APLIKASI FUNGSI BESSEL PADA GETARAN MEMBRAN SIRKULAR DAN DISTRIBUSI KECEPATAN ALIRAN LAMINAR *UNSTEADY* PIPA SIRKULAR

SKRIPSI

Oleh:
SITI MAKHMUDAH
NIM: 05510019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

APLIKASI FUNGSI BESSEL PADA GETARAN MEMBRAN SIRKULAR DAN DISTRIBUSI KECEPATAN ALIRAN LAMINAR *UNSTEADY* PIPA SIRKULAR

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri "Maulana Malik Ibrahim" Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SITI MAKHMUDAH
NIM: 05510019

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2009

APLIKASI FUNGSI BESSEL PADA GETARAN MEMBRAN SIRKULAR DAN DISTRIBUSI KECEPATAN ALIRAN LAMINAR *UNSTEADY* PIPA SIRKULAR

SKRIPSI

Oleh:
SITI MAKHMUDAH
NIM: 05510019

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 6 Oktober 2009

Pembimbing I

Usman Pagalay, M. Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Pembimbing II

Ach. Nashichuddin, M.Ag
NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

APLIKASI FUNGSI BESSEL PADA GETARAN MEMBRAN SIRKULAR DAN DISTRIBUSI KECEPATAN ALIRAN LAMINAR *UNSTEADY* PIPA SIRKULAR

SKRIPSI

Oleh:
SITI MAKHMUDAH
NIM: 05510019

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 9 Oktober 2009

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	: Evawati Alisah, M. Pd NIP. 19720604 199903 2 001	( )
2. Ketua Penguji	: Sri Harini, M. Si NIP. 19731014 200112 2 002	( )
3. Sekretaris Penguji	: Usman Pagalay, M. Si NIP. 19650414 200312 1 001	( )
4. Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M. Ag NIP. 19730705 200003 1 001	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : SITI MAKHMUDAH

NIM : 05510019

Jurusan/ Fakultas : MATEMATIKA/ SAINS DAN TEKNOLOGI

Judul Penelitian : APLIKASI FUNGSI BESSEL PADA GETARAN MEMBRAN SIRKULAR DAN DISTRIBUSI KECEPATAN ALIRAN LAMINAR *UNSTEADY* PIPA SIRKULAR

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 6 Oktober 2009

Yang membuat pernyataan

Siti Makhmudah

NIM. 05510019

"jangan takut menghadapi kesulitan, karena di setiap kesulitan itu ada kemudahan yang menyertainya"

Skripsi ini penulis persembahkan untuk: abi Abd Rohim, ummi Asrifah, mb Zah & kluarga, mb Ni' & kluarga, mb Rif & kluarga, mas Rofi' & kluarga, mb Nur & kluarga, mas Rosyid & kluarga, mas Wawi, adek..(kalianlah motifasi utama penulis), jamz elBadr, Pak lek Drs. H. Asrukin, M. Si dan Hj. Wiwik, dan Semua teman dekatQ: Yuni, Vivi, Sali, Ima, Sasa.

KATA PENGANTAR

Assalamulaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, syukur penulis kepada Alloh SWT atas segala rahmah dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan judul "Aplikasi Fungsi Bessel pada Getaran Membran Sirkular dan Distribusi Kecepatan Aliran Laminar *Unsteady* Pipa Sirkular".

Penulisan skripsi ini tentu tidak lepas dari bimbingan, bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Untuk itu, ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Imam suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Bapak Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro SU. DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Usman Pagalay, M.Si dan Bapak Ach Nashichuddin, M.Ag yang telah memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi.
5. Segenap dosen pengajar yang telah memberikan ilmunya kepada penulis.
6. Staf Administrasi jurusan matematika.
7. Bapak, Ibu, dan segenap keluarga yang dengan segenap hati memberikan dukungan moril dan spirituil kepada penulis.

8. Teman-teman matematika 2005 atas kebersamaanya.
9. Semua pihak yang telah membantu menyelesaiakan proses penulisan skripsi ini.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kesalahan dan kekurangan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah khasanah ilmu pengetahuan.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 6 Oktober 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

$\Gamma(x)$: Fungsi Gamma

$\psi(x)$: Fungsi Digamma

γ : Konstanta Euler

$J_p(x)$: Fungsi Bessel Jenis Pertama dengan Orde p

$Y_p(x)$: Fungsi Bessel Jenis Kedua dengan Orde p

ρ : Kerapatan Aliran

μ : Viskositas

P : Tekanan

ABSTRAK

Makhmudah, Siti. 2003. **Aplikasi Fungsi Bessel Pada Getaran Membran Sirkular Dan Distribusi Kecepatan Aliran Laminar *Unstedy* Pipa Sirkular.** Skripsi, Program S-I Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: Usman Pagalay, M.Si
Ach. Nasichuddin, M. Ag

Kata Kunci: Persamaan Bessel, Fungsi Bessel, Membran Sirkular, Aliran Laminar pada pipa Sirkular.

Persamaan Bessel memiliki penyelesaian yang disebut fungsi Bessel, fungsi Bessel memiliki peranan dalam berbagai permasalahan, diantaranya: getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular.

Berdasarkan permasalahan di atas, maka penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dan menganalisis aplikasi fungsi Bessel pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular. Penelitian ini menggunakan penelitian kepustakaan.

Membran sirkular membentuk persamaan gelombang dimensi 2 dengan koordinat silinder polar. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa getaran membran sirkular dibentuk oleh

$$u_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\int_0^a f(r) J_0(\frac{\alpha_n}{a} r) r dr}{\int_0^a r \left(J_0(\frac{\alpha_n}{a} r) \right)^2 dr} \right] J_0(\frac{\alpha_n}{a} r) \cos\left(c \frac{\alpha_n}{a} t \right).$$

Solusi distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular diperoleh dengan mengurangkan kecepatan pada saat *steady-state* dengan kecepatan pada saat *t*. Hasil penelitian menunjukkan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pada pipa sirkular dibentuk oleh

$\phi(\varepsilon,\tau) = (1-\varepsilon^2) - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \varepsilon)}{\alpha_n{}^3 J_1(\alpha_n \varepsilon)} e^{-\alpha_n{}^2 \tau}$ dengan $1-\varepsilon^2$ solusi pada saat *steady-state* dan $8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \varepsilon)}{\alpha_n{}^3 J_1(\alpha_n \varepsilon)} e^{-\alpha_n{}^2 \tau}$ pada saat *t*.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah bagian dari ilmu pengetahuan yang mempunyai peranan besar. Salah satu cabang matematika yang memiliki peranan dalam kehidupan nyata adalah persamaan diferensial. Menurut Purcell dkk (2003:221) Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui.

Istilah persamaan diferensial (*aequatio differentialis*) diperkenalkan oleh Leibniz pada tahun 1676. Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model matematika yang menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa dapat diterjemahkan dalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematik (Finizio dan Ladas, 1998: 3).

Permasalahan dalam dunia sains dan teknologi seringkali dapat diterjemahkan ke dalam persamaan diferensial. Finizio dan Ladas (1998: 204) juga mengatakan bahwa persamaan diferensial yang sering ditemukan dalam berbagai aplikasi adalah persamaan diferensial linier orde dua, terutama dalam penyelesaian beberapa persamaan diferensial parsial yang klasik dalam fisika matematika. Salah satu contoh persamaan diferensial linier orde dua yang memiliki peranan penting dalam matematika terapan adalah persamaan Bessel.

Penyelesaian persamaan Bessel disebut fungsi Bessel. Hal ini seperti dalam Al-Qur’an surat Al-Insyiroh ayat 5 dan 6, yaitu:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦

Artinya: Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. (Q.S Al-insyiroh, 5 dan 6).

Kesulitan pada ayat di atas diartikan permasalahan, sedangkan kemudahan adalah penyelesaiannya.

Fungsi Bessel pertama kali didefinisikan oleh Daniel Bernouli dan disempurnakan oleh Freidrich Bessel. Freidrich Bessel adalah seorang matematikawan Jerman yang juga seorang astronom. Fungsi Bessel disebut juga fungsi silinder karena ditemukan pada persamaan laplace dengan koordinat silinder.

Fungsi Bessel memiliki peranan yang penting dalam berbagai permasalahan seperti: gelombang elektromagnetik, konduksi panas, getaran membran sirkular, dll.

Membran sirkular diantaranya terdapat pada drum, genderang, mikrofon, dan telpon. Getaran membran sirkular memiliki peran yang penting dalam dunia musik dan mesin. Fungsi Bessel juga ditemukan pada distribusi kecepatan aliran laminar zat cair yang mengalir pada pipa sirkular yang horisontal.

Jika ditinjau dari surat Al-Insyiroh ayat 5 dan 6, Fungsi Bessel dapat juga diartikan sebagai bentuk kemudahan dari permasalahan getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unstady* pipa sirkular.

Berdasarkan uraian di atas, untuk lebih mengetahui dan mendalami tentang Aplikasi fungsi Bessel maka penulis mengambil judul ”**Aplikasi Fungsi Bessel pada Getaran Membran Sirkular dan Distribusi Kecepatan Aliran Laminar *Unsteady* Pipa Sirkular**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah: Bagaimana aplikasi fungsi Bessel pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular?

1.3 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah di atas, maka penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengetahui dan menganalisis aplikasi fungsi Bessel pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular?

1.4 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan memberikan manfaat,

1. Bagi Peneliti

   Memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari dalam bidang persamaan diferensial khususnya Aplikasi fungsi Bessel pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular.

2. Bagi Pembaca

   Skripsi ini dapat memberikan informasi tentang Aplikasi fungsi Bessel pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular.

3. Bagi Instansi:

   Bagi instansi, skripsi ini dapat bermanfaat menjadi tambahan informasi dan sebagai tambahan bahan kepustakaan.

1.5 Batasan Masalah

Aplikasi fungsi Bessel yang akan dibahas pada skripsi ini dibatasi pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan pada skripsi ini adalah studi literatur, yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi yang digunakan dalam pembahasan.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan peneliti dalam membahas skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan dan mengumpulkan literatur pendukung sebagai bahan atau sumber informasi yang berkaitan dengan fungsi Bessel, getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular.
2. Memahami dan mempelajari fungsi Bessel.
3. Memahami dan mempelajari aplikasi fungsi Bessel pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular.

4. Membuat Grafik getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular dengan bantuan program Maple.
5. Membuat kesimpulan dari pembahasan yang telah ditulis.
6. Menulis laporan.

1.7 Sistematika Pembahasan

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini, penulis menggunakan sistematika pembahasan empat bab, masing-masing bab akan dijelaskan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab pendahuluan memuat latar belakang penulis mengambil judul, rumusan masalah yang akan dibahas, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penelitian.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bab dua ini, memberikan kajian-kajian yang menjadi landasan masalah yang dibahas, yaitu persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial, persamaan diferensial linier, persamaan diferensial linier homogen orde dua, masalah syarat awal dan syarat batas, integrasi deret, fungsi gamma, digamma, dan konstanta euler, Aturan I'Hopital, persamaan Bessel, fungsi Bessel jenis pertama, fungsi Bessel jenis kedua, kontruksi Membran yang berbentuk sirkular, persamaan kontinuitas, persamaan gerak, aliran viskositan, persamaan Navier-Stokes dan pendapat ahli tafsir tentang ayat 5 dan 6 surat Al-Insyiroh.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas aplikasi fungsi Bessel yaitu pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular, serta surat Al-Insyirah ayat 5 dan 6 dalam pandangan fungsi Bessel.

BAB IV PENUTUP

Bab empat berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran bagi pembaca yang akan melanjutkan penilitian dalam skripsi ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 1:

Suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Purcell, Varberg, dan Rigdon, 2003: 221).

Contoh 1: $\frac{dy}{dx} - 3x = 0$ (2.1)

Definisi 2:

Tingkat atau Orde dari suatu persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunan dalam persamaan tersebut (Ault dan Ayres,1992: 1).

Contoh 2: $\frac{dy}{dx} = x + 5$ persamaan diferensial orde satu. (2.2)

$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$ persamaan diferensial orde dua (2.3)

Berdasarkan jumlah variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa

Definisi 3:

Suatu persamaan diferensial dikatakan persamaan diferensial biasa jika pada persamaan diferensial tersebut terdapat variabel bebas yang tunggal dan turunannya merupakan turunan biasa (Ault dan Ayres,1992: 1).

Contoh 3: $\frac{d^2 y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=0$ (2.4)

2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial

Definisi 4:

Suatu persamaan diferensial dikatakan persamaan diferensial parsial jika pada persamaan diferensial tersebut terdapat variabel bebas yang lebih dari satu dan turunannya merupakan turunan parsial (Ault dan Ayres,1992: 1).

Contoh 4: $xy\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ (2.5)

2.2 Persamaan Diferensial Linier

Definisi 5:

Persamaan diferensial dikatakan linier jika variabel terikatnya dan turunannya berpangkat satu dengan koefisien konstanta atau koefisien yang tergantung pada variabel bebasnya dan jika variabel terikatnya atau turunannya berpangkat lebih dari satu dengan koefisien konstanta atau koefisien yang tergantung pada variabel bebasnya maka dikatakan tidak linier (Ault dan Ayres,1992: 33).

Contoh 5: $\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$ persamaan diferensial orde satu dan linier (2.6)

$\frac{dy}{dx}+3xy^2=\sin x$ persamaan diferensial orde satu dan tak linier (2.7)

2.3 Persamaan Diferensial Linier Homogen Orde Dua

Suatu persamaan diferensial dikatakan homogen jika ruas kiri persamaan tersebut mengandung varibel terikat beserta turunannya dan ruas kanannya tersisa nol. Dikatakan non-homogen jika ruas kanan persamaan tersebut ada variabel bebasnya atau konstanta.

Persamaan diferensial linier homogen orde dua mempunyai bentuk umum

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad (2.8)$$

Langkah-langkah penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

1. Memisalkan $\frac{d^2y}{dx^2} = m^2$, $\frac{dy}{dx} = m$, dan $y = 1$, maka persamaannya menjadi $am^2 + bm + c = 0$, persamaan ini disebut persamaan karakteristik.
2. Mencari akar-akar dari persamaan karakteristik, misalkan akar-akarnya m_1 dan m_2.
3. Dari akar-akar ini maka didapatkan bentuk pemecahannya sebagai berikut:
   a. jika m_1 dan m_2 kedua akarnya riil dan berbeda, bentuk pemecahannya $y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$
   b. jika m_1 dan m_2 kedua akarnya riil dan sama, bentuk pemecahannya $y = e^{m_1x}(A + Bx)$
   c. jika m_1 dan m_2 kedua akarnya berupa bilangan kompleks, misalkan $m = a \pm ib$, maka $m_1 = a + ib$ dan $m_2 = a - ib$, bentuk pemecahannya
      $y = Xe^{(a+ib)x} + Ye^{(a-ib)x}$
      $y = Xe^{ax}e^{ibx} + Ye^{ax}e^{-ibx}$

$$y = e^{ax}\left(Xe^{ibx} + Ye^{-ibx}\right)$$

Dengan $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ dan $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, maka

$$y = e^{ax}\left(X(\cos bx + i\sin bx) + Y(\cos bx - i\sin bx)\right)$$

$$y = e^{ax}\left((X+Y)\cos bx + i(X-Y)\sin bx\right)$$

$y = e^{ax}\left(A\cos bx + B\sin bx\right)$ dengan $A = X + Y$ dan $B = i(X - Y)$ (Stroud, 1984:738-744).

2.4 Masalah Syarat Awal dan Syarat Batas

Misalkan persamaan diferensial linier orde dua

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{2.9}$$

dengan $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dan $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam selang $a \leq x \leq b$ dengan $a_2(x) \neq 0$ dalam selang ini. Untuk mencari penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial (2.9) pada sebuah titik $x = x_0$ di dalam selang $a \leq x \leq b$ dan memenuhi dua syarat awal yang diberikan

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1 \tag{2.10}$$

merupakan suatu masalah nilai awal (MNA).

Dalam banyak MNA, variabel bebas x pada persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu awal dan y_0, y_1 menyatakan syarat awal. Jika variabel bebas x menyatakan tempat, maka penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial (2.9) yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang $a \leq x \leq b$

$$y(a) = A \text{ dan } y(b) = B \tag{2.11}$$

dengan A, B kontanta. Syarat yang diberikan pada titik akhir dari selang disebut syarat batas.

Persamaan diferensial (2.9) dan syarat batas (2.10) merupakan suatu masalah nilai batas (MNB) (Finizio dan Ladas,1998:244).

2.5 Integrasi Deret

Persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2.12)$$

memberikan syarat cukup untuk suatu penyelesaian. Dalam pembuktian menggunakan deret pangkat, y diperoleh dalam bentuk deret taylor (y_0 diganti dengan A_0)

$$y = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_2)^2 + \ldots + A_n(x - x_n)^n + \ldots.. \qquad (2.13)$$

Deret (2.13) memenuhi persamaan diferensial (2.12), mempunyai nilai $y = y_0$ jika $x = x_0$, dan konvergen untuk semua nilai x yang memenuhi sekitar $x = x_0$. Penyelesaian (2.12) yang memenuhi syarat:

1. $y = y_0$ jika $x = 0$

Andaikan penyelesaiannya berbentuk deret (2.13) dengan menganti nilai $x_0 = 0$, maka diperoleh

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + \ldots.. \qquad (2.14)$$

dimana $A_0 = y_0$ dan A yang lain adalah konstanta-konstanta yang akan ditentukan. Subtitusikan (2.14) ke dalam persamaan diferensial (2.12).

Contoh 6:

Selesaikan $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$ dalam deret, yang memenuhi syarat $y = y_0$ jika $x = 0$.

Karena $f(x, y) = x^2 + y$ bernilai tunggal dan kontinu, sedangkan $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ adalah kontinu sepanjang persegi-panjang pada $(x,\ y)$ yang melingkari $(0, y_0)$, maka syarat-syarat teorema eksistensi dipenuhi dan diandaikan penyelesaiannya berupa deret (2.14) dalam daerah konvergensi, deret (2.14) dapat diturunkan suku demi suku yang menghasilkan suatu deret yang konvergensi ke turunan $\frac{dy}{dx}$.

Sedemikian hingga diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + \ldots + nA_nx^{n-1} + \ldots..$$

Subtitusikan deret (2.14) dan $\frac{dy}{dx}$ ke dalam soal, maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} - x^2 - y = 0$$

$$\left(A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + .. + nA_nx^{n-1} + ..\right) - x^2 - \left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + .. + A_nx^n + ..\right) = 0$$

$$(A_1 - A_0) + (2A_2 - A_1)x + (3A_3 - A_2 - 1)x^2 + (4A_4 - A_3)x^3 + .. + (nA_n - A_{n-1})x^{n-1} = 0$$

untuk beberapa daerah disekitar $x = 0$ nilai x dalam deret dihilangkan, yaitu dengan menghilangkan koefisien-koefisien setiap pangkat x. Jadi diperoleh

$A_1 - A_0 = 0$ dan $A_1 = A_0 = y_0$

$2A_2 - A_1 = 0$ dan $A_2 = \frac{1}{2}A_1 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2}y_0$

$3A_3 - A_2 - 1 = 0$ dan $A_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}y_0$

$4A_4 - A_3 = 0$ dan $A_4 = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} y_0$,

sedemikian hingga $\forall n \geq 4$, $nA_n - A_{n-1} = 0$ dan $A_n = \frac{1}{n} A_{n-1}$,

Hubungan yang terakhir disebut formula rekursi, formula rekursi dapat digunakan untuk menghitung jumlahan koefisien-koefisien, diperoleh

$$A_5 = \frac{1}{5} A_4 = \frac{1}{60} + \frac{1}{120} y_0$$

sedemikian hingga untuk $A_n = \frac{1}{n} A_{n-1}$, dengan $A_{n-1} = \frac{1}{n-1} A_{n-2}$

maka $A_n = \frac{1}{n(n-1)} A_{n-2}$

$$A_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots 4} A_3 = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots 4.3} (1 + \frac{1}{2} A_0) = \frac{1}{n!}(2 + y_0)$$

Jika nilai A disubtitusikan pada deret yang diandaikan (2.14), maka didapatkan

$$y = y_0 + y_0 x + y_0 \frac{1}{2!} x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} y_0\right) x^3 + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{24} y_0\right) x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}(2 + y_0) x^n + \ldots$$

$$= (y_0 + 2)\left(1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots + \frac{1}{n!} x^n + \ldots\right) - x^2 - 2x - 2$$

$$= (y_0 + 2) e^x - x^2 - 2x - 2$$

Persamaan diferensial yang diketahui dapat diselesaikan dengan mengggunakan faktor e^{-x}, jadi

$ye^{-x} = \int x^2 e^{-x} dx = (-x^2 - 2x - 2) e^{-x} + C$ dan

$$y = Ce^{-x} - x^2 - 2x - 2$$

dengan syarat awal, $y = y_0$ jika $x = 0$, didapatkan $C = y_0 + 2$, jadi

$y = (y_0 + 2)e^{-x} - x^2 - 2x - 2$.

2. $y = y_0$ apabila $x = x_0$

Langkah-langkah yang dilakukan:

1. Membuat subtitusi $x - x_0 = v$ yaitu, $x = v + x_0$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}$ yang menghasikan

$$\frac{dy}{dv} = f(x, y) \qquad (2.15)$$

2. Menggunakan cara pertama untuk mendapatkan penyelesaian persamaan (2.15) yang memenuhi syarat $y = y_0$, jika $v = 0$

3. Membuat subtitusi $v = x - x_0$ pada penyelesaiannya.

Contoh 7:

Selesaikan $y' = x^2 - 4x + y + 1$ yang memenuhi syarat $y = 3$ jika $x = 2$

1. Membuat subtitusi $x = v + 2$, $v = x - 2$ dan diperoleh $\frac{dy}{dv} = v^2 + y - 3$.

2. Mencari penyelesaian yang memenuhi $y = 3$ bila $v = 0$, jadi deret penyelesaiannya diandaikan

$y = 3 + A_1 v + A_2 v^2 + ... + A_n v^n + ...$, maka

$$\frac{dy}{dv} = A_1 + 2A_2 v + 3A_3 v^2 + ... + nA_n v^{n-1} + ...$$

$$\frac{dy}{dv} - v^2 - y + 3 = 0$$

$$\left(A_1 + 2A_2 v + 3A_3 v^2 + ... + nA_n v^{n-1} + ...\right) - v^2 - \left(3 + A_1 v + A_2 v^2 + ... + A_n v^n + ...\right) + 3 = 0$$

$$A_1 + (2A_2 - A_1)v + (3A_3 - A_2 - 1)v^2 + ... + (nA_n - A_{n-1})v^n + ... = 0$$

semua koefisien disamakan nol, diperoleh

$A_1 = 0$

$2A_2 - A_1 = 0$ maka diperoleh $A_2 = 0$

$3A_3 - A_2 - 1 = 0$ maka diperoleh $A_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}A_2 = \frac{1}{3}$

$4A_4 - A_3 = 0$ maka diperoleh $A_4 = \frac{1}{4}A_3 = \frac{1}{12}$

sehingga didapatkan formula rekursi

$nA_n - A_{n-1} = 0$ sehingga untuk

$$A_n = \frac{1}{n}A_{n-1}$$

$$A_n = \frac{1}{n}A_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}A_{n-2} = \ldots = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots 4}A_0 = \frac{2}{n!}, \quad n \geq 3 .$$

Jadi, $y = 3 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{12}v^4 + \ldots + \frac{2}{n!}v^n + \ldots$

3. Mensubtitusikan kembali $v = x - 2$

$$y = 3 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{12}v^4 + \ldots + \frac{2}{n!}v^n + \ldots = 3 + \frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{1}{12}(x-2)^4 + \ldots + \frac{2}{n!}(x-2)^n + \ldots$$

Jadi penyelesaiannya

$$y = 3 + \frac{1}{3}(x-2)^3 + \frac{1}{12}(x-2)^4 + \ldots + \frac{2}{n!}(x-2)^n + \ldots$$

Solusi integrasi deret dapat juga digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier orde dua.

Persamaan diferensial linier homogen orde dua

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{2.16}$$

dimana P adalah polinom-polinom dalam x.

Ault dan Ayres (1992: 197-199) memberikan langkah-langkah penyelesaiannya sebagai berikut:

1. Nyatakan x titik biasa jika $x = a$ dan $P_0(a) \neq 0$ dan jika $P_0(a) = 0$ maka x disebut titik singular.
2. Jika $x = 0$ titik biasa, persamaan (2.16) dapat diselesaikan dalam deret sekitar $x = 0$ sebagai $y = A$ (deret dalam x) $+ B$ (deret dalam x), dimana A, B adalah sebarang konstanta dan kedua deret bebas linier dan konvergen dalam daerah sekitar $x = 0$.

Contoh 8:

Selesaikan $y'' - x^2 y' - y = 0$ dalam deret pangkat x.

$P_0(x) = 1$ dan $x = 0$ adalah titik biasa. Deretnya diandaikan

$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_n x^n + ...,$ maka

$$y' = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + ... + nA_n x^{n-1} + ...$$

$$y'' = 2A_2 + 6A_3 x + 12A_4 x^2 + ... + (n-1)nA_n x^{n-2} + ...,$$

$$y'' - x^2 y' - y = 0$$

$$\begin{bmatrix} \left(2A_2 + 6A_3 x + ... + (n-1)nA_n x^{n-2} + ...\right) - x^2\left(A_1 + 2A_2 x + ... + nA_n x^{n-1} + ...\right) \\ -\left(A_0 + A_1 x + ... + A_n x^n + ...\right) \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (2A_2 - A_0) + (6A_3 - A_1)x + (12A_4 - A_1 - A_2)x^2 + ... \\ + \left((n+1)(n+2)A_{n+2} - (n-1)A_{n-1} - A_n\right)x^n + ... \end{bmatrix} = 0$$

koefisien-koefisien pangkat x yang berbeda disamakan 0,

$2A_2 - A_0 = 0$ dan $A_2 = \frac{1}{2} A_0$

$6A_3 - A_1 = 0$ dan $A_3 = \frac{1}{6}A_1$

$12A_4 - A_1 - A_2 = 0$ diperoleh $A_4 = \frac{1}{12}A_1 + \frac{1}{12}A_2 = \frac{1}{12}A_1 + \frac{1}{24}A_0$

sehingga diperoleh $(n+2)(n+1)A_{n+2} - (n-1)A_{n-1} - A_n = 0$,

$$A_{n+2} = \frac{(n-1)A_{n-1} + A_n}{(n+1)(n+2)},\ n \geq 1$$

Penyelesaian lengkapnya

$$y = A_0 + A_1 x + A_0 \frac{1}{2}x^2 + A_1 \frac{1}{6}x^3 + A_0 \frac{1}{24}x^4 + A_1 \frac{1}{12}x^4 + A_0 \frac{1}{20}x^5 + A_1 \frac{1}{120}x^5 + \ldots$$

$$y = A_0(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \ldots) + A_1(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \ldots)$$

(Ault dan Ayres, 1992: 203-204)

3. Jika $x = a$ titik singular

   a. $x = a$ disebut titik singular yang teratur jika persamaan (2.16) diambil dalam bentuk $y'' + \frac{R_1(x)}{x-a}y' + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2}y = 0$, $R_1(x)$ dan $R_2(x)$ dapat diekspansikan dalam deret taylor $x = a$.

Contoh 9:

$(1+x)y'' + 2xy' - 3y = 0, x = -1$ adalah titik singular karena $P_0(-1) = 1 + -1 = 0$, jika persamaan diambil dalam bentuk $y'' + \frac{R_1(x)}{x-a}y' + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2}y = 0$, maka

$$y'' + \frac{2x}{x+1}y' + \frac{-3(x+1)}{(x+1)^2}y = 0,\ R_1(x) = 2x \text{ dan } R_2(x) = -3(x+1)$$

Maka ekspansi deret taylor pada $x = -1$, untuk $R_1(x) = 2x = 2(x+1) - 2$ dan $R_2(x) = -3(x+1)$. Jadi $x = -1$ adalah titik singular yang teratur.

Contoh 10:

$x^3 y'' + x^2 y' + y = 0, x = 0$ adalah titik singular karena $P_0(0) = 0$, jika persamaan diambil dalam bentuk

$$y'' + \frac{R_1(x)}{x-a} y' + \frac{R_2(x)}{(x-a)^2} y = 0, \text{ maka}$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{\frac{1}{x}}{x^2} y = 0,\ R_1(x) = 1 \text{ dan } R_2(x) = \frac{1}{x}$$

maka ekspansi deret taylor pada $x = 0$, dan untuk $R_2(x) = \frac{1}{x}$ tidak dapat diekspansikan ke dalam deret taylor $x = 0$. Jadi $x = 0$ bukan titik singular yang teratur.

b. $x = 0$ titik singular yang teratur dari persamaan (2.16), maka deret penyelesaiannya berbentuk

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_0 x^{m+n} + \ldots$$

$$= x^m \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{m+n} \qquad (2.17)$$

dengan $A_0 \neq 0$ dan harus ditentukan m dan A sehingga (2.17) memenuhi (2.16).

Contoh 11:

Selesaikan dengan deret

$$2xy'' + (x+1)y' + 3y = 0, \qquad (2.18)$$

$x = 0$ adalah titik singular yang teratur.

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + A_2 x^{m+2} + \ldots + A_0 x^{m+n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{m+n} \qquad (2.19)$$

Dengan menurunkan y terhadap turunan pertama didapatkan

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(m+n)A_n x^{m+n-1} \tag{2.20}$$

y diturunkan terhadap turunan kedua diperoleh

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(m+n)(m+n-1)A_n x^{m+n-2} \tag{2.21}$$

Subtitusikan (2.19), (2.20), dan (2.21) ke (2.18) sehingga didapatkan

$$\begin{pmatrix} m(2m-1)A_0x^{m-1} + [(m+1)(2m+1)A_1 + (m+3)A_0]x^m + [(m+2)(2m+3)A_2 + (m+4)A_1]x^{m+1} \\ + \ldots + [(m+n)(2m+2n-1)A_n + (m+n+2)A_{n-1}]x^{m+n-1} + \ldots \end{pmatrix} = 0$$

karena $A_0 \neq 0$, semua suku akan hilang jika A memenuhi formula rekursi

$$A_n = -\frac{m+n+2}{(m+n)(2m+2n-1)}A_{n-1}, n \geq 1$$

jadi deretnya

$$\overline{y} = A_0x^m\left[\begin{array}{l} 1 - \dfrac{m+3}{(m+1)(2m+1)}x + \dfrac{(m+3)(m+4)}{(m+1)(m+2)(2m+1)(2m+3)}x^2 \\ -\dfrac{(m+3)(m+4)(m+5)}{(m+1)(m+2)(m+3)(2m+1)(2m+3)(2m+5)}x^3 + \ldots \end{array}\right] \tag{2.22}$$

memenuhi persamaan

$$2x\overline{y}'' + (x+1)\overline{y}' + 3\overline{y} = m + (2n-1)A_0x^{m-1} \tag{2.23}$$

ruas kanan (2.23) akan sama dengan nol, jika $m = 0$ atau $m = \frac{1}{2}$.

Jika $m = 0$, maka dari (2.22) akan diperoleh penyelesaian khusus dengan $A_0 = 1$,

$$y_1 = 1 - 3x + \frac{12}{6}x^2 - \frac{60}{90}x^3 + \ldots$$

$$y_1 = 1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \ldots$$

Jika $m = \frac{1}{2}$, dengan $A_0 = 1$, $y_2 = \left(1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \ldots\right)\sqrt{x}$

Penyelesaian lengkapnya

$y = Ay_1 + By_2$

$$y = A\left(1 - 3x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right) + B\left(\left(1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 - \frac{11}{80}x^3 + \ldots\right)\sqrt{x}\right)$$

Penyelesaian y_1 dan y_2 bebas linier, sesuai dengan akar-akar yang berbeda ($m = 0$ dan $m = \frac{1}{2}$) dari persamaan ini (Ault dan Ayres.1992: 206-207).

2.6 Fungsi Gamma, Fungsi Digamma, dan Konstanta Euler

Definisi 6:

Fungsi gamma $\Gamma(x)$ didefinisikan

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty r^{x-1}e^{-r}\,dr \qquad (2.24)$$

(Mathworld, 2009).

Rumus rekursif fungsi gamma yaitu;

$$\Gamma(x) = (x-1)! \qquad (2.25)$$

(Mathworld, 2009).

Definisi 7:

Fungsi digamma $\psi(x)$ didefinisikan

$$\psi(x) = \frac{d\ln\Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \qquad (2.26)$$

(Renreg, 1990: 139).

Definisi 8:

Konstanta euler (γ) didefinisikan sebagai limit barisan

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{z=1}^{x}\frac{1}{z} - \ln x\right) \qquad (2.27)$$

(Mathworld, 2009).

γ memiliki nilai 0,577215665...

Definisi 9:

Fungsi Digamma juga dapat didefinisikan sebagai

$\psi(x) = -\gamma + \sum_{k=1}^{x-1} \frac{1}{k}$, maka untuk

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k} \quad (2.28)$$

(Mathworld, 2009).

2.7 Aturan l'Hopital

Teorema 1: Andaikan $\lim_{x\to u} f(x) = \lim_{x\to u} g(x) = 0$.

Jika $\lim_{x\to u}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$ berbentuk bilangan terhingga atau takterhingga (dalam hal ini, jika limit ini adalah bilangan terhingga, $-\infty$, atau $+\infty$), maka

$$\lim_{x\to u}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x\to u}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]. \quad (2.29)$$

Bukti: bukti ini untuk kasus dimana L adalah terhingga dan imitnya adalah satu sisi $\lim_{x\to a^+}$.

Hipotesis untuk Teorema di atas mengimplikasikan lebih dari yang terungkapkan secara eksplisit. Khususnya, $\lim_{x\to a^+}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$ mengimplikasikan bahwa $f'(x)$ maupun $g'(x)$ berada di dalam, paling tidak, selang kecil $(a,b]$ dan bahwa $g'(x) \neq 0$. Di a, kita bahkan belum mengetahui bahwa f dan g sudah didefinisikan, tetapi kita telah mengetahui bahwa $\lim_{x\to a^+} f'(x) = 0$ dan $\lim_{x\to a^+} g'(x) = 0$. Dengan demikian, kita dapat mendefinisikan (atau mendefinisi ulang jika perlu) baik $f(a)$ maupun $g(a)$

sama dengan nol, dengan membuat f dan g (kanan) kontinu di a. Dengan kata lain, kita dapat mengatakan bahwa f dan g memenuhi hipotesis Teorema Nilai Rata-rata Cauchy di $[a,b]$. Konsekuensinya, terdapat sebuah bilangan c di (a,b) sedemikian hingga

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$$

atau karena $f(a)=0=g(a)$, sehinga diperoleh

$$\frac{f(b)}{g(b)}=\frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$$

Ketika kita menetapkan $b \to a^{+}$, maka dengan membuat $c \to a^{+}$, kita memperoleh

$$\lim_{b\to a^{+}}\frac{f(b)}{g(b)}=\lim_{c\to a^{+}}\frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$$

yang ekuivalen dengan apa yang hendak kita buktikan.

Pembuktian yang serupa juga berlaku untuk limt sisi kiri, yang berarti juga berlaku bagi kedua sisi limit (Purcell, Varberg, Rigdon, 2003: 2-5).

2.8 Persamaan Bessel

Persamaan Bessel didefinisikan sebagai

$$x^{2}y^{''}+xy^{'}+(x^{2}-p^{2})y=0 \tag{2.30}$$

dengan p suatu konstanta.

Persamaan Bessel termasuk persamaan diferensial linier homogen orde dua, penyelesaian umumnya berbentuk $y = AJ_p(x) + BY_p(x)$, dimana $J_p(x)$

disebut fungsi Bessel jenis pertama, $Y_p(x)$ disebut fungsi Bessel jenis kedua dan *A*, *B* adalah konstanta (Spiegel, 1983: 240).

2.9 Fungsi Bessel Jenis Pertama

Langkah-langkah untuk memperoleh fungsi Bessel jenis pertama adalah sebagai berikut:

1. Menyatakan apakah *x* titik biasa atau titik singular.

   Untuk $x = 0$, menghasilkan $P_0(x) = P_0(0) = 0$, maka persamaan Bessel (3.1) memiliki titik singular yaitu $x = 0$.

2. Menentukan apakah titik singular tersebut teratur atau tidak.

   $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2}y = 0,$ maka $R_1(x) = 1, R_2(x) = x^2 - p^2$. Jika diekspansikan ke deret taylor disekitar $x = 0$, maka untuk $R_1(x) = 1$ didapatkan 1, untuk $R_2(x) = x^2 - p^2$ didapatkan $p^2 + 2x + x^2$. Jadi $x = 0$ merupakan titik singular yang teratur.

3. Karena persamaan Bessel memiliki titik singular yang teratur, maka penyelesainnya berbentuk

   $y = A_0x^r + A_1x^{r+1} + A_2x^{r+2} + ... + A_0x^{r+n} + ...$ dengan $A_0 \neq 0$

   $$= x^r \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+r} \qquad (2.31)$$

4. Menurunkan *y* terhadap *x*, untuk mendapatkan $y'(x)$

   $$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n + r)A_n x^{n+r-1} \qquad (2.32)$$

5. Menurunkan $y'(x)$ terhadap x untuk meperoleh $y''(x)$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)A_n x^{n+r-2} \tag{2.33}$$

6. Subtitusikan deret (2.31), (2.32), dan (2.33) ke dalam persamaan (2.30), sehingga diperoleh

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)A_n x^{n+r-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)A_n x^{n+r-1} + (x^2 - p^2)\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)A_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)A_n x^{n+r} + x^2\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{n+r} - p^2\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{n+r}((n+r)(n+r-1) + (n+r) - p^2) + \sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{n+r+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{n+r}((n+r)^2 - p^2) + \sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{n+r+2} = 0$$

7. Memperoleh persamaan indisial, yaitu dengan

   1) Mengambil $n = 0$ untuk koefisien deret yang paling rendah yaitu x dan x^{r+2}

   $$A_0 x^r(r^2 - p^2) + A_0 x^{r+2} = 0$$

   $\left[x^r(r^2 - p^2) + x^{r+2}\right]A_0 = 0$ sehingga diperoleh $(r^2 - p^2)A_0 = 0$,

   karena koefisien pertama $A_0 \neq 0$, maka $r^2 - p^2 = 0$

   $$r^2 = p^2 \text{ , maka diperoleh } r = \pm p$$

   2) Mengambil $n = 1$ untuk koefisien x^{r+1}, sehingga didapatkan

   $((1+r)^2 - p^2)A_1 = 0$ dan karena $r^2 - p^2 = 0$,

   maka $((1+r)^2 - p^2) \neq 0$, jadi diperoleh $A_1 = 0$

   3) untuk koefisien x^{n+r},

$$((n+r+2)^2 - p^2)A_{r+2} + A_r = 0 \text{, maka}$$

$$A_{r+2} = \frac{A_r}{(n+r+2+p)(n+r+2-p)}$$

8. untuk akar $r = p$, ambil $n = 1,2,3,...$

$$A_2 = \frac{-A_0}{2(2+2p)} \quad \text{dan } A_1, A_3, A_5 = 0$$

$$A_4 = \frac{-A_2}{4(4+2p)} = \left(\frac{-1}{2^2(2+p)2}\right)\left(\frac{-1}{2^2(1+p)1}\right)A_0$$

$$A_{2n} = \frac{-A_{2n-2}}{2n(2n+2p)} = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(p+1)(p+2)...(p+n)n!}A_0$$

maka $x^r = x^p, r = p$

$$y = A_0[x^p - \frac{x^{p+2}}{2^2(1+p)} + \frac{x^{p+4}}{(2^2(2+p)2)(2^2(1+p))} - ...]$$

$$= A_0 x^p [1 - \frac{x^2}{2^2(1+p)} + \frac{x^4}{(2^2(2+p)2)(2^2(1+p))} - ...]$$

$$= A_0 x^p \sum_{n-0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2n}}{2^{2r}(p+1)(p+2)...(p+r)r!} \text{ dengan } A_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$$

$$y = \left(\frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}\right) x^p \sum_{n-0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2n}}{2^{2r}(p+1)(p+2)...(p+r)r!}$$

Penyelesaian y ini disebut fungsi Bessel jenis pertama orde p dilambangkan $J_p(x)$. Jadi

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p \Gamma(p+1)} \sum_{n-0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2n}}{2^{2n}(p+1)(p+2)...(p+n)n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n} \frac{1}{n!\Gamma(p+n+1)} \quad (2.34)$$

Sedangkan untuk akar $r = -p$, diperoleh

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n}\frac{1}{n!\Gamma(-p+n+1)} \tag{2.35}$$

(Gupta, 1993: 8.45-8.47).

Deret (2.35) dapat diubah menjadi

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n}}{n!\Gamma(-p+n+1)} + \sum_{n=p}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n}}{n!\Gamma(-p+n+1)} \tag{2.36}$$

dan dari (2.25) diperoleh $\Gamma(-p+n+1) = (-p+n)! = \infty, \forall n \geq 0$, maka

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n}}{n!(-p+n)!} + \sum_{n=p}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n}\frac{1}{n!\Gamma(-p+n+1)}$$

$$J_{-p}(x) = 0 + \sum_{n=p}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n}\frac{1}{n!\Gamma(-p+n+1)}$$

Jika indeks n=p diubah menjadi n=0, maka

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+p}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2(n+p)}\frac{1}{(n+p)!\Gamma(-p+n+p+1)}$$

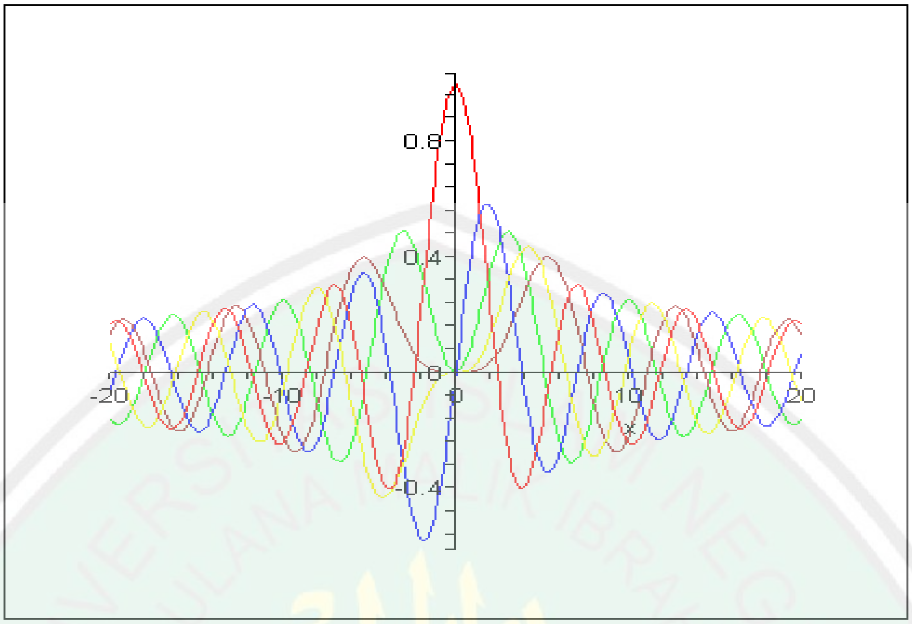
$$= (-1)^p\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\frac{1}{(n+p)!\Gamma(n+1)}$$

misalkan $n = n + p$, maka

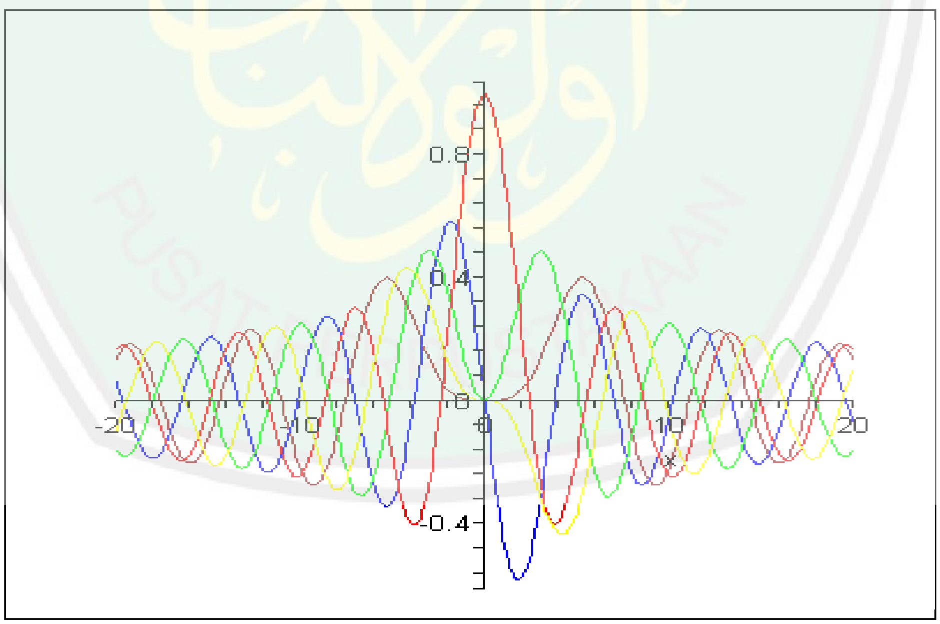
$$= (-1)^p\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\frac{1}{n!\Gamma(n+p+1)}$$

jadi diperoleh, $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x), p = 0,1,2,...$ (2.37)

(Gupta, 1993: 8.49).



Gambar 2.1: Grafik Fungsi Bessel Jenis Pertama Orde p dari Persamaan Bessel (3.1) dengan Orde $p = 0$ (merah), $p = 1$ (biru), $p = 2$ (hijau), $p = 3$ (kuning), dan $p = 4$ (coklat) pada Interval $x = -20...20$ (sumber: hasil interpretasi dari plot fungsi Bessel orde *p* dengan maple).



Gambar 2.2: Grafik Fungsi Bessel Jenis Pertama Orde $-p$ dari Persamaan Bessel (3.1) Orde $p = 0$ (merah), $p = -1$ (biru), $p = -2$ (hijau), $p = -3$ (kuning), dan $p = -4$ (coklat) pada Interval $x = -20...20$ (sumber: hasil interpretasi dari plot fungsi Bessel orde –*p* dengan maple).

Karena untuk p bukan bilangan bulat $J_p(x)$ dan $J_{-p}(x)$ bergantung linier maka diperoleh penyelesaian umum persamaan Bessel (2.30) untuk p bukan bilangyaitu n bulat

$$y = AJ_p(x) + BJ_{-p}(x) \tag{2.38}$$

sedangkan untuk p bilangan bulat, $J_p(x)$ dan $J_{-p}(x)$ bebas linier, maka penyelesaian umum (2.38) tidak dapat digunakan, jadi harus dicari fungsi Bessel jenis kedua (Spiegel, 1938: 241).

2.10 Fungsi Bessel Jenis Kedua

Fungsi Bessel jenis kedua orde p didefinisikan sebagai

$$Y_p(x) = \lim_{v \to p} \frac{\cos(v\pi)J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)} \tag{2.39}$$

(Spiegel, 1986)

Langkah-langkah untuk mendapatkan fungsi Bessel jenis kedua sebagai berikut:

a. Untuk $p = 0$, langkah-langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

1. $Y_p(x) = \lim_{v \to p} \dfrac{\cos(v\pi)J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)}$, untuk p=0 diperoleh

$$Y_0(x) = \lim_{v \to 0} \frac{\cos(0\pi)J_0(x) - J_{-0}(x)}{\sin(0\pi)}$$

$$= \frac{\cos(0)J_0(x) - J_{-0}(x)}{\sin(0)}$$

$$= \frac{J_0(x) - J_{-0}(x)}{\sin(0)} = \frac{0}{0}$$

Karena $\lim_{v\to 0}\frac{\cos(v\pi)J_v(x)-J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)}=\frac{0}{0}$ maka digunakan aturan l'Hopital (2.29)

$$Y_0(x)=\lim_{v\to 0}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\cos(v\pi)J_v(x)-J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)}\right]\right]$$

$$=\lim_{v\to 0}\left[\left[\frac{-\pi\sin(v\pi)J_v(x)+\cos(v\pi)\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)-\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)}{\pi\cos(v\pi)}\right]\right]$$

$$=\left[\frac{-\pi\sin(0\pi)J_v(x)+\cos(0\pi)\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)-\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)}{\pi\cos(0\pi)}\right]_{v=0}$$

$$=\left[\frac{\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)-\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)}{\pi}\right]_{v=0}$$

Karena $J_{-v}(x)=(-1)^v J_v(x)$ (2.37) dan v=0, maka $J_{-0}(x)=J_0(x)$

Didapatkan $Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)\right]_{v=0}$ (2.40)

2. Mencari nilai $\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)$, yaitu dengan:

memisahkan variabel yang mengandung v pada fungsi Bessel jenis pertama (2.34), diperoleh

$$J_v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{v}\left(\frac{1}{\Gamma(v+n+1)}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{v}\ln\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\Gamma(v+n+1)}-\left(\frac{x}{2}\right)^{v}\frac{\Gamma'(v+n+1)}{(\Gamma(v+n+1))^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left(\begin{array}{l}\left(\frac{x}{2}\right)^v\ln\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\Gamma(v+n+1)}\\-\left(\frac{x}{2}\right)^v\frac{\Gamma'(v+n+1)}{\Gamma(v+n+1)}\frac{1}{\Gamma(v+n+1)}\end{array}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left(\frac{x}{2}\right)^v\frac{1}{\Gamma(v+n+1)}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\Gamma'(v+n+1)}{\Gamma(v+n+1)}\right)$$

mengganti $\frac{\Gamma'(v+n+1)}{\Gamma(v+n+1)}=\psi(v+n+1)\,(2.26)$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(v+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\psi(v+n+1)\right)$$

mengganti $\psi(v+n+1)=\left(-\gamma+\sum_{m=1}^{v+n}\frac{1}{m}\right)$ (2.28)

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(v+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\left(-\gamma+\sum_{m=1}^{v+n}\frac{1}{m}\right)\right)$$

Didapatkan

$$\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(v+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\left(-\gamma+\sum_{m=1}^{v+n}\frac{1}{m}\right)\right) \tag{2.41}$$

3. Subtitusikan (2.41) ke (2.40), maka diperoleh

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)\right]_{v=0}$$

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(v+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+v}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\left(-\gamma+\sum_{m=1}^{v+n}\frac{1}{m}\right)\right)\right]_{v=0}$$

Karena v=0, maka

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(J_0(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right)$$

Jadi untuk $p = 0$, diperoleh fungsi Bessel jenis keduanya yaitu

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left(J_0(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right). \quad (2.42)$$

(Hapsari, 2005: 31-33).

b. Untuk p bilangan bulat, maka langkah-langkahnya sebagai berikut:

1. Dari (2.39) diperoleh

$$Y_p(x) = \lim_{v\to p} \frac{\cos(v\pi)J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)}$$

$$= \frac{\cos(p\pi)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)}$$

untuk p bilangan bulat, $\sin(p\pi) = \sin(p.180) = 0$ dan $\cos(p\pi) = \cos(p180) = (-1)^p$, jadi diperoleh

$$Y_p(x) = \frac{(-1)^p J_p(x) - (-1)^p J_p(x)}{\sin(p.180)} = \frac{0}{0}$$

Karena $\lim_{v\to 0} \frac{\cos(v\pi)J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)} = \frac{0}{0}$ maka digunakan aturan l'Hopital (2.29)

$$Y_p(x) = \lim_{v\to p}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\cos(v\pi)J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)}\right]\right]$$

$$= \lim_{v\to p}\left[\left[\frac{-\pi\sin(v\pi)J_v(x) + \cos(v\pi)\frac{\partial}{\partial v}J_v(x) - \frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)}{\pi\cos(v\pi)}\right]\right]$$

$$=\left[\frac{-\pi\sin(p\pi)J_v(x)+\cos(p\pi)\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)-\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)}{\pi\cos(p\pi)}\right]_{v=p}$$

$$=\left[\frac{-\pi\sin(p\pi)J_v(x)}{\pi\cos(p\pi)}+\frac{\cos(p\pi)\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)}{\pi\cos(p\pi)}-\frac{\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)}{\pi\cos(p\pi)}\right]_{v=p}$$

karena p bilangan bulat, maka $\sin(p\pi)=\sin(p180)=0$,

$$=\left[\frac{\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)}{\pi}-\frac{\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)}{\pi\cos(p\pi)}\right]_{v=p}$$

$\cos(p\pi)=\cos(p180)=(-1)^p$, diperoleh

$$Y_p(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)-(-1)^p\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)\right]_{v=p} \tag{2.43}$$

2. Mencari nilai $\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)$ dan $\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)$

nilai $\frac{\partial}{\partial v}J_v(x)$ sudah didapatkan pada (2.41), maka untuk memperoleh nilai $\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)$, langkah yang digunakan adalah sebagai berikut:

i. Dari (2.36) misalkan indeks $n=p$ dimulai dari $n=0$, diperoleh

$$J_{-v}(x)=\left[\begin{array}{l}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n}\\ +\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,\Gamma(-p+n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n+2p}\end{array}\right]_{v=p}$$

ii. Karena $\Gamma(n-v+1)\Gamma(v-n)=\dfrac{\pi}{\sin(n-v+1)\pi}$, maka ganti $\Gamma(n-v+1)$ dengan $\dfrac{\pi}{\Gamma(v-n)(\sin(n-v+1)\pi)}$, didapatkan

$$J_{-v}(x)=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{-v+2n}\frac{\Gamma(v-n)\sin((n-v+1)\pi)}{n!\,\pi}\\ \displaystyle+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+p}\left(\frac{x}{2}\right)^{-v+2n+2p}\frac{1}{(n+p)!\,\Gamma(-v+n+p+1)}\end{array}\right]_{v=p}$$

iii. Pisahkan variabel yang mengandung *v*, untuk memperoleh turunan $J_{-v}(x)$ terhadap *v*, diperoleh

$$J_{-v}(x)=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left[\Gamma(v-n)\left(\sin((n-v+1)\pi)\left(\frac{x}{2}\right)^{-v}\right)\right]\\ \displaystyle+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2p}\left[\frac{1}{\Gamma(-v+n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-v}\right]\end{array}\right]_{v=p}$$

iv. Turunkan $J_{-v}(x)$ terhadap *v*,

$$\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)=\left[\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left[\begin{array}{l}\displaystyle\Gamma'(v-n)\sin((n-v+1)\pi)\left(\frac{x}{2}\right)^{-v}\\ \displaystyle+\left(\begin{array}{l}\displaystyle-\pi\cos((n-v+1)\pi)\left(\frac{x}{2}\right)^{-v}\\ \displaystyle-\left(\frac{x}{2}\right)^{-v}\ln\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n-v+1)\pi)\end{array}\right)\Gamma(v-n)\end{array}\right]\\ \displaystyle+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2p}\left[\begin{array}{l}\displaystyle-\left(\frac{x}{2}\right)^{-v}\ln\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\Gamma(-v+n+p+1)}\\ \displaystyle+\frac{\Gamma'(-v+n+p+1)}{\Gamma(-v+n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-v}\end{array}\right]\end{array}\right]_{v=p}$$

$$
=\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}\left[\begin{array}{l}\Gamma'(v-n)\sin((n-v+1)\pi)-\pi\cos((n-v+1)\pi)\Gamma(v-n)\\ -\ln\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n-v+1)\pi)\Gamma(v-n)\end{array}\right]\\
\displaystyle+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2p-v}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{\Gamma(-v+n+p+1)}-\left(-\frac{\Gamma'(-v+n+p+1)}{(\Gamma(-v+n+p+1))^2}\right)\right]
\end{array}\right]_{v=p}
$$

$$
=\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}\left[\begin{array}{l}\Gamma'(v-n)\sin((n-v+1)\pi)\\ -\pi\cos((n-v+1)\pi)\Gamma(v-n)\\ -\ln\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n-v+1)\pi)\Gamma(v-n)\end{array}\right]\\
\displaystyle+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,\Gamma(-v+n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2p-v}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\Gamma'(-v+n+p+1)}{\Gamma(-v+n+p+1)}\right]
\end{array}\right]_{v=p}
$$

v. $\dfrac{\Gamma'(-v+n+p+1)}{\Gamma(-v+n+p+1)}=\psi(-v+n+p+1)$ (2.26), maka

$$
=\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v}\Gamma(v-n)\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma'(v-n)}{\Gamma(v-n)}\sin((n-v+1)\pi)-\pi\cos((n-v+1)\pi)\\ -\ln\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n-v+1)\pi)\end{array}\right]\\
\displaystyle+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,\Gamma(-v+n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2p-v}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\psi(-v+n+p+1)\right]
\end{array}\right]_{v=p}
$$

vi. Ganti v dengan p, didapatkan

$$
\left[\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)\right]_{v=p}=\left[\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\Gamma(p-n)\left[\begin{array}{l}\dfrac{\Gamma'(p-n)}{\Gamma(p-n)}\sin((n-p+1)\pi)\\ -\pi\cos((n-p+1)\pi)\\ -\ln\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n-p+1)\pi)\end{array}\right]\\
\displaystyle+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,\Gamma(-p+n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+2p-p}\left[\begin{array}{l}-\ln\left(\frac{x}{2}\right)\\ +\psi(-p+n+p+1)\end{array}\right]
\end{array}\right]
$$

vii. Karena p bilangan bulat, maka $\sin((n-p+1)\pi)=\sin((n-p+1)180)=0$

$$
=\left[\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\Gamma(p-n)[-\pi\cos((n-p+1)\pi)]+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\psi(n+1)\right]\right]
$$

viii. $\psi(n+1)=\left(-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)$ (2.28),

$$=\left[\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\Gamma(p-n)\left[-\pi\cos((n-p+1)\pi)\right]+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\left(-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right]\right]$$

ix. Dan $-\pi\cos((n-p+1)\pi)=-\pi\cos((n-p+1)180)=\pi(-1)^{n-p+1}=\pi(-1)(-1)^{n-p}$,

jadi diperoleh

$$=\left[\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\Gamma(p-n)(-1)^{n-p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right]$$

x. Karena $\Gamma(p-n)=(p-n-1)!,\Gamma(n+1)=n!$ (2.25)

$$=\left[\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(-1)^{2n-p}}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}(p-n-1)!+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right]$$

xi. Karena $(-1)^{2n}=1,\forall n\geq 1$, dan $(-1)^{-p}=\frac{1}{(-1)^p}=(-1)^p$ maka

$$=\left[(-1)^p\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^p}{(n+p)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right]$$

$$=(-1)^p\left[\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right]$$

Didapatkan turunan pertama

$$\left[\frac{\partial}{\partial v}J_{-v}(x)\right]_{v=p}=(-1)^p\left[\begin{array}{l}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\\+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\end{array}\right] \quad (2.44)$$

3. Subtitusikan (2.41) dan (2.44), ke (2.43), dan diperoleh

$$Y_p(x)=\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma-\sum_{m=1}^{p+n}\frac{1}{m}\right)\right)\\ -(-1)^p\left((-1)^p\left(\begin{array}{l}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\\ +\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\end{array}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma-\sum_{m=1}^{p+n}\frac{1}{m}\right)\right)\\ -(-1)^{2p}\left(\begin{array}{l}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\\ +\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left[-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\end{array}\right)\end{array}\right]$$

karena p bilangan bulat, maka $(-1)^{2p}=1,\forall p\geq 1$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma-\sum_{m=1}^{p+n}\frac{1}{m}\right)\right)\\ -\left(\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(-\ln\left(\frac{x}{2}\right)-\gamma+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\sum_{m=1}^{p+n}\frac{1}{m}\right)\right)\right)\\ -\left(\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}-\left(\begin{array}{l}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)\right)\\ -\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right)\end{array}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l}\left(\begin{array}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)\\-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\sum_{m=1}^{p+n}\frac{1}{m}\right)\right)\end{array}\right)\\-\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}+\left(\begin{array}{l}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)\right)\\-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right)\end{array}\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l}J_p(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\sum_{m=1}^{p+n}\frac{1}{m}\right)\right)\\-\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\\+\left(J_p(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)\right)-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+p)!\,n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right)\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l}2J_p(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\left(\sum_{m=1}^{p+n}\frac{1}{m}\right)+\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right)\right)\\-\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l}2J_p(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)-\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\\-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\left(\sum_{m=1}^{p+n}\frac{1}{m}\right)+\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right)\right)\end{array}\right]$$

Jadi untuk p bilangan bulat, diperoleh fungsi Bessel jenis keduanya yaitu

$$Y_p(x)=\frac{1}{\pi}\left[\begin{array}{l}2J_p(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right)+\gamma\right)-\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}\\-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\left(\left(\sum_{m=1}^{p+n}\frac{1}{m}\right)+\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right)\right)\right)\end{array}\right]. \qquad (2.45)$$

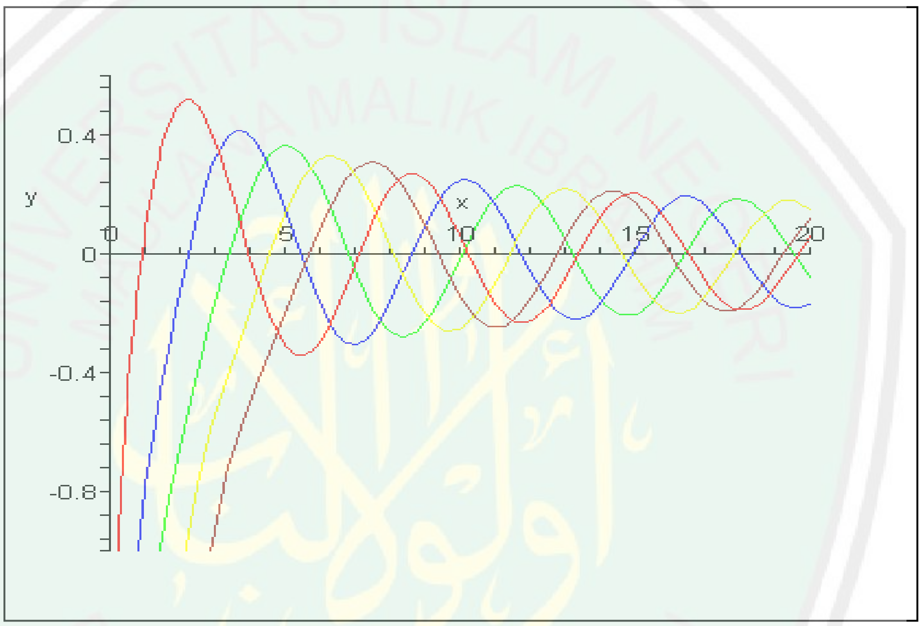
(Hapsari, 2005: 33-38).

c. Untuk p bukan bilangan bulat, maka langkah-langkahnya sebagai berikut:

$$Y_p(x) = \lim_{v \to p} \frac{\cos(v\pi) J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(v\pi)}$$

$$= \frac{\cos(p\pi) J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} \tag{2.46}$$

Jadi (2.46) adalah fungsi Bessel jenis kedua untuk p bukan bilangan bulat.



Gambar 2.3: Grafik Fungsi Bessel Jenis Kedua dari Persamaan Bessel (3.1) dengan Orde $p = 0$ (merah), $p = 1$ (biru), $p = 2$ (hijau), $p = 3$ (kuning), dan $p = 4$ (coklat) pada Interval $x = 0...20, y = -1...0{,}6$ (sumber: hasil interpretasi dari plot fungsi Bessel jenis kedua orde p dengan maple).

Jadi penyelesaian umum persamaan Bessel (2.30) $y = AJ_p(x) + BY_p(x)$

a. Untuk $p = 0$, dari (2.34) dan dari (2.42) diperoleh

$$y = AJ_0(x) + BY_0(x)$$

$$y = A\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\Gamma(n+1)}\right] + B\left[\frac{2}{\pi}\left(\begin{array}{l} J_0(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma\right) \\ - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\right)\end{array}\right)\right]$$

b. Untuk p bilangan bulat, dari (2.34) dan dari (2.45) diperoleh,

$$. \, y = \left(\begin{array}{l} A\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n} \frac{1}{n!\Gamma(p+n+1)} \right] \\ + B\left[\frac{1}{\pi} \left[\begin{array}{l} 2J_p(x)\left(\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \gamma \right) - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} \\ -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \left(\left(\sum_{m=1}^{v+n} \frac{1}{m} \right) + \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \right) \right) \right) \end{array} \right] \right] \end{array} \right)$$

c. Untuk p bukan bilangan bulat, dari (2.34) dan dari (2.46) diperoleh,

$$y = A\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n} \frac{1}{n!\Gamma(p+n+1)} \right] + B\left[\frac{\cos(p\pi)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} \right]$$

2.11 Kontruksi Membran yang Berbentuk Sirkular

Persamaan Bessel terdapat pada persoalan tentang getaran, salah satunya getaran pada membran yang sirkular.

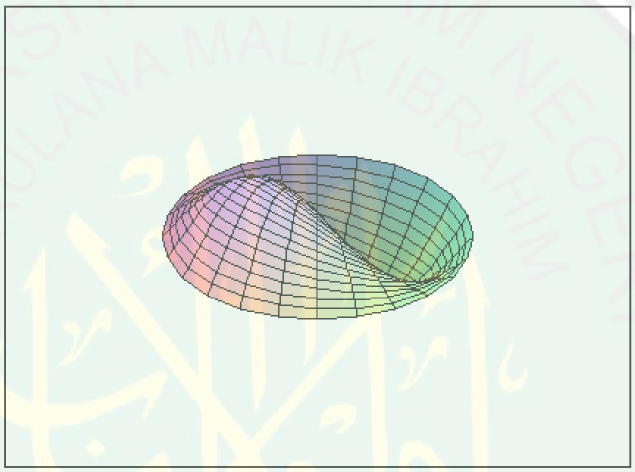
Membran sirkular terdapat pada drum, mikropon, telepon, dan lain sebagainya. Membran sirkular adalah bidang dan bahannya elastis, tetapi tidak menekuk, getarannya dimodelkan oleh persamaan gelombang dimensi dua dengan koordinat polar (Kreyszig, 1999: 629).

Untuk membentuk persamaan gelombang dimensi dua koordinat polar, diasumsikan membran berbentuk persegi.

Diasumsikan:

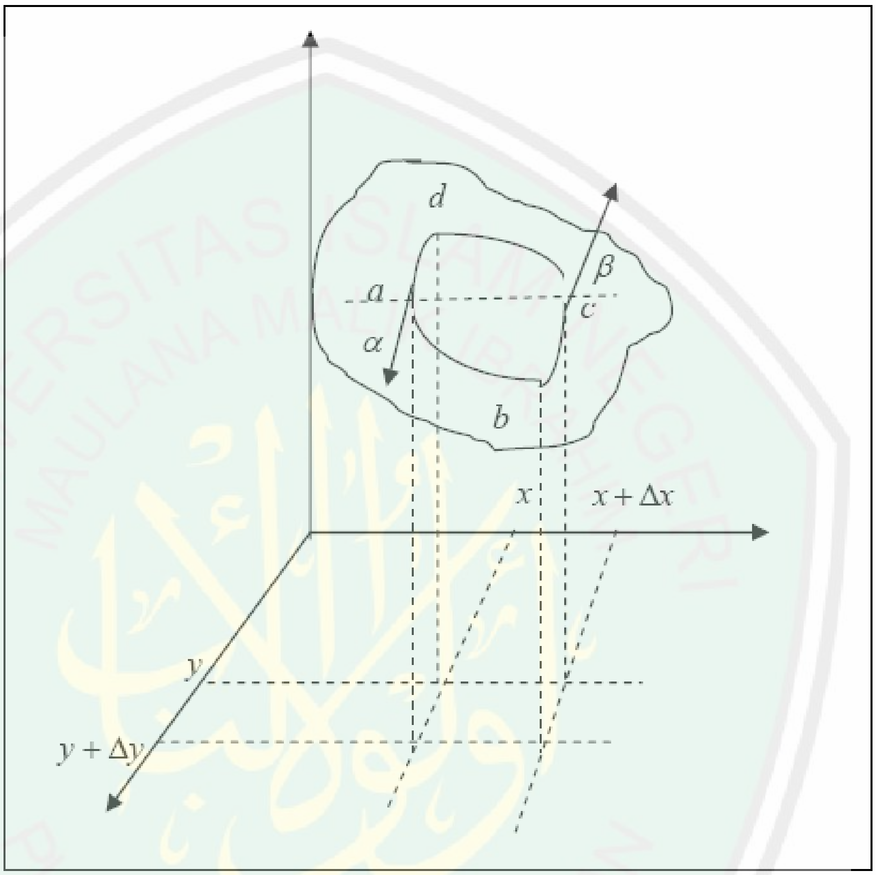
1. Membran adalah homogen, maka massa (ρ) per unit adalah konstan.
2. Membran sempurna fleksibel dan sangat tipis sedemikian hingga tidak memberikan perlawanan untuk menekuk.

3. Tegangan *T* tiap panjang unit disebabkan oleh peregangan membran yaitu invariant sepanjang gerakan dan menahan nilai yang sama untuk tiap titik dan pada semua arah.
4. Belokan $u(x,y,t)$ pada gerakan sepanjang membran diabaikan sebagai perbandingan ukuran membran sepanjang gerakan dapat diabaikan sebagai ukuran membran, Juga semua sudut inclinasi adalah kecil.



Gambar 2.4: Getaran Membran Sirkular

Perhatikan titik *a*, *b*, *c*, dan *d* (Gambar2) pada membran. Misalkan luas membran adalah $\delta x \delta y$, T adalah teganggan tiap panjang unit. Aksi gaya pada titik adalah $T\delta x$ dan $T\delta y$. Ketika membran menjadi sempurna fleksibel, tegangan $T\delta x$ dan $T\delta y$ adalah tangen ke membran. Misalkan α, β adalah sudut antara tegangan T dengan garis horisontal. Maka gaya pada komponen horisontal sebanding titik balik yaitu $T\delta y\cos\alpha$ dan $T\delta y\cos\beta$. Ketika α dan β sangat kecil, maka $\cos\alpha \to 1$ dan $\cos\beta \to 1$ sedemikian hingga $T\delta y\cos\alpha \to T\delta y$ dan $T\delta y\cos\beta \to T\delta y$. Jadi gaya pada komponen horisontal sebanding titik balik adalah hampir sama dan karenanya gerakan partikel membran pada arah horisontal sangat kecil. Oleh karena itu, di asumsikan tiap partikel membran bergerak pada arah vertikal.



Gambar 2.5: Grafik Membran Sirkular

Gaya resultan vertikal $= T\delta y \sin\beta - T\delta y \sin\alpha$

$$= T\delta y(\tan\beta - \tan\alpha)$$

karena $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}, \beta$ sangat kecil sehingga $\cos\beta \to 1$ dan $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, α sangat kecil sehingga $\cos\alpha \to 1$, sehingga

$$= T\delta y[u_x(x+\delta x, y_1) - u_x(x, y_2)]$$

dimana u_x turunan parsial x, dan y_1, y_2 adalah nilai antara y dan $y+\delta y$

Maka, gaya resultan vertikal pada dua titik yang lain adalah

$$= T\delta x[u_y(x_1, y+\delta y) - u_y(x_2, y)]$$

dimana u_y turunan parsial y, dan x_1, x_2 adalah nilai antara x dan $x+\delta x$

Menururt hukum gerak newton kedua $F = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt}$, dengan $m = \rho\delta x\delta y$

Total gaya vertikal pada elemen = $\rho\delta x\delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,

Jadi $T\delta y[u_x(x+\delta x, y_1) - u_x(x, y_2)]$- $T\delta x[u_y(x_1, y+\delta y) - u_y(x_2, y)]$= $\rho\delta x\delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,

dimana $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ adalah akselarasi pada elemen.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x+\delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\delta x}\right] + \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_y(x_1, y+\delta y) - u_y(x_2, y)}{\delta y}\right]$$

Dengan limit $\delta x \to 0$ dan limit $\delta y \to 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}[u_{xx} + u_{yy}] = c^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (2.47)$$

(Gupta, 1993:12.36-12.37).

Persamaan (2.47) merupakan persamaan gelombang dimensi dua, karena membran didefinisikan dalam bentuk koordinat polar, maka persamaan (2.47) ditransformasi ke bentuk polar, dengan didefinisikan

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$ dan $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Jadi $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\dfrac{\sin\theta}{r}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\right)$$

$$= \left[\begin{array}{l}\cos^2\theta\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\ + \dfrac{\sin^2\theta}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\end{array}\right]$$

Dan $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\dfrac{\cos\theta}{r}$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right)$$

$$= \left[\begin{array}{l}\sin^2\theta\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\dfrac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} - \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\ + \dfrac{\cos^2\theta}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\end{array}\right]$$

Jadi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\begin{pmatrix} \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} \\ + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \\ + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} \\ - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \\ + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \end{pmatrix} \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\sin^2\theta \cos^2\theta\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} \right) \qquad (2.48)$$

Persamaan (2.48) merupakan persamaan gelombang dimensi dua pada koordinat polar (Gupta, 1993:11.1).

2.12 Persamaan Kontinuitas

Definisi 10:

Persamaan kontinuitas didefinisikan

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho dV + \int_{cs} \rho V.ndA = 0 \qquad (1)$$

dengan Integral pertama yang diruas kiri persamaan (1) menyatakan besarnya laju dari massa yang berada di dalam volume atur berubah, dan integral kedua menyatakan laju netto dari massa yang mengalir keluar melalui permukaan atur (laju massa yang mengalir keluar dikurangi laju massa yang mengalir masuk).

Integral volume pada persamaan (1) dapat dinyatakan dengan

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{cv} \rho dV = \frac{\partial\rho}{\partial t}\partial x\partial y\partial z \qquad (2)$$

Sedangkan Laju netto massa aliran keluar dapat dinyatakan dengan

$$=\left[\frac{\partial(\rho\mu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]\partial x\partial y\partial z \qquad (3)$$

Dari (1), (2), dan (3) didapatkan bentuk persamaan diferensial untuk kekekalan massa adalah

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\mu)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0, \qquad (4)$$

persamaan ini disebut juga persamaan kontinuitas.

Persamaan (4) dapat dinyatakan dengan $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\rho V=0$ (Munsod, dkk: 2004: 359).

Untuk aliran tak mampu mampat, maka kerapatan aliran ρ konstan diseluruh medan aliran sehingga

$\nabla\bullet V=0$ atau $\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ (Munsod, dkk: 2004: 359-360).

Karena aplikasi pada skripsi ini menggunakan Koordinat silinder polar (r,θ,z) dan aliran tak mampu mampat maka, bentuk diferensial untuk persamaan kontinuitas pada koordinat silinder polar

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho v_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0 \qquad (2.49)$$

Untuk aliran tak mampu mampat (tunak atau tidak tunak)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(v_\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(v_z)}{\partial z}=0 \qquad (2.50)$$

(Munsod, dkk: 2004: 361-362)

2.13 Persamaan Gerak

Dari hukum newton kedua yang mengatakan bahwa F=*m.a*, dengan F adalah gaya, *m* massa, dan *a* adalah percepatannya. Maka untuk massa ∂m, diperoleh

$$\partial F = (\partial m)a \tag{5}$$

Jika ditulis dalam bentuk komponen, persamaan (5) dapat diuliskan sebagai

$$\partial F_x = (\partial m)a_x \tag{6.a}$$

$$\partial F_y = (\partial m)a_y \tag{6.b}$$

$$\partial F_z = (\partial m)a_z \tag{6.c}$$

Dimana $\partial m = \rho(\partial x)(\partial y)(\partial z)$, dengan ρ adalah kerapatan aliran, dan percepatan untuk tiap komponennya adalah

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \tag{7.a}$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \tag{7.b}$$

$$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \tag{7.c}$$

Sedangakan untuk

$$\partial F_{sx} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)(\partial x)(\partial y)(\partial z) \tag{8.a}$$

$$\partial F_{sy} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\right)(\partial x)(\partial y)(\partial z) \tag{8.b}$$

$$\partial F_{sz} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)(\partial x)(\partial y)(\partial z) \tag{8.c}$$

Dari persamaan (6), (7), dan (8) diperoleh

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad (9.a)$$

$$\rho g_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad (9.b)$$

$$\rho g_x + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) \quad (9.c)$$

Persamaan (9) ini disebut Persamaan diferensial umum dari gerakan untuk sebuah fluida (Munsod, dkk: 2004: 370).

2.14 Aliran Viskositas

Untuk memasukan efek viskositas (lampiran 1) ke dalam analisis diferensial gerakan fluida, maka kembali pada persamaan-persamaan gerak umum yang sebelumnya diturunkan, persamaan (9) karena persamaan (9) mencakup tegangan dan kecepatan, maka terdapat lebih banyak variabel yang tak diketahui ketimbang jumlah persamaanya, dan oleh karena itu, perlu lebih dulu membentuk suatu hubungn antara tegangan dan kecepatan.

Hubungan tegangan-deformasi

Untuk fluida newtonian tak mampu mampat, diketahui tegangan berbanding lurus terhadap laju deformasi dan dapat dinyatakan dalam koordinat polar silinder (kasus soal pada pembahasan pada koordinat polar silinder).

Untuk tegangan normal

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (2.54)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right) \quad (2.55)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{2.56}$$

Untuk tegangan geser

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu\left(r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) \tag{2.57}$$

$$\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \mu\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right) \tag{2.58}$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \tag{2.59}$$

(Munsod, dkk: 2004: 408-410).

2.13 Persamaan Navier-Stokes

Definisi 12:

Persamaan Navier-Stokes adalah persamaan diferensial dasar yang menggambarkan aliran dari fluida newtonian yang tak mampu mampat (Munsod, dkk: 2004: 410).

Persamaan navier-stokes jika dituliskan dalam koordinat silinder polar adalah

Arah r

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^{2}}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_r + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) - \frac{v_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]\right)$$

(2.60)

Arah θ

$$\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta \\ + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] \end{pmatrix}$$

(2.61)

Arah z

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\left(\begin{array}{l}-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z\\ +\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]\end{array}\right) \quad (2.62)$$

(Munsod, dkk: 2004: 410-411).

2.14 Pendapat Ahli Tafsir tentang Ayat 5 dan 6 Surat Al-Insyiroh

Tafsir adalah suatu ilmu yang membahas tentang maksud firman-firman Allah SWT, sesuai dengan kemampuan manusia. Orang yang mempelajari tafsir disebut ahli tafsir (Shihab, 1996). Untuk memahami ayat-ayat Al-Qur'an dibutuhkan beberapa pendapat para ahli tafsir. Pada penelitian ini, ayat yang dijadikan rujukan adalah ayat 5 dan 6 surat Al-Insyiroh.

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٦

Artinya: Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. (Q.S Al-insyiroh, 5 dan 6).

Kata *al'usr* terulang di dalam al-Qur'an sebanyak 4 kali, sedang dalam berbagai bentuknya terulang sebanyak 12 kali. Kata *al'usr* digunakan untuk sesuatu yang sangat keras, sulit atau berat. Kata *yusr* terulang sebanyak 6 kali, tiga diantaranya bergandengan secara langsung dengan kata '*usr*, sedang kata *yusr* dalam berbagai bentuknya terulang sebanyak 44 kali. Dalam kamus-kamus bahasa, kata *yusr* digunakan untuk menggambarkan sesuatu yang mudah, lapang, atau banyak. Dari pengertian tersebut berkembang arti yang terlihat bertolak belakang. Jadi *yusr* adalah antonim '*usr* (Shihab, 2003: 361).

Menurut Shihab (2003: 361-362) agaknya Allah SWT dalam ayat ini bermaksud menjelaskan salah satu sunah-Nya yang bersifat umum dan konsisten yaitu, "*setiap kesulitan pasti disertai atau disusul oleh kemudahan selama yang bersangkutan bertekad untuk menanggulanginya*". Ini dibuktikan-Nya antara lain dengan contoh konkret pada diri pribadi Nabi Muhammad SAW beliau datang sendiri, ditantang dan dianiaya, sampai-sampai beliau dan keluarganya diboikot oleh kaum musyrikin di Mekah. Tidak boleh bicara dengan beliau dan kelurganya selama setahun, disusul dengan setahun lagi sampai dengan tahun ketiga. Tetapi pada akhirnya tiba juga kelapangan dan jalan keluar yang selama ini mereka dambakan. Ayat-ayat di atas seakan-akan menyatakan: kelapangan dada yang engkau peroleh wahai Nabi Muhammad, keringanan beban yang selama ini engkau rasakan, keharuman nama yang engkau sandang, itu semua disebabkan karena sebelum ini engkau telah mengalami puncak kesulitan. Namun engkau tetap tabah dan optimis, sehingga berlakulah bagimu sunnah (ketetapan Allah) yaitu, "*apabila krisis atau kesulitan telah mencapai puncaknya maka pasti ia aka sirna dan disusul dengan kemudahan*". Ayat 5 dan 6 di atas sejalan maknanya dengan isyarat yang dikandung oleh firmanNya:

ذَٰلِكَ بِأَنَّ ٱللَّهَ يُولِجُ ٱلَّيۡلَ فِي ٱلنَّهَارِ وَيُولِجُ ٱلنَّهَارَ فِي ٱلَّيۡلِ وَأَنَّ ٱللَّهَ سَمِيعُۢ بَصِيرٞ ٦١

Artinya: Yang demikian itu, adalah Karena Sesungguhnya Allah (kuasa) memasukkan malam ke dalam siang dan memasukkan siang ke dalam malam dan bahwasanya Allah Maha mendengar lagi Maha Melihat (Q.S. Al-Hajj :61).

Syaikh Muhammad dalam tafsir juz Amma (-: 462) menjelaskan tentang tafsir ayat 5 dan 6 surat al-Insyirah, berkata Ibn Abbas tentang tafsir ayat ini: "*satu kesulitan tak akan mendominasi dua kemudahan*". Makdsunya: berkata *ahlul balaghoh*: kata *al-usr* diulang dua kali dalam bentuk ma'rifah. alif lam ma'rifah disini fungsinya sebagai *al-'ahd dzikri*. Adapun kata *yusran* disebutkan dalam bentuk nakirah, kaidah bahasa arab menyebutkan: jika sebuah isim diulang dua kali dalam bentuk ma'rifah, maka biasanya isim yang pertama hakikatnya sama dengan isim yang kedua, kecuali jarang sekali. Jika isim diulang dua kali dalam bentuk nakirah, maka isim yang pertama hakikatnya bukan isim yang kedua, karena isim yang kedua bentuknya juga nakirah sehingga jelas yang dimaksud bukan isim nakirah yang pertama.

Shihab (2003: 36-363) berpendapat bahwa pengulangan ayat 5 pada ayat 6 oleh sementara ulama dipahami sebagai penekanan. Ada juga ulama' yang tidak memahaminya sebagai penekanan. Mereka mengemukakan satu kaidah yang menyatakan: "*apabila terulang satu kata dalam bentuk definit maka kata pertama dan kedua mempunyai makna atau kandungan yang sama, berbeda halnya jika kata tersebut memmpunyai makna atau kandungan yang sama, berbeda halnya jika kata tersebut berbentuk indefinit*". Pada ayat 5 kata *al-'usr* berbentuk definit (memakai alif lam) demikian pula kata tersebut pada ayat 6, ini berarti kesulitan pada ayat 5 sama halnya kesulitan pada ayat 6. Berbeda dengan kata *yusran*, kata tersebut tidak dalam bentuk definit, sehinga kemudahan pada ayat 5 berbeda dengan kemudahan pada ayat 6, hal ini menjadikan kedua ayat tersebut mengandung makna "*setiap satu kesdulitan tidak dapat mengalahkan dua* *kemudahan*". Sebagaimana dalam suatu riwayat Imam Malik RA bahwa Abu 'Ubaidah ibn al-Jarrah sahabat Nabi Muhammad SAW yang memimpin pasukan Islam menghadapi Romawi pada pemerintahan 'Umar ibn al-Khaththab, menyurati kesulitan melawan Romawi, maka jawaban yang diterimanya dari beliau adalah: "*bila seorang mukmin ditimpa suatu kesulitan, niscaya Allah akan menjadikan sesudah kesulitan itu kelapangan, karena sesungguhnya satu kesulitan tidak akan mampu mengalahkan dua kelapangan*". Satu kesulitan beliau pahami dari penggunaan bentuk definit walaupun kata tersebut terulang dua kali, sedang dua kemudahan beliau ambil dari pengulangan kata *yusran* yang berbentuk indefinit.

Jadi sebagian ulama' ahli tafsir berpendapat bahwa pada ayat 5 dan 6 surat al-Insyiroh terdapat satu kesulitan maka ada dua kemudahan. Haeri (2001:253) menambahkan dua kemudahan atau solusi itu terdiri dari: Solusi pertama adalah bahwa kesulitan akan berlalu, ia tidak bisa berlalu dengan sendirinya, tapi akhirnya ia akan berlalu karena lambat laun kita pergi darinya melalui kematian. Solusi kedua adalah bagi pencari sejati, solusinya terletak dalam pengetahuan tentang proses awal terjadinya kesulitan kemudian melihat kesempurnaan di dalamnya.

Ustadz Muhammad Abduh dalam tafsirnya menyebutkan bahwa ayat 5 dan 6 surat Al-Insyiroh diawali dengan huruf *fa* (*fa-inna ma'al 'usri yusran*) untuk menunjukkan adanya kaitan antara kedua keadaan tersebut, yaitu antara timbulnya kesulitan dan datangnya kemudahan. Digunakan kata *al* sebelum kata *usri* memberikan makna umum yaitu segala macam kesulitan. Misalnya kesulitan berupa kemiskinan, kelemahan, pengkhianatan, pokoknya apapun kesulitan yang biasa dijumpai dalam kehidupan. Jenis kesulitan apapun pasti dapat ditanggulangi, sepanjang orang yang menghadapi kesulitan tersebut memiliki jiwa yang kuat untuk mencari solusinya, menggunakan akal pikiran semaksimal mungkin, serta berdo'a dan tawakal kepada Allah SWT (Amiruddin , 2004: 279-280).

Keluasan makna dari kedua ayat tersebut mencakup segala kesulitan. Dua ayat ini dinyatakan dalam suatu gaya yang memperlihatkan bahwa kedunya tidak hanya ditunjukkan kepada Nabi Muhammad SAW dan umat di zamannya. Aturan ini bersifat umum dan berlaku bagi semua generasi manusia. Kedua ayat ini membesarkan hati kaum mukmin yang ikhlas untuk mengenal dan meyakini, bahwa kesulitan atau kesukaran apapun yang dihadapinya dijalan Allah pasti akan memberikan kunci pembebasan pada suatu jalan yang mengantarkan mereka pada kemudahan dan kebahagian. Solusi tidak datang sesudah kesulitan, tapi ia memang disertakan dengan kesulitan. Dengan kata lain dalam setiap kesulitan selalu disertakan kemudahan didalamnya (Imani, 2006: 159).

Banyak ulama tafsir memahami arti *ma'a* dalam ayat di atas yang arti harfiahnya adalah bersama dipahami oleh sementara ulama dalam arti sesudah. Pakar tafsir Az-Zamakhsyari menjelaskan bahwa penggunaan kata bersama walaupun maksudnya sesudah adalah untuk menggambarkan betapa dekat dan singkatnya waktu antara kehadiran kemudahan, dengan kesulitan yang sedang dialami. Bagi para ulama yang memahami kata tersebut dalam arti sesudah, merujuk antara lain kepada firman Allah yang serupa maknanya dan menggunakan kata ba'd (sesudah), yaitu: "*Allah akan memberi kelapangan* *sesudah kesempitan*" (Q.S. ath-Thalaq: 7). Namun demikian, tidak pula keliru mereka yang memahami kata itu dalam arti awalnya yakni bersama, dan ketika itu ayat 5 dan 6 menjelaskan bahwa betapapun beratnya kesulitan yang dihadapi, pasti dalam cela-celah kesulitan itu terdapat kemudahan-kemudahan. Ayat ini memesankan agar manusia berusaha menemukan segi-segi positif yang dapat dimanfaatkan dari setiap kesulitan, karena bersama setiap kesulitan terdapat kemudahan (Shihab, 2003: 362-363).

Shihab (2003: 362) menambahkan bahwa para ahli hukum Islam, setelah memperhatikan sekian banyak ayat al-Qur'an dan hadits-hadits, memberi kesimpulan dalam bentuk kaidah yang berbunyi *Al-Masyaqqah Tajliu At-Taisir* (kesulitan mendatangkan kemudahan) demikian pula kaidah *Idza Dhaqa Asy-Syai'u Ittasa'* (apabila sesuatu telah menyempit, maka ia menjadi luas).

Berdasarkan uraian di atas, penulis mengambil kesimpulan, bahwa dalam setiap kesulitan terdapat kemudahan, kesulitan tidak hanya yang terjadi pada zaman Nabi Muhammad dan ummatnya tetapi juga berlaku untuk semua generasi manusia. Kesulitan yang terjadi dapat berbentuk segala macam. Kemudahan akan datang sesudah kesulitan atau disertakan dengan kesulitan.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Aplikasi Fungsi Bessel

3.1.1 Getaran Membran Sirkular

Getaran membran sirkular dibentuk oleh persamaan gelombang dimensi dua pada koordinat polar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \qquad (3.1)$$

Misalkan solusi dari (3.1) adalah $u(r,t)$ dengan tidak bergantung pada θ maka persamaan (3.1) menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (3.2)$$

- Syarat batas dan syarat awal:

Syarat batas: Karena membran mendekati batas tertentu, misalkan $r = a$, maka diperoleh kondisi batasnya

$$u(a,t) = 0, \forall t \geq 0 \qquad (3.3)$$

Syarat awal:

Pada saat t=0, belokan awalnya

$$u(r,0) = f(r,0) = f(r) \qquad (3.4)$$

Dan kecepatan awalnya merupakan turunan pertama $u(r,t)$ terhadap t

$$\frac{\partial(u(r,0))}{\partial t} = 0 \qquad (3.5)$$

Langkah-langkah yang digunakan:

1. Menyelesaiakan persamaan gelombang dimensi dua koordinat polar (3.2).

   Dengan menggunakan metode pemisahan variabel, misalkan solusi $u(r,t)$ adalah

$$u(r,t) = R(r)T(t) \tag{3.6}$$

Turunan kedua $u(r,t)$ terhadap t:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = RT'' \tag{3.7}$$

Turunan pertama dan kedua $u(r,t)$ terhadap r:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = R'T \text{ dan } \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R''T \tag{3.8}$$

subtitusikan (3.7) dan (3.8) ke persamaan (3.2), diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$RT'' = c^2\left(R''T + \frac{1}{r}R'T\right)$$

$$RT'' = c^2T\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)$$

Kedua ruas dibagi dengan c^2RT, diperoleh

$$\frac{1}{c^2T}T'' = \frac{1}{R}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) \tag{3.9}$$

persamaan (3.9), ruas kanannya merupakan fungsi dari r saja, sedangkan ruas kirinya merupakan fungsi dari t saja, maka keduanya sama dengan suatu konstanta, misalkan konstanta tersebut λ. Maka,

$$\frac{1}{c^2T}T'' = \frac{1}{R}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) = \lambda \qquad (3.10)$$

Persamaan (3.10) menghasilkan dua persamaan diferensial linier, yaitu:

$$\frac{1}{c^2T}T'' = \lambda \qquad (3.11)$$

dan $\frac{1}{R}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) = \lambda$ (3.12)

Solusi dari persamaan (3.11) adalah

$T'' - c^2\lambda T = 0$ dengan $\lambda = -k^2$, maka

$T'' + c^2k^2T = 0$

$$T(t) = A\cos(ckt) + B\sin(ckt) \qquad (3.13)$$

Sedangkan solusi dari persamaan (3.12) adalah

$R'' + \frac{1}{r}R' - \lambda R = 0$ dengan $\lambda = -k^2$ (3.14)

$$R'' + \frac{1}{r}R' + k^2R = 0$$

$$r^2R'' + rR' + r^2k^2R = 0 \qquad (3.15)$$

Persamaan (3.15) di atas merupakan persamaan Bessel orde m=0, maka penyelesaian umumnya adalah $R(r) = CJ_0(kr) + DY_0(kr)$, dimana $J_0(kr)$ fungsi Bessel jenis pertama, $Y_0(kr)$ fungsi Bessel jenis kedua dan C, D konstan.

Jadi solusi dari persamaan (3.2) menjadi

$$u(r,t) = (CJ_0(kr) + DY_0(kr))(A\cos(ckt) + B\sin(ckt)) \qquad (3.16)$$

Dari gambar 2.3 dapat dilihat bahwa pada saat $r \to 0$, $Y_0(kr) \to \infty$, dan karena membran harus berhingga maka diasumsikan D =0. Maka penyelesaian (3.16) menjadi

$$u(r,t) = (CJ_0(kr))(A\cos(ckt) + B\sin(ckt)) \qquad (3.17)$$

2. Menerapkan syarat batas dan syarat awal.

1) Pada saat t=0, dari syarat (3.5), penyelesaian (3.18) menjadi

$$\frac{\partial(u(r,0))}{\partial t} = (CJ_0(kr))c\frac{\alpha_n}{a}(-A\sin(ckt) + B\cos(ckt))$$

Karena t=0, maka $\frac{\partial(u(r,0))}{\partial t} = (CJ_0(kr))ck(-A\sin 0 + B\cos 0)$

$$\frac{\partial(u(r,0))}{\partial t} = (CJ_0(kr))ck(-A\sin 0 + B\cos 0)$$

Karena $-A\sin 0 + B\cos 0 = 0$, maka $-A.0 + B.1 = 0$,

Jadi diasumsikan $B = 0$, penyelesaian (3.18) menjadi

$$u(r,t) = (CJ_0(kr))(A\cos(ckt)) \qquad (3.19)$$

2) Syarat batas (3.3) $u(a,t) = R(a) = 0$ maka penyelesaian (3.19) menjadi

$$u(a,t) = (CJ_0(ka))A\cos(ckt) = 0$$

Jadi $R(a) = CJ_0(ka) = 0$

syarat batas ini dapat dipenuhi karena $J_0(ka)$ memiliki akar-akar yang positif, dari Gambar 2.3 dapat dilihat bahwa grafik $J_0(x)$ memotong di sumbu x sampai x yang takhingga, Misalkan akar-akar yang positif tersebut

$k_1 a = \alpha_1, k_2 a = \alpha_2, k_3 a = \alpha_3,...$ karena ada banyak solusi, maka $k_n = \frac{\alpha_n}{a}, n = 1,2,3,..$

Karenanya penyelesaian (3.17) menjadi

$$u(r,t) = \left(CJ_0(\frac{\alpha_n}{a}r) \right) A\cos\left(c\frac{\alpha_n}{a}t \right)$$

$$u_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n J_0(\frac{\alpha_n}{a}r) \right) A_n \cos\left(c\frac{\alpha_n}{a}t \right) \qquad (3.18)$$

3) Syarat awal (3.4) $u(r,0) = f(r,0) = f(r)$

Penyelesaian (3.18) menjadi

$$u_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n A_n J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)\cos\left(c\frac{\alpha_n}{a}t \right)$$

$$u_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)\cos\left(c\frac{\alpha_n}{a}t \right) \text{ dengan } K_n = C_n A_n \qquad (3.19)$$

Karena t=0, maka

$$u_n(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)\cos(0)$$

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)$$

Untuk mendapatkan K_n kalikan kedua sisi dengan $J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr$ dan integralkan dari 0 ke a , diperoleh

$$\int_0^a f(r)J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} K_n J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr$$

$$\int_0^a f(r)J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr = \sum_{n=1}^{\infty} K_n \int_0^a J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr$$

Karena sifat keortogonalan fungsi Bessel, maka $\int_0^a J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr = 0$ kecuali jika $n = m$, maka

$$\int_0^a f(r)J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr = \sum_{n=1}^{\infty} K_m \int_0^a J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr$$

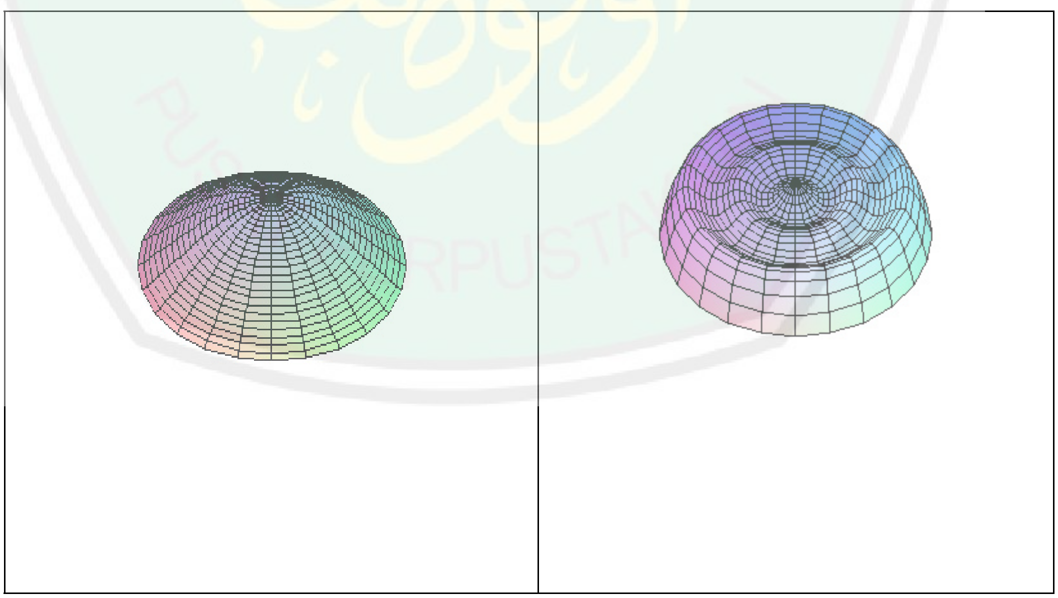
$$\int_0^a f(r)J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr = \sum_{n=1}^{\infty} K_m \int_0^a r\left(J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)\right)^2 dr$$

$$K_m = \frac{\int_0^a f(r)J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)rdr}{\int_0^a r\left(J_0(\frac{\alpha_m}{a}r)\right)^2 dr}$$, karena m=n, maka

$$K_n = \frac{\int_0^a f(r)J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)rdr}{\int_0^a r\left(J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)\right)^2 dr}$$

Penyelesaian (3.19) menjadi

$$u_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\int_0^a f(r)J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)rdr}{\int_0^a r\left(J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)\right)^2 dr}\right]J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)\cos\left(c\frac{\alpha_n}{a}t\right) \qquad (3.20)$$



Gambar 3.1: Getaran Membran Sirkular dengan r=1 (kiri), getaran membran sirkular dengan f(r)=1, r=1(kanan) (sumber: hasil interpretasi dari maple (lihat lampiran 2)).

3.1.2 Distribusi Kecepatan Aliran Laminar *Unsteady* Pipa Sirkular

Suatu aliran dengan kerapatan ρ dan viskositas μ diisikan pada pipa horisontal yang sangat panjang dengan panjang L dan radius R. Mula-mula zat cair dalam keadaan diam. Pada $t=0$, diketahui tekanan kemiringannya $\left(\frac{p_0-p_L}{L}\right)$. Tentukan distribusi kecepatan yang tampak dengan waktu?

Solusi:

Diasumsikan:

1. Aliran tak mampu mampat.
2. Aliran Newtonian.
3. $v_r = v_\theta = 0, v_z = v_z(r,t)$

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Menerapkan Asumsi

Asumsi 1 dengan Asumsi 2, memberikan gambaran persamaan Navier-Stokes, karena asumsi 3, maka artinya aliran $v_r = v_\theta = 0, v_z = v_z(r,t)$ bergerak searah, yaitu pada arah z.

Karena pipa berbentuk sirkular, maka digunakan koordinat silinder polar.

2. Menyelesaiakan persamaan Navier-Stokes pada koordinat silinder polar dengan arah z.

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

Karena $v_r = v_\theta = 0$, dan pipa horisontal maka g dapat diabaikan, sehingga diperoleh

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right]$$

Dengan p tekanan yang diberikan, maka $-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_L - p_0}{L} = -\frac{\Delta p}{L}$, sehingga diperoleh

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}\right) = \frac{p_0 - p_L}{L} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\right] \tag{3.21}$$

- Syarat awal dan syarat batas:

  Syarat awal: pada $t = 0$, $v_z = 0$, $\forall 0 \le r \le R$ (3.22)

  Syarat batas I: $r = 0$, $v_z = hingga$ (3.23)

  Syarat batas II: $r = R$, $v_z = 0$ (3.24)

3. Mendefinisikan setiap variabel ke dalam variabel dimensional, dengan didefinisikan:

$$\phi = \frac{v_z}{(p_0 - p_L)R^2/4\mu L} \tag{3.25}$$

$$\varepsilon = \frac{r}{R} \tag{3.26}$$

$$\tau = \frac{\mu t}{\rho R^2} \tag{3.27}$$

Mengalikan persamaan (3.21) dengan $\frac{4L}{(p_0 - p_L)}$,

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t}\frac{4L}{(p_0 - p_L)} = \frac{p_0 - p_L}{L}\frac{4L}{(p_0 - p_L)} + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\frac{4L}{(p_0 - p_L)}$$

$$\rho\frac{\partial\dfrac{v_z}{(p_0-p_L)}\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{4L}\right)}}{\partial t}=4+\mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\dfrac{v_z}{(p_0-p_L)}\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{4L}\right)}}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\dfrac{\mu}{R^2}}{\dfrac{\mu}{R^2}}\rho\frac{\partial\left(\dfrac{v_z}{\left(\dfrac{(p_0-p_L)}{4L}\right)}\right)}{\partial t}=4+\frac{\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\mu}\right)}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\left(\dfrac{v_z}{\left(\dfrac{(p_0-p_L)}{4L}\right)}\right)}{\partial r}\right)\frac{\dfrac{R^2}{R^2}}{\dfrac{R^2}{R^2}}$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{v_z}{\left(\dfrac{(p_0-p_L)R^2}{\mu 4L}\right)}\right)}{\partial\dfrac{\mu t}{\rho R^2}}=4+\frac{R}{r}R\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\left(\dfrac{v_z}{\left(\dfrac{(p_0-p_L)R^2}{\mu 4L}\right)}\right)}{\partial\dfrac{r}{R}\dfrac{R^2}{R}}\right)$$

$$\frac{\partial(\phi)}{\partial\tau}=4+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(\phi)}{\partial\varepsilon}\right)\frac{R}{R}$$

$$\frac{\partial(\phi)}{\partial\tau}=4+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r\dfrac{1}{R}}\left(\frac{r}{R}\frac{\partial(\phi)}{\partial\varepsilon}\right)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau}=4+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial\varepsilon}\right)\qquad(3.28)$$

- Syarat awal dan syarat batas untuk persamaan (3.28) menjadi:

  Syarat awal: pada $\tau=0,\phi=0$ (3.29)

  Syarat Batas I: pada $\varepsilon=0,\phi=hingga$ (3.30)

Syarat batas II: pada $\varepsilon = 1, \phi = 0$ (3.31)

Misalkan penyelesaian dari persamaan (3.28) adalah $\phi(\varepsilon,\tau)$, maka solusi distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular adalah mengurangkan solusi pada saat steady-state dengan solusi pada saat t

Solusi steady-state dicapai pada saat $\tau = \infty$, karena pada saat steady-state waktu diabaikan, jadi solusi (3.28) adalah

$$\phi(\varepsilon,\tau) = \phi_\infty - \phi_t(\varepsilon,\tau) \tag{3.32}$$

Dengan $\phi_\infty(\varepsilon)$ adalah solusi pada saat *steady-state*, sedangakan $\phi_t(\varepsilon,\tau)$ solusi pada saat t.

1 solusi pada saat *steady-state* $\phi_\infty(\varepsilon)$

dari persamaan (3.32), karena pada saat *steady-state* waktu diabaikan maka $\dfrac{\partial \phi}{\partial \tau} = 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = 4 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon}\right)$$

$$0 = 4 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\varepsilon \frac{\partial \phi_\infty}{\partial \varepsilon}\right) \tag{3.33}$$

Solusi ini harus memenuhi

syarat batas I: yaitu pada $\varepsilon = 1, \phi = 0$ (3.34)

syarat batas II: yaitu pada $\varepsilon = 0, \phi = hingga$ (3.35)

Jadi solusi pada saat *steady-state* adalah:

$$\phi_\infty = 1 - \varepsilon^2 \tag{3.36}$$

2 Menyelesaiakan solusi $\phi_t(\varepsilon,\tau)$

➢ Subtitusikan (3.36) ke dalam persamaan (3.32)

$$\phi_\infty = 1 - \varepsilon^2 \rightarrow \phi(\varepsilon,\tau) = \phi_\infty - \phi_t(\varepsilon,\tau)$$

$$\phi(\varepsilon,\tau) = 1 - \varepsilon^2 - \phi_t(\varepsilon,\tau)$$

➢ masukkan hasilnya ke persamaan (3.28), maka diperoleh persamaan diferensial parsial untuk fungsi ϕ_t

$$\frac{\partial \phi(\varepsilon,\tau)}{\partial \tau} = 4 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\varepsilon \frac{\partial \phi(\varepsilon,\tau)}{\partial \varepsilon}\right)$$

$$\frac{\partial\left(1 - \varepsilon^2 - \phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \tau} = 4 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\varepsilon \frac{\partial\left(1 - \varepsilon^2 - \phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \varepsilon}\right)$$

$$\frac{\partial\left(-\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \tau} = 4 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\varepsilon\left(-2\varepsilon + \frac{\partial\left(-\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \varepsilon}\right)\right)$$

$$\frac{\partial\left(-\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \tau} = 4 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\left(-2\varepsilon^2 - \varepsilon \frac{\partial\left(\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \varepsilon}\right)\right)$$

$$-\frac{\partial\left(\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \tau} = 4 + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\left(-2\varepsilon^2\right)\right) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\left(-\varepsilon \frac{\partial\left(\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \varepsilon}\right)\right)$$

$$-\frac{\partial\left(\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \tau} = 4 - \frac{1}{\varepsilon}4\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\left(\varepsilon \frac{\partial\left(\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \varepsilon}\right)\right)$$

$$-\frac{\partial\left(\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \tau} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\left(\varepsilon \frac{\partial\left(\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \varepsilon}\right)\right)$$

$$\frac{\partial\left(\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \tau} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\left(\varepsilon \frac{\partial\left(\phi_t(\varepsilon,\tau)\right)}{\partial \varepsilon}\right)\right) \quad (3.37)$$

➢ Persamaan (3.37) dapat diselesaikan dengan syarat awal dan syarat batas sebagai berikut:

Syarat awal: pada $\tau = 0, \phi_t = \phi_\infty$ (3.38)

Syarat batas I: pada $\varepsilon = 0, \phi_t = hingga$ (3.39)

Syarat batas II: pada $\varepsilon = 1, \phi_t = 0$ (3.40)

- Misalkan solusi dari persamaan (3.37) adalah

$$\phi_t(\varepsilon,\tau) = E(\varepsilon)T(\tau) \tag{3.41}$$

- Subtitusikan (3.41) ke persamaan (3.37), dan bagi dengan *ET*, diperoleh

$$\phi_t(\varepsilon,\tau) = E(\varepsilon)T(\tau) \rightarrow \frac{\partial(\phi_t(\varepsilon,\tau))}{\partial\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\left(\varepsilon\frac{\partial(\phi_t(\varepsilon,\tau))}{\partial\varepsilon}\right)\right)$$

$$E\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\left(\varepsilon T\frac{dE}{d\varepsilon}\right)\right)$$

$$\frac{E\frac{dT}{d\tau}}{ET} = \frac{T\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\left(\varepsilon\frac{dE}{d\varepsilon}\right)\right)}{ET}$$

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{E}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\left(\varepsilon\frac{dE}{d\varepsilon}\right)\right) \tag{3.42}$$

- Persamaan (3.42), sisi kirinya merupakan fungsi dari τ saja, sedangkan sisi kanannya merupakan fungsi dari ε saja. Oleh karenanya, keduanya sama dengan suatu konstanta, misalkan konstantanya λ,

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{E}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\left(\varepsilon\frac{dE}{d\varepsilon}\right)\right) = \lambda \tag{3.43}$$

- Persamaan (3.43) menghasikan dua persamaan diferensial biasa, yaitu:

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{d\tau} = \lambda \tag{3.44}$$

dan $\frac{1}{E}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\left(\varepsilon\frac{dE}{d\varepsilon}\right)\right) = \lambda$ (3.45)

- Solusi dari (3.44)

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{d\tau}=\lambda \text{, dengan } \lambda=-k^2$$

$$\frac{dT}{d\tau}=-k^2T$$

$$\frac{dT}{d\tau}+k^2T=0 \text{, solusinya adalah } T(\tau)=C_0e^{-k^2\tau} \tag{3.46}$$

- Solusi dari (3.45) adalah

$$\frac{1}{E}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\left(\varepsilon\frac{dE}{d\varepsilon}\right)\right)=\lambda$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\left(\varepsilon\frac{dE}{d\varepsilon}\right)\right)=-k^2E \text{, dengan } \lambda=-k^2$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\left(\varepsilon\frac{dE}{d\varepsilon}\right)\right)+k^2E=0$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{d\varepsilon}{d\varepsilon}\frac{dE}{d\varepsilon}+\varepsilon\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}\right)+k^2E=0$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{dE}{d\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\varepsilon\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}+k^2E=0$$

$$\frac{d^2E}{d\varepsilon^2}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{dE}{d\varepsilon}+k^2E=0 \tag{3.47}$$

Persamaan (3.47) merupakan persamaan Bessel dengan orde $w=0$, maka solusinya

$$E(\varepsilon)=C_1J_0(k\varepsilon)+C_2Y_0(k\varepsilon) \tag{3.48}$$

Jadi solusi dari

$$\phi_t(\varepsilon,\tau)=E(\varepsilon)T(\tau)=C_1J_0(k\varepsilon)+C_2Y_0(k\varepsilon)\left(C_0e^{-k^2\tau}\right) \tag{3.49}$$

- Menerapkan syarat awal dan syarat batas dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Syarat batas I: karena $\phi_t = hingga$ maka E juga hingga. Karena $Y_0(\alpha\varepsilon) \to \infty$ (cenderung kearah negatif tak hingga) pada ε mendekati 0, maka diasumsikan C_2 harus 0.

   Maka penyelesaian (3.49) menjadi

$$\phi_t(\varepsilon,\tau) = C_1 J_0(k\varepsilon)\left(C_0 e^{-k^2\tau}\right) \tag{3.50}$$

2. Syarat batas II: karena $\phi_t = 0$ pada $\varepsilon = 1$,

   $\phi_t(1,\tau) = C_1 J_0(k)\left(C_0 e^{-k^2\tau}\right) = 0$, artinya $E(\varepsilon) = C_1 J_0(k\varepsilon)$ juga harus hilang pada $\varepsilon = 1$, syarat batas ini dipenuhi jika $J_0(k)$ memiliki akar-akar yang positif, dari Gambar 2.3 dapat dilihat bahwa grafik $J_0(x)$ memotong di sumbu x sampai x yang takhingga, Misalkan akar-akar yang positif tersebut $k_1 = \alpha_1, k_2 = \alpha_2, k_3 = \alpha_3, \ldots$, maka $k_n = \alpha_n, n = 1,2,3,..$

   Karena ada banyak solusi untuk $E_n = C_{1n} J_0(\alpha_n \varepsilon)$ dengan $n = 1,2,3,\ldots,\infty$, maka penyelesaian (3.50) menjadi

$$\phi_{tn}(\varepsilon,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} J_0(\alpha_n \varepsilon)\left(C_{0n} e^{-\alpha_n^2\tau}\right) \tag{3.51}$$

3. Syarat awal: ϕ_t harus sama dengan ϕ_∞ pada $\tau = 0$,

   Penyelesaian (3.51) menjadi

$$\phi_t(\varepsilon,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} C_{0n} e^{-\alpha_n^2\tau} J_0(\alpha_n \varepsilon)$$

$$\phi_t(\varepsilon,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha_n^2\tau} J_0(\alpha_n \varepsilon) \quad \text{, dimana } B_n = C_{1n} C_{0n} \tag{3.65}$$

Pada saat $\tau = 0$, maka

$$\phi_\infty = \phi_t(\varepsilon,0)$$

$$1-\varepsilon^2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\alpha_n{}^2 0} J_0(\alpha_n \varepsilon)$$

$$1-\varepsilon^2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\alpha_n \varepsilon)$$

Untuk mendapatkan B_n, kalikan kedua sisi dengan $J_0(\alpha_m \varepsilon)\varepsilon d\varepsilon$ dan integralkan dari 0 ke 1, diperoleh

$$J_0(\alpha_m \varepsilon)\varepsilon d\varepsilon(1-\varepsilon^2) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(\alpha_n \varepsilon) J_0(\alpha_m \varepsilon)\varepsilon d\varepsilon$$

$$\int_0^1 J_0(\alpha_m \varepsilon)(1-\varepsilon^2)\varepsilon d\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^1 J_0(\alpha_n \varepsilon) J_0(\alpha_m \varepsilon)\varepsilon d\varepsilon$$

Karena sifat keortogonalan fungsi Bessel, $\int_0^1 J_0(\alpha_n \varepsilon) J_0(\alpha_m \varepsilon)\varepsilon d\varepsilon = 0$, kecuali jika $n = m$,

$$\int_0^1 J_0(\alpha_m \varepsilon)(1-\varepsilon^2)\varepsilon d\varepsilon = B_m \int_0^1 J_0(\alpha_m \varepsilon) J_0(\alpha_m \varepsilon)\varepsilon d\varepsilon$$

$$\int_0^1 J_0(\alpha_m \varepsilon)(1-\varepsilon^2)\varepsilon d\varepsilon = B_m \int_0^1 \varepsilon(J_0(\alpha_m \varepsilon))^2 d\varepsilon$$

$$B_m = \frac{\int_0^1 J_0(\alpha_m \varepsilon)(1-\varepsilon^2)\varepsilon d\varepsilon}{\int_0^1 \varepsilon(J_0(\alpha_m \varepsilon))^2 d\varepsilon}$$

$$B_m = \frac{\left[\dfrac{4J_1(\alpha_m \varepsilon)}{\alpha_m{}^3}\right]}{\dfrac{1}{2}[J_1(\alpha_m \varepsilon)]^2}$$

$$B_m = \frac{8}{\alpha_m{}^3 J_1(\alpha_m \varepsilon)}$$

Karena m=n, maka $B_n = \dfrac{8}{\alpha_n{}^3 J_1(\alpha_n \varepsilon)}$

$$\phi_t(\varepsilon,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\alpha_n{}^3 J_1(\alpha_n \varepsilon)} e^{-\alpha_n{}^2 \tau} J_0(\alpha_n \varepsilon)$$

$$\phi_t(\varepsilon,\tau) = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \varepsilon)}{\alpha_n{}^3 J_1(\alpha_n \varepsilon)} e^{-\alpha_n{}^2 \tau}$$

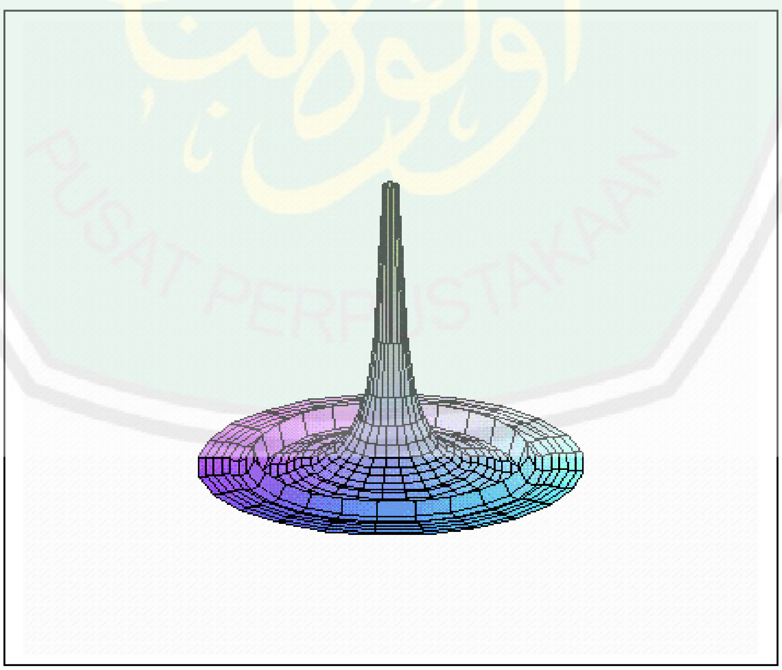
Jadi solusi pada saat t adalah $\phi_t(\varepsilon,\tau) = 8\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0(\alpha_n \varepsilon)}{\alpha_n{}^3 J_1(\alpha_n \varepsilon)} e^{-\alpha_n{}^2 \tau}$.

Hasil akhir dari distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular adalah

$$\phi(\varepsilon,\tau) = \phi_\infty - \phi_t(\varepsilon,\tau)$$

dengan $\phi_\infty = 1 - \varepsilon^2$ dan $\phi_t(\varepsilon,\tau) = 8\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0(\alpha_n \varepsilon)}{\alpha_n{}^3 J_1(\alpha_n \varepsilon)} e^{-\alpha_n{}^2 \tau}$ diperoleh

$$\phi(\varepsilon,\tau) = (1-\varepsilon^2) - 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n \varepsilon)}{\alpha_n{}^3 J_1(\alpha_n \varepsilon)} e^{-\alpha_n{}^2 \tau} \qquad (3.66)$$



Grafik 3.2: Distribusi Kecepatan Aliran Laminar *Unsteady* Pipa Sirkular dengan R=1 (sumber: hasil interpretasi dengan maple (lihat lampiran 3)).

3.2 Surat Al-Insyirah Ayat 5 dan 6 dari Sudut Pandang Fungsi Bessel

Surat al-Insyirah ayat 5 dan 6 menjelaskan bahwa setiap kesulitan terdapat kemudahan. Kesulitan pada ayat ini, berlaku untuk semua generasi manusia, kesulitan juga dapat berbentuk segala macam.

Ada sebagian ulama' yang berpendapat bahwa pengulangan ayat 5 pada ayat 6 adalah bentuk penegasan atau menunjukkan bahwa janji Allah sangat kuat.

Kemudahan yang dijanjikan Allah pada ayat ini, akan muncul sesudah kesulitan, akan tetapi sebagian ulama' berpendapat bahwa kemudahan tidak akan muncul sesudah kesulitan, tetapi kemudahan selalu disertakan dengan kesulitan. Karena kemudahan dan kesulitan merupakan salah satu contoh dari Sunah-Nya(*Sunnatulloh*).

Fungsi Bessel adalah fungsi yang merupakan penyelesaian dari persamaan Bessel. Persamaan Bessel dapat diandaikan sebagai kesulitan atau suatu permasalahan, maka fungsi Bessel adalah kemudahan atau solusi penyelesaiannya. Begitu juga dengan aplikasi fungsi Bessel. Fungsi Bessel memiliki beberapa aplikasi, diantaranya pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular.

Fungsi Bessel ditemukan pada penyelesaian getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular. Kesulitan pada ayat 5 dan 6 surat Al-Insyiroh dapat diartikan sebagai permasalahan dalam getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular, sedangkan kemudahannya adalah penyelesaian getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular, karena fungsi Bessel ditemukan pada penyelesaian getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular, maka fungsi Bessel merupakan bentuk kemudahan dari permasalahan pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular.

Oleh karena itu, fungsi Bessel merupakan salah satu bukti dari janji Allah, tentang kemudahan yang telah dijanjikannya dalam surat Al-Insyiroh ayat 5 dan 6 dan sebagai contoh *sunnatulloh*.

Fungsi Bessel sebagai *sunnatulloh* ini, tidak muncul secara langsung, tetapi melalui proses.

Berdasarkan uraian di atas, salah satu bukti surat al-Insyirah ayat 5 dan 6 dan contoh *sunnatulloh*, adalah persamaan Bessel yang memiliki penyelesaian yaitu fungsi Bessel.

BAB IV

PENUTUP

4.1 KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan, penulis dapat menarik kesimpulan tentang aplikasi fungsi Bessel pada getaran membran sirkular dan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular bahwa:

a. Fungsi Bessel yang digunakan adalah fungsi Bessel orde 0.

b. Fungsi Bessel jenis kedua tidak digunakan karena membran dan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular hingga.

c. Ada banyak solusi untuk $J_0(ka)$ (pada membran) dan $J_0(k)$ (pada aliran laminar *unsteady* pipa sirkular), karenanya solusinya berbentuk deret.

d. Getaran membran sirkular

Getaran membran sirkular dibentuk oleh

$$u_n(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\int_0^a f(r)J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)rdr}{\int_0^a r\left(J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)\right)^2 dr}\right]J_0(\frac{\alpha_n}{a}r)\cos\left(c\frac{\alpha_n}{a}t\right)$$

dengan $f(r)$ belokan awal, a jari-jari, $c = \frac{T}{\rho}$ kecepatan awal yaitu tegangan dibagai kerapatan.

e. Distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular.

Pada distribusi kecepatan aliran laminar, zat cair mengalir pada pipa sirkular yang horisontal. Dengan mempertimbangkan *unsteady* didapatkan distribusi kecepatan aliran laminar *unsteady* pipa sirkular adalah

$$\phi(\varepsilon,\tau)=\phi_{\infty}-\phi_{t}(\varepsilon,\tau)$$

dengan $\phi_{\infty}=1-\varepsilon^{2}$ dan $\phi_{t}(\varepsilon,\tau)=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{0}(\alpha_{n}\varepsilon)}{\alpha_{n}^{3}J_{1}(\alpha_{n}\varepsilon)}e^{-\alpha_{n}^{2}\tau}$ diperoleh

$$\phi(\varepsilon,\tau)=\left(1-\varepsilon^{2}\right)-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{0}(\alpha_{n}\varepsilon)}{\alpha_{n}^{3}J_{1}(\alpha_{n}\varepsilon)}e^{-\alpha_{n}^{2}\tau}$$

DAFTAR PUSTAKA

Amiruddin, Aan. 2004. *Tafsir Al-Quran Kontemporer Juz Amma, Jilid* I. Bandung: Khazanah Intelektual.

Ault, J. C dan Ayres, Frank. 1992. *Persamaan Diferensial dalam Satuan SI Metric*. Jakarta: Erlangga.

Bird, R. Byron, dkk. -. *Transport Phenomena*. Singapura: John Willey and Sons, Inc.

Brown, James Ward dan Churchill, Ruel V. 2001. *Fourier Series and Boundary Value Problems*, *Sixth Edition*. Singapura: MC Graw Hill.

Finozio dan Ladas. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Jakarta: Erlangga.

Gupta, B. D. 1993. *Mathematical Physics*. New Delhi: Vikas Publishing House PVT LTD.

Haeri, Syekh Fadlullah. 2001. *Cahaya Al-Quran Tafsir Juz 'Amma*. Jakarta: PT Serambi Ilmu Semesta.

Imani, Allamah Kamal Faqih. 2006. *Tafsir Nurul Quran*. Jakarta: Al-Huda.

Kreyszig, Erwin. 1999. *Advanced Engineering Mathematics*, *Eighth Edition*. Singapura: John Willey and Sons, Inc.

Muhammad, Syekh. -. *Tafsir Juz 'Amma*. Solo: At-Tibyan.

Munson, Bruce R, dkk. 2004. *Mekanika Fluida*, *Jilid* 1, *Edisi Keempat*. Jakarta: Erlangga.

Myint-U, Tyn dan Debnath, Lokenath. 2000. *Linear Partial Differential Equation for Scientists and Engineers*, *Fourth Edition*. Boston: Birkhauser.

Purcell, Varberg, dan Rigdon, 2003. *Kalkulus Jilid* 1, *Edisi Kedelapan*. Jakarta: Erlangga.

Renreg, Abdulloh, 1990. *Asas-asas Metode Matematika dalam Fisika*. Bandung: Angkasa

Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah: Pesan, Kesan, dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Spigel, Murray R,. 1983. *Matematika Lanjutan untuk para Insinyur dan Ilmuwan*.Terjemahan Koko Martono. Jakarta: Erlangga.

Stroud, K. A. 1987. *Engineering Mathematics, Thirth Edition*. Terjemahan Erwin Sucipto. Jakarta: Erlangga.

Hapsari, Ardhani Restianti Novita. 2005. Kajian Teoritis Fungsi Bessel dan Polynomial Legendre serta Aplikasinya. *Tugas Akhir* Tidak diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika FMIPA Unibraw.

Efunda. 2009. Bessel Function. *http://efunda.com/Besselfunction.html*. Diakses tanggal 1 April 2009.

Mathworld. 2009. Euler-Mascheroni Constant. *http://mathworld.wolfram.com/Euler-MascheroniConstant.html*. Diakses tanggal 17 Juli 2009.

Mathworld. 2009. Digamma Function. *http://mathworld.wolfram.com/DigammaFunction.html*. Diakses tanggal 17 Juli 2009.

Mathworld. 2009. Gamma Function. *http://mathworld.wolfram.com/GammaFunction.html*. Diakses tanggal 17 Juli 2009. Diakses tanggal 17 Juli 2009.

Mathworld. 2009. Bessel Function Second Kind. *http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionoftheSecondKind.html*. Diakses tanggal 2 Juni 2009.

Mathworld. 2009. Modified Bessel Function of the First Kind. *http://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheFirstKind.html*. Diakses tanggal 13 Juli 2009.

Mathworld. 2009. Modified Bessel Function of the Second Kind. *http://mathworld.wolfram.com/ModifiedBesselFunctionoftheSecondKind.html*. Diakses tanggal 13 Juli 2009.

Lampiran 1: Daftar Istilah

Aliran Laminar	: Laju aliran yang cukup kecil (aliran tenang)
Unsteady (Tak tunak)	: Terjadi perubahan menurut waktu pada suatu lokasi tertentu di dalam medan aliran.
Steady (tunak)	: Tidak terjadi perubahan menurut waktu pada suatu lokasi tertentu di dalam medan aliran.
Fluida Newtonian	: Fluida yang tegangan gesernya berhubungan secara linier terhadap laju tegangan geser.
Karapatan (ρ)	: Massa fluida per satuan volume
Aliran Tak Mampu Mampat (*Incompressible Flow*)	: Kerapatan fluida tidak berubah atau konstan di seluruh medan aliran.
Aliran Mampu Mampat (*Compressible Flow*)	: Kerapatan fluida berubah pada suatu medan tertentu.
Viskositas	: sifat fluida yang menghubungkan tegangan geser dengan gerakan fluida

Lampiran 2: Getaran Membran Sirkular dengan Bantuan Maple

```
> restart;
> alias(u=u(r,t)):
> wave_eq := expand(VectorCalculus:-
Laplacian(u,polar[r,theta]))=diff(u,t,t)/c^2;
```

$$wave\_eq := \frac{\frac{\partial}{\partial r} u}{r} + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u\right) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial t^2} u}{c^2}$$

```
> Eq1 := expand(subs(u=R(r)*Theta(theta)*T(t), wave_eq/u));
```

$$Eq1 := \frac{\frac{d}{dr} R(r)}{R(r)\, r} + \frac{\frac{d^2}{dr^2} R(r)}{R(r)} = \frac{\frac{d^2}{dt^2} T(t)}{T(t)\, c^2}$$

```
> Eqt := expand(T(t)*c^2*( rhs(Eq1)=lambda ));
```

$$Eqt := \frac{d^2}{dt^2} T(t) = T(t)\, c^2\, \lambda$$

```
> Eq2 := expand(r^2*( lhs(Eq1)=lambda ));
```

$$Eq2 := \frac{r\left(\frac{d}{dr} R(r)\right)}{R(r)} + \frac{r^2\left(\frac{d^2}{dr^2} R(r)\right)}{R(r)} = r^2\, \lambda$$

```
> Eqtheta := expand(Theta(theta)*(select(i-
>has(i,theta),lhs(Eq2))=lambda1));
```

$$Eqtheta := 0 = \Theta(\theta)\, \lambda 1$$

```
> Eqr := expand(R(r)*subs(Eqtheta, Eq2));
> Eqr := collect(lhs(Eqr)-rhs(Eqr)=0,R(r));
```

$$Eqr := r\left(\frac{d}{dr} R(r)\right) + r^2\left(\frac{d^2}{dr^2} R(r)\right) = R(r)\, r^2\, \lambda$$

$$Eqr := r\left(\frac{d}{dr} R(r)\right) + r^2\left(\frac{d^2}{dr^2} R(r)\right) - R(r)\, r^2\, \lambda = 0$$

```
> lambda := -k^2;
```

$$\lambda := -k^2$$

```
> sol_T := dsolve(Eqt,T(t));
```

$$sol\_T := T(t) = \_C1 \sin(k\, c\, t) + \_C2 \cos(k\, c\, t)$$

```
> subs_set :=
{eval(rhs(sol_T),{cos=1,sin=0})=C[1],eval(rhs(sol_T),{cos=0,
sin=1})=C[2]};
```

$$subs\_set := \{\_C1 = C_2, \_C2 = C_1\}$$

```
> sol_T := eval(sol_T,subs_set);
```

$$sol\_T := T(t) = C_2 \sin(k\, c\, t) + C_1 \cos(k\, c\, t)$$

```
> Eqr;
```

$$r\left(\frac{d}{dr} R(r)\right) + r^2 \left(\frac{d^2}{dr^2} R(r)\right) + R(r)\, r^2\, k^2 = 0$$

```
> alias(J=BesselJ, Y=BesselY):
> sol_R := dsolve(Eqr,R(r));
```

$$sol\_R := R(r) = \_C1\, J(0, k\, r) + \_C2\, Y(0, k\, r)$$

```
> sol_R := eval(sol_R,{Y=0,_C1=C[5],_C2=C[5]});
```

$$sol\_R := R(r) = C_5\, J(0, k\, r)$$

```
> k_eq := k=k[m,n];
```

$$k\_eq := k = k_{m,\, n}$$

```
> k[m,n]*a=BesselJZeros(m,n);
```

$$k_{m,\, n}\, a = \mathrm{BesselJZeros}(m, n)$$

```
> evalf(subs(m=2,n=3,%));
```

$$k_{2,\, 3}\, a = 11.61984117$$

```
> alias(JZ=BesselJZeros);
k_fn := (m,n) -> JZ(m,n)/a;
```

$$u, J, Y, JZ$$

$$k\_fn := (m, n) \rightarrow \frac{JZ(m, n)}{a}$$

```
> k_fn(2,3);
```

$$\frac{JZ(2, 3)}{a}$$

```
> subs(k_eq,sol_T);
sol_Theta;
subs(k_eq,sol_R);
```

$$T(t) = C_2 \sin(k_{m,\, n}\, c\, t) + C_1 \cos(k_{m,\, n}\, c\, t)$$

$$sol\_Theta$$

$$R(r) = C_5\, J(0, k_{m,n}\, r)$$

```
> subs(C[5]=C[5,m,n],R=R[m,n],k_eq,sol_R);
subs(C[3]=C[3,m],C[4]=C[4,m],Theta=Theta[m],sol_Theta);
subs(C[1]=C[1,m,n],C[2]=C[2,m,n],T=T[m,n],k_eq,sol_T);
```

$$R_{m,n}(r) = C_{5,m,n}\, J(0, k_{m,n}\, r)$$

$$sol\_Theta$$

$$T_{m,n}(t) = C_{2,m,n} \sin(k_{m,n}\, c\, t) + C_{1,m,n} \cos(k_{m,n}\, c\, t)$$

```
> omega=k[m,n]*'c';
```

$$\omega = k_{m,n}\, c$$

```
> subs(k[m,n]=k_fn(m,n),%);
```

$$\omega = \frac{JZ(m,n)\, c}{a}$$

```
> tmp1:=subs(C[5]=1,rhs(sol_R)*rhs(sol_T));
```

$$tmp1 := J(0, k\, r)\, (C_2 \sin(k\, c\, t) + C_1 \cos(k\, c\, t))$$

```
> subs( C[4]=0,C[3]=1,C[2]=0,C[1]=1,k=''k_fn''(m,n),tmp1);
```

$$J(0, \text{'}k\_fn\text{'}(m,n)\, r) \cos(\text{'}k\_fn\text{'}(m,n)\, c\, t)$$

```
> mode_ee  := subs( i=%,(m,n)->i);
```

$$mode\_ee := (m,n) \to J(0, k\_fn(m,n)\, r) \cos(k\_fn(m,n)\, c\, t)$$

```
> subs( C[4]=0,C[3]=1,C[2]=1,C[1]=0,k=''k_fn''(m,n),tmp1);
```

$$J(0, \text{'}k\_fn\text{'}(m,n)\, r) \sin(\text{'}k\_fn\text{'}(m,n)\, c\, t)$$

```
> mode_eo  := subs( i=%,(m,n)->i);
```

$$mode\_eo := (m,n) \to J(0, k\_fn(m,n)\, r) \sin(k\_fn(m,n)\, c\, t)$$

```
> subs( C[4]=1,C[3]=0,C[2]=0,C[1]=1,k=''k_fn''(m,n),tmp1);
```

$$J(0, \text{'}k\_fn\text{'}(m,n)\, r) \cos(\text{'}k\_fn\text{'}(m,n)\, c\, t)$$

```
> mode_oe  := subs( i=%,(m,n)->i);
```

$$mode\_oe := (m,n) \to J(0, k\_fn(m,n)\, r) \cos(k\_fn(m,n)\, c\, t)$$

```
> subs( C[4]=1,C[3]=0,C[2]=1,C[1]=0,k=''k_fn''(m,n),tmp1);
```

$$J(0, \text{'}k\_fn\text{'}(m,n)\, r) \sin(\text{'}k\_fn\text{'}(m,n)\, c\, t)$$

```
> mode_oo  := subs( i=%,(m,n)->i);
```

$$mode\_oo := (m,n) \to J(0, k\_fn(m,n)\, r) \sin(k\_fn(m,n)\, c\, t)$$

```
> animate_mode  := proc(m::nonnegint,n::posint)
> local FRAM,Options;
>
if not type([a,c],list('numeric')) then
```

```
    error "the constants `a` and `c` must be numeric";
> elif not assigned(mode_ee) then
    error "the function `mode_ee` must be defined";
elif not assigned(k_fn) then
    error "the function `k_fn` must be defined";
> end if;
>
if nargs<3 then
    FRAM:=16;
    Options:='frames'=FRAM,'style=patch';
else
    Options:=args[3..nargs];
>      if has({Options},'frames') then
        FRAM:=subs({Options},'frames');
>      else
       FRAM:=16;
       Options:=Options,'frames'=FRAM;
    end if;
>      if not has({Options},'style') then
        Options:=Options,'style=patch';
>      end if;
> end if;

>
plots[animate3d]([r,theta,mode_ee(m,n)],r=0..a,theta=0..2*Pi
,t=0..evalf(2*Pi*(FRAM-
1)/(k_fn(m,n)*c*FRAM)),coords=cylindrical,Options);
> end proc;
```

animate_mode := **proc**(*m*::*nonnegint*, *n*::*posint*)

local *FRAM*, *Options*;

if not *type*([*a*, *c*], *list*('*numeric*')) **then**

error "the constants `a` and `c` must be numeric"

elif not *assigned*(*mode_ee*) **then**

error "the function `mode_ee` must be defined"

elif not *assigned*(*k_fn*) **then**

error "the function `k_fn` must be defined"

end if;

if *nargs* < 3 **then**

FRAM := 16;

Options := '*frames*' = *FRAM*, '*style* = *patch*';

else

Options := *args*[3 .. *nargs*];

if *has*({*Options*}, '*frames*') **then**

$FRAM := subs(\{Options\}, 'frames')$

else

$FRAM := 16;$

$Options := Options, 'frames' = FRAM;$

end if;

if not $has(\{Options\}, 'style')$ **then** $Options := Options, 'style = patch'$ **end if**;

end if;

$plots[animate3d]([r, theta, mode\_ee(m, n)], r = 0 .. a, theta = 0 .. 2*Pi,$

$t = 0 .. evalf((2*Pi*(FRAM - 1))/(k\_fn(m, n)*c*FRAM)), coords = cylindrical, Options);$

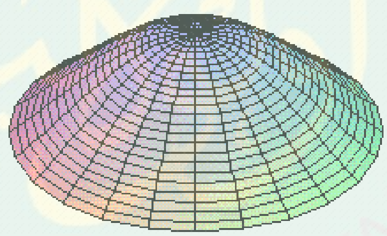
end proc;

```
> a:=1; #membrane radius
> c:=1; #wave velocity
```

$$a := 1$$

$$c := 1$$

```
> animate_mode(0,1,frames=16);
```



```
> u(r,t):=sum(BesselJ(0,(alpha[m]/R)*r)*(A[m]*cos(k[m]*t)+B[m]*sin(k[m]*t)),m=1..infinity);
```

$$u(r, t) := \sum_{m=1}^{\infty} J\left(0, \frac{\alpha_m r}{R}\right) (A_m \cos(k_m t) + B_m \sin(k_m t))$$

```
> pers1:=subs(t=0,u(r,t));
```

$$pers1 := \sum_{m=1}^{\infty} J\left(0, \frac{\alpha_m r}{R}\right) (A_m \cos(0) + B_m \sin(0))$$

```
> pers1 := sum(BesselJ(0,
alpha[m]*r/R)*(A[m]*cos(0)+B[m]*sin(0)), m = 1 .. infinity);
```

$$pers1 := \sum_{m=1}^{\infty} J\left(0, \frac{\alpha_m r}{R}\right) A_m$$

```
> evalf(pers1);
```

$$\sum_{m=1}^{\infty} J\left(0, \frac{\alpha_m r}{R}\right) A_m$$

```
>
A[m]=(2/((R^2)*(BesselJ(1,alpha[m])^2)))*int(r*f(r)*BesselJ(
0,(alpha[m]/R)*r),r=0..R);
```

$$A_m = \frac{2 \int_0^R r\, f(r)\, J\left(0, \frac{\alpha_m r}{R}\right) dr}{R^2\, J(1, \alpha_m)^2}$$

```
> f(r):=1;R:=2;
```

$$f(r) := 1$$

$$R := 2$$

```
>
A[m]:=(2/((R^2)*(BesselJ(1,alpha[m])^2)))*int(r*f(r)*BesselJ
(0,(alpha[m]/R)*r),r=0..R);
```

$$A_m := \frac{2}{J(1, \alpha_m)\, \alpha_m}$$

```
>
k[m]:=c*alpha[m]/R;c:=2;u(r,t):=sum(BesselJ(0,(alpha[m]/R)*r
)*(A[m]*cos(k[m]*t)),m=1..5);
```

$$k_m := \frac{1}{2} c\, \alpha_m$$

$$c := 2$$

$$u(r,t) := \frac{2 J\left(0, \frac{1}{2} \alpha_1 r\right) \cos(\alpha_1 t)}{J(1, \alpha_1)\, \alpha_1} + \frac{2 J\left(0, \frac{1}{2} \alpha_2 r\right) \cos(\alpha_2 t)}{J(1, \alpha_2)\, \alpha_2} + \frac{2 J\left(0, \frac{1}{2} \alpha_3 r\right) \cos(\alpha_3 t)}{J(1, \alpha_3)\, \alpha_3}$$
$$+ \frac{2 J\left(0, \frac{1}{2} \alpha_4 r\right) \cos(\alpha_4 t)}{J(1, \alpha_4)\, \alpha_4} + \frac{2 J\left(0, \frac{1}{2} \alpha_5 r\right) \cos(\alpha_5 t)}{J(1, \alpha_5)\, \alpha_5}$$

```
> 
pers2:=subs(alpha[1]=2.4048,alpha[2]=5.5201,alpha[3]=8.6537,
alpha[4]=11.7915,alpha[5]=14.9309,u(r,t));
```

$$pers2 := \frac{0.8316699934\, J(0,\, 1.202400000\, r)\cos(2.4048\, t)}{J(1,\, 2.4048)} + \frac{0.3623122770\, J(0,\, 2.760050000\, r)\cos(5.5201\, t)}{J(1,\, 5.5201)}$$
$$+ \frac{0.2311150144\, J(0,\, 4.326850000\, r)\cos(8.6537\, t)}{J(1,\, 8.6537)} + \frac{0.1696137048\, J(0,\, 5.895750000\, r)\cos(11.7915\, t)}{J(1,\, 11.7915)}$$
$$+ \frac{0.1339503982\, J(0,\, 7.465450000\, r)\cos(14.9309\, t)}{J(1,\, 14.9309)}$$

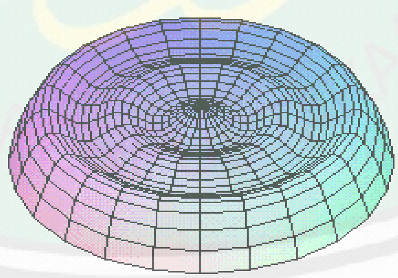
```
> u0:=subs(t=0,pers2);
```

$$u0 := 1.601974697\, J(0,\, 1.202400000\, r)\cos(0.) - 1.064799259\, J(0,\, 2.760050000\, r)\cos(0.)$$
$$+ 0.8513991928\, J(0,\, 4.326850000\, r)\cos(0.) - 0.7296452403\, J(0,\, 5.895750000\, r)\cos(0.)$$
$$+ 0.6485236145\, J(0,\, 7.465450000\, r)\cos(0.)$$

```
> u1:=subs(t=3,pers2);
```

$$u1 := 1.601974697\, J(0,\, 1.202400000\, r)\cos(7.2144) - 1.064799259\, J(0,\, 2.760050000\, r)\cos(16.5603)$$
$$+ 0.8513991928\, J(0,\, 4.326850000\, r)\cos(25.9611) - 0.7296452403\, J(0,\, 5.895750000\, r)\cos(35.3745)$$
$$+ 0.6485236145\, J(0,\, 7.465450000\, r)\cos(44.7927)$$

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> 
> 
plots[animate3d]([r,theta,pers2],r=0..R,theta=0..2*Pi,t=0..2
,coords=cylindrical);
```



Lampiran 3: Distribusi Kecepatan Aliran Laminar *Unsteady* Pipa Sirkular

```
> restart;
> diff(u(r,t),t$1)=1/r*diff(r*(diff(u(r,t),r$1)),r$1);
```

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, t) = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, t)\right) + r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, t)\right)}{r}$$

```
> u(0,t)=0;u(R,t)=0;u(r,0)=f(r,0);Diff(u(r,0),t)=0;
```

$$u(0, t) = 0$$

$$u(R, t) = 0$$

$$u(r, 0) = f(r, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, 0) = 0$$

```
> u(r,t):=sum(BesselJ(0,(alpha[m]/R)*r)*(A[m]*exp((-
k[m]^2)*t)),m=1..infinity);
```

$$u(r, t) := \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{BesselJ}\left(0, \frac{\alpha_m r}{R}\right) A_m \mathbf{e}^{(-k_m^2 t)}$$

```
> pers1:=subs(t=0,u(r,t));
```

$$pers1 := \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{BesselJ}\left(0, \frac{\alpha_m r}{R}\right) A_m \mathbf{e}^{0}$$

```
> evalf(pers1);
```

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{BesselJ}\left(0, \frac{\alpha_m r}{R}\right) A_m$$

```
> R:=1;
```

$$R := 1$$

```
> A[m]:=8/(BesselJ(1,(alpha[m]/R)*r)*(alpha[m]^3));
```

$$A_m := \frac{8}{\mathrm{BesselJ}(1, \alpha_m r)\, \alpha_m^3}$$

```
>
k[m]:=c*alpha[m]/R;c:=2;u(r,t):=sum(BesselJ(0,(alpha[m]/R)*r
)*(A[m]*exp((-alpha[m]^2)*t)),m=1..5);
```

$$k_m := c\, \alpha_m$$

$$c := 2$$

$$u(r,t) := \frac{8\,\mathrm{BesselJ}(0, \alpha_1\, r)\, \mathbf{e}^{(-\alpha_1^2\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, \alpha_1\, r)\, \alpha_1^3} + \frac{8\,\mathrm{BesselJ}(0, \alpha_2\, r)\, \mathbf{e}^{(-\alpha_2^2\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, \alpha_2\, r)\, \alpha_2^3} + \frac{8\,\mathrm{BesselJ}(0, \alpha_3\, r)\, \mathbf{e}^{(-\alpha_3^2\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, \alpha_3\, r)\, \alpha_3^3} + \frac{8\,\mathrm{BesselJ}(0, \alpha_4\, r)\, \mathbf{e}^{(-\alpha_4^2\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, \alpha_4\, r)\, \alpha_4^3} + \frac{8\,\mathrm{BesselJ}(0, \alpha_5\, r)\, \mathbf{e}^{(-\alpha_5^2\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, \alpha_5\, r)\, \alpha_5^3}$$

```
> pers2:=subs(alpha[1]=2.4048,alpha[2]=5.5201,alpha[3]=8.6537,
alpha[4]=11.7915,alpha[5]=14.9309,u(r,t));
```

$$pers2 := \frac{0.5752453242\,\mathrm{BesselJ}(0, 2.4048\, r)\, \mathbf{e}^{(-5.78306304\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, 2.4048\, r)} + \frac{0.04756080000\,\mathrm{BesselJ}(0, 5.5201\, r)\, \mathbf{e}^{(-30.47150401\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, 5.5201\, r)} + \frac{0.01234481202\,\mathrm{BesselJ}(0, 8.6537\, r)\, \mathbf{e}^{(-74.88652369\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, 8.6537\, r)} + \frac{0.004879584252\,\mathrm{BesselJ}(0, 11.7915\, r)\, \mathbf{e}^{(-139.0394722\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, 11.7915\, r)} + \frac{0.002403433038\,\mathrm{BesselJ}(0, 14.9309\, r)\, \mathbf{e}^{(-222.9317748\, t)}}{\mathrm{BesselJ}(1, 14.9309\, r)}$$

```
> u0:=subs(t=0,pers2);
```

$$u0 := \frac{0.5752453242\,\mathrm{BesselJ}(0, 2.4048\, r)\, \mathbf{e}^{0.}}{\mathrm{BesselJ}(1, 2.4048\, r)} + \frac{0.04756080000\,\mathrm{BesselJ}(0, 5.5201\, r)\, \mathbf{e}^{0.}}{\mathrm{BesselJ}(1, 5.5201\, r)} + \frac{0.01234481202\,\mathrm{BesselJ}(0, 8.6537\, r)\, \mathbf{e}^{0.}}{\mathrm{BesselJ}(1, 8.6537\, r)} + \frac{0.004879584252\,\mathrm{BesselJ}(0, 11.7915\, r)\, \mathbf{e}^{0.}}{\mathrm{BesselJ}(1, 11.7915\, r)} + \frac{0.002403433038\,\mathrm{BesselJ}(0, 14.9309\, r)\, \mathbf{e}^{0.}}{\mathrm{BesselJ}(1, 14.9309\, r)}$$

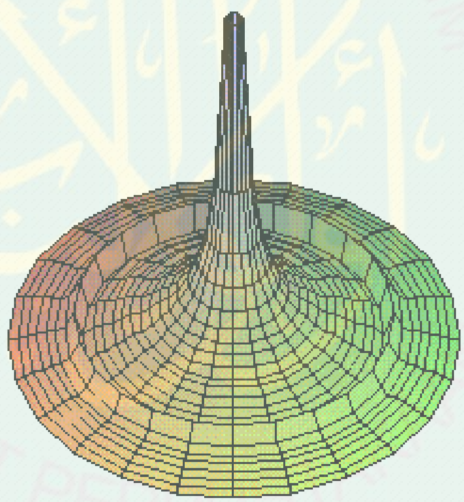
```
> u1:=subs(t=3,pers2);
```

$$u1 := \frac{0.5752453242\,\mathrm{BesselJ}(0, 2.4048\, r)\, \mathbf{e}^{(-17.34918912)}}{\mathrm{BesselJ}(1, 2.4048\, r)} + \frac{0.04756080000\,\mathrm{BesselJ}(0, 5.5201\, r)\, \mathbf{e}^{(-91.41451203)}}{\mathrm{BesselJ}(1, 5.5201\, r)} + \frac{0.01234481202\,\mathrm{BesselJ}(0, 8.6537\, r)\, \mathbf{e}^{(-224.6595711)}}{\mathrm{BesselJ}(1, 8.6537\, r)}$$

$$+\frac{0.004879584252\ \mathrm{BesselJ}(0,\ 11.7915\ r)\ \mathbf{e}^{(-417.1184166)}}{\mathrm{BesselJ}(1,\ 11.7915\ r)}$$

$$+\frac{0.002403433038\ \mathrm{BesselJ}(0,\ 14.9309\ r)\ \mathbf{e}^{(-668.7953244)}}{\mathrm{BesselJ}(1,\ 14.9309\ r)}$$

```
> with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> polarplot(u0,r=0..2):
>
plots[animate3d]([r,theta,pers2],r=0..R,theta=0..2*Pi,t=0..2
,coords=cylindrical);
```



```
> pers3:=(1-r^2)-(pers2);
```

$$pers3 := 1 - r^2 - \frac{0.5752453242\ \mathrm{BesselJ}(0,\ 2.4048\ r)\ \mathbf{e}^{(-5.78306304\ t)}}{\mathrm{BesselJ}(1,\ 2.4048\ r)}$$

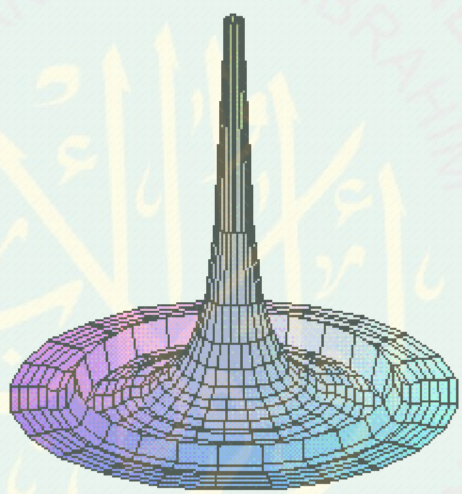
$$-\frac{0.04756080000\ \mathrm{BesselJ}(0,\ 5.5201\ r)\ \mathbf{e}^{(-30.47150401\ t)}}{\mathrm{BesselJ}(1,\ 5.5201\ r)}$$

$$-\frac{0.01234481202\ \mathrm{BesselJ}(0,\ 8.6537\ r)\ \mathbf{e}^{(-74.88652369\ t)}}{\mathrm{BesselJ}(1,\ 8.6537\ r)}$$

$$-\frac{0.004879584252\ \mathrm{BesselJ}(0,\ 11.7915\ r)\ \mathbf{e}^{(-139.0394722\ t)}}{\mathrm{BesselJ}(1,\ 11.7915\ r)}$$

$$-\frac{0.002403433038\ \mathrm{BesselJ}(0,\ 14.9309\ r)\ \mathbf{e}^{(-222.9317748\ t)}}{\mathrm{BesselJ}(1,\ 14.9309\ r)}$$

```
> plots[animate3d]([r,theta,pers3],r=0..R,theta=0..2*Pi,t=0..2,coords=cylindrical);
```



```
>
```

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Makhmudah
NIM : 05510019
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Aplikasi Fungsi Bessel Pada Getaran Membran Sirkular Dan Distribusi Kecepatan Aliran Laminar *Unsteady* Pipa Sirkular
Pembimbing : Usman Pagalay, M.Si
Ach. Nashichuddin, M.Ag

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	3 Pebruari 2009	Proposal	1.	
2	4 Maret 2009	Judul		2.
3	5 Mei 2009	Konsultasi BAB III	3.	
4	3 Juni 2009	Konsultasi BAB III		4.
5	4 Juli 2009	BAB II dan III	5.	
6	13 Juli 2009	BAB I, II dan III		6.
7	15 Juli 2009	Revisi BAB I, II dan III	7.	
8	15 Juli 2009	Kajian Keagamaan		8.
9	14 Agustus 2009	Revisi BAB III	9.	
10	16 September 2009	Revisi Keagamaan		10.
11	29 September 2009	Revisi BAB III	11.	
12	5 oktober 2009	ACC keagamaan		12.
13	5 oktober 2009	ACC Keseluruhan	13.	

Malang, 6 Oktober 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001