SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG DUA DIMENSI MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

OLEH
SITI ZUHRIYAH
NIM. 10610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG DUA DIMENSI MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Siti Zuhriyah
NIM. 10610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG DUA DIMENSI MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Oleh
Siti Zuhriyah
NIM. 10610071

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 15 Juni 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Mohammad Jamhuri, M.Si	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19810502 200501 1 004	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN GELOMBANG DUA DIMENSI MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Oleh
Siti Zuhriyah
NIM. 10610071

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 Juni 2015

Penguji Utama	:	Ari Kusumastusi, S.Si., M.Pd	....
Ketua Penguji	:	Drs. H. Turmudi, M.Si	....
Sekretaris Penguji	:	Mohammad Jamhuri, M.Si	....
Anggota Penguji	:	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Zuhriyah

NIM : 10610071

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juni 2015
Yang membuat pernyataan,

Siti Zuhriyah
NIM. 10610071

MOTO

وَأُفَوِّضُ أَمْرِيٓ إِلَى ٱللَّهِۚ إِنَّ ٱللَّهَ بَصِيرُۢ بِٱلۡعِبَادِ ﴿٤٤﴾

"dan aku menyerahkan urusanku kepada Allah. Sesungguhnya Allah Maha melihat akan hamba-hamba-Nya" (QS. al-Mu'min/40:44).

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayah dan ibu tercinta Mohammad Sholihin dan Suyat serta adik Mazidatun Nadhifah, Ahmad Nasrullah Lesmana, dan kakak Maslahatul Ummah yang selalu mendoakan serta memberikan semangat yang tiada henti-hentinya demi selesainya skripsi ini.

Tak lupa pada seseorang yang selalu memberikan motivasi dan doa kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahi robbil alamin, puji syukur atas rahmat yang diberikan oleh Allah Swt. sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw. yang telah membimbing dan memberikan jalan yang terang.

Dalam proses penulisan skripsi ini, penulis banyak mendapat saran, arahan, bimbingan, doa, dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah membimbing, memotivasi, memberikan saran, serta memberi banyak pengetahuan kepada penulis.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan selama penulisan skripsi ini.
6. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd, selaku dosen wali yang telah banyak memberikan arahan dan nasihat kepada penulis.

7. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah.
8. Ayah dan ibu, selaku orang tua yang selalu memberikan doa, semangat serta menjadi motivator terbaik untuk penulis.
9. Teman-teman matematika angkatan 2010, terutama Binti Tsamrotul, Nurhasanah, Rofiatun Jamilah, Harum Kurniasari, Linawati, Rianti Mandasari, Jumrotun Nikmah, Rista Umdah Masrifah, Iffatul Lailiyah, dan teman-teman keluarga Sunan Ampel No.09 yang memberikan kenangan dan motivasi kepada penulis.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan bagi pembaca. Amin.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Juni 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari hari, salah satu teori yang dipelajari dalam ilmu matematika adalah gelombang. Gelombang adalah getaran yang merambat dan gelombang yang merambat akan menghasilkan energi. Gelombang dibagi menjadi dua yakni gelombang mekanik dan gelombang elektromagnetik. Gelombang mekanik adalah gelombang yang berjalan melalui materi yang sering dinamakan dengan medium, contohnya seperti gelombang air, gelombang bunyi, dan gelombang tali. Sedangkan gelombang elektromagnetik adalah gelombang yang mampu merambat walaupun tanpa ada medium seperti gelombang sinar matahari, gelombang TV, dan gelombang radio. Gelombang yang melewati sebuah medium untuk satu dimensi seperti gelombang pada media tali ataupun kawat, sedangkan untuk kasus dua dimensi yang sering banyak dibahas yakni mengenai perambatan gelombang air laut. Gelombang pada permukaan air merupakan gelombang dua dimensi, karena medium gelombang permukaaan air mempunyai dua dimensi yaitu panjang dan lebar (Satriawan, 2012:76-77). Seperti firman Allah Swt. dalam al-Quran yaitu

وَمِنْ ءَايَٰتِهِۦٓ أَن يُرْسِلَ ٱلرِّيَاحَ مُبَشِّرَٰتٍ وَلِيُذِيقَكُم مِّن رَّحْمَتِهِۦ وَلِتَجْرِىَ ٱلْفُلْكُ بِأَمْرِهِۦ وَلِتَبْتَغُوا۟ مِن
فَضْلِهِۦ وَلَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٤٦﴾

"Dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah bahwa Dia mengirimkan angin sebagaai pembawa berita gembira dan untuk merasakan kepadamu sebagian dari rahmat-Nya dan supaya kapal dapat berlayar dengan perintahnya

dan (juga) supaya kamu dapat mencari karunia-Nya; mudah-mudahan kamu bersyukur” (*QS. ar-Ruum/30:46*).

Berdasarkan ayat di atas di antara tanda-tanda keesaan dan kekuasaan Allah serta bukti yang kuat untuk menyatakan bahwa Allah telah meniupkan “angin” menghalau awan ke suatu tempat, kemudian awan itu semakin berat, sehingga menjadi mendung yang akan menurunkan hujan. Dalam tafsir Al-Misbah ayat di atas berbicara tentang angin untuk menggambarkan nikmat Allah dan kuasa Allah di darat dan di laut. Angin ada yang membawa manfaat ada juga yang mengakibatkan bencana. Secara umum "angin" di sini sebagai angin yang bertiup membawa awan untuk menurunkan air hujan dan angin yang meniup kapal layar agar dapat berlayar di lautan. Makna "angin" dalam ayat ini adalah gelombang, bukan saja gelombang bunyi yang membawa berita tetapi juga gelombang radio atau gelombang elektromagnet yang mampu dipancarkan ke segala penjuru dunia bahkan seluruh jagad raya ini (Shihab, 2002:83-84). Sehingga dalam penelitian ini penulis mencoba untuk mengkaji fenomena persamaan gelombang dua dimensi.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan gelombang dua dimensi adalah metode jaringan fungsi radial basis atau *Radial Basis Function* (RBF). RBF merupakan salah satu metode yang digunakan dalam jaringan syaraf tiruan untuk penyelesaian masalah di bidang matematika, teknik, biologi, dan lain sebagainya. Jadi RBF merupakan suatu aplikasi jaringan syaraf tiruan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial (Mai-Duy & Tran-Cong, 2001:4-5).

Beberapa peneliti telah menggunakan RBF untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial dengan syarat batas, di antaranya Fitriya (2011) mengerjakan "Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan RBF", Mufidah (2014) mengerjakan "Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan RBF pada Koordinat Polar", Divo & Kassab (2007) mengerjakan "Penyelesaian Persamaan Panas Menggunakan RBF", Jamhuri (2011) mengerjakan "Penyelesaian Numerik Persamaan Differensial Biasa Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis", dan Boztosun & Caner (2007) telah menyelesaikan artikelnya yaitu "*Mesh-Free Radial Basis Functions Method for the Accurate Numerical Solution of the Radial Schrödinger Equation: I-Bound States*". Sehingga sejak saat itu banyak peneliti menyarankan beberapa variasi metode jaringan RBF dalam menyelesaikan masalah persamaan diferensial parsial.

Pada umumnya, metode RBF mampu menyelesaikan solusi secara numerik. Namun tidak semua persamaan diferensial parsial dapat diselesaikan menggunakan jaringan RBF (Dehghan & Shokri, 2008).

Berdasarkan uraian di atas peneliti akan menyelesaikan masalah persamaan gelombang dua dimensi menggunakan metode jaringan Fungsi Radial Basis (RBF).

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimanakah solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi menggunakan metode jaringan RBF?

1.3 Tujuan Penelitian

Untuk mengetahui penyelesaian numerik persamaan gelombang dua dimensi menggunakan metode jaringan RBF.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian diharapkan dapat dijadikan sebagai dasar perhitungan untuk memecahkan masalah persamaan diferensial parsial *linear*, serta dapat memahami metode jaringan RBF sebagai salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan gelombang dua dimensi secara numerik.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Fungsi Basis yang digunakan adalah fungsi *Multiquadrics* karena fungsi *Multiquadrics* dianggap dapat memberikan hasil yang lebih akurat dari pada fungsi *Gaussian* dan fungsi *Invers Multiquadrics* (Mai-Duy & Tran-Cong, 2003).
2. Fungsi Basis diselesaikan menggunakan metode langsung yaitu metode yang diperoleh dengan cara menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya.
3. Masalah yang dikaji diambil dari buku *Advanced Engineering Mathematics* (Kreyszig, 2007:577), yaitu:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy})$$

pada domain: $0 < x < a$, $0 < y < b$ dan $t > 0$

dengan kondisi awal: $u(x, y, 0) = f(x, y)$

dan kecepatan awal: $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$

serta syarat batas: $u(0, y, t) = 0 \quad u(a, y, t) = 0$

$u(x, 0, t) = 0 \quad u(x, b, t) = 0$

1.6 Metode Penelitian

Pada penelitian ini penulis menggunakan jenis penelitian deskriptif kualitatif dengan metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian kepustakaan, yakni melakukan penelusuran dan penelaahan terhadap beberapa literatur yang berhubungan dengan topik bahasan. Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mendiskritisasi secara implisit persamaan gelombang dua dimensi menggunakan beda pusat terhadap waktu dan dihampiri menggunakan jaringan RBF.
2. Mensubstitusikan nilai-nilai input (x_i, y_i) dan $u(x_i, y_i)$ pada persamaan gelombang dalam bentuk persamaan jaringan RBF yang telah diperoleh.
3. Menghitung nilai-nilai koefisien w_j .
4. Mencari solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi dengan mengalikan nilai-nilai koefisien w_j dan fungsi basis *Multiquadrics*.
5. Melakukan simulasi, menggambar grafik, dan menganalisis galat.
6. Menyimpulkan hasil penelitian yang diperoleh serta memberi saran bagi penelitian selanjutnya.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami intisari dari skripsi ini yang terbagi menjadi empat bagian, yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini dijelaskan tentang gambaran umum dari teori yang mendasari pembahasan. Pada bab ini akan diuraikan tentang penurunan persamaan gelombang dua dimensi, Jaringan Radial Basis Function (RBF), Metode Langsung dan tidak Langsung, dan Metode *Pseudoinvers.*

Bab III Pembahasan

Bab ini merupakan bab inti dari penulisan yang menjelaskan tentang penyelesaian secara numerik persamaan gelombang dua dimensi menggunakan jaringan Radial Basis Function (RBF).

Bab IV Penutup

Bab ini dibahas tentang rangkuman hasil penelitian yang berupa kesimpulan dari pembahasan hasil penelitian yang telah dibahas dengan dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

1.1 Penurunan Persamaan Gelombang Dua Dimensi

Penurunan persamaan gelombang dua dimensi telah banyak dilakukan oleh para penulis, di antaranya Satriawan (2012:77-82) menyelesaikan masalah getaran dan gelombang, Strauss (2007:33-37) menyelesaikan masalah gelombang dan difusi, serta Soejati & Djuhana (2004:60-64) menyelesaikan masalah gelombang.

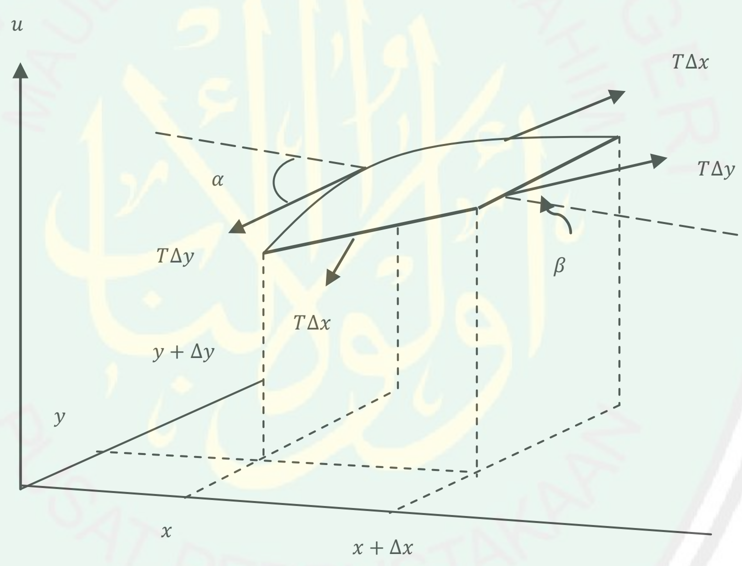
Dalam penelitian ini penulis akan memaparkan penurunan persamaan gelombang dua dimensi. Menurut Kreyszig (2007:575-577) gelombang 2D merupakan rambatan getaran pada sebuah membran atau gelombang di permukaan air. Dalam hal ini membrannya berbentuk persegi panjang. Untuk memecahkan masalah membran yang bergetar, maka harus menentukan solusi $u(x, y, t)$ pada titik x, y dan waktu $t > 0$.

Diberlakukan asumsi-asumsi dasar sebagai berikut:

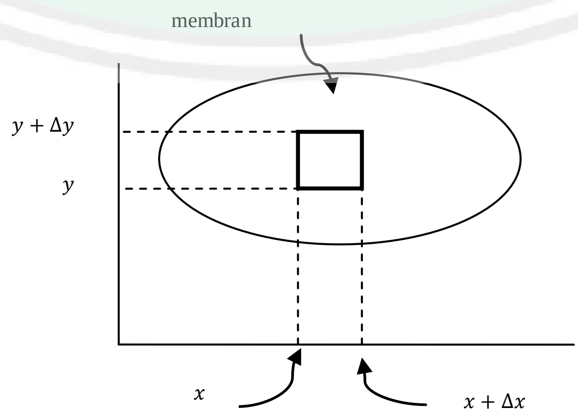
1. Massa membran per satuan luas dianggap konstan (membran homogen). Membrannya fleksibel sempurna dan begitu tipis sehingga tidak ada perlawanan terhadap gaya yang bekerja (pelengkungan).
2. Membran itu direnggangkan dan kemudian ditentukan batasnya pada bidang xy. Tegangan per satuan panjang T menyebabkan regangan membran sama di semua titik dan arah, dan juga tidak berubah selama bergerak.

3. Defleksi membran $u(x, y, t)$ itu selama gerakan adalah relatif kecil dibandingkan dengan ukuran membran, dan semua sudut inklinasi adalah kecil.

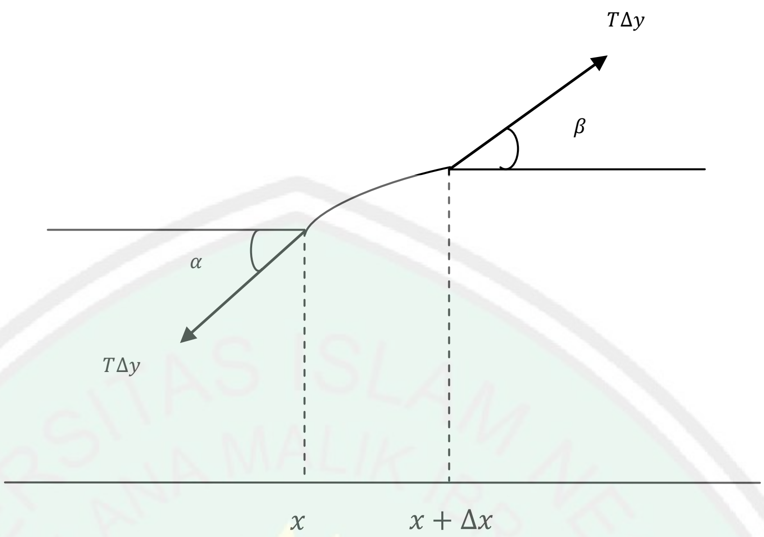
Untuk menurunkan persamaan diferensial yang mengatur gerak membran ini, dilihat gaya-gaya yang bekerja pada membran tersebut. Karena defleksi (penyimpangan arah) membran dan sudut inklinasinya (kemiringan) kecil, maka tegangannya bersifat tangensial atau menyinggung membran tersebut. Sehingga gaya-gaya yang bekerja pada sisi-sisi bagian kecil tersebut sama dengan $T\Delta x$ dan $T\Delta y$.



Gambar 2.1 Membran dengan Ukuran $\Delta x \Delta y$



Gambar 2.2 Membran pada Gaya yang Bekerja



Gambar 2.3 Belahan dari Membran pada Gaya yang Bekerja

Sesuai dengan Gambar 2.3 di mana komponen vertikal gaya tersebut sepanjang sisi yang sejajar dengan bidang yakni:

$$T\Delta y \sin\beta \qquad \text{dan} \qquad -T\Delta y \sin\alpha$$

di sini α dan β adalah nilai sudut inklinasi di tengah tepi membran, dan tanda minus muncul karena gaya pada sisi kiri diarahkan langsung menuju ke bawah. Karena sudut kecil, dapat mengganti sinusnya dengan tangen. Untuk memperoleh persamaan gelombang yang berbentuk diferensial parsial digunakan Hukum II Newton yaitu resultan gaya yang bekerja pada suatu benda sebanding dengan massa $(\rho\ \Delta x\ \Delta y)$ dan percepatannya $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$, yang dihitung pada titik antara y dan $y + \Delta y$ di mana ρ adalah massa membran persatuan luas, sedangkan Δx dan Δy adalah luas bagian membran. Jadi menurut Hukum II Newton adalah

$$T\Delta y \sin\beta + (-T\Delta y \sin\alpha) = \rho\ \Delta x\ \Delta y\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

$$T\Delta y \sin\beta - T\Delta y \sin\alpha = \rho\ \Delta x\ \Delta y\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

$$T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) = \rho\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

$$\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) \tag{2.4}$$

Maka resultan kedua komponen vertikal itu adalah

$$T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) \approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) \tag{2.5}$$

$$= T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \tag{2.6}$$

dengan y_1 dan y_2 adalah nilai antara y dan $y + \Delta y$.

Begitu pula resultan komponen horizontal dari gaya yang bekerja pada kedua sisi lainnya adalah

$$T\Delta x\ \sin\beta \quad \text{dan} -T\Delta x\ \sin\alpha$$

Menurut Hukum II Newton yaitu resultan gaya yang bekerja pada suatu benda sebanding dengan massa $(\rho\,\Delta x\,\Delta y)$ dan percepatannya $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$, yang dihitung pada titik antara x dan $x + \Delta x$, di mana ρ adalah massa membran persatuan luas, sedangkan Δx dan Δy adalah luas bagian membran. Jadi menurut Hukum II Newton adalah

$$T\Delta x \sin\beta + (-T\Delta x \sin\alpha) = \rho\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.7}$$

$$T\Delta x \sin\beta - T\Delta x \sin\alpha = \rho\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

$$T\Delta x(\sin\beta - \sin\alpha) = \rho\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.9}$$

$$\rho\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta x(\sin\beta - \sin\alpha) \tag{2.10}$$

Maka resultan komponan horizontal dari gaya yang bekerja pada kedua sisi lainnya adalah

$$T\Delta x(\sin\beta - \sin\alpha) \approx T\Delta x(\tan\beta - \tan\alpha) \tag{2.11}$$

$$= T\Delta x[u_y(x+\Delta x, y_1) - u_y(x, y_2)] \tag{2.12}$$

dimana x_1 dan x_2 adalah nilai antara x dan $x + \Delta x$

Menurut Hukum II Newton, jumlah gaya-gaya yang diberikan pada persamaan (2.6) dan (2.12) dengan massa $\rho\ \Delta x\ \Delta y$ dan percepatannya $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, maka

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)] \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\right] \tag{2.14}$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0}\left[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\right] \tag{2.15}$$

Kedua ruas dibagi dengan Δx dan Δy sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}[u_x(x, y_1) - u_x(x, y_2) + u_y(x_1, y) - u_y(x_2, y)] \tag{2.16}$$

Misal $\frac{T}{\rho} = c^2$ maka persamaan (2.16) menjadi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2[u_x(x, y_1) - u_x(x, y_2) + u_y(x_1, y) - u_y(x_2, y)] \tag{2.17}$$

Sehingga diperoleh bentuk umum persamaan gelombang dua dimensi adalah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{2.18}$$

atau

$$u_{tt} = c^2\nabla^2 u = c^2(u_{xx} + u_{yy}) \tag{2.19}$$

2.2 Jaringan Fungsi Radial Basis (*Radial Basis Function (RBF)*)

Jaringan syaraf yang dibentuk menggunakan fungsi aktivasi berupa fungsi radial basis dinamakan jaringan fungsi radial basis. Jaringan ini ditemukan pertama kali oleh Maxwell pada tahun 1985 yang dikenalkan sebagai solusi dari masalah '*real multivariate interpolation system*'. Jaringan ini akan bekerja dengan baik apabila data input yang diberikan cukup banyak. Jaringan fungsi radial basis ini terdiri atas 3 bagian, yaitu *input layer*, *hidden layer*, dan *output layer*. Setiap bagian pada *hidden layer* merupakan fungsi basis yang digunakan dalam mengaktifkan fungsi radial basis. Setiap input dari jaringan ini akan mengaktifkan semua fungsi aktivasi pada *hidden layer*. Setiap bagian dari *hidden layer* merupakan fungsi aktivasi tertentu yang disebut sebagai fungsi basis. Di dalam *hidden layer* terdapat sejumlah fungsi basis yang sejenis sesuai dengan perancangan. Setiap fungsi basis akan menghasilkan sebuah keluaran dengan bobot tertentu. *Output* jaringan ini merupakan jumlah dari seluruh *output* fungsi basis dikalikan dengan bobot masing-masing (Cahyani, dkk, 2014).

Jamhuri (2011) dalam artikelnya mengatakan bahwa beberapa metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial seperti metode Euler, Adam-Basforth, Bulirsch-Stoer, Runge-Kutta, dan lain sebagainya, dapat menimbulkan penambahan kesalahan (*error*) yang sangat besar. Sehingga dalam artikelnya yang berjudul "Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis" lebih memilih menggunakan RBF dengan alasan bahwa RBF merupakan salah satu metode yang baik dalam mengaproksimasi fungsi dan turunannya baik secara *linear* maupun non *linear*. Begitu juga dengan Larsson, Uppsala, & Fornberg (2002) yang menggunakan metode RBF dalam artikelnya yang berjudul "*A Numerical Study of some Radial Basis*

Function on Based Solution Methods for Elliptic PDEs" karena RBF hanya bergantung pada titik pusat dari fungsi basisnya, serta memiliki parameter *error* yang akurat. Bentuk utama dari RBF adalah menggunakan pendekatan perhitungan yang sangat mudah dalam bentuk dimensi ruang atau ruang tiga dimensi sehingga tidak kesulitan jika digunakan untuk menyelesaikan permasalahan orde tinggi. Selain itu juga Tan, Gracianti, & Lukas (2012:175-181) menggunakan metode RBF dalam penulisan artikelnya karena jaringan RBF menggunakan perhitungan yang lebih mudah sehingga dapat memberikan pengajaran yang lebih cepat dibandingkan dengan metode yang lain.

Himpunan yang anggotanya berisi variabel bebas (x) dan variabel terikat (y) dilambangkan dengan $\{x_i, y_i\}_{i=1}^{n}$ dengan n adalah banyaknya *input*. Jaringan fungsi radial basis merepresentasikan sebuah pemetaan dari vektor input dengan p-dimensi ke vektor *output* yang hanya 1-dimensi. Secara matematis mengikuti (Mai-Duy & Tran-Cong, 2003) jaringan fungsi radial basis ditulis dengan $f\colon \mathrm{R}^{\mathrm{p}} \rightarrow \mathrm{R}^{1}$.

RBF adalah fungsi dengan nilai yang bergantung dari tingkat perbedaan atau jarak terhadap daerah asal yang terdiri dari koefisien $\{w_j\}_{j=1}^{m}$ dan himpunan koefisien fungsi basis $\{\Phi_i\}_{i=1}^{n}$, sehingga $\Phi(x_i) = \Phi(\|x_i\|)$ atau jarak dari sebuah titik c, yang dianggap sebagai titik tengah sehingga $\Phi(x_i, c_j) = \Phi(\|x_i - c_j\|)$, dimana $\|\cdot\| = \sqrt{(x_i - c_j)(x_i - c_j)}$. Dan $\{c_j\}_{j=1}^{m}$ adalah himpunan titik-titik *center* dari x ke-i. Fungsi yang memenuhi fungsi di atas disebut sebagai fungsi basis (Buhmann, 2003).

Beberapa bentuk dari fungsi basis yang banyak digunakan pada jaringan fungsi radial basis adalah fungsi *Multiquadrics*, fungsi *Inverse Multiquadrics*, dan fungsi *Gaussian*. Akan tetapi dari ketiga fungsi diatas penulis lebih memilih fungsi *Multiquarics*, karena *error* yang dihasilkan untuk turunan hampiran paling kecil jika dibandingkan dengan fungsi yang lain. Hal ini juga dapat diverifikasi pada *Approximation of Function and Its Derivatives Using Radial Basis Function Networks* (Mai-Duy & Tran-Cong, 2003).

Berikut ini merupakan bentuk umum fungsi basis yang sering digunakan dalam jaringan RBF yaitu fungsi *Multiquardic* antara lain:

1. Untuk fungsi 1 variabel

$$\Phi(x_i, c_j) = \sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}, \text{ untuk setiap } a > 0 \tag{2.20}$$

2. Untuk fungsi 2 variabel

$$\Phi(x_i, y_i, c_j, d_j) = \sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2}, \text{ untuk setiap } \beta > 0 \tag{2.21}$$

Keterangan,

x_i : vektor *input* ke-i

y_i : vektor *input* ke-i

c_j : titik *center* ke-j dari x ke-i

d_j : titik *center* ke-j dari y ke-i

a : nilai parameter *width* untuk fungsi 1 variabel, dengan $a = var(x_i)$

β : nilai parameter *width* untuk fungsi 1 variabel, dengan $\beta = \frac{var\,(x_i) + var\,(y_i)}{2}$

Untuk aproksimasi fungsi 1 variabel $f(x)$ adalah:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j\, \Phi(x_i, c_j) \tag{2.22}$$

Untuk aproksimasi fungsi 2 variabel $f(x, y)$ adalah:

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, \Phi(x_i, y_i, c_j, d_j) \tag{2.23}$$

Sedangkan untuk mengaproksimasi fungsi 3 variabel sampai *n* variabel cukup merubah fungsi basisnya saja mengikuti fungsi yang diaproksimasi tersebut.

Pada dasarnya RBF digunakan sebagai fungsi pendekatan sebuah nilai dengan bentuk $f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, \Phi(x_i, c_j)$. Dengan koefisien w_j yang dapat diperoleh dengan menggunakan metode *least square*, karena fungsi pendekatan ini bersifat *linear*. Menghitung koefisien w_j yang belum diketahui. Kemudian dipilih himpunan fungsi basis Φ, dan langkah selanjutnya adalah menghitung koefisien w_j. Setelah diperoleh himpunan koefisien w_j, maka jaringan fungsi radial basis dapat dibentuk. Karena jaringan fungsi radial basis dibentuk oleh himpunan koefisien w_j dan himpunan fungsi basis Φ. Maka fungsi radial basis dapat dihitung.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, \Phi(x_i, c_j)$$

Mai-Duy & Tran-Cong (2003) menyatakan bahwa hubungan antara koefisien w, solusi pendekatan y, dan fungsi basis Φ adalah

$$\Phi w = u \tag{2.24}$$

$$(\Phi^{-1}\Phi)w = \Phi^{-1}u \tag{2.25}$$

$$w = \Phi^{-1}u \tag{2.26}$$

dengan

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1) & \Phi_2(x_1) & \cdots & \Phi_m(x_1) \\ \Phi_1(x_2) & \Phi_2(x_2) & \cdots & \Phi_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Phi_1(x_n) & \Phi_2(x_n) & \cdots & \Phi_m(x_n) \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

$$w = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T \tag{2.28}$$

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \tag{2.29}$$

2.3 Turunan Hampiran dengan RBF

Dalam RBF terdapat dua metode untuk memperoleh turunan hampiran antara lain:

2.3.1 Metode Langsung

Menurut Mai-Duy & Tran-Cong (2003) untuk mengaproksimasi fungsi radial basis menggunakan metode langsung diperoleh dengan menurunkan fungsi basis terhadap variabel bebasnya antara lain.

a. Aproksimasi fungsi radial basis 1D

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{n} W_j \sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}$$

i. Turunan pertama:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{df}{dx} &\approx \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} W_j \sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{d}{dx}\left(\sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{x_i - c_j}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Diturunkan satu kali terhadap x

ii. Turunan kedua:

$$f''(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} W_j \frac{x_i - c_j}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{d}{dx}\left(\frac{x_i - c_j}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + a} - \frac{(x_i - c_j)(x_i - c_j)}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}}}{\left((x_i - c_j)^2 + a\right)}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{(x_i - c_j)^2 + a - (x_i - c_j)^2}{\left((x_i - c_j)^2 + a\right)\sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{a}{\left((x_i - c_j)^2 + a\right)\sqrt{(x_i - c_j)^2 + a}} \qquad (2.31)$$

b. Aproksimasi fungsi radial basis 2D

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{n} W_j \sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - c_j)^2 + \beta^2}$$

i. Turunan pertama:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} W_j \sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - c_j)^2 + \beta^2}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{d}{dx}\left((x_i - c_j)^2 + (y_i - c_j)^2 + \beta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{1}{2}\left((x_i - c_j)^2 + (y_i - c_j)^2 + \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}} . 2x_i - 2c_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{2x_i - 2c_j}{2}\left((x_i - c_j)^2 + (y_i - c_j)^2 + \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{x_i - c_j}{\left((x_i - c_j)^2 + (y_i - c_j)^2 + \beta^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{x_i - c_j}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - c_j)^2 + \beta^2}} \qquad (2.32)$$

ii. Turunan kedua:

$$f''(x) = \frac{df}{dx} \approx \frac{d}{dx}\left(\sum_{j=1}^{n} W_j \frac{x_i - c_j}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - c_j)^2 + \beta^2}}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{d}{dx} \frac{1 \cdot \sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2} - \left(x_i - c_j \left(\frac{x_i - c_j}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2}} \right) \right)}{\left(\sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2} \right)^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2} - \frac{(x_i - c_j)^2}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2}}}{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{\frac{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2 - (x_i - c_j)^2}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2}}}{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2 - (x_i - c_j)^2}{\sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2}} \frac{1}{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2 - (x_i - c_j)^2}{\left((x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2 \right) \sqrt{(x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{(y_i - d_j)^2 + \beta^2}{\left((x_i - c_j)^2 + (y_i - d_j)^2 + \beta^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.33)$$

2.3.2 Metode Tidak Langsung

Metode tidak langsung perhitungannya terdiri dari dua tahap, tahap pertama $f(x)$ sama dengan fungsi asli dan $f'(x)$ sama dengan fungsi turunan. Sedangkan tahap kedua $f'(x)$ diperoleh pada tahap pertama yaitu sama dengan $f(x)$ dan $f''(x)$ sama dengan fungsi turunan atau yang biasa disebut dengan pengintegralan. Pengintegralan disebut dengan metode tidak langsung (Mai-Duy & Tran-Cong, 2003).

2.4 Metode *Pseudoinverse*

Jika sebuah matriks bujur sangkar dinotasikan dengan A, maka invers matriks pada operasi perkaliannya dituliskan sebagai A^{-1} yang dapat dicari dengan persamaan:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\hat{A} \tag{2.34}$$

dengan $\hat{A}$ adalah matriks *adjoint* A, dan $|A|$ adalah nilai determinannya. Sehingga jelas jika A^{-1} ada maka $|A| \neq 0$, dan jika A^{-1} tidak ada maka $|A| = 0$, dalam arti lain dikatakan bahwa A yang berdeterminan 0 (nol) tidak mempunyai invers, atau bersifat singular.

Misalkan A adalah sistem persamaan *linear* $Ax = b$ merupakan matriks *real* dengan ukuran m x n, dengan m adalah baris dan n adalah kolom yang berarti $rank(A) = m \leq n$, maka $A^T A$ tidak tunggal dalam arti bahwa $A^+ A = I$. Dengan A^+ diperoleh dari $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$. Sedangkan jika $n \leq m$, maka $A^T A$ tidak tunggal dalam arti bahwa $AA^+ = I$. A^+ diperoleh dari $A^+ = A^T (A^T A)^{-1}$. Dan jika A^+ adalah matriks persegi, maka $A^+ = A^{-1}$. Untuk mendapatkan *error* $e = b - Ax$ menuju ke nol, ketika $e = 0$, x adalah solusi tepat untuk $Ax = b$. *Error* e sekecil mungkin diperoleh jika $\hat{x}$ adalah solusi kuadrat terkecil dari sistem persamaan tersebut. Dari sini diketahui bahwa tujuan dari *pseudoinverse* adalah untuk menghitung nilai $\hat{x}$ dan mengaplikasikannya (Strang, 2009:404-405).

1.5 Prespektif al-Quran tentang Gelombang

Gelombang adalah suatu gangguan yang menjalar dalam suatu medium dimana medium tersebut merupakan sekumpulan benda yang saling berinteraksi. Fenomena gelombang dua dimensi dapat dilihat pada gelombang air di laut. Berikut ayat al-Quran mengenai gelombang

هُوَ ٱلَّذِى يُسَيِّرُكُمۡ فِى ٱلۡبَرِّ وَٱلۡبَحۡرِ ۖ حَتَّىٰٓ إِذَا كُنتُمۡ فِى ٱلۡفُلۡكِ وَجَرَيۡنَ بِهِم بِرِيحٍ طَيِّبَةٍ وَفَرِحُواْ بِهَا جَآءَتۡهَا رِيحٌ عَاصِفٌ وَجَآءَهُمُ ٱلۡمَوۡجُ مِن كُلِّ مَكَانٍ وَظَنُّوٓاْ أَنَّهُمۡ أُحِيطَ بِهِمۡ ۙ دَعَوُاْ ٱللَّهَ مُخۡلِصِينَ لَهُ ٱلدِّينَ لَئِنۡ أَنجَيۡتَنَا مِنۡ هَٰذِهِۦ لَنَكُونَنَّ مِنَ ٱلشَّٰكِرِينَ ﴿٢٢﴾

"*Dialah Tuhan yang menjadikan kamu dapat berjalan di daratan, (berlayar) di lautan. sehingga apabila kamu berada di dalam bahtera, dan meluncurlah bahtera itu membawa orang-orang yang ada di dalamnya dengan tiupan angin yang baik, dan mereka bergembira karenanya, datanglah angin badai, dan (apabila) gelombang dari segenap penjuru menimpanya, dan mereka yakin bahwa mereka telah terkepung (bahaya), Maka mereka berdoa kepada Allah dengan mengikhlaskan ketaatan kepada-Nya semata-mata. (mereka berkata)": "Sesungguhnya jika Engkau menyelamatkan Kami dari bahaya ini, pastilah Kami akan Termasuk orang-orang yang bersyukur"* (*QS. Yunus/10:22*).

Ayat di atas menjelaskan balasan bagi orang yang ingkar terhadap kekuasaan Allah di mana kata "ريح" yang artinya "angin" sebagai penggerak dari gelombang tersebut. Kata "ريح طبه " disandingkan dengan kata "ريح عاصف " yaitu untuk membandingkan antara angin yang baik dan angin yang jahat. Angin yang baik maksudnya adalah angin yang tidak mendatangkan bencana sedangkan yang dimaksud dengan angin jahat adalah angin yang akan mendatangkan bencana misalnya badai, topan, dan lain-lain. Dalam hal ini gelombang terjadi karena adanya angin dan ketinggian atau besar gelombang juga dipengaruhi oleh besarnya angin, semakin besar angin yang datang atau yang disebut dengan ريح" "عاصف tadi, maka akan semakin besar pula gelombangnya. Ketika Allah Swt. membuktikan kekuasaannya tidak akan ada yang selamat bagi mereka yang ingkar terhadapnya (Shihab, 2002).

Dengan adanya angin yang dapat mendatangkan kebaikan tadi sehingga disebutkan juga dalam surat al-Furqaan

وَهُوَ ٱلَّذِىٓ أَرۡسَلَ ٱلرِّيَٰحَ بُشۡرَۢا بَيۡنَ يَدَىۡ رَحۡمَتِهِۦ ۚ وَأَنزَلۡنَا مِنَ ٱلسَّمَآءِ مَآءً طَهُورًا ﴿٤٨﴾

"*Dia-lah yang meniupkan angin (sebagai) pembawa kabar gembira dekat sebelum kedatangan rahmat-Nya (hujan); dan Kami turunkan dari langit air yang amat bersih*"(*QS.al-Furqaan/25:48*).

Pada ayat sebelumnya diketahui bahwa gelombang terjadi karena adanya angin. Kata "ارسل" dimaknai dengan pendorong atau penggerak angin, dalam hal ini penggerak angin yang dimaksudkan adalah Allah. Dengan demikian ayat di atas mengandung pengertian bahwa:

1. Angin bergerak tidak dengan sendirinya melainkan adanya dorongan dari Allah "هوالذي ارسل الرياح".
2. Adanya dorongan melalui angin itulah, maka akan menyebabkan terjadinya gelombang.
3. Adanya angin pula dapat mendatangkan rahmat atau manfaat bagi umat serta dapat pula mendatangkan musibah atau bencana.

Dalam kalimat "ارسل الرياح" dijelaskan bahwa yang mendatangkan atau yang meniupkan angin-angin tersebut adalah Allah Swt.. Dimana kata "رياح" disini adalah jama' dari kata "ريح" yang artinya angin-angin. Maksud dari kata "رياح" ini adalah angin yang dapat mendatangkan rahmat atau manfaat bagi umat dalam istilah matematika disebut dengan gelombang stabil sedangkan maksud dari kata "ريح" adalah angin yang dapat mendatangkan bencana atau dalam istilah matematika disebut gelombang tidak stabil. Sehingga jelaslah bahwa kalimat " ارسل الرياح" ini Allah telah mendatangkan rahmat yang berupa hujan dan air yang sangat bersih yang dapat memberikan manfaat bagi kemaslahatan umat (Shihab, 2002).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Diskritisasi

Setelah dilakukan penurunan sebagaimana telah dijelaskan pada bab 2 maka diperoleh persamaan gelombang dua dimensi pada koordinat kartesius sebagai berikut:

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \text{ pada } \{0 < x < a,\ \ 0 < y < b,\ \ t > 0\} \tag{3.1}$$

dengan kondisi awal: $u(x, y, 0) = f(x, y)$ (3.2)

dan kecepatan awal: $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$ (3.3)

serta syarat batas: $u(0, y, t) = 0 \quad u(a, y, t) = 0$ (3.4)

$$u(x, 0, t) = 0 \quad u(x, b, t) = 0 \tag{3.5}$$

dimana u merupakan perubahan ketinggian gelombang pada koordinat x, y dan t. Sedangkan c merupakan koefisien cepat rambat gelombang. Persamaan (3.1) akan didiskritisasi secara implisit menggunakan beda pusat terhadap waktu, begitu juga dengan persamaan (3.2) dan (3.3) juga akan didekati menggunakan beda pusat terhadap waktu sebagai berikut.

$$\frac{u^{n+1} - 2u^n + u^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2\left(u_{xx}^{n+1} + u_{yy}^{n+1}\right) \tag{3.6}$$

Untuk persamaan (3.2) dan (3.3) menjadi

$$u^1 = f(x, y) \tag{3.7}$$

dan

$$\frac{u^2 - u^0}{2\Delta t} = g(x, y) \tag{3.8}$$

$$u^0 = u^2 - 2\Delta t g(x, y)$$

Dari uraian di atas diperoleh persamaan (3.6) sebagai berikut:

$$u^{n+1} - c^2\Delta t^2\left(u_{xx}^{n+1} + u_{yy}^{n+1}\right) = 2u^n - u^{n-1} \tag{3.9}$$

Berikutnya persamaan (3.9) akan dijabarkan menjadi persamaan (3.10) yaitu

$$u^{n+1} - c^2\Delta t^2 u_{xx}^{n+1} - c^2\Delta t^2 u_{yy}^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} \tag{3.10}$$

Pada saat indeks $n = 1$ maka persamaan (3.10) menjadi

$$u^2 - (c\Delta t)^2 u_{xx}^2 - (c\Delta t)^2 u_{yy}^2 = 2u^1 - u^0 \tag{3.11}$$

$$u^2 - c^2\Delta t^2 u_{xx}^2 - c^2\Delta t^2 u_{yy}^2 = 2u^1 + (u^2 - 2\Delta t g(x,y)) \tag{3.12}$$

Nilai u^0 dan u^1 pada persamaan (3.12) diperoleh dari persamaan (3.7) dan (3.8) sehingga menjadi

$$u^2 - \frac{c^2\Delta t^2}{2} u_{xx}^2 - \frac{c^2\Delta t^2}{2} u_{yy}^2 = f(x,y) + \Delta t g(x,y) \tag{3.13}$$

Untuk indeks $n = 2, \ldots, p$ berjalan sebanyak t, maka berlaku persamaan (3.10). Berikutnya u^{n+1}, u_{xx}^{n+1} dan u_{yy}^{n+1} akan dihampiri menggunakan jaringan RBF menjadi persamaan (3.14), (3.15), dan (3.16)

$$u^{n+1} \approx \sum_{j=1}^{N} w_j^{n+1} \Phi_j(x, y, c_j, d_j) \tag{3.14}$$

$$u_{xx}^{n+1} \approx \sum_{j=1}^{N} w_j^{n+1} \Phi_{xxj}(x, y, c_j, d_j) \tag{3.15}$$

$$u_{yy}^{n+1} \approx \sum_{j=1}^{n} w_j^{n+1} \Phi_{yyj}(x, y, c_j, d_j) \tag{3.16}$$

dimana nilai-nilai w_j^{n+1} merupakan koefisien bobot yang akan dicari, dan indeks $j = 1, \ldots, N$ diperoleh dari $m \times k$, serta $\Phi(x, y, c_j, d_j)$ adalah fungsi basis *Multiquadrics* yang telah didefinisikan pada bab 2 sebagai berikut:

$$\Phi(x, y, c_j, d_j) = \sqrt{(x - c_j)^2 + (y - d_j)^2 + \beta^2} \tag{3.17}$$

dengan

$$\beta = \frac{var(X) + var(Y)}{2}$$

dan $var(x)$, $var(y)$ adalah varian dari x dan y, dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$, sedangkan Φ_{xx} dan Φ_{yy} adalah turunan kedua fungsi basis Φ terhadap x dan y, yaitu

$$\Phi_{xx}(x, y, c_j, d_j) = \frac{(y - d_j)^2 + \beta^2}{\left((x - c_j)^2 + (y - d_j)^2 + \beta^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.18}$$

dan

$$\Phi_{yy}(x, y, c_j, d_j) = \frac{(x - c_j)^2 + \beta^2}{\left((x - c_j)^2 + (y - d_j)^2 + \beta^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.19}$$

Dengan menggunakan jaringan RBF pada persamaan (3.14), (3.15), dan (3.16) untuk $n = 1$ maka persamaan (3.13) menjadi

$$\sum_{j=1}^{N} w_j^2 \left(\Phi(x, y, c_j, d_j) - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \Phi_{xx}(x, y, c_j, d_j) - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \Phi_{yy}(x, y, c_j, d_j)\right) = f(x, y) + \Delta t g(x, y) \tag{3.20}$$

Untuk menyederhanakan persamaan (3.20) dimisalkan

$$h(x, y, c_j, d_j) = \left(\Phi(x, y, c_j, d_j) - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \Phi_{xx}(x, y, c_j, d_j) - \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \Phi_{yy}(x, y, c_j, d_j)\right) \tag{3.21}$$

Karena pada persamaan (3.21) terdapat pemisalan h, maka diperoleh persamaan (3.22) sebagai berikut:

$$\sum_{j=1}^{N} w_j^2 \, h(x, y, c_j, d_j) = f(x, y) + \Delta t g(x, y) \tag{3.22}$$

Berikutnya untuk indeks $n = 2, \dots, p$, dengan p sebanyak perulangan t akan disubstitusikan persamaan (3.14), (3.15), dan (3.16) pada persamaan (3.10) menjadi

$$\sum_{j=1}^{N} w_j^{n+1} \left(\Phi(x, y, c_j, d_j) - c^2 \Delta t^2 \Phi_{xx}(x, y, c_j, d_j) - c^2 \Delta t^2 \Phi_{yy}(x, y, c_j, d_j)\right) = 2u^n + u^{n-1} \tag{3.23}$$

Untuk menyederhanakan persamaan (3.23) dengan memisalkan

$$L(x, y, c_j, d_j) = \left(\Phi(x, y, c_j, d_j) - c^2 \Delta t^2 \Phi_{xx}(x, y, c_j, d_j) - c^2 \Delta t^2 \Phi_{yy}(x, y, c_j, d_j)\right) \tag{3.24}$$

dengan demikian persamaan (3.23) menjadi

$$\sum_{j=1}^{N} w_j^{n+1} L(x, y, c_j, d_j) = 2u^n + u^{n-1} \tag{3.25}$$

Selanjutnya adalah menghitung bobot w_j^2 pada persamaan (3.22), pada saat $n = 1$ dan N adalah banyaknya perulangan j yaitu $N = m \times k$, dengan m banyaknya perulangan dari x dan k adalah banyaknya perulangan y, dimana x dan y berbentuk vektor kolom. Sehingga akan membentuk sistem persamaan sebagai berikut:

$$w_1^2 h(x, y, c_1, d_1) + w_2^2 h(x, y, c_2, d_2) + \cdots + w_N^2 h(x, y, c_N, d_N) = f(x, y) + \Delta t g(x, y) \tag{3.26}$$

Berlaku sifat komutatif pada persamaan (3.26) untuk setiap sukunya karena h bernilai *real* sehingga persamaan (3.26) dapat dituliskan menjadi

$$h(x, y, c_1, d_1) w_1^2 + h(x, y, c_2, d_2) w_2^2 + \cdots + h(x, y, c_N, d_N) w_N^2 = f(x, y) + \Delta t g(x, y) \tag{3.27}$$

Berikut penjelasan persamaan (3.27) pada saat $n = 1$, dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$

$$h(x_1,y_1,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_1,y_1,c_N,d_N)w_N^2=f(x_1,y_1)+\Delta t g(x_1,y_1)$$

$$h(x_1,y_2,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_1,y_2,c_N,d_N)w_N^2=f(x_1,y_2)+\Delta t g(x_1,y_2)$$

$$h(x_1,y_3,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_1,y_3,c_N,d_N)w_N^2=f(x_1,y_3)+\Delta t g(x_1,y_3)$$

$$\vdots$$

$$h(x_1,y_{k-1},c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_1,y_{k-1},c_N,d_N)w_N^2=f(x_1,y_{k-1})+\Delta t g(x_1,y_{k-1})$$

$$h(x_1,y_k,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_1,y_k,c_N,d_N)w_N^2=f(x_1,y_k)+\Delta t g(x_1,y_k)$$

$$h(x_2,y_1,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_2,y_1,c_N,d_N)w_N^2=f(x_2,y_1)+\Delta t g(x_2,y_1)$$

$$h(x_2,y_2,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_2,y_2,c_N,d_N)w_N^2=f(x_2,y_2)+\Delta t g(x_2,y_2)$$

$$h(x_2,y_3,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_2,y_3,c_N,d_N)w_N^2=f(x_2,y_3)+\Delta t g(x_2,y_3)$$

$$\vdots$$

$$h(x_2,y_{k-1},c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_2,y_{k-1},c_N,d_N)w_N^2=f(x_2,y_{k-1})+\Delta t g(x_2,y_{k-1})$$

$$h(x_2,y_k,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_2,y_k,c_N,d_N)w_N^2=f(x_2,y_k)+\Delta t g(x_2,y_k)$$

$$h(x_3,y_1,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_3,y_1,c_N,d_N)w_N^2=f(x_3,y_1)+\Delta t g(x_3,y_1)$$

$$h(x_3,y_2,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_3,y_2,c_N,d_N)w_N^2=f(x_3,y_2)+\Delta t g(x_3,y_2)$$

$$h(x_3,y_3,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_3,y_3,c_N,d_N)w_N^2=f(x_3,y_3)+\Delta t g(x_3,y_3)$$

$$\vdots$$

$$h(x_3,y_{k-1},c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_3,y_{k-1},c_N,d_N)w_N^2=f(x_3,y_{k-1})+\Delta t g(x_3,y_{k-1})$$

$$h(x_3,y_k,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_3,y_k,c_N,d_N)w_N^2=f(x_3,y_k)+\Delta t g(x_3,y_k)$$

$$h(x_m,y_1,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_m,y_1,c_N,d_N)w_N^2=f(x_m,y_1)+\Delta t g(x_m,y_1)$$

$$h(x_m,y_2,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_m,y_2,c_N,d_N)w_N^2=f(x_m,y_2)+\Delta t g(x_m,y_2)$$

$$h(x_m,y_3,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_m,y_3,c_N,d_N)w_N^2=f(x_m,y_3)+\Delta t g(x_m,y_3)$$

$$\vdots$$

$$h(x_m,y_{k-1},c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_m,y_{k-1},c_N,d_N)w_N^2=f(x_m,y_{k-1})+\Delta t g(x_m,y_{k-1})$$

$$h(x_m,y_k,c_1,d_1)w_1^2+\cdots+h(x_m,y_k,c_N,d_N)w_N^2=f(x_m,y_k)+\Delta t g(x_m,y_k)$$

Sistem di atas dapat ditulis menjadi persamaan matriks berikut

$$
\begin{bmatrix}
h(x_1,y_1,c_1,d_1) & \dots & h(x_1,y_1,c_N,d_N) \\
h(x_1,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_1,y_2,c_N,d_N) \\
h(x_1,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_1,y_3,c_N,d_N) \\
 & \vdots & \\
h(x_1,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_1,y_{k-1},c_N,d_N) \\
h(x_1,y_k,c_1,d_1) & \dots & h(x_1,y_k,c_N,d_N) \\
h(x_2,y_1,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_1,c_N,d_N) \\
h(x_2,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_2,c_N,d_N) \\
h(x_2,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_3,c_N,d_N) \\
 & \vdots & \\
h(x_2,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_{k-1},c_N,d_N) \\
h(x_2,y_k,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_k,c_N,d_N) \\
h(x_3,y_1,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_1,c_N,d_N) \\
h(x_3,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_2,c_N,d_N) \\
h(x_3,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_3,c_N,d_N) \\
 & \vdots & \\
h(x_3,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_{k-1},c_N,d_N) \\
h(x_3,y_k,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_k,c_N,d_N) \\
h(x_m,y_1,c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_1,c_N,d_N) \\
h(x_m,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_2,c_N,d_N) \\
h(x_m,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_3,c_N,d_N) \\
 & \vdots & \\
h(x_m,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_{k-1},c_N,d_N) \\
h(x_m,y_k,c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_k,c_N,d_N)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1^2 \\ \vdots \\ w_N^2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
f(x_1,y_1)+\Delta t g(x_1,y_1) \\
f(x_1,y_2)+\Delta t g(x_1,y_2) \\
f(x_1,y_3)+\Delta t g(x_1,y_3) \\
\vdots \\
f(x_1,y_{k-1})+\Delta t g(x_1,y_{k-1}) \\
f(x_1,y_k)+\Delta t g(x_1,y_k) \\
f(x_2,y_1)+\Delta t g(x_2,y_1) \\
f(x_2,y_2)+\Delta t g(x_2,y_2) \\
f(x_2,y_3)+\Delta t g(x_2,y_3) \\
\vdots \\
f(x_2,y_{k-1})+\Delta t g(x_2,y_{k-1}) \\
f(x_2,y_k)+\Delta t g(x_2,y_k) \\
f(x_3,y_1)+\Delta t g(x_3,y_1) \\
f(x_3,y_2)+\Delta t g(x_3,y_2) \\
f(x_3,y_3)+\Delta t g(x_3,y_3) \\
\vdots \\
f(x_3,y_{k-1})+\Delta t g(x_3,y_{k-1}) \\
f(x_3,y_k)+\Delta t g(x_3,y_k) \\
f(x_m,y_1)+\Delta t g(x_m,y_1) \\
f(x_m,y_2)+\Delta t g(x_m,y_2) \\
f(x_m,y_3)+\Delta t g(x_m,y_3) \\
\vdots \\
f(x_m,y_{k-1})+\Delta t g(x_m,y_{k-1}) \\
f(x_m,y_k)+\Delta t g(x_m,y_k)
\end{bmatrix}
$$

Setelah diubah dalam bentuk matriks selanjutnya adalah mensubstitusikan persamaan (3.4) dan (3.5) pada persamaan matriks di atas. Diketahui persamaan (3.4) terdapat dua syarat batas, dengan mensubstitusikan syarat batas yang pertama terlebih dahulu yakni pada saat $x = 0$, dengan $x = x_1$ yaitu $u(0, y, t) = 0$, maka akan diperoleh persamaan matriks berikut:

$$
\begin{bmatrix}
\Phi(0,y_1,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_1,c_N,d_N) \\
\Phi(0,y_2,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_2,c_N,d_N) \\
\Phi(0,y_3,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_3,c_N,d_N) \\
 & \vdots & \\
\Phi(0,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_{k-1},c_N,d_N) \\
\Phi(0,y_k,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_k,c_N,d_N) \\
h(x_2,y_1,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_1,c_N,d_N) \\
h(x_2,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_2,c_N,d_N) \\
h(x_2,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_3,c_N,d_N) \\
 & \vdots & \\
h(x_2,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_{k-1},c_N,d_N) \\
h(x_2,y_k,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_k,c_N,d_N) \\
h(x_3,y_1,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_1,c_N,d_N) \\
h(x_3,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_2,c_N,d_N) \\
h(x_3,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_3,c_N,d_N) \\
 & \vdots & \\
h(x_3,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_{k-1},c_N,d_N) \\
h(x_3,y_k,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_k,c_N,d_N) \\
h(x_m,y_1,c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_1,c_N,d_N) \\
h(x_m,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_2,c_N,d_N) \\
h(x_m,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_3,c_N,d_N) \\
 & \vdots & \\
h(x_m,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_{k-1},c_N,d_N) \\
h(x_m,y_k,c_1,d_1) & \dots & h(x_m,y_k,c_N,d_N)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_1^2 \\ \vdots \\ w_N^2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\
f(x_2,y_1)+\Delta t g(x_2,y_1) \\
f(x_2,y_2)+\Delta t g(x_2,y_2) \\
f(x_2,y_3)+\Delta t g(x_2,y_3) \\
\vdots \\
f(x_2,y_{k-1})+\Delta t g(x_2,y_{k-1}) \\
f(x_2,y_k)+\Delta t g(x_2,y_k) \\
f(x_3,y_1)+\Delta t g(x_3,y_1) \\
f(x_3,y_2)+\Delta t g(x_3,y_2) \\
f(x_3,y_3)+\Delta t g(x_3,y_3) \\
\vdots \\
f(x_3,y_{k-1})+\Delta t g(x_3,y_{k-1}) \\
f(x_3,y_k)+\Delta t g(x_3,y_k) \\
f(x_m,y_1)+\Delta t g(x_m,y_1) \\
f(x_m,y_2)+\Delta t g(x_m,y_2) \\
f(x_m,y_3)+\Delta t g(x_m,y_3) \\
\vdots \\
f(x_m,y_{k-1})+\Delta t g(x_m,y_{k-1}) \\
f(x_m,y_k)+\Delta t g(x_m,y_k)
\end{bmatrix}
$$

Untuk syarat batas yang kedua pada persamaan (3.4) saat $x = a$, dengan $a = x_m$ yaitu $u(a, y, t) = 0$ akan disubstitusikan pada matriks di atas, dengan ketentuan hasil substitusi syarat batas yang pertama tetap berlaku untuk hasil substitusi syarat batas yang kedua dan seterusnya, sehingga diperoleh matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} \Phi(0,y_1,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_1,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_2,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_3,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(0,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_k,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_k,c_N,d_N) \\ h(x_2,y_1,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_1,c_N,d_N) \\ h(x_2,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_2,c_N,d_N) \\ h(x_2,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ h(x_2,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_{k-1},c_N,d_N) \\ h(x_2,y_k,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_k,c_N,d_N) \\ h(x_3,y_1,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_1,c_N,d_N) \\ h(x_3,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_2,c_N,d_N) \\ h(x_3,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ h(x_3,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_{k-1},c_N,d_N) \\ h(x_3,y_k,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_k,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_1,c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,y_1,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_2,c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_3,c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(a,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_k,c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,y_k,c_N,d_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ \vdots \\ w_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ f(x_2,y_1)+\Delta t g(x_2,y_1) \\ f(x_2,y_2)+\Delta t g(x_2,y_2) \\ f(x_2,y_3)+\Delta t g(x_2,y_3) \\ \vdots \\ f(x_2,y_{k-1})+\Delta t g(x_2,y_{k-1}) \\ f(x_2,y_k)+\Delta t g(x_2,y_k) \\ f(x_3,y_1)+\Delta t g(x_3,y_1) \\ f(x_3,y_2)+\Delta t g(x_3,y_2) \\ f(x_3,y_3)+\Delta t g(x_3,y_3) \\ \vdots \\ f(x_3,y_{k-1})+\Delta t g(x_3,y_{k-1}) \\ f(x_3,y_k)+\Delta t g(x_3,y_k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk persamaan (3.5) juga terdapat dua syarat batas, pada saat $y = 0$, dengan $y = y_k$ yaitu $u(x, 0, t) = 0$ dan pada saat $y = b$, dengan $b = y_k$ yaitu $u(x, b, t) = 0$ akan disubstitusikan pada matriks hasil pensubstitusian persamaan (3.4). Berikut matriks yang diperoleh dari pensubstitusian persamaan (3.5)

$$\begin{bmatrix} \Phi(0,0,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,0,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_2,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_3,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(0,y_{k-1},c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_k,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,y_k,c_N,d_N) \\ \Phi(x_2,0,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(x_2,0,c_N,d_N) \\ h(x_2,y_2,c_1,d_1) & \cdots & h(x_2,y_2,c_N,d_N) \\ h(x_2,y_3,c_1,d_1) & \cdots & h(x_2,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ h(x_2,y_{k-1},c_1,d_1) & \cdots & h(x_2,y_{k-1},c_N,d_N) \\ h(x_2,y_k,c_1,d_1) & \cdots & h(x_2,y_k,c_N,d_N) \\ \Phi(x_3,0,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(x_3,0,c_N,d_N) \\ h(x_3,y_2,c_1,d_1) & \cdots & h(x_3,y_2,c_N,d_N) \\ h(x_3,y_3,c_1,d_1) & \cdots & h(x_3,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ h(x_3,y_{k-1},c_1,d_1) & \cdots & h(x_3,y_{k-1},c_N,d_N) \\ h(x_3,y_k,c_1,d_1) & \cdots & h(x_3,y_k,c_N,d_N) \\ \Phi(a,0,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,0,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_2,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_3,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(a,y_{k-1},c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_k,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,y_k,c_N,d_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ \vdots \\ w_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x_2,y_2)+\Delta t g(x_2,y_2) \\ f(x_2,y_3)+\Delta t g(x_2,y_3) \\ \vdots \\ f(x_2,y_{k-1})+\Delta t g(x_2,y_{k-1}) \\ f(x_2,y_k)+\Delta t g(x_2,y_k) \\ 0 \\ f(x_3,y_2)+\Delta t g(x_3,y_2) \\ f(x_3,y_3)+\Delta t g(x_3,y_3) \\ \vdots \\ f(x_3,y_{k-1})+\Delta t g(x_3,y_{k-1}) \\ f(x_3,y_k)+\Delta t g(x_3,y_k) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{bmatrix} \Phi(0,0,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,0,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_2,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_3,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(0,y_{k-1},c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(0,b,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(0,b,c_N,d_N) \\ \Phi(x_2,0,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(x_2,0,c_N,d_N) \\ h(x_2,y_2,c_1,d_1) & \cdots & h(x_2,y_2,c_N,d_N) \\ h(x_2,y_3,c_1,d_1) & \cdots & h(x_2,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ h(x_2,y_{k-1},c_1,d_1) & \cdots & h(x_2,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(x_2,b,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(x_2,b,c_N,d_N) \\ \Phi(x_3,0,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(x_3,0,c_N,d_N) \\ h(x_3,y_2,c_1,d_1) & \cdots & h(x_3,y_2,c_N,d_N) \\ h(x_3,y_3,c_1,d_1) & \cdots & h(x_3,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ h(x_3,y_{k-1},c_1,d_1) & \cdots & h(x_3,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(x_3,b,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(x_3,b,c_N,d_N) \\ \Phi(a,0,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,0,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_2,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_3,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(a,y_{k-1},c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(a,b,c_1,d_1) & \cdots & \Phi(a,b,c_N,d_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ \vdots \\ w_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x_2,y_2)+\Delta t g(x_2,y_2) \\ f(x_2,y_3)+\Delta t g(x_2,y_3) \\ \vdots \\ f(x_2,y_{k-1})+\Delta t g(x_2,y_{k-1}) \\ 0 \\ 0 \\ f(x_3,y_2)+\Delta t g(x_3,y_2) \\ f(x_3,y_3)+\Delta t g(x_3,y_3) \\ \vdots \\ f(x_3,y_{k-1})+\Delta t g(x_3,y_{k-1}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Langkah selanjutnya adalah mencari nilai-nilai w_j^2 dari gabungan semua matriks di atas, yang dimisalkan $HW = F$ dengan

$$H = \begin{bmatrix} \Phi(0,0,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,0,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_2,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_3,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(0,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(0,b,c_1,d_1) & \dots & \Phi(0,b,c_N,d_N) \\ \Phi(x_2,0,c_1,d_1) & \dots & \Phi(x_2,0,c_N,d_N) \\ h(x_2,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_2,c_N,d_N) \\ h(x_2,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ h(x_2,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_2,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(x_2,b,c_1,d_1) & \dots & \Phi(x_2,b,c_N,d_N) \\ \Phi(x_3,0,c_1,d_1) & \dots & \Phi(x_3,0,c_N,d_N) \\ h(x_3,y_2,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_2,c_N,d_N) \\ h(x_3,y_3,c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ h(x_3,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & h(x_3,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(x_3,b,c_1,d_1) & \dots & \Phi(x_3,b,c_N,d_N) \\ \Phi(a,0,c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,0,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_2,c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_3,c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(a,y_{k-1},c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(a,b,c_1,d_1) & \dots & \Phi(a,b,c_N,d_N) \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} w_1^2 \\ \vdots \\ w_N^2 \end{bmatrix}$$

dan

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x_2,y_2) + \Delta t g(x_2,y_2) \\ f(x_2,y_3) + \Delta t g(x_2,y_3) \\ \vdots \\ f(x_2,y_{k-1}) + \Delta t g(x_2,y_{k-1}) \\ 0 \\ 0 \\ f(x_3,y_2) + \Delta t g(x_3,y_2) \\ f(x_3,y_3) + \Delta t g(x_3,y_3) \\ \vdots \\ f(x_3,y_{k-1}) + \Delta t g(x_3,y_{k-1}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dimana baris matriks H sebanyak $m \times k$, kolom matriks H sebanyak N, dan baris matriks W sebanyak N dengan N adalah sebanyak $m \times k$, supaya matriks H diperoleh matriks persegi sehingga dapat diinverskan maka dipilih N sebanyak $m \times k$ dan untuk baris matriks F sebanyak $m \times k$. Dengan demikian dapat dituliskan bentuk umum dari matriks tersebut

$$W = H^{-1}F$$

Setelah diperoleh nilai bobot w_j^2 selanjutnya disubstitusikan pada persamaan (3.14) sehingga diperoleh nilai u^2 yang digunakan untuk mencari nilai $w_j^3, \dots, w_j^p$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} u_{1,1}^2 \\ u_{1,2}^2 \\ u_{1,3}^2 \\ \vdots \\ u_{1,k-1}^2 \\ u_{1,k}^2 \\ u_{2,1}^2 \\ u_{2,2}^2 \\ u_{2,3}^2 \\ \vdots \\ u_{2,k-1}^2 \\ u_{2,k}^2 \\ u_{3,1}^2 \\ u_{3,2}^2 \\ u_{3,3}^2 \\ \vdots \\ u_{3,k-1}^2 \\ u_{3,k}^2 \\ u_{m,1}^2 \\ u_{m,2}^2 \\ u_{m,3}^2 \\ \vdots \\ u_{m,k-1}^2 \\ u_{m,k}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(x_1, y_1, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_1, y_1, c_N, d_N) \\ \Phi(x_1, y_2, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_1, y_2, c_N, d_N) \\ \Phi(x_1, y_3, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_1, y_3, c_N, d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(x_1, y_{k-1}, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_1, y_{k-1}, c_N, d_N) \\ \Phi(x_1, y_k, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_1, y_k, c_N, d_N) \\ \Phi(x_2, y_1, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_2, y_1, c_N, d_N) \\ \Phi(x_2, y_2, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_2, y_2, c_N, d_N) \\ \Phi(x_2, y_3, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_2, y_3, c_N, d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(x_2, y_{k-1}, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_2, y_{k-1}, c_N, d_N) \\ \Phi(x_2, y_k, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_2, y_k, c_N, d_N) \\ \Phi(x_3, y_1, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_3, y_1, c_N, d_N) \\ \Phi(x_3, y_2, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_3, y_2, c_N, d_N) \\ \Phi(x_3, y_3, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_3, y_3, c_N, d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(x_3, y_{k-1}, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_3, y_{k-1}, c_N, d_N) \\ \Phi(x_3, y_k, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_3, y_k, c_N, d_N) \\ \Phi(x_m, y_1, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_m, y_1, c_N, d_N) \\ \Phi(x_m, y_2, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_m, y_2, c_N, d_N) \\ \Phi(x_m, y_3, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_m, y_3, c_N, d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(x_m, y_{k-1}, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_m, y_{k-1}, c_N, d_N) \\ \Phi(x_m, y_k, c_1, d_1) & \dots & \Phi(x_m, y_k, c_N, d_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2 \\ \vdots \\ w_N^2 \end{bmatrix}$$

Berikutnya pada saat $n = 2, \ldots, p$, dengan y sebanyak k, dan x sebanyak m, maka berlaku persamaan (3.25) yaitu

$$\sum_{j=1}^{N} w_j^{n+1} L(x, y, c_j, d_j) = 2u^n + u^{n-1}$$

secara sama dengan prosedur penyelesaian saat indeks $n = 1$ di atas, maka diperoleh matriks

$$\begin{bmatrix} \Phi(0,0,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(0,0,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_2,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(0,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(0,y_3,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(0,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(0,y_{k-1},c_1,d_1) & \ldots & \Phi(0,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(0,b,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(0,b,c_N,d_N) \\ \Phi(x_2,0,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(x_2,0,c_N,d_N) \\ L(x_2,y_2,c_1,d_1) & \ldots & L(x_2,y_2,c_N,d_N) \\ L(x_2,y_3,c_1,d_1) & \ldots & L(x_2,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ L(x_2,y_{k-1},c_1,d_1) & \ldots & L(x_2,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(x_2,b,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(x_2,b,c_N,d_N) \\ \Phi(x_3,0,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(x_3,0,c_N,d_N) \\ L(x_3,y_2,c_1,d_1) & \ldots & L(x_3,y_2,c_N,d_N) \\ L(x_3,y_3,c_1,d_1) & \ldots & L(x_3,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ L(x_3,y_{k-1},c_1,d_1) & \ldots & L(x_3,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(x_3,b,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(x_3,b,c_N,d_N) \\ \Phi(a,0,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(a,0,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_2,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(a,y_2,c_N,d_N) \\ \Phi(a,y_3,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(a,y_3,c_N,d_N) \\ & \vdots & \\ \Phi(a,y_{k-1},c_1,d_1) & \ldots & \Phi(a,y_{k-1},c_N,d_N) \\ \Phi(a,b,c_1,d_1) & \ldots & \Phi(a,b,c_N,d_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^{n+1} \\ \vdots \\ w_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2u_{2,2}^n - u_{2,2}^{n-1} \\ 2u_{2,3}^n - u_{2,3}^{n-1} \\ \vdots \\ 2u_{2,k-1}^n - u_{2,k-1}^{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ 2u_{3,2}^n - u_{3,2}^{n-1} \\ 2u_{3,3}^n - u_{3,3}^{n-1} \\ \vdots \\ 2u_{3,k-1}^n - u_{3,k-1}^{n-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.2 Simulasi

Penelitian ini membahas mengenai persamaan gelombang dua dimensi yang diselesaikan menggunakan jaringan RBF, persamaan ini berbentuk *unsteady* atau bergantung waktu, sehingga gelombang yang dihasilkan akan bergerak sebanyak waktu yang ditentukan, dengan diketahui kondisi awal, kecepatan awal serta syarat batasnya.

Selanjutnya untuk lebih memahami metode RBF ini, akan dilakukan simulasi mengenai solusi persamaan gelombang dua dimensi menggunakan jaringan RBF dengan bantuan program MATLAB. Berikut persamaan gelombang dua dimensi yang akan diselesaikan

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \text{ Pada } \{0 < x < 4,\ \ 0 < y < 2,\ \ t > 0\}$$

dengan

$$c^2 = 5$$

kondisi awal

$$f(x,y) = 0{,}1(4x - x^2)(2y - y^2)$$

kecepatan awal

$$g(x,y) = 0$$

serta syarat batas

$$u(0,y,t) = 0 \quad u(4,y,t) = 0$$

dan

$$u(x,0,t) = 0 \quad u(x,2,t) = 0$$

Selanjutnya untuk mencari nilai u^2 pada saat indeks $n = 1$ dapat digunakan persamaan (3.13) yaitu

$$u^2 - \frac{c^2\Delta t^2}{2}u_{xx}^2 - \frac{c^2\Delta t^2}{2}u_{yy}^2 = f(x,y) + \Delta t g(x,y)$$

Domain dari persamaan di atas akan dipartisi menjadi data diskrit, yang kemudian akan diselesaikan menggunakan fungsi *Multiquadrics* pada metode jaringan RBF. Dengan $\Delta t = 0{,}01$, $\Delta x = 0{,}25$, $\Delta y = 0{,}25$, $f(x,y)$ diperoleh dari kondisi awal, $g(x,y)$ diperoleh dari kecepatan awal, sedangkan u^2, u_{xx}^2 dan u_{yy}^2 diperoleh dari persamaan (3.14), (3.15), dan (3.16) sehingga persamaan menjadi

$$\sum_{j=1}^{N} w_j^{n+1}\left(\Phi(x,y,c_j,d_j)-\frac{5(0{,}01)^2}{2}\Phi_{xx}(x,y,c_j,d_j)-\frac{5(0{,}01)^2}{2}\Phi_{yy}(x,y,c_j,d_j)\right)$$
$$=0{,}1(4x-x^2)(2y-y^2)+0$$

dan nilai Φ, Φ_{xx}, dan Φ_{yy} diperoleh dari persamaan (3.17), (3.18), dan (3.19). Kemudian persamaan di atas disederhanakan pada persamaan (3.21), yaitu

$$h(x,y,c_j,d_j)=\left(\Phi(x,y,c_j,d_j)-\frac{5(0{,}01)^2}{2}\Phi_{xx}(x,y,c_j,d_j)-\frac{5(0{,}01)^2}{2}\Phi_{yy}(x,y,c_j,d_j)\right)$$

Dengan adanya pemisalan h di atas diperoleh persamaan (3.22), dan diperoleh nilai bobot w_j^2 yang akan disubstitusikan pada persamaan (3.14) yaitu

$$u^2\approx\sum_{j=1}^{N} w_j^2\,\Phi_j(x,y,c_j,d_j)$$

Setelah diketahui nilai u^2 selanjutnya adalah mencari nilai u^3, u^4 dan seterusnya. Untuk mencari nilai u^3, u^4 dan seterusnya berlaku persamaan (3.10) sebagai berikut:

$$u^{n+1}-(c\Delta t)^2u_{xx}^{n+1}-(c\Delta t)^2u_{yy}^{n+1}=2u^n-u^{n-1}$$

Langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan (3.10) menggunakan fungsi basis *Multiquadrics*

$$\sum_{j=1}^{N} w_j^3\left(\Phi(x,y,c_j,d_j)-5(0{,}01)^2\Phi_{xx}(x,y,c_j,d_j)-5(0{,}01)^2\Phi_{yy}(x,y,c_j,d_j)\right)$$
$$=2u^2-u^1$$

Dengan menyederhanakan persamaan di atas menjadi

$$L(x,y,c_j,d_j)=\left(\Phi_x(x,y,c_j,d_j)-5(0{,}01)^2\Phi_{xx}(x,y,c_j,d_j)-5(0{,}01)^2\Phi_{yy}(x,y,c_j,d_j)\right)$$

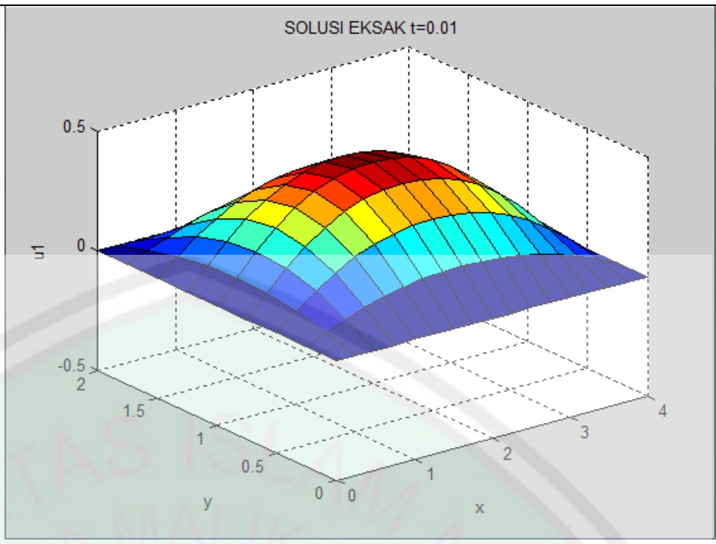
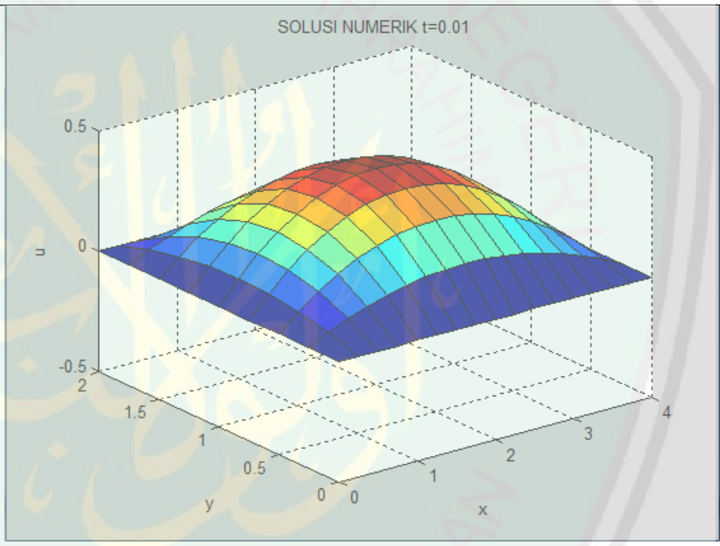
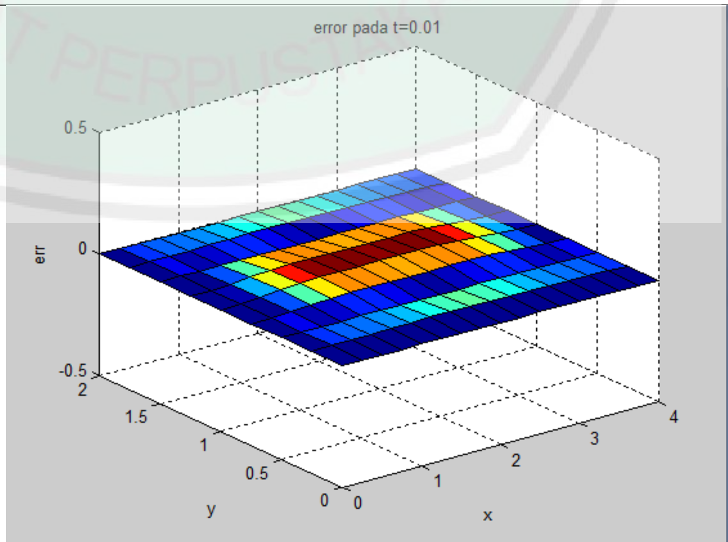
Dari pemisalan tersebut diperoleh persamaan (3.25) sebagai berikut

$$\sum_{j=1}^{N} w_j^3\, L(x, y, c_j, d_j) = 2u^2 - u^1$$

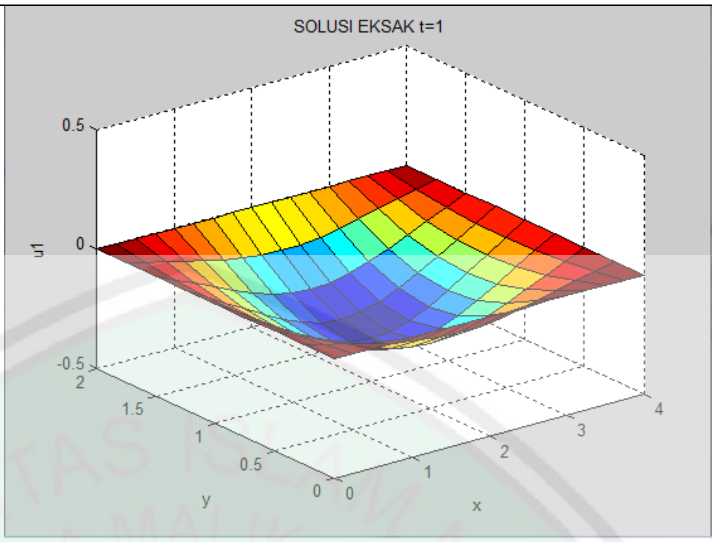
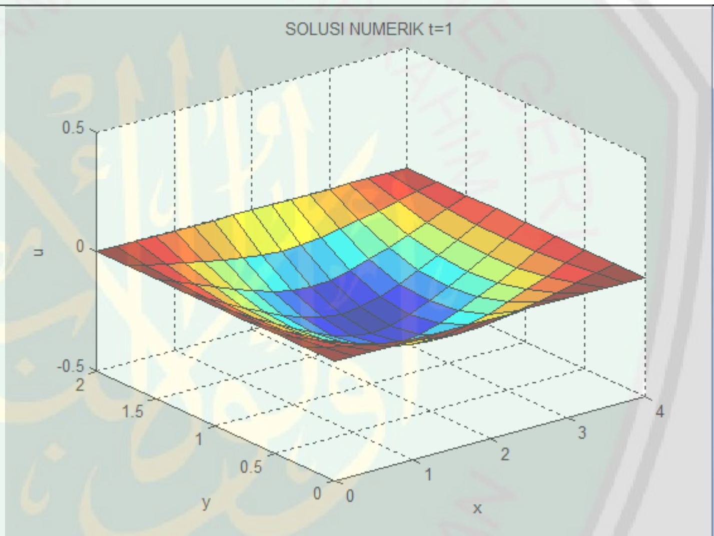
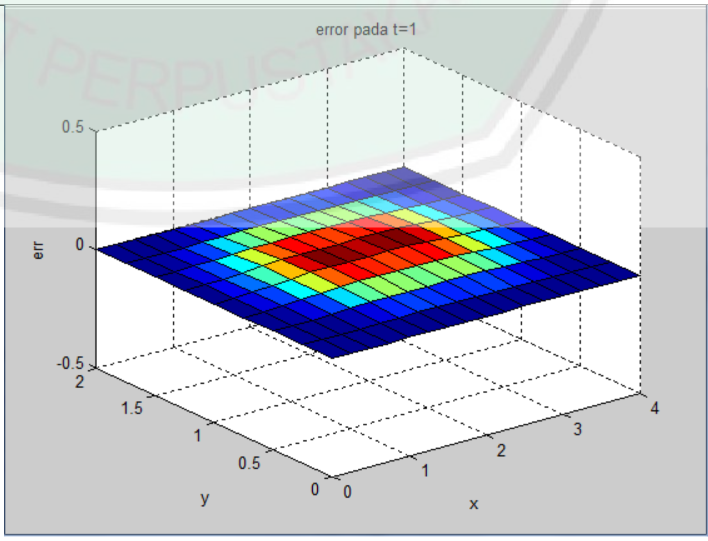
dengan u^2 diperoleh dari persamaan sebelumnya dan u^1 diperoleh dari kondisi awal atau persamaan (3.2), sehingga diketahui nilai bobot w_j^3 yang akan digunakan untuk mencari nilai u^3. Untuk mencari nilai u^4, u^5, dan seterusnya menggunakan langkah-langkah yang sama sebagaimana mencari nilai u^3.

Gambar 3.1 menunjukkan perbandingan hasil simulasi persamaan secara eksak, numerik serta *error*-nya pada saat $t = 0{,}01$ dengan $\Delta t = 0{,}01$ dan $\Delta x, \Delta y = 0{,}25$, dengan waktu yang sama terlihat bahwa hasil solusi gelombang secara numerik sama dengan hasil solusi gelombang secara eksak. Grafik solusi eksak dan numerik telah memenuhi syarat batas yang diketahui yaitu $u(0, y, t) = 0$, $u(4, y, t) = 0$ dan $u(x, 0, t) = 0$, $u(x, 2, t) = 0$, ini artinya pada saat $x = 0$, $x = 4$ dan $y = 0$, $y = 2$ gelombang berada pada koordinat 0, sedangkan untuk selain kondisi batas di atas gelombang akan berjalan mengikuti waktu yang ditentukan.

Berikutnya solusi numerik, eksak, serta *error* pada saat $t = 1$ dengan $\Delta t = 0{,}01$ dan $\Delta x, \Delta y = 0{,}25$ diperoleh Gambar 3.2, diketahui bahwa gelombang sudah mulai menurun pada saat $t = 1$ dari awalnya yakni pada Gambar 3.1. Selanjutnya gelombang akan terus bergerak naik turun sebanyak perulangan t. Semakin kecil Δt, maka gelombang yang dihasilkan juga akan semakin kecil sehingga pergerakan gelombang sacara naik turun tersebut semakin lama akan semakin kecil.

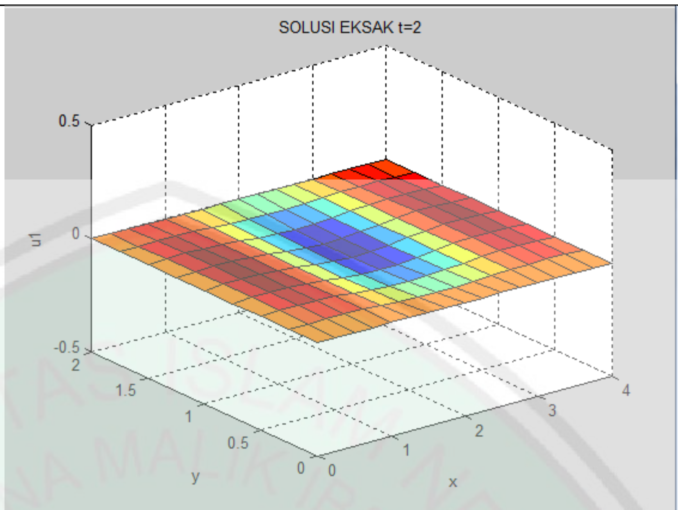
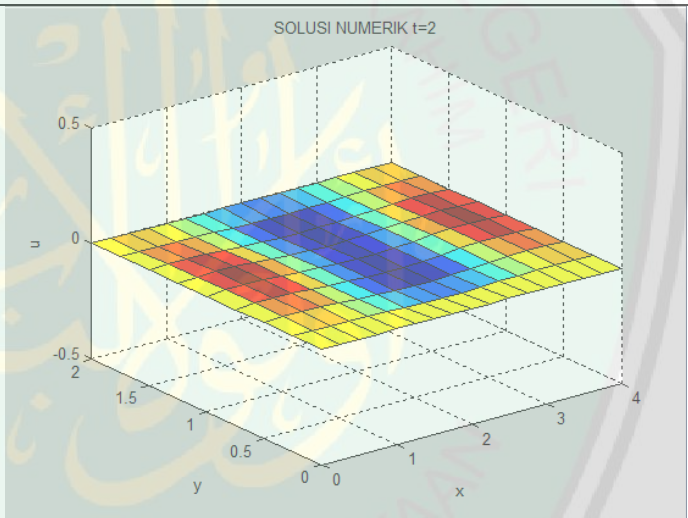
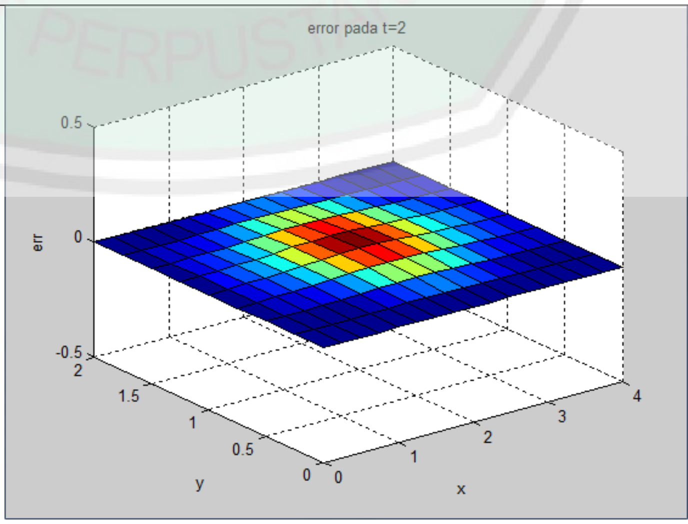
<table>
<tr>
<td>Grafik Solusi
Eksak</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Grafik Solusi
Numerik</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Error</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Gambar 3.1 Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi pada Saat $t = 0{,}01$ dan $\Delta t = 0{,}01$

<table>
<tr><td>Grafik Solusi Eksak</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Grafik Solusi Numerik</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Error</td><td>
</td></tr>
</table>

Gambar 3.2 Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi pada Saat $t = 1$ dan $\Delta t = 0{,}01$

Berikut adalah gelombang pada saat $t = 2$

Grafik Solusi Eksak	
Grafik Solusi Numerik	
Error	

Gambar 3.3 Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi pada Saat $t = 2$ dan $\Delta t = 0{,}01$

Dari ketiga gambar di atas diketahui gelombang yang dihasilkan dari penyelesaian numerik sama dengan gelombang dari penyelesaian eksak, untuk memperjelas keefektifan metode ini akan dilakukan analisis galat pada subbab berikutnya.

3.3 Analisis Galat

Selanjutnya pada subbab ini akan dibahas mengenai galat (*error*) dari solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi menggunakan RBF. Fungsi dari analisis galat adalah untuk mengetahui seberapa dekat solusi numerik dengan solusi eksaknya, sehingga digunakan kriteria $\varepsilon = |u_{eksak} - u_{numerik}|$.

Dalam (Kreyszig, 2007) telah disebutkan solusi eksak dari persamaan gelombang dua dimensi pada persamaan (3.1) sebagai berikut:

$$u(x,y,t) = 0.426050 \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 l^3} cos\left(\frac{\sqrt{5}\pi}{4}\sqrt{k^2+4l^2}\right) t \sin\frac{k\pi x}{4} \sin\frac{l\pi y}{2}$$

Setelah diketahui solusi eksak dan solusi numerik persamaan gelombang dua dimensi langkah selanjutnya adalah mencari galat persamaan gelombang dua dimensi yaitu

$$\varepsilon = |u_{eksak} - u_{numerik}|$$

Misalkan

$$\varepsilon_i = |u_i - \hat{u}_i|$$

dengan u_i adalah solusi eksak, $\hat{u}_i$ adalah solusi numerik, serta $i = 1, \dots, (m \times k \times p)$, dan m, k, p adalah banyaknya perulangan dari x, y, dan t. Untuk mengukur *error* secara keseluruhan menggunakan $SSE\,(Sum\ Square\ Error)$ atau disebut jumlah *error* kuadrat. Dengan menggunakan bantuan MATLAB dapat dihitung SSE-nya sebagai berikut:

$$SSE = \sum_{n=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\left(\varepsilon_{i,j}^{n}\right)^2$$

atau dalam MATLAB dituliskan

$$SSE = sum(sum(sum(u_i - \hat{u}_i)^2))$$

Berdasarkan SSE dari gambar 3.1, 3.2, dan 3.3, diperoleh $SSE = 3{,}0471e + 004$, $SSE = 3{,}0514e + 004$, dan $SSE = 3{,}0557e + 004$.

Untuk mengetahui perubahan SSE-nya dapat dilihat dari tabel berikut.

Tabel 3.1 Perubahan *SSE* pada Saat $\Delta x, \Delta y$ Tetap dan Δt Berubah

Δx dan Δy	Δt	*SSE(Sum Square Error)*
0,25	0,1	0,2673
0,25	0,01	0,0051
0,25	0,001	8,4789e-004

Dari Tabel 3.1 diketahui SSE terkecil diperoleh saat $\Delta t = 0{,}001$, ini berarti bahwa solusi terbaik didapatkan pada saat Δt kecil, karena SSE yang dihasilkan juga kecil. Sedangkan pada saat $\Delta t = 0{,}01$ dan $\Delta x, \Delta y$ berubah diperoleh tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2 Perubahan *SSE* pada Saat Δt Tetap dan $\Delta x, \Delta y$ Berubah

Δx dan Δy	Δt	*SSE(Sum Square Error)*
0,125	0,01	0,0047
0,25	0,01	0,0051
0,5	0,01	0,0090

Pada Tabel 3.2 terlihat semakin besar Δx dan Δy, *SSE*-nya akan semakin besar. Dengan demikian untuk mendapatkan *SSE* yang lebih kecil, maka Δx, Δy, dan Δt harus diperkecil. Sebagaimana diketahui jika semakin kecil *error* yang diperoleh akan semakin teliti solusi numeriknya, maka dari dua tabel di atas *SSE* yang diperoleh telah memenuhi kriteria analisis galat yang baik, sehingga terbukti bahwa metode RBF ini efektif digunakan dalam menyelesaikan persamaan gelombang dua dimensi. Adapun batas terkecil Δx dan Δy adalah 0,125 untuk $\Delta x, \Delta y < 0{,}125$ grafik yang diperoleh tidak stabil, sehingga peneliti membatasi batas terkecil Δx dan Δy pada solusi persamaan gelombang dua dimensi menggunakan jaringan RBF ini adalah 0,125.

3.4 Integrasi Gelombang dalam Islam

Gelombang merupakan perubahan bentuk dari getaran yang merambat pada suatu medium. Dalam al-Quran telah disinggung tentang gelombang yaitu dalam surat Luqman ayat 32, Allah berfirman

وَإِذَا غَشِيَهُم مَّوْجٌ كَٱلظُّلَلِ دَعَوُاْ ٱللَّهَ مُخْلِصِينَ لَهُ ٱلدِّينَ فَلَمَّا نَجَّىٰهُمْ إِلَى ٱلْبَرِّ فَمِنْهُم مُّقْتَصِدٌ ۚ وَمَا يَجْحَدُ بِـَٔايَـٰتِنَآ إِلَّا كُلُّ خَتَّارٍ كَفُورٍ ﴿٣٢﴾

"*dan apabila mereka dilamun ombak yang besar seperti gunung, mereka menyeru Allah dengan memurnikan ketaatan kepada-Nya Maka tatkala Allah menyelamatkan mereka sampai di daratan, lalu sebagian mereka tetap menempuh jalan yang lurus. Dan tidak ada yang mengingkari ayat- ayat Kami selain orang-orang yang tidak setia lagi ingkar*" (*QS. Luqman/31:32*).

Pada ayat di atas gelombang diserupakan dengan gunung yakni kata "موج = الظلل" , karena gelombang datang sedikit demi sedikit dan saling menghantam satu sama lain (al-Qurthubi, 2009:183-191). Firman Allah mengenai air dalam al-Quran

هُوَ ٱلَّذِىٓ أَنزَلَ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مَآءًۖ لَّكُم مِّنْهُ شَرَابٌ وَمِنْهُ شَجَرٌ فِيهِ تُسِيمُونَ ﴿١٠﴾ يُنۢبِتُ لَكُم بِهِ ٱلزَّرْعَ
وَٱلزَّيْتُونَ وَٱلنَّخِيلَ وَٱلْأَعْنَٰبَ وَمِن كُلِّ ٱلثَّمَرَٰتِۗ إِنَّ فِى ذَٰلِكَ لَءَايَةً لِّقَوْمٍ يَتَفَكَّرُونَ ﴿١١﴾

"*Dia-lah, yang telah menurunkan air hujan dari langit untuk kamu, sebahagiannya menjadi minuman dan sebahagiannya (menyuburkan) tumbuh-tumbuhan, yang pada (tempat tumbuhnya) kamu menggembalakan ternakmu. Dia menumbuhkan bagi kamu dengan air hujan itu tanam-tanaman; zaitun, korma, anggur dan segala macam buah-buahan. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar ada tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang memikirkan*" (*QS. an-Nahl /16:10-11*).

Dalam ayat tersebut dijelaskan nikmat Allah bagi kehidupan manusia di bumi. Allah berfirman bahwa Allah-lah yang menurunkan air hujan untuk kalian. Air inilah yang menjadi sumber kehidupan bagi makhluk hidup di bumi. Dari air hujan yang membasahi tanah dan masuk ke dalamnya, tumbuh segala macam jenis tanaman dan pohon, yang menghasilkan buah-buahan dan makanan untuk manusia dan binatang. Dari sini dapat direnungkan bahwa air adalah salah satu kebesaran dan keagungan serta rahmat Allah, pelajaran yang dapat diambil antara lain.

1. Air hujan adalah sumber kehidupan. Air menumbuhkan tanaman yang menjadi makanan bagi manusia. Sebab makanan manusia terdiri dari tumbuh-tumbuhan dan daging hewan. Keduanya sangat tergantung pada air yang turun dari langit. Kekeringan akan menyebabkan paceklik dan kekurangan pangan.
2. Manusia harus merenung dan memikirkan alam sehingga ia dapat menyaksikan bahwa dibalik proses alamiah yang terjadi, ada tangan gaib yang maha berkuasa. Tumbuhnya tanaman dan buah-buahan bukan pekerjaan petani. Semua itu diciptakan untuk manusia karena itu manusia harus beramal untuk keridhaan Allah (al-Qurthubi, 2009:201-204).

Firman Allah dalam surat Huud

۞ وَقَالَ ٱرۡكَبُواْ فِيهَا بِسۡمِ ٱللَّهِ مَجۡر۪ىٰهَا وَمُرۡسَىٰهَآۚ إِنَّ رَبِّي لَغَفُورٞ رَّحِيمٞ ﴿٤١﴾ وَهِيَ تَجۡرِي بِهِمۡ فِي مَوۡجٖ
كَٱلۡجِبَالِ وَنَادَىٰ نُوحٌ ٱبۡنَهُۥ وَكَانَ فِي مَعۡزِلٖ يَٰبُنَيَّ ٱرۡكَب مَّعَنَا وَلَا تَكُن مَّعَ ٱلۡكَٰفِرِينَ ﴿٤٢﴾ قَالَ
سَ‍َٔاوِيٓ إِلَىٰ جَبَلٖ يَعۡصِمُنِي مِنَ ٱلۡمَآءِۚ قَالَ لَا عَاصِمَ ٱلۡيَوۡمَ مِنۡ أَمۡرِ ٱللَّهِ إِلَّا مَن رَّحِمَۚ وَحَالَ بَيۡنَهُمَا
ٱلۡمَوۡجُ فَكَانَ مِنَ ٱلۡمُغۡرَقِينَ ﴿٤٣﴾

"*Dan Nuh berkata: "Naiklah kamu sekalian ke dalamnya dengan menyebut nama Allah di waktu berlayar dan berlabuhnya." Sesungguhnya Tuhanku benar-benar Maha Pengampun lagi Maha Penyayang. Dan bahtera itu berlayar membawa mereka dalam gelombang laksana gunung. dan Nuh memanggil anaknya, sedang anak itu berada di tempat yang jauh terpencil: "Hai anakku, naiklah (ke kapal) bersama Kami dan janganlah kamu berada bersama orang-orang yang kafir." Anaknya menjawab: "Aku akan mencari perlindungan ke gunung yang dapat memeliharaku dari air bah!" Nuh berkata: "tidak ada yang melindungi hari ini dari azab Allah selain Allah (saja) yang Maha Penyayang". dan gelombang menjadi penghalang antara keduanya; Maka jadilah anak itu Termasuk orang-orang yang ditenggelamkan*" (*QS. Huud/11:41-43*).

Pada ayat di atas telah jelas bahwa seseorang yang ingkar terhadap Allah tidak akan diselamatkan dari besarnya gelombang yang berada di lautan tersebut, yang tidak akan ada seorangpun mampu menghindari jika Allah telah menghendaki terjadi hal buruk yang tidak diinginkan. Oleh karena itu, manusia harus menyerahkan segala urusannya kepada Allah. Thaba'thaba'i memahami bahwa dengan diri penyerahan terhadap Allah Swt. sepanjang berlayar dan berlabuh. Bahtera itu dalam pemeliharaan dan lindungan-Nya, karena tidak seorangpun yang mengetahui apa yang akan terjadi di tengah gelombang dashyat bahkan topan air yang menggunung tersebut, dan tidak akan ada yang mampu menghadapi angin, ombak dan gelombang yang begitu besar kecuali atas rahmat yang diberikan oleh Allah. Demikianlah, *iradah* Allah Swt. sudah menetapkan segala sesuatunya telah berjalan menurut prosesnya (Shihab, 2002:249-253).

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dalam penulisan skripsi ini penulis menyelesaikan persamaan gelombang dua dimensi secara numerik menggunakan metode jaringan fungsi radial basis atau *Radial Basis Function* (RBF). Untuk mencari solusi persamaan tersebut langkah awal yang dilakukan adalah diskritisasi persamaan secara implisit menggunakan beda pusat terhadap waktu. Hasil diskritisasi dihampiri menggunakan jaringan RBF dengan melakukan pendekatan secara langsung pada fungsi basis *Multiquadrics*. Selanjutnya substitusikan kondisi awal, kecepatan awal, serta syarat batasnya. Setelah diperoleh fungsi basis dalam bentuk matriks, kemudian dicari nilai bobotnya yang digunakan untuk mencari matriks u^{n+1} selanjutnya.

Hasil simulasi diperoleh bahwa penyelesaian numerik menggunakan metode RBF sudah efektif, jika dilihat dari perbandingan hasil simulasi grafik secara numerik, eksak beserta analisis galatnya. Semakin kecil $\Delta x, \Delta y$, dan Δt, maka *error* yang diperoleh akan semakin kecil atau sebaliknya semakin besar $\Delta x, \Delta y$, dan Δt semakin besar pula *error* yang diperoleh.

4.2 Saran

Pada penelitian ini penulis telah menyelesaikan persamaan gelombang dua dimensi menggunakan RBF, sehingga saran bagi peneliti selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan gelombang dua dimensi menggunakan metode beda hingga skema eksplisit atau metode-metode yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Al-Qurthubi, S.I. 2009. *Tafsir Al-Qurtubi*. Terjemahan Fatchurrohman, Ahmad Hotih, dan Dudi Rasyati. Jakarta: Pustaka Azzam.

Boztosun, I. & Caner, T. 2007. Mesh-Free Radial Basis Functions Method for the Accurate Numerical Solution of the Radial Schrödinger Equation. (Online), 60 (2): 65-70, (http://www.google.co.id/url?q=http://nukleer.erciyes.edu.tr/tanfer/RBFpaper.pdf&sa=U&ei=43-CVcjYOuXamAWP_oPYDw&ved=0CBQQFjAA&usg=AFQjCNF_8Y1cSvLZ1RjDVdKhhgiZSGF8LA), diakses 20 November 2014.

Buhmann, M.D. 2003. *Radial Basis Functions* . New York: Cambridge University Press.

Cahyani, D.A., Khotimah, K.B., & Rizkillah, T.R. 2014. Perbandingan Metode Som (Self Organizing Map) dengan Pembobotan Berbasis RBF (Radial Basis Function). *Jurnal Teknologi Technoscientia*, 7 (1): 87.

Dehghan, M. & Shokri, A. 2008. A Numerical Method for Solution of the Two-Dimensional Sine-Gordon Equation Using the Radial Basis Functions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79 (2008): 700–715.

Divo, E. & Kassab, A. 2007. An Efficient Localized Radial Basis Function Meshless Method for Fluid Flow and Conjugate Heat Transfer. *Journal of Heat Transfer*, 129 (2): 124-136.

Fitriya, R. 2011. *Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson Menggunakan RBF*. Skirpsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Jamhuri, M. 2011. Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis. *Gamatika*, 1 (2): 163 (Online), (http://www.journal.unipdu.ac.id/index.php/gamatika/article/view/274), diakses 22 Februari 2015.

Kreyszig, E. 2007. *Advanced Engineering Mathematics*. New York: John Wiley.

Larsson, E., Uppsala, S., & Fornberg, B. 2002. A Numerical Study of some Radial Basis Function based Solution Methods for Elliptic PDEs. (Online), 9810751 (1): 1-15, (http://www.google.co.id/url?q=http://amath.colorado.edu/faculty/fornberg/docs/elbf.pdf&sa=U&ei=BMycVdusDceRuAShob6gDA&ved=0CBcQFiCNGgbvyfemWP9Lrbg9pBKa2eQ9bA), diakses 09 desember 2014.

Mai-Duy, N. & Tran-Cong, T. 2001. Numerical Solution of Differential Equations Using Multiquadric Radial Basis Function Networks. *Solving DEs using MQ RBFNs 3*, (Online), 4–5, (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608000000952), diakses 17 Februari 2015.

Mai-Duy, N. & Tran-Cong, T.. 2003. Approximation of Function and its Derivatives Using Radial Basis Function Networks. *Applied Mathematical Modelling*, (Online), 27: 197-220, (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X02001014), diakses 12 Desember 2014.

Mufidah, F. 2014. *Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan RBF Pada Koordinat Polar*. Skirpsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Satriawan, M. 2012. *Fisika Dasar*. Yogyakarta: UGM Press.

Shihab, M. Q. 2002. *Tafsir Al Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Soejati, S. & Djuhana, I. S. 2004. *Gelombang*. Jakarta: Universitas Indonesia.

Strang, G. 2009. *Introduction to Linear Algebra Fourth Edition*. Wellesley: Cambridge Press.

Strauss, W. A. 2007. *Partial Differential Equations an Introduction Second Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Tan, F., Gracianti, G., & Lukas, S. 2012. Aplikasi prediksi harga saham menggunakan jaringan syaraf. *Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer*, (Online), 8 (2): 175-181, (http://www.google.co.id/url?q=http://dspace.library.uph.edu:8080/jspui/bitstream/123456789/893/2/jiik-08-02-2012-aplikasi_prediksi_harga_saham.pdf&sa=U&ei=M4SCVZXWLsHCmAWFn4aQAQ&ved=0CBQQFjAA&usg=AFQjCNEYSJc1mBWw-_5I3WdFJrXlVWudUw), diakses 17 Februari 2015.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1

Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Menggunakan RBF.

```
clc,clear,figure(1),clf

f = @(x,y) 0.1*(4*x-x.^2).*(2*y-y.^2);

dx = 0.25;
dy = 0.25;
dt = 0.01;
C  = 5;

x = 0:dx:4;
y = 0:dy:2;
t = 0:dt:2;

M = length(x);
N = length(y);
T = length(t);

U = zeros(M,N,T);

[xx,yy]=meshgrid(x,y);
U(:,:,1) = f(xx,yy)';

%--------------------------------------------
surf(xx,yy,f(xx,yy)), zlim([-0.5 0.5]), pause(0.1)

xxx = reshape(xx,M*N,1);
yyy = reshape(yy,M*N,1);

c = xxx;
d = yyy;

H   = mq(xxx,yyy,c,d);
Hyy = mqyy(xxx,yyy,c,d);
Hxx = mqxx(xxx,yyy,c,d);

% pada saat n=1
A = H - (C*dt^2/2)*(Hxx + Hyy);
[MA,NA]=size(A);

V = zeros(length(xxx),2);
V(:,1) = f(xxx,yyy);

B = V(:,1);

% kondisi di x=0
ix0    = find(xxx==0);
A(ix0,:) = H(ix0,:);
```

```
B(ix0) = 0;

% kondisi di x=4
ix4    = find(xxx==4);
A(ix4,:) = H(ix4,:);
B(ix4) = 0;

% kondisi di y=0
iy0  = find(yyy==0);
A(iy0,:) = H(iy0,:);
B(iy0) = 0;

% kondisi di y=2
iy2 = find(yyy==2);
A(iy2,:) = H(iy2,:);
B(iy2) = 0;

W = A\B;

V(:,2) = H*W;

u = V(:,2);
u = reshape(u,N,M);
surf(xx,yy,u), zlim([-0.5 0.5]), pause(0.1)

U(:,:,2) = u';

for n=2:length(t)-1

    A = H - C*dt^2*(Hxx+Hyy);
    B = 2*V(:,n)-V(:,n-1);

    % kondisi di x=0
    A(ix0,:) = H(ix0,:);
    B(ix0) = 0;

    % kondisi di x=4
    A(ix4,:) = H(ix4,:);
    B(ix4) = 0;

    % kondisi di y=0
    A(iy0,:) = H(iy0,:);
    B(iy0) = 0;

    % kondisi di y=2
    A(iy2,:) = H(iy2,:);
    B(iy2) = 0;

    W = A\B;

    V(:,n+1) = H*W;

    u = V(:,n+1);
    u = reshape(u,N,M);
```

```
    U(:,:,n+1) = u';

    surf(xx,yy,u);
    zlim([-0.5 0.5])
    title(['SOLUSI NUMERIK t=' num2str(t(n))])
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    zlabel('u');
    pause(0.1)
end
```

Lampiran 2

Solusi Eksak Persamaan Gelombang Dua Dimensi

```
clc, clear
figure(1),clf
t  = 0:0.01:2;
x  = 0:0.25:4;
y  = 0:0.25:2;

[X,Y]=meshgrid(x,y);
figure(1),clf


for d = 1:length(t)
    for i = 1:length(x)
        for j =1:length(y)
            %             jumlah_nm=0;
            for m =1:21
                for n =1:10
                    u(i,j,d) = 0.426050*(
cos(sqrt(5)*pi*sqrt(5)*t(d)/4)*sin(pi*x(i)/4)*sin(pi*y(j)/2)
+ ...

(1/27)*cos(sqrt(5)*pi*sqrt(37)*t(d)/4)*sin(pi*x(i)/4)*sin(pi*
y(j)/2) + ...

(1/27)*cos(sqrt(5)*pi*sqrt(13)*t(d)/4)*sin(3*pi*x(i)/4)*sin(p
i*y(j)/2) + ...

(1/729)*cos(sqrt(5)*pi*sqrt(45)*t(d)/4)*sin(3*pi*x(i)/4)*sin(
3*pi*y(j)/2) );

                end
            end
        end
    end

    surf(X,Y,u(:,:,d)')
    zlim([-0.5 0.5])
    title(['SOLUSI EKSAK t=' num2str(t(d))])
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    zlabel('u1');
    pause(0.1)

end
```

Lampiran 3

Galat (*error*) Persamaan Gelombang Dua Dimensi

```
clc,clear

x  = 0:0.25:4;
y  = 0:0.25:2;

[X,Y]=meshgrid(x,y);

load solusiexcag     % load u1
load solusimun       % load U

size(u)
size(U)

err = abs(u-U);

figure(1),clf
for n=1:size(U,3)
         surf(X',Y',err(:,:,n))
          zlim([-0.5 0.5])
          title(['error=' num2str(n)])
          xlabel('x');
          ylabel('y');
          zlabel('err');
          pause(0.1)
end

  err = (u-U).^2;
  sse = sum((sum(sum(err))))
```

RIWAYAT HIDUP

Siti Zuhriyah, lahir di Kota Gresik pada tanggal 17 Agustus 1992, biasa dipanggil Zuhriyah, tinggal di Jl. Sunan Ampel No. 09 Kec. Lowokwaru Kota Malang. Anak kedua dari Bapak Moh Sholihin dan Ibu Suyat.

Pendidikan dasarnya ditempuh di MI Nurul Huda Sawo Dukun Gresik pada tahun 2004, setelah itu melanjutkan ke MTs Nurul Huda dan lulus pada tahun 2007. Kemudian dia melanjukan pendidikan ke MAN Lamongan dan lulus tahun 2010. Selanjutnya menempuh kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang pada tahun 2010, mengambil Jurusan Matematika.

Selama menempuh pendidikan tingkat dasar sampai SMA, dia selalu meraih rangking 10 besar di kelasnya. Selama menempuh pendidikan di MAN juga menempuh pendidikan pondok pesantren Al Ma'ruf Lamongan dan pernah menjabat sebagai pengurus di pondok pesantren tersebut.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Zuhriyah
NIM : 10610071
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	31 Oktober 2014	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	27 November 2014	Konsultasi Kajian Agama	2.
3.	02 Desember 2014	Revisi Bab I, Bab II, dan Konsultasi Bab III	3.
4.	19 Desember 2014	Revisi Kajian Keagamaan	4.
5.	10 Januari 2015	Revisi Bab III	5.
6.	04 Februari 2015	ACC Bab I dan Bab II	6.
7.	08 Februari 2015	ACC Kajian Keagamaan	7.
8.	17 Maret 2015	Revisi Bab III	8.
9.	06 April 2015	ACC Bab III	9.
10.	12 Mei 2015	Konsultasi Bab IV	10.
11.	19 Mei 2015	Konsultasi Bab III Keagamaan	11.
12.	12 Juni 2015	ACC Keseluruhan	12.
13.	12 Juni 2015	ACC Keseluruhan Kajian Keagamaan	13.

Malang, 15 Juni 2015
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001