

**APROKSIMASI *PADÉ* UNTUK MENYELESAIKAN  
PERSAMAAN DIFERENSIAL NONLINIER**

**SKRIPSI**

Oleh:

**AMALIYA RACHMI**

**NIM : 05510016**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2009**

**APROKSIMASI *PADÉ* UNTUK MENYELESAIKAN  
PERSAMAAN DIFERENSIAL NONLINIER**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si)

Diajukan oleh :  
**AMALIYA RACHMI**  
NIM. 05510016

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2009**

**APROKSIMASI PADÉ UNTUK MENYELESAIKAN  
PERSAMAAN DIFERENSIAL NONLINIER**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**AMALIYA RACHMI**  
NIM: 05510016

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:  
Tanggal: 06 Oktober 2009

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 002

A. Nasichuddin, M.Ag  
NIP. 19730705 2000031 1 001

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Amaliya Rachmi

NIM : 05510016

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-banar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 06 Oktober 2009

Yang membuat pernyataan

Amaliya Rachmi

NIM. 05510016

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

﴿٦﴾ فَإِذَا فَرَغْتَ فَانصَبْ ﴿٧﴾

Artinya :

“ Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5),  
Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6),  
Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan),  
kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain (7)”.

(Q. S Alam Nasyrat: 5-7)

PUSAT PERPUSTAKAAN



Untuk :

Ayah dan Ibu tercinta

H. Choiril Anam dan Farida,

Kakak dan Adik terkasih

Nadyana Rizqi dan Faiza Fitria,

Sumber semangat dan senantiasa memberikan do'a dan

restunya dalam mencapai harapan di masa depan.



## KATA PENGANTAR



*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

Syukur alhamdulillah penulis hanturkan kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Ayahanda H. Choiril Anam dan Ibunda Farida tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
2. Prof. DR. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
3. Bapak Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Abdussakir, M.Pd selaku ketua jurusan Matematika Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

5. Bapak Abdul Aziz, M.Si dan Bapak A. Nasichuddin, M.Ag selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
6. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Kakak dan adikku, Nadyana Rizqi dan Faiza Fitria yang selalu memberikan semangat kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Sahabat-sahabatku Room's " 35 " MSAA (faiz, Ifa, Manar, Mega, Puji, Rosy, Linda), Sahabat - sahabatku senasib seperjuangan Matematika 2005 ( khususnya Silvy, Lilis, Wiwit, Sita, Nilna, Istiq, Donny, Navi') terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
9. Shodiq Alimin, terima kasih buat segenap perhatian, semangat, kesabaran dan do'anya.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikannya skripsi ini baik berupa materiil maupun moriil.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, Oktober 2009

Penulis,

## DAFTAR ISI

**HALAMAN JUDUL**

**HALAMAN PENGAJUAN**

**HALAMAN PERSETUJUAN**

**HALAMAN PENGESAHAN**

**HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

**MOTTO**

**HALAMAN PERSEMBAHAN**

**KATA PENGANTAR..... i**

**DAFTAR ISI..... iii**

**DAFTAR GAMBAR..... v**

**ABSTRAK ..... vi**

**BAB I PENDAHULUAN**

1.1 Latar Belakang ..... 1

1.2 Rumusan Masalah ..... 4

1.3 Tujuan Penelitian ..... 4

1.4 Manfaat Penelitian ..... 4

1.5 Batasan Masalah..... 5

1.6 Metode Penelitian..... 5

1.7 Sistematika Penulisan ..... 6

**BAB II KAJIAN TEORI**

2.1 Konsep Bilangan Riil .....	8
2.2 Fungsi.....	9
2.2.1 Jenis-jenis Fungsi.....	10
2.3 Deret Pangkat .....	12
2.4 Metode Numerik .....	14
2.4.1 Kesalahan ( <i>error</i> ).....	15
2.5 Aproksimasi <i>Padé</i> .....	17
2.6 Persamaan Diferensial.....	19
2.7 Persamaan Diferensial Nonlinier Orde Pertama dan Derajat Pertama. 21	
2.8 Tafsir Surat Alam Nasyrah.....	28

**BAB III PEMBAHASAN**

3.1 Penerapan Aproksimasi <i>Padé</i> untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Nonlinier .....	33
3.2 Aproksimasi <i>Padé</i> untuk menyelesaikan Persamaan Diferensial Nonlinier dalam Pandangan Islam .....	43

**BAB IV PENUTUP**

A. Kesimpulan .....	48
B. Saran.....	48

**DAFTAR PUSTAKA****LAMPIRAN**

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Himpunan Bilangan .....	8
Gambar 3.1 Perbandingan nilai $f(x)$ dengan nilai $R_{1,1}$ dan $R_{2,1}$ .....	39
Gambar 3.2 Nilai <i>error</i> perbandingan nilai $f(x)$ dengan nilai $R_{1,1}$ dan $R_{2,1}$ .....	39
Gambar 3.3 Perbandingan nilai $y$ dengan nilai $R_{1,1}$ dan $R_{2,1}$ .....	42
Gambar 3.4 Nilai <i>error</i> dari perbandingan nilai $y$ dengan nilai $R_{1,1}$ dan $R_{2,1}$ .....	42



## ABSTRAK

Rachmi, Amaliya. 2009. **Aproksimasi *Padé* Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Nonlinier**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si.  
(II) A. Nasichuddin, M.Ag.

**Kata Kunci:** Persamaan Diferensial Nonlinier, Aproksimasi *Padé*.

Persoalan matematika tidak semua dapat diselesaikan melalui metode eksak (biasa). Misalnya persamaan diferensial biasa, khususnya persamaan diferensial nonlinier, Sehingga perlu dilakukan perhitungan dengan suatu aproksimasi (hampiran) untuk mendekati nilai solusinya.

Persamaan diferensial nonlinier yang hampir tidak dapat atau sulit diselesaikan melalui metode eksak dapat dihampiri ke dalam bentuk fungsi rasional menggunakan aproksimasi *Padé*. Aproksimasi *Padé* adalah suatu fungsi rasional

$$R_{L,M}(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}$$

dimana  $P_L(x)$  dan  $Q_M(x)$  memenuhi persamaan

$$Q_M(x) \cdot f(x) - P_L(x) = O[x^{L+M+1}].$$

dan  $Q_M(x) \neq 0$ , sehingga fungsi rasional  $R_{L,M}(x)$  adalah aproksimasi *Padé* pada fungsi  $f(x)$ . Fungsi rasional  $R_{L,M}(x)$  yang merupakan aproksimasi *Padé* biasanya juga dituliskan dengan simbol  $(L/M)$ . Dimana  $O[x^{L+M+1}]$  merupakan fungsi sisa pemotongan untuk suku ke- $(L+M+1)$ .

Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier dengan metode aproksimasi *Padé* dengan cara sebagai berikut: (1) mengekspansi ke dalam deret pangkat sehingga menghasilkan fungsi polinomial, (2) Menghampiri fungsi polinomial hasil ekspansi tersebut dengan aproksimasi *Padé*, (3) Membandingkan hasil perhitungan aproksimasi *Padé* dengan metode lain untuk mengetahui besarnya nilai kesalahan (*error*) dari hampiran tersebut.

Solusi dari penghampiran persamaan diferensial nonlinier yang hampir tidak dapat atau sulit diselesaikan melalui metode eksak dengan menggunakan metode aproksimasi *Padé*, menghasilkan nilai hampiran yang mempunyai nilai kesalahan (*error*) yang cukup kecil jika dibandingkan dengan menggunakan metode lain dalam menghampiri suatu persamaan diferensial nonlinier tersebut.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### A. Latar Belakang

Matematika berfungsi sebagai bahasa ilmu dengan lingkup yang universal sebab dengan menggunakan matematika kita dapat melakukan abstraksi dari kenyataan-kenyataan yang sangat rumit menjadi suatu model sehingga dapat mempermudah untuk mengadakan klasifikasi dan kalkulasi (Roziana, 2008: 1). Sehingga dengan menggunakan bahasa matematika suatu persoalan dapat menjadi lebih sederhana untuk disajikan, dipahami, dianalisis, dan dipecahkan.

Tidak semua persoalan matematika dapat diselesaikan dengan metode eksak untuk mendapatkan solusinya. Misalnya persoalan akar-akar persamaan, sistem persamaan linear, pencocokan kurva, integrasi, dan persamaan diferensial biasa. Alternatif penyelesaiannya dengan mengembangkan suatu solusi numerik yang mendekati solusi eksak. Pendekatan ini berarti terdapat kesalahan (*error*) pada solusi numerik tersebut. Metode numerik adalah metode di mana masalah matematika diformulasikan lagi sedemikian agar dapat diselesaikan dengan operasi aritmatika.

Kebanyakan dari metode-metode numerik didasarkan pada penghampiran fungsi ke dalam bentuk polinomial. Hal itu karena polinomial merupakan bentuk yang paling mudah dipahami, mudah dihitung, dan hanya akan melibatkan pangkat-pangkat bilangan bulat sederhana (Munir, 2006: 18). Akan tetapi, selain diaproksimasi ke dalam bentuk polinomial, dapat juga diaproksimasi ke dalam

fungsi rasional menggunakan aproksimasi *Padé*. Aproksimasi oleh fungsi rasional dengan kriteria bahwa fungsi rasional berbentuk :

$$R_{L,M}(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_Lx^L}{b_0 + b_1x + \dots + b_Mx^M}$$

dengan suatu ekspansi deret pangkat yang sesuai untuk suku pertama  $L + M + 1$  dari ekspansi deret pangkat fungsi  $f(x)$  yang diinginkan. Menurut Baker (1981: 1), aproksimasi *Padé* adalah suatu fungsi rasional

$$R_{L,M}(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}$$

dimana  $P_L(x)$  dan  $Q_M(x)$  memenuhi persamaan

$$Q_M(x) \cdot f(x) - P_L(x) = O[x^{L+M+1}].$$

dan  $Q_M(x) \neq 0$ , sehingga fungsi rasional  $R_{L,M}(x)$  adalah aproksimasi *Padé* pada fungsi  $f(x)$ . Fungsi rasional  $R_{L,M}(x)$  yang merupakan aproksimasi *Padé* biasanya juga dituliskan dengan simbol  $(L/M)$ .

Penghampiran suatu persamaan diferensial menggunakan aproksimasi *Padé* sebagai salah satu metode untuk menyelesaikan suatu persoalan matematika yang tidak dapat diselesaikan dengan metode eksak. Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam al-Qur'an surat Alam Nasyrah ayat 5 dan 6 yaitu sebagai berikut:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5), Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)” (Q. S Alam Nasyroh 5-6).

Ayat di atas, Allah SWT menjelaskan bahwa sesungguhnya tidak ada satupun permasalahan yang tidak ada solusinya atau setiap masalah pasti ada jalan keluarnya, jika tidak dapat diselesaikan dengan satu cara, maka persoalan tersebut pasti bisa diselesaikan dengan cara yang lain. Maka manusia dianjurkan agar tidak berputus asa, optimis dan selalu berpikir positif dalam menghadapi segala bentuk persoalan.

Aproksimasi *Padé* dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier. Solusi yang diperoleh dengan menggunakan aproksimasi merupakan pendekatan (hampiran) dari nilai solusinya. Oleh karena itu, berdasarkan latar belakang tersebut penulis ingin mengangkat judul: **"Aproksimasi *Padé* Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Nonlinier"**.

## **B. Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan sebelumnya, maka menghasilkan rumusan masalah, yang menjadi pokok permasalahan dalam penelitian skripsi ini adalah, bagaimana penerapan aproksimasi *Padé* untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier.

## **C. Tujuan Penelitian**

Mengacu pada rumusan masalah yang dikaji sebelumnya, dari setiap penelitian yang dilakukan pasti memiliki suatu tujuan, Maka penelitian kali ini bertujuan untuk mengetahui penerapan aproksimasi *Padé* untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier.

#### D. Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian yang ingin dicapai dari pembahasan masalah ini, maka diharapkan secara umum dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

a. Manfaat bagi Penulis

Dapat memperdalam dan menambah wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji permasalahan tentang aproksimasi *Padé* untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier.

b. Manfaat bagi Pembaca

Sebagai bahan masukan dan bahan pemikiran untuk mengembangkan wawasan ilmu tentang aproksimasi *Padé* untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier.

#### E. Batasan Masalah

Untuk menghindari agar permasalahan tidak semakin meluas maka penulis membatasi pembahasan dalam penelitian ini yaitu :

1. Deret pangkat dalam bilangan real
2. Persamaan-persamaan yang dihipotesiskan adalah persamaan diferensial biasa nonlinier orde satu
3. Persamaan-persamaan yang dihipotesiskan adalah persamaan dalam bentuk polinomial
4. Dalam pembahasan penelitian ini yaitu langkah-langkah untuk menghampiri suatu persamaan diferensial nonlinier dengan aproksimasi *Padé*, bukan pada kecepatan penyelesaiannya ataupun mencari nilai numeriknya. Oleh karena

itu, cara menentukan aproksimasinya dikerjakan secara manual tanpa menggunakan program

5. Sebagai perbandingan hasil numeriknya, dipakai metode *Runge Kutte* (orde-4) untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang tidak diketahui solusi eksaknya.

#### **F. Metode Penelitian**

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah grand metode, yaitu *library research*, ialah karya ilmiah yang didasarkan pada literatur atau pustaka. Pembahasan dilakukan dengan mempelajari berbagai literatur seperti buku-buku cetak, *e-book*, karya tulis maupun literatur visual lainnya yang berkaitan dengan masalah yang akan dibahas.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian skripsi ini adalah sebagai berikut :

1. Mengumpulkan dan mencari bahan kajian dari literatur-literatur yang berhubungan dengan topik yang diteliti
2. Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut tentang konstruksi aproksimasi *Padé* dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier
3. Memberikan contoh penerapan aproksimasi *Padé* dalam menghampiri suatu persamaan diferensial nonlinier
4. Membandingkan metode aproksimasi *Padé* dengan metode lain dalam menghampiri suatu persamaan diferensial nonlinier
5. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

## G. Sistematika Pembahasan

Penelitian skripsi ini, penulis menggunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam sub-bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

### BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan penelitian, dan sistematika pembahasan

### BAB II KAJIAN PUSTAKA

Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji. Bab ini membahas tentang konsep bilangan riil, fungsi, deret pangkat, metode numerik, aproksimasi *Padé*, persamaan diferensial, persamaan diferensial Nonlinier orde pertama dan derajat pertama, tafsir surat alam nasyrah

### BAB III PEMBAHASAN

Dalam bab ini dipaparkan hasil-hasil kajian dan pembahasan tentang penerapan aproksimasi *Padé* untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier, aproksimasi *Padé* untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier dalam pandangan Islam

### BAB IV PENUTUP

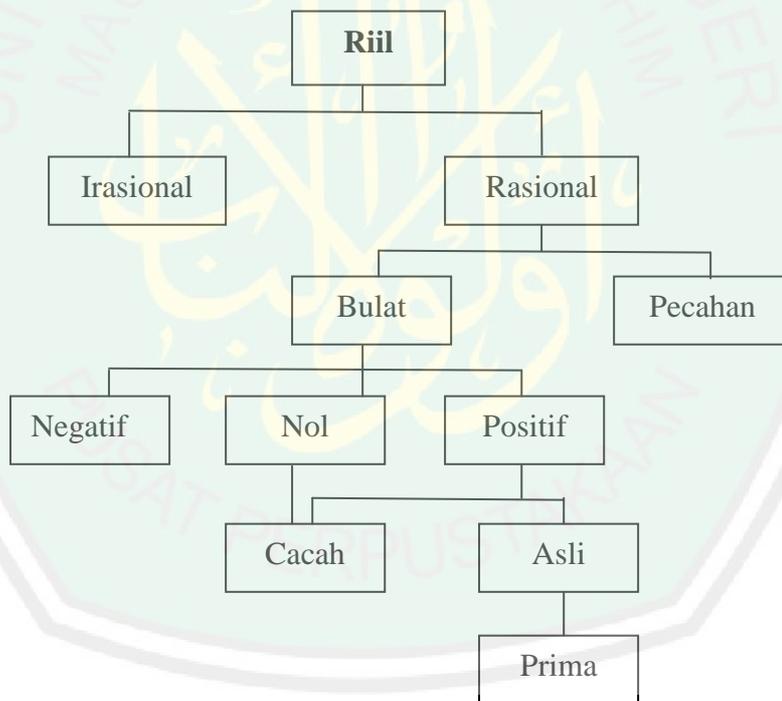
Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penulisan dan diajukan beberapa saran.

## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Konsep Bilangan Riil

Bagian paling mendasar dalam matematika adalah konsep *himpunan* atau *kumpulan obyek*, khususnya tentang *himpunan bilangan*, yang mendasari pekerjaan kuantitatif dalam ilmu pengetahuan dan teknik. Berikut ini adalah bagan himpunan bilangan:



*Gambar 2.1 Himpunan Bilangan*

$P$  = Himpunan bilangan prima =  $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ .

Bilangan prima adalah bilangan asli yang besarnya tidak sama dengan satu dan hanya habis dibagi oleh dirinya sendiri.

$N$  = Himpunan bilangan asli atau bilangan bulat positif =  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .

Bilangan asli adalah semua bilangan bulat positif, tidak termasuk nol.

$C$  = Himpunan bilangan cacah =  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Bilangan cacah adalah semua bilangan bulat positif dan nol.

$Z$  = Himpunan bilangan bulat =  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

$Q$  = Himpunan bilangan rasional =  $\{\frac{a}{b} \mid b \in Z, b \neq 0\}$ .

Bilangan rasional diperlukan untuk menyatakan hasil bagi antara dua bilangan, yang berupa bilangan bulat atau berupa pecahan.

Bilangan pecahan adalah hasil bagi antara dua bilangan yang hasilnya pecahan dengan desimal terbatas atau desimal berulang.

Himpunan bilangan rasional merupakan perluasan himpunan bilangan bulat, bilangan bulat adalah bilangan rasional dengan pembagi

1. Contoh bilangan rasional :  $2/3$ ,  $-10/7$  dan sebagainya.

$I_r$  = Himpunan bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan sebagai  $\frac{a}{b}$  dengan  $a, b \in Z$  dan  $b \neq 0$ .

Contoh bilangan irasional:  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , dan  $\pi$ .

$R$  = Himpunan bilangan riil.

Himpunan bilangan rasional atau irasional dinamakan himpunan bilangan riil.

## 2.2 Fungsi

*Definisi Fungsi* (Siang, 2002 : 375)

Suatu fungsi  $f$  dari himpunan  $X$  ke himpunan  $Y$  ( simbol  $f : X \rightarrow Y$  ) adalah suatu relasi dari  $X$  ke  $Y$  dengan syarat bahwa setiap  $x \in X$  mempunyai kawan yang tunggal di  $Y$ .

$X$  disebut daerah asal (*domain*)  $f$  dan  $Y$  disebut kodomain  $f$ . Kawan dari  $x \in X$  dinotasikan dengan  $f(x)$  dan dibaca “ harga fungsi  $f$  di  $X$  ”. Himpunan semua harga fungsi  $f$  disebut daerah hasil (*range*)  $f$ .

Range  $f = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ untuk semua } x \in X\}$

Jadi, agar suatu relasi  $f$  dari  $X$  dan  $Y$  menjadi fungsi, maka harus dipenuhi :

1. Setiap  $x \in X$  mempunyai kawan di  $Y$  (disebut  $f(x)$ ), dan
2.  $f(x)$  tunggal.

### 2.2.1 Jenis – Jenis Fungsi

Fungsi dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis berdasarkan operasinya yaitu fungsi aljabar dan non aljabar:

#### a. Fungsi Aljabar

*Definisi Fungsi Aljabar* (Harahap, 1998: 90)

Fungsi aljabar adalah fungsi yang menggunakan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan, penarikan akar dan sebagainya.

Fungsi aljabar meliputi:

1. Fungsi Rasional

*Definisi Fungsi Rasional* (Albari, 2001: 26)

Jika  $P(x)$  dan  $Q(x)$  adalah fungsi polinomial, maka hasil bagi dua fungsi polinomial tersebut disebut sebagai fungsi rasional, yang dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) \neq 0 \text{ dan } f(x) \in R, \forall x.$$

Contoh :

$$a) f(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad x \neq -1$$

$$b) g(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+4}, \quad x \neq 2$$

## 2. Fungsi Irasional

*Definisi Fungsi Irasional* (Albari, 2001: 25)

Fungsi Irasional adalah akar dari fungsi polinom.

Bentuk umumnya :

$$y = \sqrt[m]{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}, \quad m, n \in R.$$

Contoh:

$$y = \sqrt{3\pi^2 + 2}$$

## 3. Fungsi Polinomial

*Definisi Fungsi Polinomial* (Dumary, 1999: 59)

Fungsi Polinomial adalah fungsi yang mengandung banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya.

Bentuk umum persamaan polinomial orde  $n$  adalah :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

$$a_n \neq 0; a_n \in R \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots \text{ dan } n = 1, 2, 3, \dots$$

atau dapat ditulis sabagai  $f_n(x) = y$ .

Pangkat tertinggi pada variabel suatu fungsi polinomial merupakan orde polinomnya, sekaligus juga merupakan derajat persamaan dari fungsi tersebut.

Contoh :

a)  $f(x) = 3x + 1$  , adalah fungsi polinomial berderajat satu dengan  $a_0 = 1$  dan  $a_1 = 3$ .

b)  $f(x) = 10x^4 - 7x^2 + 5x - 4$  , adalah fungsi polinomial berderajat empat, dengan  $a_0 = -4, a_1 = 5, a_2 = -7, a_3 = 0$  dan  $a_4 = 10$ .

### b. Fungsi Non Aljabar ( Transenden )

Fungsi Transenden adalah fungsi yang bukan fungsi aljabar, fungsi transenden meliputi: Fungsi Eksponen, Fungsi Logaritma, Fungsi Trigonometri, Fungsi Hiperbolik.

### 2.3 Deret pangkat

*Definisi Deret Pangkat* (Soemantri, 1994: 170)

Deret pangkat adalah deret tak hingga yang berbentuk  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

dengan  $a_n$  dan  $x_0$  konstanta riil dan  $n = 0, 1, 2, \dots$

Untuk  $x_0 = 0$  deret di atas menjadi  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , dimana  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 +$

$a_1x + a_2x^2 + \dots$ .

*Teorema Deret Pangkat* (Susila, 2003: 49)

Misalkan  $S(x)$  adalah jumlah deret pangkat pada suatu selang  $I$ , yaitu :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Maka, apabila  $x$  ada didalam  $I$ , berlaku :

$$(i) S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$$

$$(ii) \int_0^t S(x) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1}$$

Bukti :

(i) Misalkan  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  maka,

$$\begin{aligned} S'(x) &= \frac{ds}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n \\ &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \end{aligned}$$

(ii) Misalkan  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  maka integralnya ,

$$\begin{aligned} \int_0^t S(x) dx &= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t a_n x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1} - 0 \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} \\ &= a_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 + \frac{1}{3} a_2 t^3 + \frac{1}{4} a_3 t^4 + \dots \end{aligned}$$

## 2.4 Metode Numerik

*Definisi Metode Numerik* (Triatmodjo, 1992: 1)

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitung (*arithmetic*).

Dalam metode numerik ini dilakukan operasi hitungan dalam jumlah yang sangat banyak dan berulang-ulang. Sasaran akhir dari analisis numerik yang dilakukan dalam metode numerik adalah diperolehnya metode yang terbaik untuk memperoleh jawaban yang berguna dari persoalan matematika dan untuk menarik informasi yang berguna dari berbagai jawaban yang dapat diperoleh yang tidak dinyatakan dalam bentuk aljabar atau transenden, persamaan diferensial biasa atau parsial, persamaan integral, atau kumpulan dari persamaan tersebut.

Perumusan tersebut mungkin menyatakan keadaan sebenarnya yang dimaksudkan, walaupun pada umumnya tidak demikian. Jawaban analitik, bila dapat diperoleh, mungkin merupakan pernyataan yang tepat, tetapi mungkin bentuknya kurang memuaskan, karena tidak dapat dinyatakan dalam bilangan. Bila demikian halnya, perlu diusahakan suatu metode numerik untuk dapat menginterpretasikan informasi tersebut.

Dalam keadaan demikian, ada beberapa cara pendekatan:

- a. pendekatan atau penyederhanaan perumusan persoalan sehingga dapat dipecahkan secara eksak,
- b. mengusahakan diperolehnya pendekatan dari persoalan yang perumusannya eksak, dan

c. gabungan dari kedua cara pemecahan di atas.

Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawaban yang eksak (tepat), tetapi mengusahakan perumusan metode yang menghasilkan jawaban pendekatan yang berbeda dari jawaban eksaknya sebesar suatu nilai yang dapat diterima berdasarkan pertimbangan praktis, tetapi cukup dapat memberikan penghayatan pada persoalan yang dihadapi (Djojodihardjo, 2000: 2).

#### 2.4.1 Kesalahan (*error*)

Penyelesaian secara numerik dari suatu persamaan matematika hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (yang benar) dari penyelesaian analitis, berarti dalam penyelesaian numerik tersebut terdapat kesalahan terhadap nilai eksak. Ada tiga macam kesalahan yaitu :

- a. *Kesalahan bawaan* adalah kesalahan dari nilai data. Kesalahan tersebut biasa terjadi karena kekeliruan dalam menyalin data, salah membaca skala atau kesalahan karena kurangnya pengertian mengenai hukum-hukum fisik dari data yang diukur.
- b. *Kesalahan pembulatan* terjadi karena tidak diperhitungkannya beberapa angka terakhir dari suatu bilangan. Kesalahan ini terjadi apabila bilangan perkiraan digunakan untuk menggantikan bilangan eksak, suatu bilangan dibulatkan pada posisi ke  $n$  dengan membuat semua angka di sebelah kanan dari posisi tersebut nol. Sedang angka pada posisi ke  $n$  tersebut tidak berubah atau

dinaikkan satu digit yang tergantung apakah nilai tersebut lebih kecil atau lebih besar dari setengah dari angka posisi ke  $n$ .

Contoh :

3,1415926 dapat bulatkan menjadi 3,14

- c. *Kesalahan pemotongan* terjadi karena tidak dilakukannya hitungan sesuai dengan prosedur matematik yang benar. Sebagai contoh suatu proses tak terhingga diganti dengan proses hingga. Di dalam matematika, suatu fungsi dapat dipresentasikan dalam bentuk deret tak terhingga, misalkan :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Nilai eksak dari  $e^x$  diperoleh apabila semua suku dari deret tersebut diperhitungkan (Triatmodjo, 1992: 2).

## 2.5 Aproksimasi Padé

*Definisi Aproksimasi Padé* ( Baker, 1981: 1)

Diketahui suatu fungsi  $f(x)$  dan suatu fungsi rasional,

Misalkan  $f(x) =$  fungsi polinomial dan

$R(x) =$  fungsi rasional, sebagai

$$R_{L,M}(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Mx^M} \quad (2.5)$$

dengan  $L$  dan  $M$  masing-masing merupakan pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebut pada fungsi rasional, dimana  $P_L(x)$  dan  $Q_M(x)$  memenuhi persamaan

$$Q_M(x) \cdot f(x) - P_L(x) = O[x^{L+M+1}], \text{ dan } Q_M(x) \neq 0. \quad (2.6)$$

Dari persamaan (2.6) sehingga diperoleh,

$$f(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} + O[x^{L+M+1}]$$

$$f(x) \approx \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} = R_{L,M}(x)$$

maka fungsi rasional  $R_{L,M}(x)$  merupakan aproksimasi *Padé* pada fungsi  $f(x)$ .

Fungsi  $f(x)$  yang dapat diekspansi ke dalam bentuk deret pangkat

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ , sehingga dapat dinotasikan dalam bentuk barikut

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2.7)$$

Persamaan (2.7) yang merupakan suatu bentuk fungsi polinom dengan  $c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n$  merupakan konstanta dan  $n$  merupakan bilangan bulat positif yang dimulai dari nol sampai tak hingga. Persamaan (2.7) dapat dinyatakan kembali sebagai suatu fungsi polinom berderajat  $n$  dan didefinisikan sebagai

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n$$

Hampiran fungsi rasional seperti persamaan (2.5) dan suku sisa hampirannya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_M x^M} + O[x^{L+M+1}]$$

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_M x^M} + O[x^{L+M+1}]$$

dimana  $O[x^{L+M+1}]$  merupakan sisa pemotongan untuk suku ke- $(L+M+1)$ .

dengan melakukan operasi perkalian silang maka diperoleh bahwa

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Mx^M)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n) \\ = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L) + O[x^{L+M+1}]$$

$$(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Mx^M)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n) \\ - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_Lx^L) = O[x^{L+M+1}]$$

atau

$$Q_M(x) \cdot f(x) - P_L(x) = O[x^{L+M+1}],$$

Untuk memenuhi syarat yang berlaku pada fungsi rasional bahwa  $Q_M(x) \neq 0$ .

(Sa'adah, 2008:42)

Maka langkah-langkah dalam mengkonstruksi aproksimasi *Padé* yang sesuai dengan deret pangkat (*power series*) adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan suatu fungsi  $f(x)$  ke dalam ekspansi deret pangkat
2. Mengasumsikan suatu fungsi rasional  $R_{L,M}(x)$  yang didefinisikan sebagai:

$$R_{L,M}(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)}$$

dengan  $Q_M(x) \neq 0$  untuk menghampiri fungsi  $f(x)$  sehingga berlaku

$$Q_M(x) \cdot f(x) - P_L(x) = O[x^{L+M+1}]$$

dimana  $O[x^{L+M+1}]$  merupakan sisa pemotongan untuk suku ke- $(L+M+1)$

3. Membentuk suatu sistem persamaan koefisien untuk masing-masing konstanta pada variabel  $c^0, c^1, c^2, \dots$
4. Menentukan koefisien-koefisien pembilang dan penyebut fungsi rasional  $R_{L,M}(x)$  dengan menyelesaikan sistem persamaan koefisien yang diperoleh.

(Sa'adah, 2008:42)

## 2.6 Persamaan Diferensial

*Definisi Persamaan Diferensial* (Pamuntjak, 1990 :1)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas.

Orde dari persamaan diferensial adalah derajat atau pangkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam suatu persamaan.

Dilihat dari peubah bebasnya, persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi dua macam yaitu diferensial biasa dan parsial.

### 1. Persamaan Diferensial Biasa

*Definisi Persamaan Diferensial Biasa* (Triatmodjo, 2002: 165)

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan yang mengandung turunan fungsi dimana persamaan tersebut hanya mengandung satu variabel bebas.

Contoh :

$$a) x \frac{dy}{dx} + y = 3 \text{ atau dapat ditulis } xy' + y = 3$$

$$b) \frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \text{ atau dapat ditulis } y'' + 3y' + 2y = 0$$

### 2. Persamaan Diferensial Parsial

*Definisi Persamaan Diferensial Parsial* (Triatmodjo, 2002: 165)

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang mengandung turunan fungsi dimana persamaan tersebut mengandung lebih dari satu variabel bebas.

Contoh:

$$a) x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

$$b) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Sedangkan persamaan diferensial dilihat dari bentuk fungsi atau pangkatnya juga dibedakan menjadi dua yaitu, persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial non linier.

#### 1. Persamaan Diferensial Linier

*Definisi Persamaan Diferensial Linier* (Kusumah, 1989: 4)

Persamaan Diferensial Linier adalah persamaan diferensial biasa linier orde- $n$  dengan variabel terikat  $y$  dan variabel bebas  $x$  yaitu persamaan yang bisa dinyatakan sebagai

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x)$$

Dari persamaan di atas persamaan diferensial biasa orde  $n$ , dengan  $a_0, a_1, \dots, a_n$  adalah konstanta dan dikatakan linier jika mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

- variabel-variabel terikat dan turunannya paling tinggi berpangkat satu, dan
- tidak mengandung bentuk perkalian antara sebuah variabel terikat dengan variabel terikat dengan sebuah turunan.

Contoh:

$$a) x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 \text{ atau dapat ditulis } xy' - 2y = x^3$$

$$b) \frac{dy}{dx} + 3xy = \sin x \text{ atau dapat ditulis } y' + 3xy = \sin x$$

## 2. Persamaan Diferensial Nonlinier

*Definisi Persamaan Diferensial Nonlinier* (Ross, 1984: 5)

Persamaan Diferensial Nonlinier adalah persamaan diferensial yang memuat variabel tak bebas dan turunannya yang berderajat lebih dari satu, atau perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya.

Contoh:

$$a) x^2 + 5y \frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0 \quad \text{atau dapat ditulis} \quad x^2 + 5yy' + 6y^2 = 0$$

persamaan tersebut nonlinier karena terdapat  $yy'$  dan  $y^2$

$$b) y \frac{dy}{dx} - 2y^2 = x^3 \quad \text{atau dapat ditulis} \quad yy' - 2y^2 = x^3$$

persamaan tersebut nonlinier karena terdapat  $yy'$

### 2.7 Persamaan Diferensial Nonlinier dari Orde Pertama dan Derajat

#### Pertama

Sebuah solusi atau penyelesaian dari persamaan diferensial

$$y^n = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.7)$$

pada internal  $\alpha < x < \beta$  adalah sebuah fungsi  $y$  sedemikian sehingga  $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$  ada dan memenuhi

$$y^n(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

untuk setiap  $x$  dalam  $\alpha < x < \beta$ . Diasumsikan bahwa fungsi  $f$  untuk persamaan (2.7) adalah fungsi yang bernilai riil dan akan mendapatkan solusi-solusi yang bernilai riil  $y = y(x)$ . (Waluyo, 2006: 5)

Pada umumnya persamaan diferensial dapat dipecahkan beberapa saja dari bermacam-macam persamaan diferensial dan dibatasi pada persamaan diferensial linier, ada beberapa jenis yang penting dari persamaan diferensial nonlinier yang dapat dipecahkan yaitu dari orde pertama dan derajat pertama. Secara umum, persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

atau

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

di mana tidak ada batasan pada pangkat  $x$  dan  $y$ , dan merupakan suatu persamaan diferensial nonlinier orde pertama dan derajat pertama.

**a) Persamaan Diferensial Nonlinier dengan Variabel Dapat Dipisah**

jika persamaan  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$$

di mana dengan menggabungkan  $dx$  dengan  $f_1(x)$  adalah hanya suatu fungsi dari  $x$  dan dengan menggabungkan  $dy$  dengan suatu fungsi  $f_2(y)$  adalah hanya suatu fungsi dari  $y$ , sehingga mempunyai persoalan variabel yang dapat dipisahkan. Untuk mendapatkan penyelesaian umum cukup dengan mengintegalkan persamaan tersebut.

Contoh:

Selesaikan persamaan

$$3y^2 dy - x dx = 0$$

Jika  $y(0) = 1$  tentukan  $y(0,5)$

Jawab

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$3y^2 dy = x dx$$

Kemudian diintegrasikan

$$\int 3y^2 dy = \int x dx$$

atau

$$y^3 + c_1 = \frac{1}{2}x^2 + c_2$$

dimana  $c = c_2 - c_1$ ,

jadi, penyelesaian umumnya dapat ditulis sebagai

$$y^3 = \frac{1}{2}x^2 + c$$

Jika  $y(0) = 1$  maka  $c = 1$ , jika  $y(0,5)$  penyelesaian khususnya adalah

$$y^3 = \frac{1}{2}(0,5)^2 + 1$$

$$y = 0.375 \text{ (nilai analitiknya)}$$

### b) Persamaan diferensial nonlinier dengan koefisien homogen

Jika  $f(x, y)$  adalah suatu fungsi homogen dari tingkat  $n$ , maka:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Penyelesaiannya adalah dengan transformasi

$$y = vx, \quad dy = v dx + x dv$$

yang akan mengubah setiap persamaan homogeny ke bentuk:

$$M(x, y)dx + N(x, v)dv = 0$$

yang variabel-variabelnya dapat dipisahkan, yang dapat dipecahkan dengan integral, dengan  $v$  diganti dengan  $y/x$  untuk mendapatkan kembali variabel-variabel asalnya.

Contoh:

Selesaikan persamaan

$$x^2 + 2xy \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

Jika  $y(1) = 2$  tentukan  $y(2)$

Jawab

Persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

dengan mengamatinya kita melihat bahwa persamaan ini mempunyai suatu fungsi homogen derajat 2, yang dinyatakan berikut ini:

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)dx + 2xydy$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2)dx + 2\lambda x \lambda y dy$$

$$= \lambda^2 \{ (x^2 - y^2)dx + 2xydy \}$$

$$= \lambda^2 f(x, y)$$

Dengan transformasi

$$y = vx, \quad dy = vdx + xdv$$

Sehingga persamaan menjadi

$$(x^2 - v^2 x^2)dx + 2x(vx)(vdx + xdv) = 0$$

atau

$$x^2\{(1 - v^2)dx + (2v^2 dx + 2vx dv)\} = 0$$

$(1 + v^2)dx + 2vx dv = 0$ , yang merupakan variabel dapat dipisahkan

$$\frac{dx}{x} + \frac{2v dv}{1 + v^2} = 0$$

Misal  $1 + v^2 = u$

$$2v dv = du$$

Sehingga

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{du}{u} = \int 0$$

$$\ln x + \ln u = \ln c$$

$$x \cdot u = c$$

$$x(1 + v^2) = c$$

$$x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = c$$

Jika  $y(1) = 2$  maka  $c = 5$ , jika  $y(2)$  penyelesaian khususnya adalah

$$2\left(1 + \frac{y^2}{2^2}\right) = 5$$

$$2 + \frac{1}{2}y^2 = 5$$

$$y = 2.44948 \text{ (nilai analitiknya)}$$

### c) Persamaan diferensial nonlinier eksak

Persamaan  $M(x, y)dx + N(x, v)dv = 0$  disebut eksak jika

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Penyelesaiannya yaitu:

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + g(y)$$

atau

$$f(x, y) = \int N(x, y) dy + g(x)$$

Dengan  $g(y)$  dan  $g(x)$  diperoleh dari:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y), \text{ untuk memperoleh } g(y)$$

dan,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y), \text{ untuk memperoleh } g(x)$$

Contoh:

Selesaikan persamaan

$$2xy \, dx + x^2 \, dy = 0$$

Jika  $y(0) = 1$  tentukan  $y(2)$

Jawab

$$M(x, y) = 2xy \qquad N(x, y) = x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

karena  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  maka persamaan tersebut adalah eksak.

Penyelesaiannya yaitu:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int M(x, y) dx + f(y) \\ &= \int 2xy \, dx + f(y) \end{aligned}$$

$$= 2 \int xy + f(y)$$

$$= x^2y + f(y)$$

dengan  $f(x)$  diperoleh dari

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) = x^2$$

$$f'(y) = 0$$

$$f(y) = \int f'(y)dy = 0 + c.$$

maka,

$$f(x, y) = x^2y + 0 + c = 0$$

atau

$$x^2y = c, \text{ yang merupakan penyelesaian umumnya.}$$

Jika  $y = 1$  dan  $x = 0$  maka,  $c = 1$

Jadi,  $x^2y = 1$ , merupakan penyelesaian khususnya.

Jika  $x = 2$  maka

$$x^2y = 1$$

$$4y = 1$$

$$y = \frac{1}{4}, \text{ (nilai analitiknya)}$$

## 2.8 Tafsir Surat Alam Nasyrah

Dalam pembahasan kali ini akan dibahas tafsir surat Alam Nasyrah yang berarti “ bukankah kami telah melupakan ”, diambil dari perkataan yang terdapat pada ayat pertama. Sebutan lain adalah surat Al- Insyirah, kata benda

dari Nasyrāh yang artinya “ kelapangan “. dan termasuk dalam surat makkiyah. Surat ini terdiri atas delapan ayat yang akan lebih difokuskan dalam pembahasan kali ini pada ayat 5 dan 6, sebagai berikut.

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

*Artinya: “Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5), Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)”. (Q.S. Alam Nasyrāh : 5-6)*

Menurut ustadz Muhammad Abduh dalam tafsirnya menyebutkan bahwa ayat ini diawali dengan huruf *fa* (*fa-inna ma'al 'usri yusrān*) untuk menunjukkan adanya kaitan antara kedua keadaan tersebut, yaitu antara timbulnya kesulitan dan datangnya kemudahan. Digunakan kata *al* sebelum kata *'usri* memberikan makna umum yaitu segala macam kesulitan yang biasa dijumpai dalam kehidupan.

Kata *al-'usr* terulang di dalam Al-Qur'an sebanyak 4 kali, sedang dalam berbagai bentuknya terulang sebanyak 12 kali. *Kata ini digunakan untuk sesuatu yang sangat keras, sulit atau berat.* Kata *yusr* terulang sebanyak 6 kali, tiga diantaranya bergandengan secara langsung dengan kata *'usr*, sedang kata *yusr* dalam berbagai bentuknya terulang sebanyak 44 kali. Dalam kamus-kamus bahasa, kata tersebut digunakan untuk menggambarkan sesuatu yang *mudah, lapang, atau banyak (seperti harta)*.(Shihab, 2003: 361)

Muhammad Quraish Shihab menukilkan pendapat ulama lain yang menyoroti bentuk kata *'usr* dan *yusr* yang ternyata berbeda. Kata *'usr* pada dua ayat 5 dan 6 diawali dengan *al* sehingga menjadi *definit*, seperti perkataan dalam

bahasa Inggris yang diawali *the*. Sementara itu, perkataan *yusr* tidak definit. Perhatikan kembali bunyi ayat 5 dan 6 sebagai berikut:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۖ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۗ

Dengan berdasarkan kaidah kebahasaan, mereka menyatakan bahwa dua ayat tadi bermakna, setiap satu kesulitan mengandung dua kemudahan, Ini merupakan pemaknaan yang lebih optimis lagi. Disebutkan dalam hadits yang diriwayatkan dari Nabi Muhammad SAW bahwasahnya beliau bersabda, “*Sekali-kali tidaklah satu kesulitan dapat mengalahkan dua kemudahan*”.

Ulama tafsir memahami arti *ma'a* dalam ayat diatas yang arti harfiahnya adalah *bersama* dipahami oleh sementara ulama dalam arti *sesudah*. Pakar tafsir az-Zamakhshari menjelaskan bahwa penggunaan kata *bersama* walaupun maksudnya *sesudah* adalah untuk menggambarkan betapa dekat dan singkatnya waktu antara kehadiran kemudahan, dengan kesulitan yang sedang dialami.

Jenis kesulitan apapun pasti dapat ditanggulangi, sepanjang orang yang menghadapi kesulitan tersebut memiliki jiwa yang kuat untuk mencari solusinya, menggunakan akal pikiran semaksimal mungkin, serta berdoa dan tawakal kepada Allah SWT.

Allah SWT dalam ayat 5 dan 6 bermaksud menjelaskan salah satu *sunnah-Nya* yang bersifat umum dan konsisten yaitu, setiap kesulitan pasti disertai atau disusul oleh kemudahan. Ini dibuktikan\_Nya antara lain dengan contoh konkret pada diri pribadi Nabi Muhammad SAW. Beliau datang sendiri, ditantang dan dianiaya, sampai-sampai beliau dan keluarganya diboikot oleh kaum musyrikin di

makkah, tidak boleh berjual beli atau menikah, tidak boleh berbicara dengan dengan beliau dan keluarganya selama setahun, disusul dengan setahun lagi sampai dengan tahun ketiga. Tetapi pada akhirnya tiba juga kelapangan dan jalan keluar yang selama ini mereka dambakan, karena ketabahan dan optimis sehingga berlakulah bagimu *sunnah* (ketetapan Allah) yaitu, “ apabila krisis atau kesulitan telah mencapai puncaknya maka pasti ia akan sirna dan disusul dengan kemudahan”.

Ayat ini mengajarkan bahwa setiap menghadapi berbagai kesulitan kita harus yakin bahwa akan ada penyelesaiannya, akan ada jalan keluarnya. Keyakinan ini merupakan energi yang sangat berharga untuk bisa menyelesaikan segala persoalan. Dari jiwa yang penuh optimisme akan lahir kecerdasan dan kearifan. Karenanya, Allah SWT menegaskan dengan kalimat yang berulang-ulang, “ sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan. Dan sesungguhnya bersama dengan kesulitan itu ada kemudahan.” (Amiruddin, 2004: 280)

Sekelompok ulama mengatakan pengulangan ini dimaksudkan agar kita benar-banar yakin bahwa saat menghadapi kesulitan sesungguhnya pada waktu yang bersamaan kita pasti akan bisa menemukan solusinya, asalkan kita memiliki jiwa yang kuat, berfikir keras, ikhtiar yang sungguh-sungguh maksimal, serta berdo'a kepada Allah SWT. Dan tidak boleh berputus asa karena berputus asa adalah karakternya orang-orang yang tidak bertuhan dan sesat, dan dijelaskan dalam surat Al-Hijr ayat 56 sebagai berikut.

قَالَ وَمَنْ يَقْنَطُ مِنْ رَحْمَةِ رَبِّهِ إِلَّا الضَّالُّونَ ﴿٥٦﴾

Artinya : Ibrahim berkata: "Tidak ada orang yang berputus asa dari rahmat Tuhan-nya, kecuali orang-orang yang sesat". ( Q. S. Al-Hijr : 56)

Dan Allah SWT juga telah menyatakan hal itu secara jelas kepada umat Nabi Ya'qub a.s. dalam surat Yusuf ayat 87 sebagai berikut.

وَلَا تَأْيِسُوا مِنَ رَّوْحِ اللَّهِ إِنَّهُ لَا يَأْيِسُ مِنَ رَّوْحِ اللَّهِ إِلَّا الْكٰفِرُونَ ﴿٨٧﴾

Artinya : "Dan jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir". (Q.S. Yusuf: 87)

Setelah Allah SWT, menjelaskan bahwa dalam setiap kesulitan itu ada kemudahan, dilanjutkan dengan arahan dalam ayat berikutnya sebagai berikut.

فَإِذَا فَرَغْتَ فَانصَبْ ﴿٧﴾

Artinya : "Maka apabila kamu Telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain".(Q.S. Alam Nasyrah: 7)

Ayat ini menyuruh kita agar dinamis. Kita harus terus bergerak, kerja keras tanpa lelah, berfikir tanpa henti, jangan biarkan waktu yang kita miliki lewat dengan sia-sia, tanpa karya, tanpa aktivitas. Misalkan, ketika engkau telah selesai dari shalat dan berdzikir, maka segeralah untuk menyelesaikan pekerjaan duniamu. Ketika engkau telah selesai berjihad, maka lanjutkanlah dengan ibadah haji. Maksudnya bahwa setiap muslim hidup dengan penuh kesungguhan dan susah payah, tidak ada waktu yang sia-sia dan untuk bermain atau untuk bermalas-malasan dan melakukan kebatilan.(Al- jazairi, 2009: 967)

### BAB III

#### PEMBAHASAN

Persoalan-persoalan matematika yang dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial biasa, khususnya persamaan diferensial nonlinier tidak semua dapat diselesaikan melalui perhitungan eksak, sehingga perlu dilakukan perhitungan melalui hampiran atau aproksimasi untuk mendapatkan suatu nilai yang mendekati nilai eksaknya.

Berikut ini penyelesaian diferensial nonlinier yang sulit atau hampir tidak dapat diselesaikan melalui perhitungan eksak, diberikan dalam contoh berikut ini:

- Selesaian persamaan diferensial nonlinier

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 + x^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x \right) + 1 = 0 \quad (1)$$

dengan  $y(0) = 1$ .

Penyelesaian:

Menjadikan persamaan (1) ke dalam bentuk  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ ,

$$dy + \left( xy^2 + x^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x \right) + 1 \right) dx = 0$$

$$M(x, y) = 1 \qquad N(x, y) = xy^2 + x^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x \right) + 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = y^2 + 2xy \, dy + x + \frac{1}{2}x^2$$

karena  $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$  maka persamaan tersebut adalah tidak eksak.

Salah satu metode untuk menghampiri suatu Persamaan diferensial nonlinier yang sulit jika diselesaikan dengan perhitungan eksak yaitu dengan

aproksimasi *Padé*. Berikut ini akan diberikan pembahasan mengenai penerapan aproksimasi *Padé* untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier.

### 3.1 Penerapan Aproksimasi *Padé* Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Nonlinier

Berikut ini akan diberikan contoh penerapan aproksimasi *Padé* untuk menghampiri persamaan diferensial nonlinier yang diekspansi ke dalam deret pangkat. Contoh yang diambil merupakan persamaan diferensial yang sulit atau hampir tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan eksak..

- Persamaan diferensial nonlinier

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 + x^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x \right) + 1 = 0 \quad (1)$$

dengan  $y(0) = 1$ .

Penyelesaian:

#### *Langkah 1*

Ekspansi dengan menggunakan deret pangkat:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad (3)$$

Persamaan (2) dan (3) disubstitusi kepersamaan (1) menjadi,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{F=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 x^{2n} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 x^{2n+1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 = 0.$$

Selanjutnya disederhanakan menjadi,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} [n c_n x^{n-1} + c_n^2 x^{2n+1}] + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & c_0^2 x + (c_1 + c_1^2 x^3) + (2c_2 x + c_2^2 x^5) + (3c_3 x^2 + c_3^2 x^7) \\ & + (4c_4 x^3 + c_4^2 x^9) + (5c_5 x^4 + c_5^2 x^{11}) + \dots + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & c_1 + (2c_2 + c_0^2)x + (3c_3)x^2 + (4c_4 + c_1^2)x^3 + \dots + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (c_1 + 1) + (2c_2 + c_0^2)x + \left(3c_3 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(4c_4 + c_1^2 + \frac{1}{6}\right)x^3 + \dots = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Dengan membentuk sistem persamaan koefisien diperoleh bahwa:

- 1)  $c_1 + 1 = 0$  atau  $c_1 = -1$
- 2)  $2c_2 + c_0^2 = 0$  atau  $c_2 = -\frac{c_0^2}{2}$
- 3)  $3c_3 + \frac{1}{2} = 0$  atau  $c_3 = -\frac{1}{6}$
- 4)  $4c_4 + c_1^2 + \frac{1}{6} = 0$  atau  $c_4 = -\frac{7}{24}$

Jika  $y(0) = 1$  maka  $c_0 = 1$ , sehingga

$$f(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{24}x^4 \dots \quad (5).$$

**Langkah 2**

Menghampiri persamaan (5) dengan aproksimasi *Padé*,

a. Untuk  $L = M = 1$

Persamaan (5) dapat dinyatakan sebagai :

$$f(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} + O[x^{L+M+1}]$$

$$1 - x - \frac{1}{2}x^2 + O_1[x^3] = \frac{a_0 + a_1x}{b_0 + b_1x} + O_2[x^3]$$

$$1 - x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{a_0 + a_1x}{b_0 + b_1x} + O[x^3]$$

dengan  $O[x^3] = O_2[x^3] - O_1[x^3]$ ,

$$\Leftrightarrow (b_0 + b_1x) \left(1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) = (a_0 + a_1x) + O[x^3]$$

$$\Leftrightarrow (b_0 + b_1x) \left(1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) - (a_0 + a_1x) = O[x^3]$$

$$\Leftrightarrow (b_0 - a_0) + (-b_0 + b_1 - a_1)x + \left(-\frac{1}{2}b_0 - b_1\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2}b_1\right)x^3 + \dots = O[x^3].$$

Dengan mengambil tiga suku pertama sebagai aproksimasi, maka diperoleh:

- 1)  $b_0 - a_0 = 0$  atau  $a_0 = b_0$
- 2)  $-b_0 + b_1 - a_1 = 0$  atau  $a_1 = -\frac{3}{2}b_0$
- 3)  $-\frac{1}{2}b_0 - b_1 = 0$  atau  $b_1 = -\frac{1}{2}b_0$

Selanjutnya akan diperoleh,

$$R_{1,1} = \frac{b_0 - \frac{3}{2}b_0x}{b_0 - \frac{1}{2}b_0x}, \quad \text{diambil } b_0 = 1$$

$$= \frac{1 - \frac{3}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x}$$

jadi, aproksimasi *Padé* [1/1] untuk persamaan diatas adalah

$$f(x) \approx R_{1,1} = \frac{1 - \frac{3}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x}.$$

b. Untuk  $L = 2$  dan  $M = 1$

Persamaan (5) dapat dinyatakan sebagai :

$$f(x) = \frac{P_L(x)}{Q_M(x)} + O[x^{L+M+1}]$$

$$1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + O_1[x^4] = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x} + O_2[x^4]$$

$$1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{b_0 + b_1x} + O[x^4]$$

dengan  $O[x^4] = O_2[x^4] - O_1[x^4]$ ,

$$\Leftrightarrow (b_0 + b_1x) \left( 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) = (a_0 + a_1x + a_2x^2) + O[x^4]$$

$$\Leftrightarrow (b_0 + b_1x) \left( 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) - (a_0 + a_1x + a_2x^2) = O[x^4]$$

$$\Leftrightarrow (b_0 - a_0) + (-b_0 + b_1 - a_1)x + \left( -\frac{1}{2}b_0 - b_1 - a_2 \right) x^2$$

$$+ \left( -\frac{1}{6}b_0 - \frac{1}{2}b_1 \right) x^3$$

$$+ \left( -\frac{1}{6}b_1 \right) x^4 + \dots = O[x^4].$$

Dengan mengambil empat suku pertama sebagai aproksimasi, maka diperoleh:

- 1)  $b_0 - a_0 = 0$       atau  $a_0 = b_0$
- 2)  $-b_0 + b_1 - a_1 = 0$       atau  $a_1 = -\frac{4}{3}b_0$
- 3)  $-\frac{1}{2}b_0 - b_1 - a_2 = 0$       atau  $a_2 = -\frac{1}{6}b_0$
- 4)  $-\frac{1}{6}b_0 - \frac{1}{2}b_1 = 0$       atau  $b_1 = -\frac{1}{3}b_0$

Selanjutnya akan diperoleh,

$$R_{2,1} = \frac{b_0 - \frac{4}{3}b_0x - \frac{1}{6}b_0x^2}{b_0 - \frac{1}{3}b_0x}, \quad \text{diambil } b_0 = 1$$

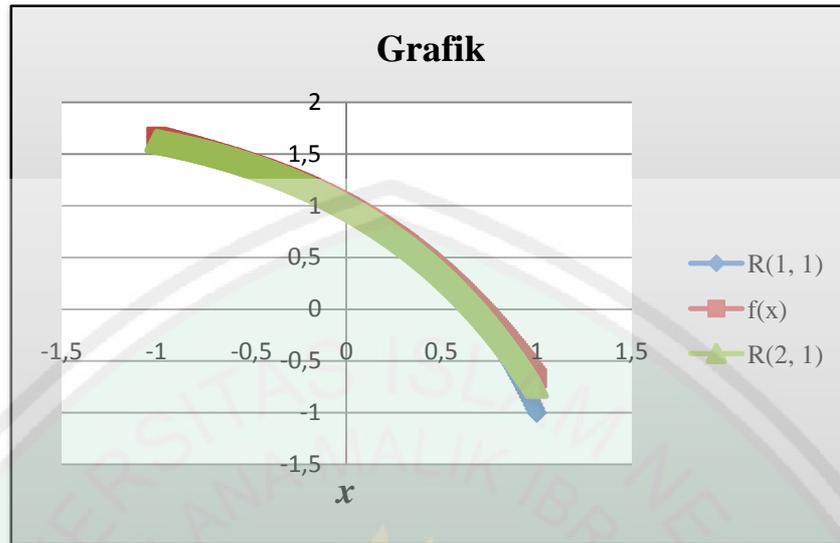
$$= \frac{1 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{6}x^2}{1 - \frac{1}{3}x}$$

jadi, aproksimasi *Padé* [2/1] untuk persamaan diatas adalah

$$f(x) \approx R_{2,1} = \frac{1 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{6}x^2}{1 - \frac{1}{3}x}.$$

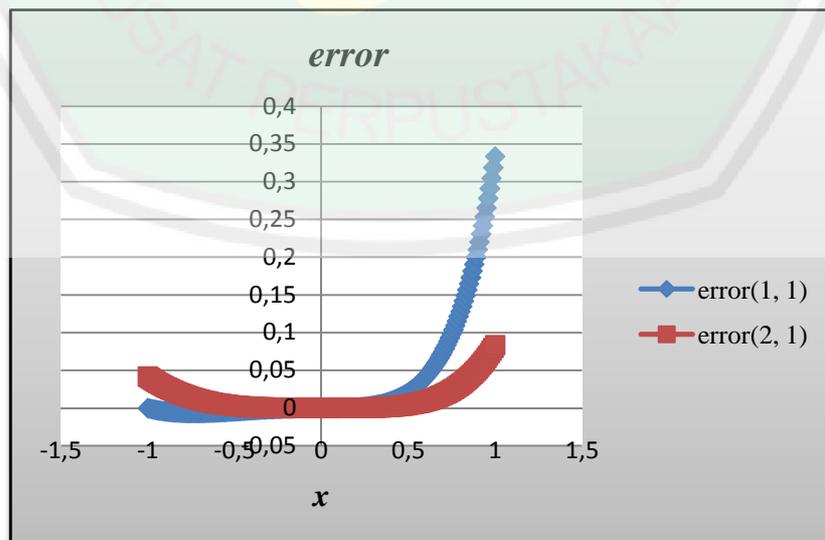
### Langkah 3

Setelah diperoleh bentuk persamaan  $R_{1,1}$  dan  $R_{2,1}$  dengan menggunakan aproksimasi *Padé* pada langkah 2, maka selanjutnya akan dibandingkan dengan persamaan  $f(x)$  yaitu persamaan hasil setelah diekspansi dengan menggunakan deret pangkat, dengan mengambil tiga suku pertama. Dengan memasukkan nilai  $x$  yang berkisar antara -1 sampai 1 yang diperoleh tabel terlampir dengan gambar (grafik) berikut ini:



Gambar 3.1

Dari grafik diatas, menghasilkan suatu kesimpulan bahwa nilai hampiran untuk  $L = 2$  dan  $M = 1$  yang disimbolkan dalam grafik dengan  $R(2, 1)$  semakin mendekati nilai  $f(x)$ , dibandingkan dengan nilai hampiran untuk  $L = M = 1$  yang disimbolkan dalam grafik dengan  $R(1,1)$ . Jadi semakin besar orde sisa pemotongan yaitu  $R(n, 1) \rightarrow \infty$  akan semakin mendekati nilai  $f(x)$ .



Gambar 3.2

Dari grafik diatas dapat dilihat bahwa *error* (kesalahan) nilainya semakin kecil, atau semakin mendekati nilai sebenarnya, ketika nilai  $x$  mendekati nol. Karena dalam menghampiri suatu fungsi polinomial nilai  $x$  harus berkisar antara -1 sampai 1, karena jika  $|x| > 1$  akan menghasilkan nilai *error* yang semakin besar yaitu  $x \rightarrow \infty$ , dan jika  $|x| < 1$  akan menghasilkan nilai *error* yang semakin kecil yaitu  $x \rightarrow 0$ . Nilai *error* tersebut didapat dari hasil pengurangan nilai  $f(x)$  dengan nilai persamaan  $R_{1,1}$  dan  $R_{2,1}$ .

Berikut ini akan diberikan salah satu nilai  $x$  yang berkisar antara -1 sampai 1, untuk mengetahui hasil aproksimasi diatas, yang hasil selengkapnya terlampir. Dengan mengambil  $x = 0.1$  maka diperoleh:

- Untuk persamaan  $f(x)$  dengan mengambil tiga suku pertama sebagai aproksimasi, yaitu

$$f(x) = 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

Jika,  $x = 0.1$ , maka diperoleh

$$f(x) = 0.894833$$

- Untuk persamaan  $R_{1,1}$

$$R_{1,1} = \frac{1 - \frac{3}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x}$$

Jika,  $x = 0.1$ , maka diperoleh

$$R_{1,1} = 0.894737$$

- Untuk persamaan  $R_{2,1}$

$$R_{2,1} = \frac{1 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{6}x^2}{1 - \frac{1}{3}x}$$

Jika,  $x = 0.01$ , maka diperoleh

$$R_{2,1} = 0.894828$$

Maka, diperoleh nilai *error* :

- ✓ Untuk persamaan  $R_{1,1}$

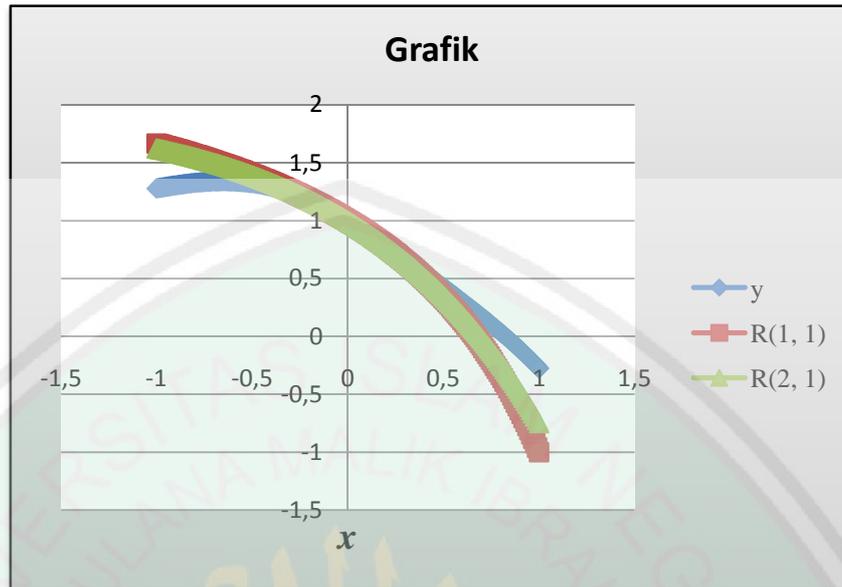
$$\begin{aligned} \text{Error} &= f(x) - R_{1,1} \\ &= 9,6 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

- ✓ Untuk persamaan  $R_{2,1}$

$$\begin{aligned} \text{Error} &= f(x) - R_{2,1} \\ &= 5 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

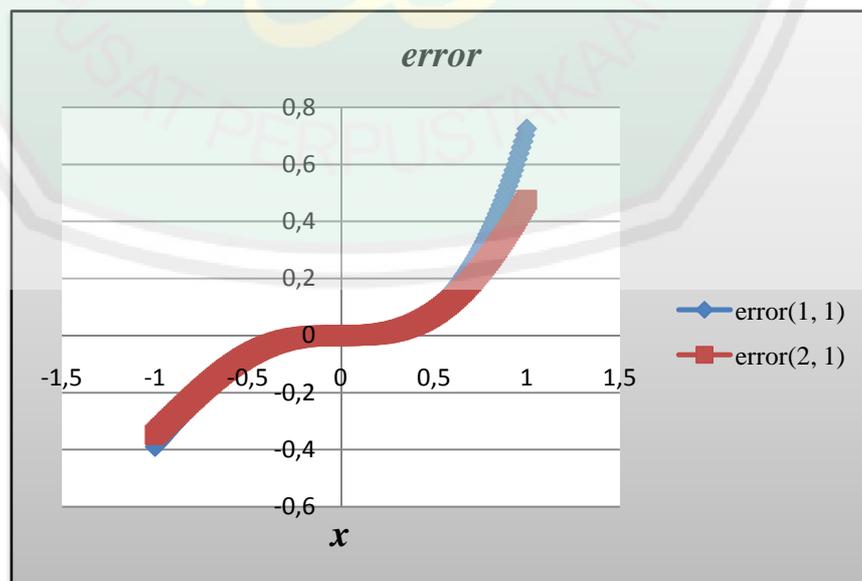
#### **Langkah 4**

Membandingkan hasil perhitungan dengan menggunakan metode aproksimasi *Padé* pada langkah 2, yang diperoleh dalam bentuk persamaan  $R_{1,1}$  dan  $R_{2,1}$ , dengan  $y$  sebagai hasil perhitungan numerik dengan menggunakan metode lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tersebut, dalam hal ini digunakan metode *Runge Kutte* (orde 4) dengan menggunakan program, dengan memasukkan nilai  $x$  yang berkisar antara -1 sampai 1, yang diperoleh tabel terlampir dengan gambar (grafik) berikut ini:



Gambar 3.3

Dari grafik diatas, menghasilkan suatu kesimpulan bahwa nilai hampiran untuk  $L = 2$  dan  $M = 1$  yang disimbolkan dalam grafik dengan  $R(2, 1)$  semakin mendekati nilai  $y$ , dibandingkan dengan nilai hampiran untuk  $L = M = 1$  yang disimbolkan dalam grafik dengan  $R(1, 1)$ . Jadi semakin besar orde sisa pemotongan yaitu  $R(n, 1) \rightarrow \infty$  akan semakin mendekati nilai  $y$ .



Gambar 3.4

Dari grafik diatas dapat dilihat bahwa *error* (kesalahan) nilainya semakin kecil, atau semakin mendekati nilai sebenarnya, ketika nilai  $x$  mendekati nol. Nilai *error* tersebut didapat dari hasil pengurangan nilai  $y$  dengan nilai persamaan  $R_{1,1}$  dan  $R_{2,1}$ .

Berikut ini akan diberikan salah satu nilai  $x$  yang berkisar antara -1 sampai 1, untuk mengetahui hasil aproksimasi diatas, yang hasil selengkapnya terlampir. Dengan mengambil  $x = 0.1$  maka diperoleh:

- Untuk persamaan  $y$  dengan menggunakan *Runge Kutte* (orde 4) sebagai aproksimasi yaitu,

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 + x^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x \right) + 1 = 0$$

Jika,  $x = 0.1$ , maka diperoleh

$$y = 0.895492$$

- Untuk persamaan  $R_{1,1}$

$$R_{1,1} = \frac{1 - \frac{3}{2}x}{1 - \frac{1}{2}x}$$

Jika,  $x = 0.1$ , maka diperoleh

$$R_{1,1} = 0.894737$$

- Untuk persamaan  $R_{2,1}$

$$R_{2,1} = \frac{1 - \frac{4}{3}x - \frac{1}{6}x^2}{1 - \frac{1}{3}x}$$

Jika,  $x = 0.01$ , maka diperoleh

$$R_{2,1} = 0.894828$$

Maka, diperoleh nilai *error* :

- ✓ Untuk persamaan  $R_{1,1}$

$$\begin{aligned} \text{Error} &= y - R_{1,1} \\ &= 7,5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

- ✓ Untuk persamaan  $R_{2,1}$

$$\begin{aligned} \text{Error} &= y - R_{2,1} \\ &= 6,6 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

### 3.2 Aproksimasi *Padé* Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Nonlinier dalam Pandangan Islam

Mempelajari berbagai ilmu pengetahuan seperti belajar matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab* tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual saja, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika sangat bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif, hal ini dilakukan dengan paradigma *ulul albab*, yang mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdusyakir, 2007:24). Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam surat Shaad ayat 29 sebagai berikut:

كِتَابٌ أَنْزَلْنَاهُ إِلَيْكَ مُبَارَكٌ لِيَدَّبَّرُوا آيَاتِهِ ۖ وَلِيَتَذَكَّرَ أُولُو الْأَلْبَابِ ﴿٢٩﴾

Artinya: “ Ini adalah sebuah kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatnya dan

*supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai pikiran”*

(Q.S. Shaad: 29).

Seperti yang telah dijelaskan dalam bab-bab sebelumnya bahwa suatu persamaan diferensial biasa, khususnya persamaan diferensial nonlinier tidak semua dapat diselesaikan melalui perhitungan eksak, Walaupun dengan demikian, bukan berarti kita tidak bisa menentukan nilai persamaan diferensial nonlinier tersebut. Sehingga perlu dilakukan perhitungan melalui hampiran atau aproksimasi untuk mendapatkan suatu nilai yang mendekati nilai eksaknya.

Aproksimasi (hampiran) yang digunakan dalam penelitian kali ini menggunakan aproksimasi padé, yaitu merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang tidak dapat diselesaikan dengan perhitungan secara eksak (analitik). Persamaan diferensial nonlinier tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka atau numerik.

Islam mengajarkan kepada umatnya untuk terus berusaha dan dilarang untuk berputus asa dalam menyelesaikan setiap persoalan karena setiap persoalan selalu memiliki jalan keluar atau memiliki suatu solusi. Jika tidak dapat diselesaikan dengan satu cara, maka persoalan tersebut pasti bisa diselesaikan dengan cara yang lain. Sikap terus berusaha dan tidak mudah berputus asa dalam menghadapi setiap kesulitan sangat dianjurkan dan merupakan suatu perintah didalam Al-Qur'an. Hal ini sebagaimana dinyatakan dalam Al-Qur'an surat Alam Nasyroh 5-6 dan Al-Hijr ayat 56 sebagai berikut:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “*Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5), Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (6)*” (Q. S Alam Nasyroh 5-6).

قَالَ وَمَنْ يَقْنَطُ مِنْ رَحْمَةِ رَبِّهِ إِلَّا الضَّالُّونَ ﴿٥٦﴾

Artinya: “*Ibrahim berkata: Tidak ada orang yang berputus asa dari rahmat Tuhan-nya, kecuali orang-orang yang sesat*” (Q. S Al-Hijr: 56).

Dari kedua ayat di atas, Allah SWT menjelaskan bahwa sesungguhnya kita hidup didunia ini pasti akan menemui kesulitan-kesulitan ataupun cobaan-cobaan. Oleh sebab itu, kita dilarang untuk berputus asa dalam menghadapi kesulitan-kesulitan tersebut, dan dianjurkan untuk selalu berusaha, optimis serta berdoa kepada Allah SWT. Dalam menghadapi segala bentuk persoalan. “*karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan*”.

Aproksimasi yang baik adalah aproksimasi yang mempunyai tingkat kesalahan paling kecil sehingga menghasilkan nilai yang semakin mendekati nilai eksaknya. Selain itu, aproksimasi yang baik juga harus membutuhkan waktu yang cepat untuk memperoleh hasil yang diinginkan. Oleh karena itu, perhitungan dengan aproksimasi harus dilakukan secara teliti.

Allah SWT adalah dzat yang maha teliti dan maha cepat perhitungannya sebagaimana dinyatakan dalam Al-Qur’an surat Maryam ayat 94 dan surat Al-An’am ayat 62 sebagai berikut:

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

*Artinya: “Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti” (Q. S Maryam: 94).*

ثُمَّ رُدُّوْا إِلَى اللَّهِ مَوْلَاهُمُ الْحَقِّ ۗ أَلَا لَهُ الْحُكْمُ وَهُوَ أَسْرَعُ الْحَسِيبِ ﴿٦٢﴾

*Artinya: “Kemudian mereka (hamba Allah) dikembalikan kepada Allah, Penguasa mereka yang sebenarnya. Ketahuilah bahwa segala hukum (pada hari itu) kepunyaanNya, dan dialah pembuat perhitungan yang paling cepat” (Q. S Al-An’am: 62).*

Dari kedua ayat tersebut diatas dapat diambil sebuah pelajaran penting tentang sifat Allah SWT yaitu teliti dan cepat dalam perhitungan. Manusia sebagai hamba Allah seharusnya juga memiliki sifat teliti dan cepat dalam melakukan perhitungan dalam menjalani kehidupannya. Dengan bersikap teliti, penuh perhitungan dan hati-hati dalam menyelesaikan suatu persoalan, peluang terjadinya kesalahan akan menjadi kecil sehingga yang akan dicapai semakin maksimal.

## **BAB IV**

### **PENUTUP**

#### **4.1 Kesimpulan**

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya, bahwa metode aproksimasi *Padé* merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang hampir tidak dapat atau sulit diselesaikan melalui perhitungan eksak, solusi dari penghampiran menggunakan metode aproksimasi *Padé* tersebut menghasilkan nilai hampiran yang mempunyai nilai kesalahan (*error*) yang cukup kecil jika dibandingkan dengan menggunakan metode lain dalam menghampiri suatu persamaan diferensial nonlinier tersebut.

#### **4.2 Saran**

Adanya pembahasan tentang penerapan aproksimasi *Padé* untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier dengan mengambil contoh persamaan diferensial nonlinier jenis fungsi polinomial, pembaca juga dapat mengembangkan penelitian ini dengan menerapkan aproksimasi *Padé* untuk menghampiri persamaan diferensial nonlinier pada fungsi yang lain, misalkan fungsi transenden jenis fungsi trigometri, dll.

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdusyakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- Albari. 2001. *Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Yogyakarta: Ekonisia.
- Al-Jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar*. Jakarta: Darus Sunnah Press.
- Amiruddin, Aam. 2004. *Tafsir Al-Qur'an Kontemporer*. Bandung: Khazanah Intelektual.
- Assauri, Sofjan. 1999. *Matematika Ekonomi*. Jakarta: PT Raja Grafindo Persada.
- Baker, George A dan Peter Graves-Moris. 1981. *Padé Approximants part I: Basic Theory*. Canada: Addison-Wesley Publishing Company.
- Dumairy. 1999. *Matematika Terapan Untuk Bisnis dan Ekonomi*. Yogyakarta: BPFE.
- Djojodihardjo, Harijino. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Kusumah, yahya . 1989. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- Martono, Koko. 1983. *Matematika Lanjut Untuk Para Insinyur dan Ilmuwan*. Jakarta: Erlangga.
- Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika Bandung.
- Pamuntjak dan Santosa. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: Fakultas MIPA ITB.

- Roziana, Dewi Farida. 2008. *Solusi Analitik dan Solusi Numerik Persamaan Divusi Konveksi*. Malang: Skripsi Jurusan Matematika UIN Malang.
- Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah (Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an)*. Jakarta: Lentera Hati.
- Soemantri, R. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks*. Yogyakarta: Ekonisia.
- Susila, I nyoman. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analisis*. Bandung: Erlangga.
- Supranto, J. 2006. *Matematika Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Bogor: Galia Indonesia.
- Triatmodjo, Bambang. 1996. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Fakultas Teknik Universitas Gajdah Mada.
- Waluya, S.B, 2006. *Persamaan diferensial*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

## LAMPIRAN

Lampiran 1. Tabel Perbandingan nilai  $f(x)$  dengan nilai  $R_{1,1}$  dan  $R_{2,1}$ .

$x$	$f(x)$	$R(1, 1)$	$error$	$R(2, 1)$	$Error$
-1	1.666667	1.666667	0	1.625	0.041667
-0.99	1.661667	1.662207	-0.00054086	1.621541	0.040125
-0.98	1.656665	1.657718	-0.00105279	1.61804	0.038625
-0.97	1.651662	1.653199	-0.00153649	1.614496	0.037166
-0.96	1.646656	1.648649	-0.00199265	1.610909	0.035747
-0.95	1.641646	1.644068	-0.00242196	1.607278	0.034367
-0.94	1.636631	1.639456	-0.00282512	1.603604	0.033027
-0.93	1.63161	1.634812	-0.00320279	1.599885	0.031724
-0.92	1.626581	1.630137	-0.00355565	1.596122	0.030459
-0.91	1.621545	1.62543	-0.00388439	1.592315	0.029231
-0.9	1.6165	1.62069	-0.00418966	1.588462	0.028038
-0.89	1.611445	1.615917	-0.00447212	1.584563	0.026882
-0.88	1.606379	1.611111	-0.00473244	1.580619	0.02576
-0.87	1.601301	1.606272	-0.00497128	1.576628	0.024673
-0.86	1.596209	1.601399	-0.00518927	1.572591	0.023619
-0.85	1.591104	1.596491	-0.00538706	1.568506	0.022598
-0.84	1.585984	1.591549	-0.0055653	1.564375	0.021609
-0.83	1.580848	1.586572	-0.0057246	1.560196	0.020652
-0.82	1.575695	1.58156	-0.00586562	1.555969	0.019726
-0.81	1.570524	1.576512	-0.00598896	1.551693	0.018831
-0.8	1.565333	1.571429	-0.00609524	1.547368	0.017965
-0.79	1.560123	1.566308	-0.00618508	1.542995	0.017128
-0.78	1.554892	1.561151	-0.00625908	1.538571	0.016321
-0.77	1.549639	1.555957	-0.00631785	1.534098	0.015541
-0.76	1.544363	1.550725	-0.00636197	1.529574	0.014788
-0.75	1.539063	1.545455	-0.00639205	1.525	0.014063
-0.74	1.533737	1.540146	-0.00640865	1.520374	0.013363
-0.73	1.528386	1.534799	-0.00641237	1.515697	0.012689
-0.72	1.523008	1.529412	-0.00640376	1.510968	0.01204
-0.71	1.517602	1.523985	-0.00638341	1.506186	0.011416
-0.7	1.512167	1.518519	-0.00635185	1.501351	0.010815
-0.69	1.506702	1.513011	-0.00630965	1.496463	0.010238
-0.68	1.501205	1.507463	-0.00625735	1.491522	0.009684
-0.67	1.495677	1.501873	-0.00619549	1.486526	0.009151
-0.66	1.490116	1.496241	-0.0061246	1.481475	0.008641
-0.65	1.484521	1.490566	-0.0060452	1.47637	0.008151
-0.64	1.478891	1.484848	-0.00595782	1.471209	0.007682

-0.63	1.473225	1.479087	-0.00586295	1.465992	0.007233
-0.62	1.467521	1.473282	-0.00576111	1.460718	0.006803
-0.61	1.46178	1.467433	-0.00565278	1.455388	0.006392
-0.6	1.456	1.461538	-0.00553846	1.45	0.006
-0.59	1.45018	1.455598	-0.00541862	1.444554	0.005626
-0.58	1.444319	1.449612	-0.00529374	1.43905	0.005268
-0.57	1.438416	1.44358	-0.00516427	1.433487	0.004928
-0.56	1.432469	1.4375	-0.00503067	1.427865	0.004604
-0.55	1.426479	1.431373	-0.00489338	1.422183	0.004296
-0.54	1.420444	1.425197	-0.00475285	1.416441	0.004003
-0.53	1.414363	1.418972	-0.0046095	1.410637	0.003725
-0.52	1.408235	1.412698	-0.00446375	1.404773	0.003462
-0.51	1.402059	1.406375	-0.004316	1.398846	0.003212
-0.5	1.395833	1.4	-0.00416667	1.392857	0.002976
-0.49	1.389558	1.393574	-0.00401613	1.386805	0.002753
-0.48	1.383232	1.387097	-0.00386477	1.38069	0.002542
-0.47	1.376854	1.380567	-0.00371297	1.37451	0.002344
-0.46	1.370423	1.373984	-0.00356107	1.368266	0.002157
-0.45	1.363938	1.367347	-0.00340944	1.361957	0.001981
-0.44	1.357397	1.360656	-0.0032584	1.355581	0.001816
-0.43	1.350801	1.353909	-0.0031083	1.34914	0.001661
-0.42	1.344148	1.347107	-0.00295944	1.342632	0.001516
-0.41	1.337437	1.340249	-0.00281213	1.336056	0.001381
-0.4	1.330667	1.333333	-0.00266667	1.329412	0.001255
-0.39	1.323837	1.32636	-0.00252333	1.322699	0.001137
-0.38	1.316945	1.319328	-0.0023824	1.315917	0.001028
-0.37	1.309992	1.312236	-0.00224412	1.309065	0.000927
-0.36	1.302976	1.305085	-0.00210875	1.302143	0.000833
-0.35	1.295896	1.297872	-0.00197651	1.295149	0.000747
-0.34	1.288751	1.290598	-0.00184762	1.288084	0.000667
-0.33	1.28154	1.283262	-0.0017223	1.280946	0.000594
-0.32	1.274261	1.275862	-0.00160074	1.273735	0.000526
-0.31	1.266915	1.268398	-0.0014831	1.26645	0.000465
-0.3	1.2595	1.26087	-0.00136957	1.259091	0.000409
-0.29	1.252015	1.253275	-0.00126028	1.251657	0.000358
-0.28	1.244459	1.245614	-0.00115537	1.244146	0.000312
-0.27	1.236831	1.237885	-0.00105496	1.23656	0.000271
-0.26	1.229129	1.230088	-0.00095916	1.228896	0.000234
-0.25	1.221354	1.222222	-0.00086806	1.221154	0.0002
-0.24	1.213504	1.214286	-0.00078171	1.213333	0.000171
-0.23	1.205578	1.206278	-0.00070019	1.205433	0.000144

-0.22	1.197575	1.198198	-0.00062353	1.197453	0.000121
-0.21	1.189494	1.190045	-0.00055175	1.189393	0.000101
-0.2	1.181333	1.181818	-0.00048485	1.18125	8.33E-05
-0.19	1.173093	1.173516	-0.00042282	1.173025	6.81E-05
-0.18	1.164772	1.165138	-0.00036561	1.164717	5.5E-05
-0.17	1.156369	1.156682	-0.00031319	1.156325	4.39E-05
-0.16	1.147883	1.148148	-0.00026548	1.147848	3.46E-05
-0.15	1.139313	1.139535	-0.00022238	1.139286	2.68E-05
-0.14	1.130657	1.130841	-0.00018379	1.130637	2.04E-05
-0.13	1.121916	1.122066	-0.00014956	1.121901	1.52E-05
-0.12	1.113088	1.113208	-0.00011955	1.113077	1.11E-05
-0.11	1.104172	1.104265	-9.357E-05	1.104164	7.85E-06
-0.1	1.095167	1.095238	-7.1429E-05	1.095161	5.38E-06
-0.09	1.086072	1.086124	-5.2902E-05	1.086068	3.54E-06
-0.08	1.076885	1.076923	-3.7744E-05	1.076883	2.22E-06
-0.07	1.067607	1.067633	-2.5684E-05	1.067606	1.3E-06
-0.06	1.058236	1.058252	-1.6427E-05	1.058235	7.06E-07
-0.05	1.048771	1.04878	-9.6545E-06	1.04877	3.42E-07
-0.04	1.039211	1.039216	-5.0196E-06	1.039211	1.4E-07
-0.03	1.029555	1.029557	-2.1502E-06	1.029554	4.46E-08
-0.02	1.019801	1.019802	-6.4686E-07	1.019801	8.83E-09
-0.01	1.00995	1.00995	-8.209E-08	1.00995	5.54E-10
0	1	1	0	1	0
0.01	0.98995	0.98995	8.459E-08	0.98995	5.57E-10
0.02	0.979799	0.979798	6.8687E-07	0.979799	8.95E-09
0.03	0.969546	0.969543	2.3528E-06	0.969545	4.55E-08
0.04	0.959189	0.959184	5.6599E-06	0.959189	1.44E-07
0.05	0.948729	0.948718	1.1218E-05	0.948729	3.53E-07
0.06	0.938164	0.938144	1.967E-05	0.938163	7.35E-07
0.07	0.927493	0.927461	3.1693E-05	0.927491	1.37E-06
0.08	0.916715	0.916667	4.8E-05	0.916712	2.34E-06
0.09	0.905829	0.905759	6.9338E-05	0.905825	3.76E-06
0.1	0.894833	0.894737	9.6491E-05	0.894828	5.75E-06
0.11	0.883728	0.883598	0.00013028	0.88372	8.44E-06
0.12	0.872512	0.87234	0.00017157	0.8725	1.2E-05
0.13	0.861184	0.860963	0.00022127	0.861167	1.66E-05
0.14	0.849743	0.849462	0.0002803	0.84972	2.24E-05
0.15	0.838188	0.837838	0.00034966	0.838158	2.96E-05
0.16	0.826517	0.826087	0.00043038	0.826479	3.85E-05
0.17	0.814731	0.814208	0.00052352	0.814682	4.92E-05
0.18	0.802828	0.802198	0.0006302	0.802766	6.2E-05

0.19	0.790807	0.790055	0.00075158	0.79073	7.73E-05
0.2	0.778667	0.777778	0.00088889	0.778571	9.52E-05
0.21	0.766407	0.765363	0.00104337	0.76629	0.000116
0.22	0.754025	0.752809	0.00121634	0.753885	0.00014
0.23	0.741522	0.740113	0.00140917	0.741354	0.000168
0.24	0.728896	0.727273	0.00162327	0.728696	0.0002
0.25	0.716146	0.714286	0.00186012	0.715909	0.000237
0.26	0.703271	0.701149	0.00212124	0.702993	0.000278
0.27	0.69027	0.687861	0.00240823	0.689945	0.000324
0.28	0.677141	0.674419	0.00272273	0.676765	0.000377
0.29	0.663885	0.660819	0.00306645	0.66345	0.000435
0.3	0.6505	0.647059	0.00344118	0.65	0.0005
0.31	0.636985	0.633136	0.00384874	0.636413	0.000572
0.32	0.623339	0.619048	0.00429105	0.622687	0.000652
0.33	0.609561	0.60479	0.00477008	0.60882	0.00074
0.34	0.595649	0.590361	0.00528789	0.594812	0.000837
0.35	0.581604	0.575758	0.00584659	0.58066	0.000944
0.36	0.567424	0.560976	0.00644839	0.566364	0.00106
0.37	0.553108	0.546012	0.00709556	0.55192	0.001188
0.38	0.538655	0.530864	0.00779047	0.537328	0.001326
0.39	0.524064	0.515528	0.00853555	0.522586	0.001477
0.4	0.509333	0.5	0.00933333	0.507692	0.001641
0.41	0.494463	0.484277	0.01018644	0.492645	0.001818
0.42	0.479452	0.468354	0.01109757	0.477442	0.00201
0.43	0.464299	0.452229	0.01206953	0.462082	0.002217
0.44	0.449003	0.435897	0.01310523	0.446563	0.00244
0.45	0.433563	0.419355	0.01420766	0.430882	0.00268
0.46	0.417977	0.402597	0.01537993	0.415039	0.002938
0.47	0.402246	0.385621	0.01662525	0.399032	0.003215
0.48	0.386368	0.368421	0.01794695	0.382857	0.003511
0.49	0.370342	0.350993	0.01934846	0.366514	0.003828
0.5	0.354167	0.333333	0.02083333	0.35	0.004167
0.51	0.337842	0.315436	0.02240526	0.333313	0.004528
0.52	0.321365	0.297297	0.02406804	0.316452	0.004914
0.53	0.304737	0.278912	0.0258256	0.299413	0.005324
0.54	0.287956	0.260274	0.02768203	0.282195	0.005761
0.55	0.271021	0.241379	0.02964152	0.264796	0.006225
0.56	0.253931	0.222222	0.03170844	0.247213	0.006718
0.57	0.236685	0.202797	0.0338873	0.229444	0.00724
0.58	0.219281	0.183099	0.03618274	0.211488	0.007794
0.59	0.20172	0.163121	0.0385996	0.19334	0.00838

0.6	0.184	0.142857	0.04114286	0.175	0.009
0.61	0.16612	0.122302	0.04381768	0.156464	0.009655
0.62	0.148079	0.101449	0.04662939	0.137731	0.010348
0.63	0.129876	0.080292	0.04958353	0.118797	0.011078
0.64	0.111509	0.058824	0.0526858	0.099661	0.011848
0.65	0.092979	0.037037	0.05594213	0.080319	0.01266
0.66	0.074284	0.014925	0.05935863	0.060769	0.013515
0.67	0.055423	-0.007519	0.06294163	0.041009	0.014414
0.68	0.036395	-0.030303	0.0666977	0.021034	0.01536
0.69	0.017199	-0.053435	0.07063361	0.000844	0.016354
0.7	-0.002167	-0.076923	0.07475641	-0.01957	0.017399
0.71	-0.021702	-0.100775	0.07907336	-0.0402	0.018495
0.72	-0.041408	-0.125	0.083592	-0.06105	0.019645
0.73	-0.061286	-0.149606	0.08832013	-0.08214	0.02085
0.74	-0.081337	-0.174603	0.09326584	-0.10345	0.022114
0.75	-0.101563	-0.2	0.0984375	-0.125	0.023438
0.76	-0.121963	-0.225806	0.10384378	-0.14679	0.024823
0.77	-0.142539	-0.252033	0.10949369	-0.16881	0.026273
0.78	-0.163292	-0.278689	0.11539652	-0.19108	0.027789
0.79	-0.184223	-0.305785	0.12156196	-0.2136	0.029374
0.8	-0.205333	-0.333333	0.128	-0.23636	0.03103
0.81	-0.226624	-0.361345	0.13472104	-0.25938	0.03276
0.82	-0.248095	-0.389831	0.14173584	-0.28266	0.034566
0.83	-0.269748	-0.418803	0.14905559	-0.3062	0.03645
0.84	-0.291584	-0.448276	0.15669186	-0.33	0.038416
0.85	-0.313604	-0.478261	0.1646567	-0.35407	0.040466
0.86	-0.335809	-0.508772	0.1729626	-0.37841	0.042602
0.87	-0.358201	-0.539823	0.18162251	-0.40303	0.044828
0.88	-0.380779	-0.571429	0.1906499	-0.42792	0.047146
0.89	-0.403545	-0.603604	0.20005877	-0.4531	0.049559
0.9	-0.4265	-0.636364	0.20986364	-0.47857	0.052071
0.91	-0.449645	-0.669725	0.2200796	-0.50433	0.054685
0.92	-0.472981	-0.703704	0.23072237	-0.53038	0.057403
0.93	-0.49651	-0.738318	0.24180826	-0.55674	0.06023
0.94	-0.520231	-0.773585	0.25335424	-0.5834	0.063167
0.95	-0.544146	-0.809524	0.26537798	-0.61037	0.06622
0.96	-0.568256	-0.846154	0.27789785	-0.63765	0.069391
0.97	-0.592562	-0.883495	0.29093298	-0.66525	0.072684
0.98	-0.617065	-0.921569	0.30450329	-0.69317	0.076103
0.99	-0.641767	-0.960396	0.31862954	-0.72142	0.079651
1	-0.666667	-1	0.33333333	-0.75	0.083333

Lampiran 2. Tabel Perbandingan nilai  $y$  dengan nilai  $R_{1,1}$  dan  $R_{2,1}$ .

$x$	$y$	$R(1, 1)$	$error$	$R(2, 1)$	$Error$
-1	1.276947	1.666667	-0.38972	1.625	-0.34805
-0.99	1.279901	1.662207	-0.38231	1.621541	-0.34164
-0.98	1.282815	1.657718	-0.3749	1.61804	-0.33522
-0.97	1.285688	1.653199	-0.36751	1.614496	-0.32881
-0.96	1.288516	1.648649	-0.36013	1.610909	-0.32239
-0.95	1.291297	1.644068	-0.35277	1.607278	-0.31598
-0.94	1.294029	1.639456	-0.34543	1.603604	-0.30957
-0.93	1.29671	1.634812	-0.3381	1.599885	-0.30318
-0.92	1.299336	1.630137	-0.3308	1.596122	-0.29679
-0.91	1.301905	1.62543	-0.32352	1.592315	-0.29041
-0.9	1.304414	1.62069	-0.31628	1.588462	-0.28405
-0.89	1.306861	1.615917	-0.30906	1.584563	-0.2777
-0.88	1.309242	1.611111	-0.30187	1.580619	-0.27138
-0.87	1.311556	1.606272	-0.29472	1.576628	-0.26507
-0.86	1.313798	1.601399	-0.2876	1.572591	-0.25879
-0.85	1.315967	1.596491	-0.28052	1.568506	-0.25254
-0.84	1.31806	1.591549	-0.27349	1.564375	-0.24632
-0.83	1.320072	1.586572	-0.2665	1.560196	-0.24012
-0.82	1.322003	1.58156	-0.25956	1.555969	-0.23397
-0.81	1.323847	1.576512	-0.25267	1.551693	-0.22785
-0.8	1.325604	1.571429	-0.24582	1.547368	-0.22176
-0.79	1.327269	1.566308	-0.23904	1.542995	-0.21573
-0.78	1.328839	1.561151	-0.23231	1.538571	-0.20973
-0.77	1.330312	1.555957	-0.22564	1.534098	-0.20379
-0.76	1.331685	1.550725	-0.21904	1.529574	-0.19789
-0.75	1.332954	1.545455	-0.2125	1.525	-0.19205
-0.74	1.334117	1.540146	-0.20603	1.520374	-0.18626
-0.73	1.33517	1.534799	-0.19963	1.515697	-0.18053
-0.72	1.33611	1.529412	-0.1933	1.510968	-0.17486
-0.71	1.336936	1.523985	-0.18705	1.506186	-0.16925
-0.7	1.337642	1.518519	-0.18088	1.501351	-0.16371
-0.69	1.338228	1.513011	-0.17478	1.496463	-0.15824
-0.68	1.338689	1.507463	-0.16877	1.491522	-0.15283
-0.67	1.339024	1.501873	-0.16285	1.486526	-0.1475
-0.66	1.339228	1.496241	-0.15701	1.481475	-0.14225
-0.65	1.3393	1.490566	-0.15127	1.47637	-0.13707
-0.64	1.339236	1.484848	-0.14561	1.471209	-0.13197
-0.63	1.339034	1.479087	-0.14005	1.465992	-0.12696
-0.62	1.338691	1.473282	-0.13459	1.460718	-0.12203

-0.61	1.338206	1.467433	-0.12923	1.455388	-0.11718
-0.6	1.337574	1.461538	-0.12396	1.45	-0.11243
-0.59	1.336794	1.455598	-0.1188	1.444554	-0.10776
-0.58	1.335864	1.449612	-0.11375	1.43905	-0.10319
-0.57	1.33478	1.44358	-0.1088	1.433487	-0.09871
-0.56	1.333542	1.4375	-0.10396	1.427865	-0.09432
-0.55	1.332146	1.431373	-0.09923	1.422183	-0.09004
-0.54	1.330591	1.425197	-0.09461	1.416441	-0.08585
-0.53	1.328876	1.418972	-0.0901	1.410637	-0.08176
-0.52	1.326997	1.412698	-0.0857	1.404773	-0.07778
-0.51	1.324953	1.406375	-0.08142	1.398846	-0.07389
-0.5	1.322744	1.4	-0.07726	1.392857	-0.07011
-0.49	1.320366	1.393574	-0.07321	1.386805	-0.06644
-0.48	1.317819	1.387097	-0.06928	1.38069	-0.06287
-0.47	1.315102	1.380567	-0.06546	1.37451	-0.05941
-0.46	1.312213	1.373984	-0.06177	1.368266	-0.05605
-0.45	1.309152	1.367347	-0.0582	1.361957	-0.0528
-0.44	1.305917	1.360656	-0.05474	1.355581	-0.04966
-0.43	1.302507	1.353909	-0.0514	1.34914	-0.04663
-0.42	1.298923	1.347107	-0.04818	1.342632	-0.04371
-0.41	1.295162	1.340249	-0.04509	1.336056	-0.04089
-0.4	1.291226	1.333333	-0.04211	1.329412	-0.03819
-0.39	1.287114	1.32636	-0.03925	1.322699	-0.03559
-0.38	1.282825	1.319328	-0.0365	1.315917	-0.03309
-0.37	1.27836	1.312236	-0.03388	1.309065	-0.03071
-0.36	1.273718	1.305085	-0.03137	1.302143	-0.02842
-0.35	1.2689	1.297872	-0.02897	1.295149	-0.02625
-0.34	1.263907	1.290598	-0.02669	1.288084	-0.02418
-0.33	1.258738	1.283262	-0.02452	1.280946	-0.02221
-0.32	1.253395	1.275862	-0.02247	1.273735	-0.02034
-0.31	1.247878	1.268398	-0.02052	1.26645	-0.01857
-0.3	1.242188	1.26087	-0.01868	1.259091	-0.0169
-0.29	1.236327	1.253275	-0.01695	1.251657	-0.01533
-0.28	1.230294	1.245614	-0.01532	1.244146	-0.01385
-0.27	1.224092	1.237885	-0.01379	1.23656	-0.01247
-0.26	1.217723	1.230088	-0.01237	1.228896	-0.01117
-0.25	1.211186	1.222222	-0.01104	1.221154	-0.00997
-0.24	1.204485	1.214286	-0.0098	1.213333	-0.00885
-0.23	1.197621	1.206278	-0.00866	1.205433	-0.00781
-0.22	1.190595	1.198198	-0.0076	1.197453	-0.00686
-0.21	1.18341	1.190045	-0.00664	1.189393	-0.00598

-0.2	1.176068	1.181818	-0.00575	1.18125	-0.00518
-0.19	1.16857	1.173516	-0.00495	1.173025	-0.00446
-0.18	1.160919	1.165138	-0.00422	1.164717	-0.0038
-0.17	1.153118	1.156682	-0.00356	1.156325	-0.00321
-0.16	1.145168	1.148148	-0.00298	1.147848	-0.00268
-0.15	1.137073	1.139535	-0.00246	1.139286	-0.00221
-0.14	1.128834	1.130841	-0.00201	1.130637	-0.0018
-0.13	1.120455	1.122066	-0.00161	1.121901	-0.00145
-0.12	1.111938	1.113208	-0.00127	1.113077	-0.00114
-0.11	1.103285	1.104265	-0.00098	1.104164	-0.00088
-0.1	1.0945	1.095238	-0.00074	1.095161	-0.00066
-0.09	1.085585	1.086124	-0.00054	1.086068	-0.00048
-0.08	1.076544	1.076923	-0.00038	1.076883	-0.00034
-0.07	1.067378	1.067633	-0.00025	1.067606	-0.00023
-0.06	1.058092	1.058252	-0.00016	1.058235	-0.00014
-0.05	1.048687	1.04878	-9.3E-05	1.04877	-8.3E-05
-0.04	1.039168	1.039216	-4.8E-05	1.039211	-4.3E-05
-0.03	1.029536	1.029557	-2E-05	1.029554	-1.8E-05
-0.02	1.019796	1.019802	-6E-06	1.019801	-5.3E-06
-0.01	1.009949	1.00995	-7.5E-07	1.00995	-6.7E-07
0	1	1	0	1	0
0.01	0.98995	0.98995	7.51E-07	0.98995	6.67E-07
0.02	0.979804	0.979798	6.01E-06	0.979799	5.33E-06
0.03	0.969563	0.969543	2.03E-05	0.969545	1.8E-05
0.04	0.959232	0.959184	4.82E-05	0.959189	4.27E-05
0.05	0.948812	0.948718	9.42E-05	0.948729	8.33E-05
0.06	0.938307	0.938144	0.000163	0.938163	0.000144
0.07	0.92772	0.927461	0.000259	0.927491	0.000228
0.08	0.917053	0.916667	0.000386	0.916712	0.000341
0.09	0.906309	0.905759	0.00055	0.905825	0.000485
0.1	0.895492	0.894737	0.000755	0.894828	0.000664
0.11	0.884603	0.883598	0.001005	0.88372	0.000884
0.12	0.873646	0.87234	0.001305	0.8725	0.001146
0.13	0.862623	0.860963	0.00166	0.861167	0.001455
0.14	0.851536	0.849462	0.002073	0.84972	0.001815
0.15	0.840388	0.837838	0.00255	0.838158	0.00223
0.16	0.829181	0.826087	0.003095	0.826479	0.002703
0.17	0.817919	0.814208	0.003711	0.814682	0.003237
0.18	0.806602	0.802198	0.004404	0.802766	0.003836
0.19	0.795234	0.790055	0.005179	0.79073	0.004504
0.2	0.783816	0.777778	0.006038	0.778571	0.005245

0.21	0.77235	0.765363	0.006987	0.76629	0.00606
0.22	0.760839	0.752809	0.00803	0.753885	0.006954
0.23	0.749285	0.740113	0.009172	0.741354	0.007931
0.24	0.737688	0.727273	0.010415	0.728696	0.008992
0.25	0.726051	0.714286	0.011765	0.715909	0.010142
0.26	0.714376	0.701149	0.013226	0.702993	0.011383
0.27	0.702663	0.687861	0.014802	0.689945	0.012718
0.28	0.690915	0.674419	0.016497	0.676765	0.014151
0.29	0.679133	0.660819	0.018314	0.66345	0.015683
0.3	0.667318	0.647059	0.020259	0.65	0.017318
0.31	0.655472	0.633136	0.022336	0.636413	0.019059
0.32	0.643595	0.619048	0.024547	0.622687	0.020908
0.33	0.631688	0.60479	0.026897	0.60882	0.022868
0.34	0.619752	0.590361	0.029391	0.594812	0.02494
0.35	0.607789	0.575758	0.032032	0.58066	0.027129
0.36	0.595799	0.560976	0.034823	0.566364	0.029435
0.37	0.583782	0.546012	0.03777	0.55192	0.031862
0.38	0.571739	0.530864	0.040875	0.537328	0.034411
0.39	0.559671	0.515528	0.044143	0.522586	0.037085
0.4	0.547577	0.5	0.047577	0.507692	0.039885
0.41	0.535459	0.484277	0.051182	0.492645	0.042814
0.42	0.523316	0.468354	0.054961	0.477442	0.045874
0.43	0.511148	0.452229	0.058918	0.462082	0.049066
0.44	0.498955	0.435897	0.063057	0.446563	0.052392
0.45	0.486737	0.419355	0.067382	0.430882	0.055854
0.46	0.474494	0.402597	0.071896	0.415039	0.059454
0.47	0.462225	0.385621	0.076604	0.399032	0.063193
0.48	0.44993	0.368421	0.081509	0.382857	0.067073
0.49	0.437609	0.350993	0.086615	0.366514	0.071095
0.5	0.42526	0.333333	0.091927	0.35	0.07526
0.51	0.412883	0.315436	0.097447	0.333313	0.07957
0.52	0.400478	0.297297	0.10318	0.316452	0.084026
0.53	0.388042	0.278912	0.109131	0.299413	0.088629
0.54	0.375576	0.260274	0.115302	0.282195	0.093381
0.55	0.363077	0.241379	0.121698	0.264796	0.098282
0.56	0.350546	0.222222	0.128324	0.247213	0.103333
0.57	0.337979	0.202797	0.135182	0.229444	0.108535
0.58	0.325377	0.183099	0.142278	0.211488	0.113889
0.59	0.312736	0.163121	0.149616	0.19334	0.119396
0.6	0.300056	0.142857	0.157199	0.175	0.125056
0.61	0.287335	0.122302	0.165033	0.156464	0.130871

0.62	0.274571	0.101449	0.173122	0.137731	0.13684
0.63	0.261761	0.080292	0.181469	0.118797	0.142964
0.64	0.248904	0.058824	0.190081	0.099661	0.149243
0.65	0.235998	0.037037	0.198961	0.080319	0.155679
0.66	0.223039	0.014925	0.208114	0.060769	0.16227
0.67	0.210026	-0.00752	0.217545	0.041009	0.169017
0.68	0.196956	-0.0303	0.227259	0.021034	0.175921
0.69	0.183825	-0.05344	0.23726	0.000844	0.182981
0.7	0.170632	-0.07692	0.247555	-0.01957	0.190197
0.71	0.157373	-0.10078	0.258149	-0.0402	0.19757
0.72	0.144045	-0.125	0.269045	-0.06105	0.205098
0.73	0.130645	-0.14961	0.280252	-0.08214	0.212782
0.74	0.117169	-0.1746	0.291773	-0.10345	0.220621
0.75	0.103614	-0.2	0.303614	-0.125	0.228614
0.76	9.00E-02	-0.22581	0.315782	-0.14679	0.236761
0.77	7.63E-02	-0.25203	0.328283	-0.16881	0.245062
0.78	0.062434	-0.27869	0.341123	-0.19108	0.253515
0.79	4.85E-02	-0.30579	0.354307	-0.2136	0.26212
0.8	3.45E-02	-0.33333	0.367844	-0.23636	0.270875
0.81	2.04E-02	-0.36134	0.38174	-0.25938	0.279779
0.82	6.17E-03	-0.38983	0.396001	-0.28266	0.288831
0.83	-8.17E-03	-0.4188	0.410634	-0.3062	0.298029
0.84	-2.26E-02	-0.44828	0.425648	-0.33	0.307372
0.85	-3.72E-02	-0.47826	0.44105	-0.35407	0.316858
0.86	-5.19E-02	-0.50877	0.456847	-0.37841	0.326486
0.87	-6.68E-02	-0.53982	0.473047	-0.40303	0.336252
0.88	-8.18E-02	-0.57143	0.48966	-0.42792	0.346155
0.89	-9.69E-02	-0.6036	0.506692	-0.4531	0.356193
0.9	-0.11221	-0.63636	0.524154	-0.47857	0.366362
0.91	-0.12767	-0.66972	0.542054	-0.50433	0.37666
0.92	-0.1433	-0.7037	0.560402	-0.53038	0.387083
0.93	-0.15911	-0.73832	0.579207	-0.55674	0.397629
0.94	-0.17511	-0.77358	0.59848	-0.5834	0.408293
0.95	-0.19129	-0.80952	0.618229	-0.61037	0.419072
0.96	-0.20769	-0.84615	0.638467	-0.63765	0.429961
0.97	-0.22429	-0.8835	0.659204	-0.66525	0.440956
0.98	-0.24112	-0.92157	0.680452	-0.69317	0.452051
0.99	-0.25818	-0.9604	0.702221	-0.72142	0.463243
1	-0.27548	-1	0.724524	-0.75	0.474524



**DEPARTEMEN AGAMA RI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)  
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345  
Fax. (0341)572533**

### **BUKTI KONSULTASI SKRIPSI**

**Nama** : Amaliya Rachmi  
**NIM** : 05510016  
**Fakultas/ Jurusan** : Sains Dan Teknologi/ Matematika  
**Judul Skripsi** : Aproksimasi *Pade`* Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Nonlinier.  
**Pembimbing I** : Abdul Aziz, M.Si  
**Pembimbing II** : A. Nasichuddin, M.Ag

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	23 Juli 2009	Konsultasi Bab I	1.	
2	28 Juli 2009	ACC Bab I		2.
3	29 Juli 2009	Konsultasi Kajian Agama	3.	
4	3 Agustus 2009	Konsultasi Bab II		4.
5	10 Agustus 2009	Revisi Bab II	5.	
6	20 Agustus 2009	ACC Bab II		6.
7	31 Agustus 2009	Konsultasi Bab III	7.	
8	3 September 2009	Revisi Bab III		8.
9	15 september 2009	ACC Bab III	9.	
		Konsultasi Bab IV		10.
10	2 Oktober 2009	Konsultasi kajian Agama	11.	
11	2 Oktober 2009	ACC Kajian Agama		12.
		ACC Bab IV	13.	
12	6 Oktober 2009	ACC Keseluruhan		14.

Malang, 07 Oktober 2009  
Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

**Abdussakir, M.Pd**  
**NIP. 197510062003121001**