C_0|^2 + |\tilde{C}_0|^2 \right) (2\omega_0(\omega_0 + m))
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Untuk nilai $k_1 = k'_1$ dan $n = n'$ maka $\delta(k_1 - k'_1) = \delta_{nn'} = 1$. Maka

$$1 = \frac{l \left(|C_0|^2 + |\tilde{C}_0|^2 \right)}{2\pi} \tag{B.7}$$

Sehingga dapat diperoleh bahwa

$$|C_0|^2 + |\tilde{C}_0|^2 = \frac{2\pi}{l} \tag{B.8}$$



JURNAL BIMBINGAN SKRIPSI/TESIS/DISERTASI

IDENTITAS MAHASISWA

NIM : 19640055
Nama : IMALA ENDI RAHAYU
Fakultas : SAINS DAN TEKNOLOGI
Jurusan : FISIKA
Dosen Pembimbing 1 : ARISTA ROMADANI, M.Sc
Dosen Pembimbing 2 : MUTHMAINNAH, M.Si
Judul Skripsi/Tesis/Disertasi : EFEK CASIMIR PARTIKEL FERMION DALAM PENGARUH MEDAN MAGNETIK

IDENTITAS BIMBINGAN

| No | Tanggal Bimbingan | Nama Pembimbing | Deskripsi Proses Bimbingan | Tahun Akademik | Status |
|----|-------------------|-----------------------|---|------------------|-----------------|
| 1 | 22 Februari 2023 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi Topik dan judul | Ganjil 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 2 | 1 Maret 2023 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi bab I | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 3 | 8 Maret 2023 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi bab II | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 4 | 15 Maret 2023 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi bab I, II dan III | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 5 | 26 April 2023 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi revisi seminar proposal | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 6 | 14 Juni 2023 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi perhitungan bab III | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 7 | 14 Agustus 2023 | MUTHMAINNAH, M.Si | Konsultasi integrasi bab I dan II | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 8 | 22 September 2023 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi perhitungan bab III | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 9 | 23 November 2023 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi perhitungan bab III | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 10 | 23 Februari 2024 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi perhitungan bab IV | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 11 | 23 April 2024 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi perhitungan bab IV | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 12 | 13 Mei 2024 | MUTHMAINNAH, M.Si | Konsultasi integrasi bab IV | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |
| 13 | 31 Mei 2024 | ARISTA ROMADANI, M.Sc | Konsultasi revisi seminar hasil dan bab V | Genap 2023/2024 | Sudah Dikoreksi |

Telah disetujui
Untuk mengajukan ujian
Skripsi/Tesis/Desertasi

Dosen Pembimbing 2

MUTHMAINNAH, M.Si

Malang, 31 Mei 2024
Dosen Pembimbing 1

ARISTA ROMADANI, M.Sc

