

**KAJIAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON
PADA MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

oleh :
ERNI NUR INDAH LESTARI
NIM. 06510015



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**KAJIAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON
PADA MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh :
ERNI NUR INDAH LESTARI
NIM. 06510015

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**KAJIAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON
PADA MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

oleh :
ERNI NUR INDAH LESTARI
NIM. 06510015

Telah Disetujui Untuk Diuji:
Malang, 12 Agustus 2011

Dosen pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Dr. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**KAJIAN METODE ADAMS BASHFORTH MOULTON
PADA MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

oleh:
ERNI NUR INDAH LESTARI
NIM. 06510015

Telah Dipertahankan Di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Tanggal: 24 Agustus 2011

Susunan Dewan Penguji:	Tanda Tangan
1. Penguji Utama : <u>Usman Pagalay, M.Si</u> NIP. 19650414 200312 1 001	()
2. Ketua : <u>Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u> NIP. 19710420 200003 1 003	()
3. Sekretaris : <u>Hairur Rahman, M.Si</u> NIP. 19800429 200604 1 003	()
4. Anggota : <u>Dr. Munirul Abidin, M.Ag</u> NIP. 19720420 200212 1 003	()

Mengetahui dan mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SURAT PERNYATAAN

Yang bertandatangan di bawah ini :

Nama : ERNI NUR INDAH LESTARI
NIM : 06510015
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : “Kajian Metode Adams Bashforth Moulton Pada Masalah Nilai Batas.”

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil karya saya sendiri dan bukan karya orang lain, baik sebagian maupun keseluruhan, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sebenar-benarnya dan apabila pernyataan ini tidak benar, saya bersedia mendapatkan sanksi akademis.

Malang, 12 Agustus 2011

Yang membuat pernyataan,

Erni Nur Indah Lestari

NIM. 06510015

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

*Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,
Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. (QS:
Al-Insyiroh 94:5-6)*



PERSEMBAHAN

Saya persembahkan karya ini kepada :

Ayahanda (Bapak Imam Muslim) dan Ibunda (Ibu Suhartiningsih) tercinta dan tersayang yang telah memberikan limpahan kasih sayang, semangat, harapan dan doa yang tiada henti-hentinya serta membimbing tanpa rasa lelah dan letih hingga saya mampu menghadapi masalah dan menatap masa depan.

Adik tercinta A'isyatur Purnamasari dan Kakak Muhammad Khoirun Nifa serta Keluarga besar yang selalu mendoakan dan memotivasi dalam setiap langkah.



KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “*Kajian Metode Adams Bashforth Moulton Pada Masalah Nilai Batas*” ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Sutiman Bambang Sumitro, D.U, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Dr. Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan

kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

7. Bapak dan Ibu tercinta serta segenap keluarga yang tiada lelah memberikan do'a, kasih sayang, dukungan serta kepercayaan.
8. Drs. Yahya Dja'far, M.A dan Dra. Syafiyah Fattah, M.A, selaku pengasuh dan orang tua kami di PPP. Al-Hikmah Al-Fathimiyyah Malang.
9. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2006.
10. Teman-teman di PPP. Al-Hikmah Al-Fathimiyyah Malang.
11. Seluruh pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga amal ibadah anda tercatat sebagai amal ibadah dan mendapat imbalan serta balasan dari Allah SWT.Amin.

Penulis menyadari bahwa tak ada gading yang tak retak, penulis mengharapkan saran dan kritik dari seluruh pihak demi sempurnanya skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Amin.

Malang, 12 Agustus 2011

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
SURAT PERNYATAAN	iv
MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI	ix
ABSTRAK	xi
ABSTRACT.....	xii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah.....	6
1.3. Tujuan.....	6
1.4. Batasan Masalah	6
1.5. Manfaat Penelitian	7
1.6. Metode Penelitian	7
1.7. Sistematika Penulisan.....	9
BAB II KAJIAN PUSTAKA	10
2.1 Persamaan Diferensial	10
2.2 Kesalahan (Galat)	15
2.3 Metode Euler	16
2.4 Metode Heun.....	22
2.5 Metode Deret Taylor	28
2.6 Metode Runge-Kutta	34
2.7 Polinom Interpolasi Lagrange.....	38

BAB III PEMBAHASAN	46
3.1 Pengertian Adams-Bashforth-Moulton	46
3.2 Persamaan Metode Adams-Bashforth-Moulton	47
3.3 Galat.....	59
3.4 Algoritma Metode Adams-Bashforth-Moulton	62
3.5 Tinjauan Agama Terhadap Hasil Pembahasan	80
BAB IV PENUTUP	86
4.1. Kesimpulan	86
4.2. Saran	88
DAFTAR PUSTAKA	89



ABSTRAK

Lestari, Erni Nur Indah. 2011. *Kajian Metode Adams Bashforth Moulton Pada Masalah Nilai Batas*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: Hairur Rahman, M.Si

Dr. Munirul Abidin, M.Ag

Persamaan diferensial biasa order n dengan variabel terikat y dan variabel bebas x yaitu persamaan yang biasa yang dinyatakan dengan:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Dalam menentukan solusinya digunakan solusi eksak dan solusi aproksimasi. Solusi eksak disini merupakan solusi persamaan differensial biasa dengan masalah nilai awal yang ditentukan sedangkan solusi aproksimasi merupakan suatu hasil yang diperoleh dari persamaan pendekatan untuk persamaan differensial biasa dengan masalah nilai awal yang ditentukan.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui cara menentukan solusi masalah nilai batas persamaan differensial biasa dengan metode Adams-Bashforth-Moulton. Hasil metode Adams-Bashforth-Moulton diperoleh dengan melakukan prediksi dengan persamaan prediktor dan melakukan koreksi dengan persamaan korektor. Dan dengan metode tersebut memberikan hasil cukup akurat dan merupakan metode persamaan differensial biasa yang stabil dalam menentukan solusinya baik eksak maupun aproksimasinya.

Dari hasil analisis dan pembahasan menunjukkan bahwa cara menentukan solusi masalah nilai batas persamaan differensial biasa dengan metode Adams-Bashforth-Moulton memerlukan nilai awal dari metode satu langkah untuk menentukan $y_r, y_{r-1}, y_{r-2}, \dots, y_{r-m}$. Perhitungan nilai y_{r+1}^* pada metode Adams-Bashforth-Moulton dapat dilakukan dengan memilih metode satu-langkah yang memberikan ketelitian yang lebih baik dan pemilihan ukuran langkah h yang tepat dan konstan. Metode ini menghasilkan error yang lebih kecil atau mendekati solusi sebenarnya sehingga lebih efisien untuk penentuan beberapa nilai taksiran.

Kata Kunci: Adams Bashforth Moulton, Metode Prediktor-Korektor

ABSTRACT

Lestari, Erni Nur Indah. 2011. **Study of Moulton Method Adams Bashforth On Boundary Value Problems**. Thesis, Department of Mathematics Faculty of Science and Technology State Islamic University of Malang Maulana Malik Ibrahim.

Supervisor: Hairur Rahman, M.Si
Dr. Munirul Abidin, M.Ag

n order ordinary differential equation with dependent variable y and independent variable x is the usual equation is expressed as:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

In determining the exact solution and the solution used approximations. Exact solution here is the solution to the problem of ordinary differential equations initial value is determined while approximation solution is a result obtained from equation approach for ordinary differential equations with initial value problems are determined.

This study aims to determine how to define the boundary value problem solutions ordinary differential equations by the Adams-Bashforth-Moulton. The results of the Adams-Bashforth-Moulton obtained by performing prediction in a predictor equation and make corrections to the corrector equations. And with that method gives sufficiently accurate results and is the method of ordinary differential equations that determine the solution is stable in either exact or approximations.

From the analysis and discussion shows that how to determine the solution boundary value problem ordinary differential equations by the Adams-Bashforth-Moulton method requires the initial value of one-step method to determine $y_r, y_{r-1}, y_{r-2}, \dots, y_{r-m}$. The calculation of value y_{r+1}^* in the Adams-Bashforth-Moulton can be done by selecting a single-step method that provides better accuracy and selection of appropriate step size h and constant. This method produces a smaller error, or close to actually making it more efficient solution for the determination of some of the assessed value.

Keywords: Adams Bashforth Moulton, Predictor-Corrector Method

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama semua itu kebenarannya bisa kita lihat dalam Al-Qur'an. (Rahman, 2007: 1)

Matematika adalah ilmu berhitung, definisi matematika tersebut dapat dijelaskan dalam Al-Qur'an yang menyebutkan bahwa Allah Maha Cepat dan Maha Teliti dalam masalah hitung menghitung. Perhatikan firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Qomar ayat 49 berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.*”

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya (Abdussakir, 2007: 79).

Sebenarnya, dalam Al-Qur'an terdapat ayat yang secara tersirat memerintahkan umat Islam untuk mempelajari matematika, yaitu berkenaan dengan masalah *faraidh*. Bukankah telah disebutkan dengan tegas bahwa masalah *faraidh* adalah ketentuan dari Allah yang wajib dilaksanakan. Berkenaan dengan masalah *faraidh* ini, Allah SWT. Berfirman dalam surat An-Nisa' ayat 11 sebagai berikut:

يُوصِيكُمُ اللَّهُ فِي أَوْلَادِكُمْ لِلَّذِ كَرِ مِثْلُ حَظِّ الْأُنثَيَيْنِ ۚ فَإِن كُن نِسَاءً فَوْقَ
 أَنْثَيَيْنِ فَلَهُن ثُلثَا مَا تَرَكَ ۚ وَإِن كَانَتْ وَاحِدَةً فَلَهَا النِّصْفُ ۚ وَلَا لِأَبَوَيْهِ لِكُلِّ وَاحِدٍ
 مِّنْهُمَا الشُّدُسُ مِمَّا تَرَكَ إِن كَانَ لَهُ وَوَلَدٌ فَإِن لَّمْ يَكُن لَهُ وَوَلَدٌ وَوَرِثَةٌ أَبَوَاهُ
 فَلِأُمِّهِ الثُّلُثُ ۚ فَإِن كَانَ لَهُ إِخْوَةٌ فَلِأُمِّهِ الشُّدُسُ ۚ مِن بَعْدِ وَصِيَّةٍ يُوصِي بِهَا أَوْ
 دِينِ ءِآبَائِكُمْ وَأَبْنَاؤِكُمْ لَا تَدْرُونَ أَيُّهُم أَقْرَبُ لَكُمْ نَفْعًا فَرِيضَةٌ مِّنَ اللَّهِ إِنَّ
 اللَّهَ كَانَ عَلِيمًا حَكِيمًا ﴿٢٤٠﴾

Artinya: “Allah mensyari’atkan bagimu tentang (pembagian pusaka untuk) anak-anakmu. Yaitu : bahagian seorang anak lelaki sama dengan bahagian dua orang anak perempuan[272]; dan jika anak itu semuanya perempuan lebih dari dua[273], Maka bagi mereka dua pertiga dari harta yang ditinggalkan; jika anak perempuan itu seorang saja, Maka ia memperoleh separo harta. dan untuk dua orang ibu-bapa, bagi masing-masingnya seperenam dari harta yang ditinggalkan, jika yang meninggal itu mempunyai anak; jika orang yang meninggal tidak mempunyai anak dan ia diwarisi oleh ibu-bapanya (saja), Maka ibunya mendapat sepertiga; jika yang meninggal itu mempunyai beberapa saudara, Maka ibunya mendapat seperenam. (Pembagian-pembagian tersebut di atas) sesudah dipenuhi wasiat yang ia buat atau (dan) sesudah dibayar hutangnya. (Tentang) orang tuamu dan anak-anakmu, kamu tidak mengetahui siapa di antara mereka yang lebih dekat (banyak) manfaatnya bagimu. ini adalah ketetapan dari Allah. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana.”

Al-Qurtubi dalam tafsirnya mengatakan bahwa ayat-ayat tentang ilmu *faraidh* merupakan salah satu bagian dari seluruh pokok-pokok agama atau merupakan pilar-pilar hukum, serta pokok-pokok ayat Al-Qur’an. Karenanya kedudukan yang tinggi, maka ilmu *faraidh* dikatakan sebagai setengah dari ilmu. Rasulullah SAW. telah bersabda,

تَعَلَّمُوا الْقُرْآنَ وَعَلِّمُوهُ النَّاسَ، وَتَعَلَّمُوا الْفَرَائِضَ وَعَلِّمُوهَا النَّاسَ، فَإِنِّي أَمْرٌ مَقْبُوضٌ وَإِنَّ هَذَا الْعِلْمَ سَيُقْبَضُ وَتَظْهَرُ الْفِتْنُ، فَحَتَّى يَخْتَلِفَ الْإِثْنَانِ فِي الْفَرِيضَةِ، فَلَا يَجِدَانِ مَنْ يَفْصِلُ بَيْنَهُمَا.

Artinya: “Belajarlah kamu sekalian tentang Al-Qur’an dan ajarkanlah Al-Qur’an itu kepada manusia. Dan belajarlah kamu sekalian tentang ilmu faraidh kemudian ajarkanlah ilmu tersebut kepada manusia. Sesungguhnya, aku adalah seorang yang akan meninggal dan ilmu ini akan diangkat sehingga timbul berbagai fitnah. Kemudian timbullah sengketa antara dua pihak tentang pembagian warisan dan keduanya tidak menemukan orang yang bisa memberikan keputusan tentang sengketa di antara keduanya.” (Ali, 1995: 17)

Untuk dapat memahami dan dapat melaksanakan masalah *faraidh* dengan baik, maka hal yang perlu dipahami lebih dahulu adalah konsep matematika yang berkaitan dengan bilangan pecahan, pecahan senilai, konsep keterbagian, faktor persekutuan terbesar (FPB), kelipatan persekutuan terkecil (KPK), dan konsep pengukuran yang meliputi pengukuran luas, berat, dan volume. Pemahaman terhadap konsep-konsep tersebut akan memudahkan untuk memahami *faraidh*. Jadi adanya permasalahan *faraidh* dapat diartikan bahwa umat Islam perlu mempelajari matematika. (Abdussakir, 2007: 95-96)

Berbagai masalah dalam bidang matematika digambarkan dalam bentuk persamaan matematika. Apabila persamaan tersebut sederhana, maka bisa diselesaikan secara analitik. Tapi jika persamaan tersebut sulit diselesaikan secara analitik, maka salah satu solusinya adalah diselesaikan secara numerik. Perhitungan numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara tematik dengan cara operasi pendekatan

dari penyelesaian analitik atau eksak. Nilai kesalahan tersebut diupayakan sekecil mungkin terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan dari fenomena riil yang dapat dijelaskan melalui pembentukan model matematika. Pada umumnya perumusan model matematika ini berupa fungsi. Dalam banyak kasus, tidak semua model matematika tersebut mempunyai jawab analitis sehingga digunakan hampiran (aproksimasi) secara numerik. Agar memperoleh hasil yang mendekati solusi sebenarnya maka dibutuhkan suatu pendekatan metode khusus dan sangat berkaitan dengan persamaan diferensial.

Adapun persamaan diferensial adalah persamaan yang mempunyai turunan fungsi. Persamaan diferensial sendiri dibagi menjadi dua kelompok besar. Apabila persamaan tersebut mengandung hanya satu variabel bebas, persamaan disebut dengan persamaan diferensial biasa, dan jika mengandung lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan diferensial parsial. Derajat (order) dari persamaan diferensial ditentukan oleh derajat tertinggi turunannya (Triatmojo, 2002: 165).

Persamaan diferensial biasa order n dengan variabel terikat y dan variabel bebas x yaitu persamaan yang biasa yang dinyatakan dengan:

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

Dalam menentukan solusinya digunakan solusi eksak dan solusi aproksimasi. Solusi eksak disini merupakan solusi persamaan diferensial biasa dengan masalah nilai awal yang ditentukan sedangkan solusi aproksimasi merupakan suatu hasil yang diperoleh dari persamaan pendekatan untuk persamaan diferensial biasa dengan masalah nilai awal yang ditentukan.

Telah banyak metode yang dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa secara numerik, antara lain dapat dilakukan dengan dua metode secara garis besarnya yaitu metode satu-langkah (*one-step*) yang meliputi metode Euler, metode Heun, metode deret Taylor dan metode Runge-Kutta. Yang kedua adalah metode banyak-langkah (*multi-step*) yang meliputi metode Adams-Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson dan metode Hamming.

Dari beberapa metode banyak langkah (*multi-step*), penulis mencoba menggunakan metode banyak-langkah (*multi-step*) Adams-Bashforth-Moulton untuk menentukan solusi tersebut. Penulis menggunakan metode ini karena metode ini merupakan metode yang sederhana dalam penyelesaian persamaan diferensial, yaitu tanpa harus mencari turunan-turunan fungsinya melainkan hanya dengan menentukan persamaan prediktor dan korektornya saja. Hasil metode Adams-Bashforth-Moulton diperoleh dengan melakukan prediksi dengan persamaan prediktor dan melakukan koreksi dengan persamaan korektor. Dan dengan metode tersebut memberikan hasil cukup akurat dan merupakan metode persamaan diferensial biasa yang stabil dalam menentukan solusinya baik eksak maupun aproksimasinya.

Metode banyak-langkah (*multi-step*) Adams-Bashforth-Moulton menggunakan apa yang telah diketahui dari titik sebelumnya, $y_r, y_{r-1}, y_{r-2}, \dots, y_{r-m}$, yang dapat diperoleh melalui metode satu-langkah untuk menghitung taksiran nilai y_{r+1} yang lebih baik. Berbeda dengan metode satu-langkah (*one-step*) yang hanya memerlukan satu buah taksiran nilai sebelumnya.

Berdasarkan latar belakang diatas maka penulis mengambil judul "*Kajian Metode Adams Bashforth Moulton Pada Masalah Nilai Batas.*"

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang yang telah dipaparkan diatas, maka penulis merumuskan masalah yaitu: " Bagaimana cara menentukan solusi masalah nilai batas persamaan diferensial biasa dengan metode Adams-Bashforth-Moulton."

1.3 Tujuan

Penelitian ini bertujuan, untuk mengetahui cara menentukan solusi masalah nilai batas persamaan diferensial biasa dengan metode Adams-Bashforth-Moulton.

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan masalahnya adalah sebagai berikut:

- a. Metode Multi-step pada Metode Adams-Bashforth-Moulton orde 3 dengan y_r, y_{r-1} , dan y_{r-2} yang berasal dari metode satu-langkah.
- b. Persamaan Diferensial Biasa orde satu dengan Masalah Nilai Awal.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

a. Bagi penulis

Penelitian ini digunakan sebagai penambah wawasan ilmu pengetahuan mengenai metode numerik, terutama informasi tentang mengenai kajian metode Adams-Bashforth-Moulton pada masalah nilai batas.

b. Bagi lembaga

Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai sarana penunjang pengembangan wawasan keilmuan dalam mata kuliah Metode Numerik dan dapat dijadikan sebagai tambahan kepustakaan, terutama di jurusan matematika.

c. Bagi pengembang ilmu

Hasil penelitian ini dapat dijadikan bahan penelitian lebih lanjut dan sebagai bahan kajian keilmuan untuk menambah wawasan keilmuan tentang analisis numerik.

1.6 Metode Penelitian

Metode merupakan cara utama yang akan ditempuh untuk menemukan jawaban dari suatu permasalahan. Berdasarkan hal tersebut, maka dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan metode kajian literatur atau kepustakaan, yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam materiil yang terdapat di perpustakaan. Buku-buku matematika seperti: Applied Numerical

Methods Using Matlab, Metode Numerik, Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab dan referensi lain yang relevan dengan pembahasan merupakan referensi pendukung yang digunakan oleh penulis.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

a. Merumuskan masalah

Penelitian berawal dari suatu masalah yang akan dijawab, dipecahkan, diatasi dan dicari jalan keluarnya secara ilmiah.

b. Mengumpulkan data

Dengan menggunakan metode kepustakaan, penulis mengumpulkan bahan atau sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan kajian metode Adams-Bashforth-Moulton pada masalah nilai batas.

c. Menyelesaikan contoh

Di sini, penulis menyelesaikan contoh dengan cara mengaitkan materi yang sedang dikaji.

d. Membuat kesimpulan

Kesimpulan merupakan gambaran langkah dari pembahasan atas apa yang sedang ditulis. Kesimpulan didasarkan pada data yang telah dikumpulkan dan merupakan jawaban dari masalah yang dikemukakan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam skripsi ini, sistematika penulisan yang digunakan penulis sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN: Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, pembatasan dan rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA: Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji.

BAB III PEMBAHASAN: Dalam bab ini dipaparkan hasil-hasil kajian dan beberapa landasan ilmu yang terkait.

BAB IV PENUTUP: Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan diajukan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan penjelasan pada bab selanjutnya.

2.1 Persamaan Diferensial

Sebuah persamaan yang mengandung diferensial dari suatu variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial (Baiduri, 2:2001).

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Edwin J Purcell:1984).

2.1.1 Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

PDB adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas (Rinaldi Munir: 2003).

Contoh:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| a. $\frac{dy}{dx} = 2x + y$ | c. $2dy/dx + x^2y - y = 0$ |
| b. $y' = x^2 - 7y^2$ | |

2.1.2 Persamaan Diferensial Parsial (PDP)

PDP adalah persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu peubah bebas. Turunan fungsi terhadap setiap peubah bebas dilakukan secara parsial (Rinaldi Munir: 2003).

Contoh:

$$\text{a. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6xye^{x+y} \quad (\mathbf{u = g(x,y)})$$

$$\text{b. } (\mathbf{u = g(x,y,t)})$$

Peubah bebas pada (i) adalah x dan y , sedang peubah terikatnya adalah u , yang merupakan fungsi dari x dan y , atau ditulis $u = g(x,y)$. sedangkan peubah bebas pada (ii) adalah x , y dan t , atau ditulis $u = g(x,y,t)$.

2.1.3 Order

Suatu persamaan diferensial disebut mempunyai order (tingkat) n jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke- n .

(Kartono: 1994)

Contoh:

$$\text{a. } \frac{dy}{dx} = x + y + 1$$

$$\text{b. } y' = x^2 + y^2$$

$$\text{c. } 2dy/dx + x^2y - y = 0$$

$$\text{d. } (y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$$

$$\text{e. } y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$$

Berdasarkan contoh tersebut, PDB dapat dikelompokkan menurut ordenya yaitu:

i. PDB orde 1

Yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan pertama.

Contoh (a), (b) dan (c) di atas adalah PDB orde satu.

ii. PDB orde 2

Yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan kedua.

Contoh (d) adalah PDB orde dua.

iii. PDB orde 3

Yaitu PDB yang turunan tertingginya adalah turunan ketiga.

Contoh (e) di atas adalah PDB orde tiga.

iv. PDB orde lanjut

Yaitu PDB dengan orde yang lebih tinggi. PDB orde 2 ke atas dinamakan juga PDB orde lanjut.

Persamaan diferensial biasa orde- n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk: $Y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ dimana $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ yang semua nilai-nilainya ditentukan oleh nilai dari variabel bebas x . (Finizio, 1982)

2.1.4 Solusi Persamaan Diferensial Biasa

Diberikan PD orde- n :

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0 \dots \dots \dots (2.1) \text{ atau}$$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0 \dots \dots \dots (2.2)$$

fungsi $y = \phi(x)$ yang terdefinisi pada interval $I \subset \mathfrak{R}$ dikatakan solusi (2.1) atau (2.2) jika fungsi tersebut memenuhi (2.1) atau (2.2) pada I . Solusi dengan bentuk $y = \phi(x)$ disebut solusi eksplisit sedangkan solusi berbentuk $\phi(x, y) = c$ disebut solusi implisit. Jika solusi (2.1) atau (2.2) masih memuat konstanta sebarang, maka solusinya disebut solusi umum (kumpulan solusi). Sedangkan jika tidak ada lagi konstanta sebarang disebut solusi sejati.

Definisi 2.1.4

Sebuah fungsi $\phi(x)$ disebut solusi eksplisit persamaan $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ atau $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ pada interval I , jika $\phi(x)$ terdefinisi pada I dan bila disubstitusikan untuk y ke dalam $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ atau $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ memenuhi persamaan tersebut untuk setiap x dalam interval I . (Baiduri.6:2001)

2.1.5 Masalah Nilai Awal**Definisi 2.1.5**

Masalah nilai awal untuk PD order- n $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$ yaitu menentukan solusi PD tersebut pada interval I yang memenuhi n syarat awal di $x_0 \in I$ subset dari real.

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_1 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_{n-1} \end{aligned}$$

dimana y_0, y_1, \dots, y_{n-1} konstanta yang diberikan. (Baiduri, 10:2001)

Jika $x_0 \in I$ berbeda-beda misalnya x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , maka MNA disebut masalah nilai batas (MNB). Masalah nilai awal dan masalah nilai batas sering disebut masalah syarat batas.

Masalah Nilai Awal Pada Metode Numerik

Penyelesaian numerik untuk masalah nilai awal diketahui sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ dan } y(x_0) = y_0$$

Syarat awal $y(x_0) = y_0$ terdiri dari sejumlah $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ yang berturut-turut merupakan pendekatan harga $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n)$ pada kurva interval $y(x)$ yang melalui titik (x_0, y_0) . Harga y_i menyatakan penyelesaian numerik, sedangkan harga $y(x_i)$ menyatakan harga penyelesaian eksak. Biasanya penyelesaian numerik dihitung untuk harga-harga $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, dimana $x_{i+1} = x_i + h$. Besar pembulatan h disebut besar langkah metode numerik.

Secara umum, metode numerik untuk memecahkan masalah nilai awal dapat dibagi dalam dua kelompok, yaitu: metode Satu Langkah (*One-step method*) dan metode Banyak Langkah (*Multi-step method*).

a. Metode Satu Langkah (*One step method*)

Metode ini menggunakan informasi tentang kurva pada satu titik dan tidak mengulang jawaban. Yang termasuk metode ini adalah metode Euler, metode Heun, metode Deret Taylor dan metode Runge Kutta. Semua metode tersebut dimasukkan ke dalam metode satu langkah (*One-step*), sebab untuk menaksir nilai $y(x_{r+1})$ diperlukan satu buah taksiran nilai sebelumnya, $y(x_r)$.

b. Banyak Langkah (*Multi-step method*)

Metode ini memerlukan beberapa taksiran nilai sebelumnya, $y(x_r), y(x_{r-1}), y(x_{r-2}), \dots$ untuk menghitung $y(x_{r+1})$. Dengan demikian metode ini

perlu nilai awal y_n, y_{n-1}, \dots dari metode satu langkah. Metode banyak langkah memerlukan lebih sedikit evaluasi fungsi, tapi memerlukan ulangan untuk mendapatkan jawaban yang akurat. Kebanyakan tipe ini disebut juga metode Peramal-Pembetulan (*Predictor-Corrector*). Yang termasuk metode Banyak Langkah adalah metode Adams-Bashforth-Moulton, metode Milne-Simpson dan metode Hamming. Selanjutnya, penulis mencoba untuk menggunakan metode multi-step Adams-Bashforth-Moulton dalam menentukan solusi masalah nilai batas PDB yang akan dijelaskan pada bab III.

2.2 Kesalahan (Galat)

Jika \hat{a} adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati (eksak) a , maka selisih $\varepsilon = a - \hat{a}$ disebut galat. Jika tanda galat (positif atau negatif) tidak dipertimbangkan maka galat tersebut dinamakan galat mutlak yang didefinisikan

sebagai : $|\varepsilon| = |a - \hat{a}|$ (Rinaldi Munir, 23: 2003).

Secara umum terdapat dua sumber utama penyebab galat dalam perhitungan numerik, yaitu:

1) Galat Pemotongan (*truncation error*)

Galat yang ditimbulkan akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak.

2) Galat Pembulatan (*round-off error*)

Galat yang ditimbulkan akibat keterbatasan oleh mesin (komputer) dalam menyajikan bilangan riil.

Selain itu juga terdapat Galat longgokan (*cumulative error*) yaitu galat yang terkumpul pada akhir langkah ke- r .

2.3 Metode Euler

Persamaan diferensial biasa dengan metode Euler adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari PDB orde satu yang diketahui sebagai berikut:

$$y' = dy/dx = f(x, y) \text{ dan nilai awal } y(x_0) = y_0 \quad (2.3)$$

misalkan

$$y_r = y(x_r)$$

adalah hampiran nilai y di x_r yang di hitung dengan metode Euler. Dalam hal ini $x_r = x_0 + rh$, $r = 0, 1, 2, \dots, n$. Metode Euler diturunkan dengan cara menguraikan $y(x_{r+1})$ di sekitar x_r ke dalam deret Taylor:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \dots \quad (2.4)$$

Bila persamaan (2.4) di potong sampai suku orde tiga , diperoleh

$$y(x_{r+1}) \approx y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(t), x_r < t < x_{r+1} \quad (2.5)$$

Berdasarkan persamaan (2.3),

$$y'(x_r) = f(x_r, y_r)$$

dan

$$x_{r+1} - x_r = h$$

maka persamaan (2.5) dapat di tulis menjadi

$$y(x_{r+1}) \approx y(x_r) + hf(x_r, y_r) + \frac{h^2}{2} y''(t) \quad (2.6)$$

Dua suku pertama persamaan (2.6), yaitu

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hf(x_r, y_r); \quad r = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

Untuk menyederhanakan penulisan ini, persamaan (2.7) dapat juga ditulis lebih singkat sebagai

$$y_{r+1} = y_r + hf_r$$

Meskipun metode Euler sederhana, tetapi ia mengandung dua macam galat, yaitu **galat pemotongan** (*truncation error*) dan **galat longgokan** (*cumulative error*).

Galat pemotongan dapat langsung ditentukan dari persamaan (2.6), yaitu

$$E_p \approx \frac{1}{2} h^2 y''(t) = O(h^2) \quad (2.8)$$

Galat pemotongan ini sebanding dengan kuadrat ukuran langkah h sehingga disebut juga **galat per langkah** (*error per step*) atau galat lokal. Galat solusi pada langkah ke- r adalah tumpukan galat dari langkah-langkah sebelumnya. Galat yang terkumpul pada akhir langkah ke- r ini disebut **galat longgokan** (*cumulative error*). Jika langkah dimulai dari $x_0 = a$ dan berakhir di $x_n = b$ maka total galat yang terkumpul pada solusi akhir (y_n) adalah

$$E_{total} = \sum_{r=1}^n (1/2)h^2 y''(t) = n \frac{h^2}{2} y''(t) = \frac{(b-a)}{2h} h^2 y''(t) = \frac{(b-a)}{2} y''(t)h \quad (2.9)$$

galat longgokan total ini sebenarnya adalah

$$E_{total} = y(b)_{sejati} - y(x_n)_{Euler}$$

Contoh yang diselesaikan menggunakan metode Euler:

Diketahui PDB

$$dy/dx = x + y \text{ dan } y(0) = 1$$

Gunakan metode Euler untuk menghitung $y(0,10)$ dengan ukuran langkah $h = 0,02$.

Penyelesaian :

$$y' = x + y, y(0) = 0$$

Untuk persamaan diatas penyelesaian umumnya akan berbentuk:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-\int a(x)dx} \left[c + \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx \right] \\ &= e^{-\int 1dx} \left[c + \int xe^{-x} dx \right] \Rightarrow \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x} \cdot 1 \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} \\ &= -e^{-x}(x+1) \\ &= e^x \left[c - e^{-x}(x+1) \right] \\ &= ce^x - e^x \cdot e^{-x}(x+1) \\ &= ce^x - e^0(x+1) \\ &= ce^x - 1(x+1) \\ &= ce^x - x - 1 \end{aligned}$$

untuk $x = 0, y = 1$ maka $y = ce^x - x - 1$

$$1 = ce^0 - 0 - 1$$

$$1 = c \cdot 1 - 1$$

$$c = 2$$

sehingga diperoleh solusi sejati/ eksak,

$$y(x) = ce^x - x - 1$$

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

Diketahui

$$a = x_0 = 0$$

$$b = 0,10$$

$$h = 0,02$$

maka $n = (0,10 - 0) / 0,02 = 5$ (jumlah langkah)

Dalam hal ini, $f(x, y) = x + y$, dan penerapan metode Euler pada PDB

tersebut menjadi : $y_{r+1} = y_r + 0,02(x_r + y_r)$

Langkah-langkah :

a. Untuk $x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$

solusi eksaknya:

$$y(x_0) = 2e^{-x_0} - x_0 - 1 = 2e^0 - 0 - 1 = 1$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_0) - y_0 = 1 - 1 = 0$$

b. Untuk $n = 1$,

$$x_1 = 0,02 \rightarrow y_1 = y_0 + 0,02(x_0 + y_0) = 1 + (0,02)(0 + 1) = 1,02$$

$$y''(x) = 1 + dy/dx = 1 + f(x, y) = 1 + (x + y)$$

$$y''(x_1) = 1 + (x_1 + y_1) = 1 + (0,02 + 1,02) = 2,04$$

galat pemotongan:

$$E_p \approx \frac{1}{2}h^2 y''(t) \approx \frac{1}{2}h^2 y''(x_1) \approx \frac{1}{2}(0,02)^2 \cdot 2,04 \approx 0,000408$$

solusi eksaknya:

$$y(x_1) = 2e^{-x_1} - x_1 - 1 = 2e^{-0,02} - 0,02 - 1 = 1,02040268$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_1) - y_1 = 1,02040268 - 1,02 = 0,00040268$$

c. Untuk $n = 2$,

$$\begin{aligned} x_2 = 0,04 \quad \rightarrow y_2 = y_1 + 0,02(x_1 + y_1) &= 1,02 + (0,02)(0,02 + 1,02) \\ &= 1,0408 \end{aligned}$$

$$y''(x) = 1 + dy/dx = 1 + f(x, y) = 1 + (x + y)$$

$$y''(x_2) = 1 + (x_2 + y_2) = 1 + (0,04 + 1,0408) = 2,0808$$

galat pemotongan:

$$E_p \approx \frac{1}{2} h^2 y''(t) \approx \frac{1}{2} h^2 y''(x_2) \approx \frac{1}{2} (0,02)^2 \cdot 2,0808 \approx 0,00041616$$

solusi eksaknya:

$$y(x_2) = 2e^{x_2} - x_2 - 1 = 2e^{0,04} - 0,04 - 1 = 1,041621548$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_2) - y_2 = 1,041621548 - 1,0408 = 0,000821548$$

d. Untuk $n = 3$,

$$\begin{aligned} x_3 = 0,06 \quad \rightarrow y_3 = y_2 + 0,02(x_2 + y_2) &= 1,0408 + 0,02(0,04 + 1,0408) \\ &= 1,062416 \end{aligned}$$

$$y''(x) = 1 + dy/dx = 1 + f(x, y) = 1 + (x + y)$$

$$y''(x_3) = 1 + (x_3 + y_3) = 1 + (0,06 + 1,062416) = 2,122416$$

galat pemotongan:

$$E_p \approx \frac{1}{2} h^2 y''(t) \approx \frac{1}{2} h^2 y''(x_3) \approx \frac{1}{2} (0,02)^2 \cdot 2,122416 \approx 0,000424483$$

solusi eksaknya:

$$y(x_3) = 2e^{x_3} - x_3 - 1 = 2e^{0,06} - 0,06 - 1 = 1,063673093$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_3) - y_3 = 1,063673093 - 1,062416 = 0,001257093$$

$$\begin{aligned} \text{e. Untuk } n = 4 \quad x_4 = 0,08 \quad \rightarrow y_4 &= y_3 + 0,02(x_3 + y_3) \\ &= 1,062416 + 0,02(0,06 + 1,062416) \\ &= 1,08486432 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= 1 + dy/dx = 1 + f(x, y) = 1 + (x + y) \\ y''(x_4) &= 1 + (x_4 + y_4) = 1 + (0,08 + 1,08486432) = 2,16486432 \end{aligned}$$

galat pemotongan:

$$E_p \approx \frac{1}{2} h^2 y''(t) \approx \frac{1}{2} h^2 y''(x_4) \approx \frac{1}{2} (0,02)^2 \cdot 2,16486432 \approx 0,000432972$$

solusi eksaknya:

$$y(x_4) = 2e^{x_4} - x_4 - 1 = 2e^{0,08} - 0,08 - 1 = 1,086574135$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_4) - y_4 = 1,086574135 - 1,08486432 = 0,001709815$$

$$\begin{aligned} \text{f. Untuk } n = 5, \quad x_5 = 0,10 \quad \rightarrow y_5 &= y_4 + 0,02(x_4 + y_4) \\ &= 1,08486432 + 0,02(0,08 + 1,08486432) \\ &= 1,108161606 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= 1 + dy/dx = 1 + f(x, y) = 1 + (x + y) \\ y''(x_5) &= 1 + (x_5 + y_5) = 1 + (0,10 + 1,108161606) = 2,208161606 \end{aligned}$$

galat pemotongan:

$$E_p \approx \frac{1}{2} h^2 y''(t) \approx \frac{1}{2} h^2 y''(x_5) \approx \frac{1}{2} (0,02)^2 \cdot 2,208160606 \approx 0,000441632$$

galat longgokan total:

$$E_{total} = \frac{(b-a)}{2} y''(t) h = \frac{(0,10-0)}{2} \cdot 2,208161606 \cdot 0,02 = 0,002208161$$

solusi eksaknya:

$$y(x_5) = 2e^{x_5} - x_5 - 1 = 2e^{0,10} - 0,10 - 1 = 1,110341836$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_5) - y_5 = 1,110341836 - 1,108161606 = 0,00218023$$

2.4 Metode Heun

Penyelesaian persamaan diferensial dengan metode Heun adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari PDB orde satu sebagai berikut:

$$y' = f(x, y(x))$$

kedua ruas persamaan diintegrasikan dari x_r sampai x_{r+1}

$$\begin{aligned} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{x_r}^{x_{r+1}} y'(x) dx \\ &= y(x_{r+1}) - y(x_r) \\ &= y_{r+1} - y_r \end{aligned}$$

menyatakan y_{r+1} di ruas kiri dan suku-suku lainnya di ruas kanan:

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x)) dx \quad (2.10)$$

suku yang mengandung integral di ruas kanan, $\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x)) dx$, dapat diselesaikan

dengan kaidah trapezium menjadi

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x)) dx = \frac{h}{2} [f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1})] \quad (2.11)$$

persamaan di atas dimasukkan ke dalam persamaan (2.10), dihasilkan persamaan

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2} [f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1})] \quad (2.12)$$

yang merupakan **metode Heun**, atau **metode Euler-Cauchy** yang diperbaiki.

Dalam persamaan (2.12), suku ruas kanan mengandung y_{r+1} . Nilai y_{r+1} ini adalah solusi perkiraan awal (*predictor*) yang dihitung dengan metode Euler. Karena itu, persamaan (2.12) dapat ditulis sebagai

$$\text{Predictor: } y_{r+1}^{(0)} = y_r + hf(x_r, y_r)$$

$$\text{Corrector: } y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2} [f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)})] \quad (2.13)$$

atau ditulis dalam kesatuan,

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2} [f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_r + hf(x_r, y_r))] \quad (2.14)$$

dari persamaan di atas, suku $\frac{h}{2} [f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)})]$ bersesuaian dengan aturan trapezium pada integrasi numerik. Dapat dibuktikan bahwa galat per langkah metode Heun sama dengan galat kaidah trapesium, yaitu:

$$\begin{aligned} E_p &= -\frac{h^3}{12} y''''(t) \\ &= O(h^3) \end{aligned} \quad , x_r < t < x_{r+1} \quad (2.15)$$

Bukti:

Misalkan,

$$Y_{r+1} = \text{nilai } y \text{ sejati di } x_{r+1}$$

$$y_{r+1} = \text{hampiran nilai } y \text{ di } x_{r+1}$$

Menguraikan Y_{r+1} di sekitar x_r :

$$\begin{aligned} Y(x_{r+1}) &= y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^3}{3!} y'''(x_r) + \dots \\ &= y_r + h y_r' + \frac{h^2}{2} y_r'' + \frac{h^3}{6} y_r''' + \dots \end{aligned}$$

Dengan menyatakan $y_r' = f(x_r, y_r) = f_r$, maka

$$Y_{r+1} = y_r + h f_r + \frac{h^2}{2} f_r' + \frac{h^3}{6} f_r'' + \dots \quad (2.16)$$

Dari persamaan (2.14),

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{2} [f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)})]$$

Menguraikan $f(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)})$ dengan menggunakan deret Taylor di sekitar x_r :

$$\begin{aligned} f(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)}) &= f(x_{r+1}, y_r) \\ &= f(x_r, y_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} f'(x_r, y_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} + \dots \\ &= f_r + h f_r' + \frac{h^2}{2} f_r'' + \dots \end{aligned}$$

sehingga persamaan (2.14) dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{2} [f(x_r, y_r) + f(x_{r+1}, y_{r+1}^{(0)})] \\ &= y_r + h/2 [f_r + f_r + h f_r' + 1/2 h f_r'' + \dots] \\ &= y_r + h f_r + \frac{h^2}{2} f_r' + \frac{h^4}{4} f_r'' + \dots \end{aligned}$$

Galat per langkah

= nilai sejati – nilai hampiran

$$= Y_{r+1} - y_{r+1}$$

$$= (y_r + h f_r + \frac{h^2}{2} f_r' + \frac{h^3}{6} f_r'' + \dots) - (y_r + h f_r + \frac{h^2}{2} f_r' + \frac{h^4}{4} f_r'' + \dots)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{h^3}{6} f_r'' - \frac{h^3}{4} f_r'' + \dots \\
&= -\frac{h^3}{12} f_r'' + \dots \\
&= -\frac{h^3}{12} f_r''(t), \quad x_r < t < x_{r+1} \\
&= O(h^3)
\end{aligned}$$

sedang galat longgokannya adalah,

$$\begin{aligned}
E_L &= \sum_{r=1}^n -\frac{1}{12} h^3 y''''(t) \\
&= -\frac{(b-a)}{12} h^2 y''''(t) \\
&= O(h^2)
\end{aligned}$$

Contoh yang diselesaikan menggunakan metode Heun:

Diketahui PDB

$$dy/dx = x + y ; y(0) = 1$$

Hitung $y(0,10)$ dengan metode Heun ($h=0,02$)

Penyelesaian:

Diketahui:

$$f(x, y) = x + y$$

$$a = x_0 = 0$$

$$b = 0,10$$

$$h = 0,02$$

maka $n = (0,10 - 0) / 0,02 = 5$ (jumlah langkah)

Langkah-langkah:

a. Untuk $n = 1$, $x_1 = 0,02 \rightarrow y^{(0)}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$

$$= 1 + 0,02(0 + 1)$$

$$= 1,0200$$

$$\begin{aligned} y^{(1)}_1 &= y_0 + (h/2)[f(x_0, y_0) + f(x_1, y^{(0)}_1)] \\ &= 1 + (0,02/2)(0 + 1 + 0,02 + 1,0200) \\ &= 1,0204 \end{aligned}$$

galat pemotongan:

$$\begin{aligned} y'(x) &= x + y \\ y''(x) &= y'(x) = 1 + dy/dx = 1 + f(x, y) = 1 + (x + y) \\ y'''(x_1) &= 1 + (x_1 + y_1) = 1 + (0,02 + 1,0204) = 2,0404 \end{aligned}$$

$$E_p \approx -\frac{h^3}{12} y'''(t) \approx -\frac{(0,02)^3}{12} \cdot 2,0404 \approx -0,00000136$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_1) - y_1 = 1,02040268 - 1,0204 = 0,00000268$$

b. Untuk $n = 2$, $x_2 = 0,04 \rightarrow y^{(0)}_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$

$$= 1,0204 + 0,02(0,02 + 1,0204)$$

$$= 1,041208$$

$$\begin{aligned} y^{(1)}_2 &= y_1 + (h/2)[f(x_1, y_1) + f(x_2, y^{(0)}_2)] \\ &= 1,0204 + (0,02/2)[0,02 + 1,0204 + 0,04 + 1,041208] \\ &= 1,04161608 \end{aligned}$$

galat pemotongan:

$$y'''(x_2) = 1 + (x_2 + y_2) = 1 + (0,04 + 1,04161608) = 2,08161608$$

$$E_p \approx -\frac{h^3}{12} y'''(t) \approx -\frac{(0,02)^3}{12} \cdot 2,08161608 \approx -0,000001387$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_2) - y_2 = 1,041621548 - 1,04161608 = 0,000005468$$

c. Untuk $n = 3$, $x_3 = 0,06 \rightarrow y^{(0)}_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$

$$= 1,04161608 + 0,02(0,04 + 1,04161608)$$

$$= 1,063248402$$

$$y^{(1)}_3 = y_2 + (h/2)[f(x_2, y_2) + f(x_3, y^{(0)}_3)]$$

$$= 1,04161608 + (0,02/2)[0,04 + 1,04161608 + 0,06 + 1,063248402]$$

$$= 1,063664725$$

galat pemotongan:

$$y'''(x_3) = 1 + (x_3 + y_3) = 1 + (0,06 + 1,063664725) = 2,123664725$$

$$E_p \approx -\frac{h^3}{12} y'''(t) \approx -\frac{(0,02)^3}{12} \cdot 2,123664725 \approx -0,000001415$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_3) - y_3 = 1,063673093 - 1,063664725 = 0,000008368$$

d. Untuk $n = 4$, $x_4 = 0,08 \rightarrow y^{(0)}_4 = y_3 + hf(x_3, y_3)$

$$= 1,063664725 + 0,02(0,06 + 1,063664725)$$

$$= 1,08613802$$

$$y^{(1)}_4 = y_3 + (h/2)[f(x_3, y_3) + f(x_4, y^{(0)}_4)]$$

$$= 1,063664725 + (0,02/2)[0,06 + 1,063664725 + 0,08 + 1,08613802]$$

$$= 1,086562752$$

galat pemotongan:

$$y'''(x_4) = 1 + (x_4 + y_4) = 1 + (0,08 + 1,086562752) = 2,166562752$$

$$E_p \approx -\frac{h^3}{12} y'''(t) \approx -\frac{(0,02)^3}{12} \cdot 2,166562752 \approx -0,000001444$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_4) - y_4 = 1,086574135 - 1,086562752 = 0,000011383$$

e. Untuk $n = 5$, $x_5 = 0,10 \rightarrow y^{(0)}_5 = y_4 + hf(x_4, y_4)$

$$= 1,086562752 + 0,02(0,08 + 1,086562752)$$

$$= 1,109894007$$

$$\begin{aligned} y^{(1)}_5 &= y_4 + (h/2)[f(x_4, y_4) + f(x_5, y^{(0)}_5)] \\ &= 1,086562752 + (0,02/2)[0,08 + 1,086562752 + 0,10 + 1,109894007] \\ &= 1,11032732 \end{aligned}$$

$$y'''(x_5) = 1 + (x_5 + y_5) = 1 + (0,10 + 1,11032732) = 2,21032732$$

galat pemotongan:

$$E_p \approx -\frac{h^3}{12} y'''(t) \approx -\frac{(0,02)^3}{12} \cdot 2,21032732 \approx -0,000001473$$

galat longgokan:

$$E_L = -\frac{(b-a)}{12} h^2 y'''(t) = -\frac{(0,10-0)}{12} (0,02)^2 \cdot 2,21032732 = -0,000007367$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_5) - y_5 = 1,110341836 - 1,11032732 = 0,000014516$$

2.5 Metode Deret Taylor

Penyelesaian persamaan diferensial biasa dengan metode Deret Taylor adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari PDB orde satu sebagai berikut:

$$y'(x) = f(x, y) \text{ dengan masalah nilai awal } y(x_0) = y_0$$

Misalkan

$$y_{r+1} = y(x_{r+1}), \quad r = 0, 1, \dots, n$$

adalah hampiran nilai y di x_{r+1} . Hampiran ini diperoleh dengan menguraikan y_{r+1} di sekitar x_r sebagai berikut:

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)}{1!} y'(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^2}{2!} y''(x_r) + \frac{(x_{r+1} - x_r)^3}{3!} y'''(x_r) + \dots + \frac{(x_{r+1} - x_r)^n}{n!} y^{(n)}(x_r)$$

atau

$$y(x_{r+1}) = y(x_r) + hy'(x_r) + \frac{h^2}{2} y''(x_r) + \frac{h^3}{6} y'''(x_r) + \dots + \frac{h^n y^{(n)}}{n!} \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) menyiratkan bahwa untuk menghitung hampiran nilai y_{r+1} , perlu menghitung $y'(x_r)$, $y''(x_r)$, ..., $y^{(n)}(x_r)$, yang dapat dikerjakan dengan rumus

$$y^{(k)}(x) = P^{(k-1)} f(x, y) \quad (2.18)$$

Yang dalam hal ini, P adalah operator turunan,

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.19)$$

Galat perlangkah metode deret Taylor setelah pemotongan ke- n adalah

$$E_p \approx \frac{h^{(n+1)} y^{(n+1)}}{(n+1)!}(t), x_0 < t < x_{r+1} \quad (2.20)$$

Galat longgokan total metode deret Taylor adalah:

$$\begin{aligned} E_L &= \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(t) \\ &= \frac{b-a}{h} \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(t) \\ &= (b-a) \frac{y^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} h^n \\ &= O(h^n) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Contoh yang diselesaikan menggunakan metode deret Taylor:

Diketahui PDB

$$dy/dx = x + y; y(0) = 1$$

Tentukan $y(0,10)$ dengan metode deret Taylor ($h=0,02$)

Penyelesaian:

Diketahui:

$$f(x, y) = x + y$$

$$a = x_0 = 0$$

$$b = 0,10$$

$$h = 0,02$$

maka $n = (0,10 - 0) / 0,02 = 5$ (jumlah langkah)

a. Untuk $n = 1$

$$x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$$

$$x_1 = 0,02 \rightarrow y_1 = ?$$

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2} y''(x_0) + \frac{h^3}{6} y'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_0) + \dots$$

misal kita hanya menghitung $y(x_1)$ sampai suku orde ke-4 saja.

$$y'(x) = f(x, y) = x + y$$

$$y''(x) = f'(x, y) = 1 + y'(x) = 1 + f(x, y)$$

$$y'''(x) = f''(x, y) = y''(x) = f'(x, y)$$

$$y^{iv}(x) = f'''(x, y) = y'''(x) = f''(x, y)$$

diperoleh

$$y(0) = 1$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 0 + 1 = 1$$

$$y''(x_0) = f'(x_0, y_0) = 1 + y'(x_0) = 1 + f(x_0, y_0) = 1 + 1 = 2$$

$$y'''(x_0) = f''(x_0, y_0) = f'(x_0, y_0) = 2$$

$$y^{iv}(x_0) = f'''(x_0, y_0) = f''(x_0, y_0) = 2$$

sehingga

$$y(x_1) = 1 + 0,02(1) + ((0,02)^2 / 2) \cdot 2 + ((0,02)^3 / 6) \cdot 2 + ((0,02)^4 / 24) \cdot 2 \\ = 1,02040268$$

galat pemotongan:

$$y^v(x_1) = f^{iv}(x_1, y_1) = f'''(x_1, y_1) = f''(x_1, y_1) = f'(x_1, y_1) = 1 + f(x_1, y_1) \\ = 1 + 0,02 + 1,02040268 = 2,04040268$$

$$E_p \approx \frac{h^5}{5!} y^{(v)}(t) \approx \frac{(0,02)^5}{120} \cdot 2,04040268 \approx \frac{3 \cdot 10^{-9}}{120} \cdot 2,04040268 \approx 0,051010167 \cdot 10^{-9}$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_1) - y_1 = 1,02040268 - 1,02040268 = 0$$

b. Untuk $n = 2$

$$x_2 = 0,04 \rightarrow y_2 = ?$$

$$y(x_2) = y(x_1) + hy'(x_1) + \frac{h^2}{2} y''(x_1) + \frac{h^3}{6} y'''(x_1) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_1) = \dots$$

diperoleh:

$$y(x_1) = 1,02040268$$

$$y'(x_1) = f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 0,02 + 1,02040268 = 1,04040268$$

$$y''(x_1) = f'(x_1, y_1) = 1 + y'(x_1) = 1 + f(x_1, y_1) = 1 + 1,04040268 = 2,04040268$$

$$y'''(x_1) = f''(x_1, y_1) = f'(x_1, y_1) = 2,04040268$$

$$y^{iv}(x_1) = f'''(x_1, y_1) = f''(x_1, y_1) = 2,04040268$$

sehingga,

$$y_2 = 1,02040268 + 0,02 \cdot 1,04040268 + (0,02^2 / 2) \cdot 2,04040268 \\ + (0,02^3 / 6) \cdot 2,04040268 + (0,02^4 / 24) \cdot 2,04040268 \\ = 1,041621547$$

galat pemotongan:

$$y^v(x_2) = f^{iv}(x_2, y_2) = f'''(x_2, y_2) = f''(x_2, y_2) = f'(x_2, y_2) = 1 + f(x_2, y_2) \\ = 1 + 0,04 + 1,041621547 = 2,081621547$$

$$E_p \approx \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(t) \approx \frac{(0,02)^5}{120} \cdot 2,081621547 \approx \frac{3 \cdot 10^{-9}}{120} \cdot 2,081621547 \approx 0,052040538 \cdot 10^{-9} \text{ galatnya:}$$

$$\varepsilon = y(x_2) - y_2 = 1,041621548 - 1,041621547 = 0,000000001$$

c. Untuk $n = 3$

$$x_3 = 0,06 \rightarrow y_3 = ?$$

$$y(x_3) = y(x_2) + hy'(x_2) + \frac{h^2}{2} y''(x_2) + \frac{h^3}{6} y'''(x_2) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_2) = \dots$$

diperoleh:

$$y(x_2) = 1,041621547$$

$$y'(x_2) = f(x_2, y_2) = x_2 + y_2 = 0,04 + 1,041621547 = 1,081621547$$

$$y''(x_2) = f'(x_2, y_2) = 1 + y'(x_2) = 1 + f(x_2, y_2) = 1 + 1,081621547 = 2,081621547$$

$$y'''(x_2) = f''(x_2, y_2) = f'(x_2, y_2) = 2,081621547$$

$$y^{iv}(x_2) = f'''(x_2, y_2) = f''(x_2, y_2) = 2,081621547$$

sehingga,

$$\begin{aligned} y_3 &= 1,041621547 + 0,02 \cdot 1,081621547 + (0,02^2 / 2) \cdot 2,081621547 \\ &\quad + (0,02^3 / 6) \cdot 2,081621547 + (0,02^4 / 24) \cdot 2,081621547 \\ &= 1,063673089 \end{aligned}$$

galat pemotongan:

$$\begin{aligned} y^{iv}(x_3) &= f^{iv}(x_3, y_3) = f'''(x_3, y_3) = f''(x_3, y_3) = f'(x_3, y_3) = 1 + f(x_3, y_3) \\ &= 1 + 0,06 + 1,063673089 = 2,123673089 \end{aligned}$$

$$E_p \approx \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(t) \approx \frac{(0,02)^5}{120} \cdot 2,123673089 \approx \frac{3 \cdot 10^{-9}}{120} \cdot 2,123673089 \approx 0,053091827 \cdot 10^{-9}$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_3) - y_3 = 1,063673093 - 1,063673089 = 0,000000004$$

d. Untuk $n = 4$

$$x_4 = 0,08 \rightarrow y_4 = ?$$

$$y(x_4) = y(x_3) + hy'(x_3) + \frac{h^2}{2} y''(x_3) + \frac{h^3}{6} y'''(x_3) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_3) = \dots$$

diperoleh:

$$y(x_3) = 1,063673089$$

$$y'(x_3) = f(x_3, y_3) = x_3 + y_3 = 0,06 + 1,063673089 = 1,123673089$$

$$y''(x_3) = f'(x_3, y_3) = 1 + y'(x_3) = 1 + f(x_3, y_3) = 1 + 1,123673089 = 2,123673089$$

$$y'''(x_3) = f''(x_3, y_3) = f'(x_3, y_3) = 2,123673089$$

sehingga,

$$y^{iv}(x_3) = f'''(x_3, y_3) = f''(x_3, y_3) = 2,123673089$$

$$\begin{aligned} y_4 &= 1,063673089 + 0,02 \cdot 1,123673089 + (0,02^2 / 2) \cdot 2,123673089 \\ &\quad + (0,02^3 / 6) \cdot 2,123673089 + (0,02^4 / 24) \cdot 2,123673089 \\ &= 1,086574129 \end{aligned}$$

galat pemotongan:

$$\begin{aligned} y^v(x_4) &= f^{iv}(x_4, y_4) = f'''(x_4, y_4) = f''(x_4, y_4) = f'(x_4, y_4) = 1 + f(x_4, y_4) \\ &= 1 + 0,08 + 1,086574129 = 2,166574129 \end{aligned}$$

$$E_p \approx \frac{h^5}{5!} y^{(v)}(t) \approx \frac{(0,02)^5}{120} \cdot 2,166574129 \approx \frac{3 \cdot 10^{-9}}{120} \cdot 2,166574129 \approx 0,054164353 \cdot 10^{-9} \text{ galatnya:}$$

$$\varepsilon = y(x_4) - y_4 = 1,086574135 - 1,086574129 = 0,000000006$$

e. Untuk $n = 5$

$$x_5 = 0,10 \rightarrow y_5 = ?$$

$$y(x_5) = y(x_4) + hy'(x_4) + \frac{h^2}{2} y''(x_4) + \frac{h^3}{6} y'''(x_4) + \dots + \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x_4) = \dots$$

diperoleh:

$$y(x_4) = 1,086574129$$

$$y'(x_4) = f(x_4, y_4) = x_4 + y_4 = 0,08 + 1,086574129 = 1,166574129$$

$$y''(x_4) = f'(x_4, y_4) = 1 + y'(x_4) = 1 + f(x_4, y_4) = 1 + 1,166574129 = 2,166574129$$

$$y'''(x_4) = f''(x_4, y_4) = f'(x_4, y_4) = 2,166574129$$

sehingga,

$$y^{iv}(x_4) = f'''(x_4, y_4) = f''(x_4, y_4) = 2,166574129$$

$$\begin{aligned} y_5 &= 1,086574129 + 0,02 \cdot 1,166574129 + (0,02^2 / 2) \cdot 2,166574129 \\ &\quad + (0,02^3 / 6) \cdot 2,166574129 + (0,02^4 / 24) \cdot 2,166574129 \\ &= 1,110341827 \end{aligned}$$

galat pemotongan:

$$y^v(x_5) = f^{iv}(x_5, y_5) = f''''(x_5, y_5) = f''(x_5, y_5) = f'(x_5, y_5) = 1 + f(x_5, y_5) \\ = 1 + 0,10 + 1,110341827 = 2,210341827$$

$$E_p \approx \frac{h^5}{5!} y^{(v)}(t) \approx \frac{(0,02)^5}{120} \cdot 2,210341827 \approx \frac{3 \cdot 10^{-9}}{120} \cdot 2,210341827 \approx 0,055258545 \cdot 10^{-9}$$

Galat

longgokan:

$$E_L = (b - a) \frac{y^{(v)}(t)}{5!} h^4 = (0,10 - 0) \cdot \frac{2,210341827}{120} \cdot (0,02)^4 = 0,29471224 \cdot 10^{-9} \text{ galatnya:}$$

$$\varepsilon = y(x_5) - y_5 = 1,110341836 - 1,110341827 = 0,000000009$$

2.6 Metode Runge-Kutta

Penyelesaian PDB dengan metode Runge-Kutta adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari persamaan diferensial biasa $f(x, y)$.

Metode klasik Runge-Kutta dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$y_{r+1} = y_r + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dimana:

$$r = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$k_1 = hf(x_r, y_r)$$

$$k_2 = hf(x_r + 1/2h, y_r + 1/2k_1)$$

$$k_3 = hf(x_r + 1/2h, y_r + 1/2k_2)$$

$$k_4 = hf(x_r + h, y_r + k_3) \quad (\text{Harijono Djojodihardjo: 2000})$$

Galat perlangkah = sejati - hampiran

Contoh yang diselesaikan menggunakan metode Runge Kutta:

Diketahui PDB

$$\frac{dy}{dx} = x + y ; y(0) = 1$$

tentukan $y(0,10)$ dengan metode Runge-Kutta. Gunakan ukuran langkah $h = 0,02$.

Penyelesaian:

Diketahui

$$a = x_0 = 0$$

$$b = 0,10$$

$$h = 0,02$$

maka $n = (0,10 - 0) / 0,02 = 5$ (jumlah langkah)

a. Untuk $n = 1$

$$x_0 = 0 \rightarrow y_0 = 1$$

$$x_1 = 0,02 \rightarrow y_1 = ?$$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = (0,02)(1 + 0) = 0,02$$

$$k_2 = hf(x_0 + 1/2h, y_0 + 1/2k_1) = (0,02)([1 + 1/2 \cdot 0,02] + [0 + 1/2 \cdot 0,02]) = 0,0204$$

$$k_3 = hf(x_0 + 1/2h, y_0 + 1/2k_2) = (0,02)([1 + 1/2 \cdot 0,0204] + [0 + 1/2 \cdot 0,02]) = 0,020404$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = (0,02)([1 + 0,020404] + [0 + 0,02]) = 0,02080808 \text{ diperoleh,}$$

$$y_1 = y_0 + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= 1 + 1/6(0,02 + 2 \cdot 0,0204 + 2 \cdot 0,020404 + 0,02080808) = 1,02040268 \text{ galatnya:}$$

$$\varepsilon = y(x_1) - y_1 = 1,02040268 - 1,02040268 = 0$$

b. Untuk $n = 2$

$$x_1 = 0,02 \rightarrow y_1 = 1,02040268$$

$$x_2 = 0,04 \rightarrow y_2 = ?$$

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = (0,02)(1,02040268 + 0,02) = 0,020808053$$

$$k_2 = hf(x_1 + 1/2h, y_1 + 1/2k_1) = (0,02)([1,02040268 + 1/2 \cdot 0,020808053] + [0,02 + 1/2 \cdot 0,02]) = 0,021216134$$

$$k_3 = hf(x_1 + 1/2h, y_1 + 1/2k_2) = (0,02)([1,02040268 + 1/2 \cdot 0,021216134] + [0,02 + 1/2 \cdot 0,02]) = 0,021220214$$

$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = (0,02)([1,02040268 + 0,021220214] + [0,02 + 0,02]) \text{ diperoleh, } = 0,021632457$$

$$y_2 = y_1 + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,02040268 + 1/6(0,020808053 + 2 \cdot 0,021216134 + 2 \cdot 0,021220214 + 0,021632457) = 1,041621548$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_2) - y_2 = 1,041621548 - 1,041621548 = 0$$

c. Untuk $n = 3$

$$x_2 = 0,04 \rightarrow y_2 = 1,041621548$$

$$x_3 = 0,06 \rightarrow y_3 = ?$$

$$k_1 = hf(x_3, y_3) = (0,02)(1,041621548 + 0,04) = 0,02163243$$

$$k_2 = hf(x_3 + 1/2h, y_3 + 1/2k_3) = (0,02)([1,041621548 + 1/2 \cdot 0,02163243] + [0,04 + 1/2 \cdot 0,02]) = 0,022048755$$

$$k_3 = hf(x_2 + 1/2h, y_2 + 1/2k_2) = (0,02)([1,041621548 + 1/2 \cdot 0,022048755] + [0,04 + 1/2 \cdot 0,02]) = 0,022052918$$

$$k_4 = hf(x_2 + h, y_2 + k_3) = (0,02)([1,041621548 + 0,022052918] + [0,04 + 0,02]) \text{ diperoleh, } = 0,022473489$$

$$y_3 = y_2 + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,041621548 + 1/6(0,02163243 + 2 \cdot 0,022048755 + 2 \cdot 0,022052918 + 0,022473489) \text{ galatnya: } = 1,063673092$$

$$\varepsilon = y(x_3) - y_3 = 1,063673093 - 1,063673092 = 0,000000001$$

d. Untuk $n = 4$

$$x_3 = 0,06 \rightarrow y_3 = 1,063673092$$

$$x_4 = 0,08 \rightarrow y_4 = ?$$

$$k_1 = hf(x_3, y_3) = (0,02)(1,063673092 + 0,06) = 0,022473461$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(x_3 + 1/2h, y_3 + 1/2k_1) = (0,02)([1,063673092 + 1/2 \cdot 0,022473461] + \\ &\quad [0,06 + 1/2 \cdot 0,02]) \\ &= 0,022898196 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= hf(x_3 + 1/2h, y_3 + 1/2k_2) = (0,02)([1,063673092 + 1/2 \cdot 0,022898196] + \\ &\quad [0,06 + 1/2 \cdot 0,02]) \\ &= 0,022902443 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= hf(x_3 + h, y_3 + k_3) = (0,02)([1,063673092 + 0,022902443] + [0,06 + 0,02]) \\ &= 0,02333151 \end{aligned}$$

diperoleh,

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1,063673092 + 1/6(0,022473461 + 2 \cdot 0,022898196 + 2 \cdot 0,022902443 + 0,02333151) \quad \text{galatnya:} \\ &= 1,086574134 \end{aligned}$$

$$\varepsilon = y(x_4) - y_4 = 1,086574135 - 1,086574134 = 0,000000001$$

e. Untuk $n = 5$

$$x_4 = 0,08 \rightarrow y_4 = 1,086574134$$

$$x_5 = 0,10 \rightarrow y_5 = ?$$

$$k_1 = hf(x_4, y_4) = (0,02)(1,086574134 + 0,08) = 0,023331482$$

$$\begin{aligned} k_2 &= hf(x_4 + 1/2h, y_4 + 1/2k_1) = (0,02)([1,086574134 + 1/2 \cdot 0,023331482] + \\ &\quad [0,08 + 1/2 \cdot 0,02]) \\ &= 0,023764797 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= hf(x_4 + 1/2h, y_4 + 1/2k_2) = (0,02)([1,086574134 + 1/2 \cdot 0,023764797] + \\ &\quad [0,08 + 1/2 \cdot 0,02]) \\ &= 0,02376913 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= hf(x_4 + h, y_4 + k_3) = (0,02)([1,086574134 + 0,02376913] + [0,08 + 0,02]) \quad \text{diperoleh.} \\ &= 0,024206865 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_5 &= y_4 + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ &= 1,086574134 + 1/6(0,023331482 + 2 \cdot 0,023764797 + 2 \cdot 0,02376913 + 0,024206865) \\ &= 1,110341834 \end{aligned}$$

galatnya:

$$\varepsilon = y(x_5) - y_5 = 1,110341836 - 1,110341827 = 0,000000009$$

2.7 Polinom Interpolasi Lagrange

Polinom interpolasi lagrange diperoleh dari interpolasi linier yaitu interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus. Misal diberikan dua buah titik, (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan garis yang berbentuk:

$$p_1(x) = a_0 + a_1x \quad (2.22)$$

koefisien a_0 dan a_1 dicari dengan proses penyulihan dan eliminasi. Dengan menyulihkan (x_0, y_0) dan (x_1, y_1) ke dalam persamaan (2.22) diperoleh dua persamaan linier:

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1x_0 \\ y_1 &= a_0 + a_1x_1 \end{aligned}$$

kedua persamaan tersebut diselesaikan dengan proses eliminasi, yang memberikan

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (2.23)$$

$$\text{dan } a_0 = \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0} \quad (2.24)$$

kemudian mensubstitusikan (2.22) dan (2.23) ke dalam (2.24) untuk mendapatkan persamaan garis lurus:

$$p_1(x) = \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0} + \frac{(y_1 - y_0)x}{(x_1 - x_0)} \quad (2.25)$$

persamaan di atas dapat disusun menjadi polinom linier:

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \quad (2.26)$$

dari (2.26) dapat dibentuk lagi suatu persamaan:

$$p_1(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \quad (2.27)$$

atau dapat dinyatakan dalam bentuk

$$p_1(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) \quad (2.28)$$

yang dalam hal ini

$$a_0 = y_0, \quad L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \quad \text{dan} \quad a_1 = y_1, \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Persamaan (2.28) dinamakan **polinom lagrange** derajat 1. nama polinom ini berdasarkan nama penemunya Joseph Louis Lagrange yang berkebangsaan Prancis. Bentuk umum polinom Lagrange derajat $\leq n$ untuk $(n+1)$ titik berbeda adalah

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \dots + a_n L_n(x) \quad (2.29)$$

dimana $a_i = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$

dan ,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

polinom-polinom Lagrange untuk titik-titik x_0, \dots, x_n . Fungsi $L_i(x)$ adalah hasil kali dari n faktor linier, karenanya $L_i(x)$ adalah suatu polinom berderajat n tepat.

Karena itu, (2.29) melukiskan suatu polinom berderajat $\leq n$, selanjutnya $L_i(x)$ menjadi nol pada x_j untuk semua $j \neq i$ dan mempunyai nilai 1 pada x_i , yaitu:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Ini menunjukkan bahwa

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x) = a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Bukti:

Jika $i = j$, maka

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \\ = 1$$

(karena penyebut = pembilang)

Jika $i \neq j$, maka

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x_j - x_i)}{(x_i - x_j)} \\ = \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_j) \dots (x_j - x_{i-1})(x_j - x_{i+1}) \dots (x_j - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_j) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \\ = \frac{0}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_j) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$= 0 \text{ (karena pembilang} = 0, \text{ yaitu } (x_j - x_j) = 0)$$

Akibatnya,

$$p_n(x_0) = L_0(x_0)a_0 + L_1(x_0)a_1 + L_2(x_0)a_2 + \dots + L_n(x_0)a_n \\ = 1.a_0 + 0.a_1 + 0.a_2 + \dots + 0.a_n \\ = a_0$$

$$p_n(x_1) = a_1$$

...

$$p_n(x_n) = a_n$$

dengan demikian,

$$p_n(x_i) = a_i \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Koefisien-koefisien a_0, \dots, a_n dalam bentuk Lagrange tidak lain daripada nilai-nilai polinom $p(x)$ pada titik-titik x_0, \dots, x_n . Oleh karena itu, untuk suatu fungsi sembarang $f(x)$,

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) \quad (2.30)$$

merupakan suatu polinom berderajat $\leq n$ yang menginterpolasi $f(x)$ pada x_0, \dots, x_n . Persamaan (2.30) disebut rumus Lagrange untuk polinom interpolasi.

Contoh 1:

Data yang diketahui :

x	1	4	6
y	1,5709	1,5727	1,5751

Tentukan $f(3,5)$ dengan polinom lagrange derajat 2.

Penyelesaian:

Polinom derajat 2 $\rightarrow n = 2$

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i L_i(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \quad p_2(x) = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2$$

$$L_0(x) = \frac{(x-4)(x-6)}{(1-4)(1-6)} \rightarrow L_0(3,5) = \frac{(3,5-4)(3,5-6)}{(1-4)(1-6)} = 0,083333$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-6)}{(4-1)(4-6)} \rightarrow L_1(3,5) = \frac{(3,5-1)(3,5-6)}{(4-1)(4-6)} = 1,0417$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{(6-1)(6-4)} \rightarrow L_2(3,5) = \frac{(3,5-1)(3,5-4)}{(6-1)(6-4)} = -0,012500$$

jadi,

$$p_2(3,5) = (0,083333)(1,5709) + (1,0417)(1,5727) + (-0,012500)(1,5751) \\ = 1,5723$$

contoh 2:

Diketahui suatu fungsi $f(x, y(x))$ yang terdiri dari tiga buah titik, yaitu:

$(x_{r-2}, f_{r-2}), (x_{r-1}, f_{r-1}), (x_r, f_r)$. Nyatakan dalam interpolasi polinom lagrange

derajat dua.

Penyelesaian:

Polinom derajat 2 $\rightarrow n = 1$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)$$

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x)$$

$$p_2(x) = f(x_0)L_0 + f(x_1)L_1 + f(x_2)L_2$$

misal:

$$f(x_0) = f_{r-2} \quad x_0 = x_{r-2}$$

$$f(x_1) = f_{r-1} \quad x_1 = x_{r-1}$$

$$f(x_2) = f_r \quad x_2 = x_r$$

maka

$$L_0(x) = \frac{(x-x_{r-1})(x-x_r)}{(x_{r-2}-x_{r-1})(x_{r-2}-x_r)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_{r-2})(x-x_r)}{(x_{r-1}-x_{r-2})(x_{r-1}-x_r)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_{r-2})(x - x_{r-1})}{(x_r - x_{r-2})(x_r - x_{r-1})}$$

sehingga

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x)$$

$$p_2(x) = f(x_0)L_0 + f(x_1)L_1 + f(x_2)L_2$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_{r-1})(x - x_r)}{(x_{r-2} - x_{r-1})(x_{r-2} - x_r)} f_{r-2} + \frac{(x - x_{r-2})(x - x_r)}{(x_{r-1} - x_{r-2})(x_{r-1} - x_r)} f_{r-1} + \frac{(x - x_{r-2})(x - x_{r-1})}{(x_r - x_{r-2})(x_r - x_{r-1})} f_r$$

Solusi numerik PDB pada umumnya tidak mengutamakan diperolehnya jawaban eksak dari peran yang diselesaikan. Penyelesaian yang digunakan adalah penyelesaian pendekatan, oleh karena itu timbul error (kesalahan). Pada penyelesaiannya diusahakan untuk mendapatkan error yang sekecil mungkin, yang dapat diterima berdasarkan pertimbangan praktis. Pada skripsi ini penulis menentukan solusi eksak sebagai perbandingan dengan solusi aproksimasi. Perbandingan solusi yang terjadi dalam metode satu-langkah untuk perhitungan $y(0,10)$ dengan $dy/dx = x + y$; $y(0) = 1$ dan $h = 0,02$ adalah sebagai berikut:

$$\text{Solusi sejati } y(0,10) = 1,110341836$$

$$\text{Metode Euler } y(0,10) = 1,108161606$$

$$\text{Metode Heun } y(0,10) = 1,110327320$$

$$\text{Metode Deret Taylor } y(0,10) = 1,110341827$$

$$\text{Metode Runge Kutta } y(0,10) = 1,110341834$$

Metode Euler, Heun, Deret Taylor dan metode Runge Kutta merupakan metode satu-langkah untuk menyelesaikan persamaan diferensial dengan masalah nilai awal. Metode tersebut dapat digunakan untuk mencari beberapa taksiran nilai

yang diperlukan pada bab III yaitu: $y(x_r), y(x_{r-1}), y(x_{r-2}), \dots$ untuk menghitung $y(x_{r+1})$. Sedangkan polinom Lagrange digunakan untuk menguraikan persamaan prediktor dan korektor pada bab III.

Dari contoh perhitungan metode Euler, Heun, Deret Taylor dan Runge

Kutta dapat diketahui nilai $y_r, y_{r-1}, y_{r-2} \dots y_{r-m}$ yaitu:

Metode Euler

x	y
0	1,000000000
0,02	1,020000000
0,04	1,040800000
0,06	1,062416000
0,08	1,084864320
0,10	1,108161606

Metode Heun

x	y
0	1,000000000
0,02	1,020400000
0,04	1,041616080
0,06	1,063664725
0,08	1,086562752
0,10	1,110327320

Metode Deret Taylor

x	y
0	1,000000000
0,02	1,020402680
0,04	1,041621547
0,06	1,063673089
0,08	1,086574129
0,10	1,110341827

Metode Runge Kutta

x	y
0	1,000000000
0,02	1,020402680
0,04	1,041621548
0,06	1,063673092
0,08	1,086574134
0,10	1,110341834



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pengertian Adams-Bashforth-Moulton

Metode Adams-Bashforth-Moulton adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari persamaan diferensial biasa orde satu yang diketahui dengan melakukan prediksi dengan persamaan prediktor dan melakukan koreksi dengan persamaan korektor (Abdul Munif: 2003).

Metode ini merupakan salah satu dari metode Banyak Langkah (*Multi-step*) yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas pada persamaan diferensial biasa dengan cukup akurat. Tujuan utama dari metode ini adalah menggunakan informasi dari beberapa titik sebelumnya $y_r, y_{r-1}, y_{r-2}, y_{r-m}$ yang dapat diperoleh melalui metode satu-langkah untuk menghitung taksiran nilai y_{r+1} yang lebih baik.

Metode Adams-Bashforth-Moulton disebut juga metode peramal-pembetul atau prediktor-korektor Adams-Bashforth-Moulton karena dalam penyelesaiannya menggunakan dua persamaan yaitu persamaan prediktor dan korektor. Metode ini merupakan gabungan dari dua persamaan yaitu persamaan Adams Bashforth sebagai prediktor dan persamaan Adams Moulton sebagai korektor.

Persamaan Adams Bashforth merupakan jenis persamaan terbuka karena menggunakan polinom yang menginterpolasi pada titik x_r dan pada titik sebelah

belakang x_r . Sedangkan persamaan Adams Moulton merupakan jenis persamaan tertutup karena dijabarkan dengan mendasarkan polinom penginterpolasinya pada titik x_{r+1} , maupun pada x_r dan titik sebelah belakang dari x_r . Bila keduanya digunakan sebagai pasangan persamaan, maka persamaan jenis terbukanya disebut prediktor, sedangkan persamaan tertutupnya disebut korektor. Oleh karena itu persamaan Adams Bashforth dan persamaan Adams Moulton dikenal sebagai metode prediktor-korektor Adams-Bashforth-Moulton atau metode Adams-Bashforth-Moulton.

3.2 Persamaan Metode Adams-Bashforth-Moulton

Persamaan metode Adams-Bashforth-Moulton ini pertama-tama memperkirakan harga y^*_{r+1} dengan suatu persamaan prediktor, kemudian harga tersebut dikoreksi dengan menggunakan persamaan korektor. Persamaan korektor dapat digunakan lagi untuk membetulkan harga y^*_{r+1} . Proses ini dilakukan untuk mendapatkan solusi yang akurat dengan mempertimbangkan efisiensi dalam pemilihan ukuran langkah h yang konstan. Untuk menentukan prediktor dan korektor Adams-Bashforth-Moulton akan dijelaskan di bawah ini.

Pada PDB orde satu $y'(x) = f(x, y(x))$

Kedua ruas persamaan diintegrasikan dari x_r sampai x_{r+1} :

$$\begin{aligned}\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x))dx &= \int_{x_r}^{x_{r+1}} y'(x)dx \\ &= y(x) \Big|_{x_r}^{x_{r+1}} \\ &= y(x_{r+1}) - y(x_r) \\ &= y_{r+1} - y_r\end{aligned}$$

atau

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x))dx \quad (3.1)$$

Persamaan di atas merupakan teorema dasar kalkulus, yang merupakan dasar penurunan persamaan prediktor dan persamaan korektor pada metode Adams-Bashforth-Moulton.

Persamaan Prediktor

Persamaan prediktor diperoleh dengan menghampiri fungsi $f(x, y(x))$ ke dalam polinom interpolasi. Polinom interpolasi yang digunakan untuk menentukan persamaan prediktor ini adalah polinom interpolasi Lagrange. Jika kita mengintegrasikan persamaan diferensial $y'(x) = f(x, y(x))$ dari x_r sampai x_{r+1} maka akan diperoleh suatu persamaan (3.1).

Dengan menggunakan polinom interpolasi Lagrange berderajat n maka hampiran fungsi $f(x, y(x))$ dapat dinyatakan dengan:

$$f(x, y(x)) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x) \quad (3.2)$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3.3)$$

Untuk memperoleh persamaan prediktor berorde tinggi dapat diperoleh dengan menggunakan polinom interpolasi Lagrange berderajat n yang menginterpolasi pada titik $x_r, x_{r-1}, x_{r-2}, \dots, x_{r-m}$ untuk bilangan bulat $m > 0$. Jika dimasukkan ke dalam (3.1), maka akan diperoleh persamaan prediktor:

$$y^*_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx \quad (3.4)$$

dengan catatan jarak antara titik sama (konstan) dan pengintegrasian dari $x_r = 0$ sampai $x_{r+1} = h$

Misal kita ambil polinom derajat dua $p_2(x)$. Untuk itu, diperlukan tiga buah titik yang berjarak sama, yaitu: $(x_{r-2}, f_{r-2}), (x_{r-1}, f_{r-1}), (x_r, f_r)$. Dari tiga buah titik tersebut, dibentuklah polinom interpolasi Lagrange derajat dua:

Polinom derajat 2 $\rightarrow n = 1$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) L_i(x)$$

$$p_2(x) = f(x_0) L_0 + f(x_1) L_1 + f(x_2) L_2$$

misal:

$$f(x_0) = f_{r-2} \quad x_0 = x_{r-2}$$

$$f(x_1) = f_{r-1} \quad x_1 = x_{r-1}$$

$$f(x_2) = f_r \quad x_2 = x_r$$

maka

$$L_0(x) = \frac{(x - x_{r-1})(x - x_r)}{(x_{r-2} - x_{r-1})(x_{r-2} - x_r)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_{r-2})(x - x_r)}{(x_{r-1} - x_{r-2})(x_{r-1} - x_r)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_{r-2})(x - x_{r-1})}{(x_r - x_{r-2})(x_r - x_{r-1})}$$

sehingga

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x)$$

$$p_2(x) = f(x_0)L_0 + f(x_1)L_1 + f(x_2)L_2$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_{r-1})(x - x_r)}{(x_{r-2} - x_{r-1})(x_{r-2} - x_r)} f_{r-2} + \frac{(x - x_{r-2})(x - x_r)}{(x_{r-1} - x_{r-2})(x_{r-1} - x_r)} f_{r-1} + \frac{(x - x_{r-2})(x - x_{r-1})}{(x_r - x_{r-2})(x_r - x_{r-1})} f_r$$

$$f(x, y(x)) \approx p_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x)$$

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x)) dx \approx \int_0^h \left(\frac{(x - x_{r-1})(x - x_r) f_{r-2}}{(x_{r-2} - x_{r-1})(x_{r-2} - x_r)} + \frac{(x - x_{r-2})(x - x_r) f_{r-1}}{(x_{r-1} - x_{r-2})(x_{r-1} - x_r)} + \frac{(x - x_{r-2})(x - x_{r-1}) f_r}{(x_r - x_{r-2})(x_r - x_{r-1})} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
f(x, y(x)) &\approx \frac{1}{2h^2}(x-x_{r-1})(x-x_r)f_{r-2} - \\
&\quad \frac{1}{h^2}(x-x_{r-2})(x-x_r)f_{r-1} + \\
&\quad \frac{1}{2h^2}(x-x_{r-2})(x-x_{r-1})f_r \\
&\approx \frac{1}{2h^2} \left\{ \begin{aligned} &[(x-x_{r-1})(x-x_r)]f_{r-2} \\ &-2[(x-x_{r-2})(x-x_r)]f_{r-1} + \\ &[(x-x_{r-2})(x-x_{r-1})]f_r \end{aligned} \right\} \\
&\approx \frac{1}{2h^2} \left\{ \begin{aligned} &[x^2 - (x_r + x_{r-1})x + (x_r)(x_{r-1})]f_{r-2} \\ &-2[x^2 - (x_r + x_{r-2})x + (x_r)(x_{r-2})]f_{r-1} + \\ &[x^2 - (x_{r-1} + x_{r-2})x + (x_{r-2})(x_{r-1})]f_r \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

kemudian diintegrasikan dari x_r sampai x_{r+1} ,

$$\begin{aligned}
&\int_{x_r}^{x_{r+1}} \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)dx \\
&\approx \frac{1}{2h^2} \int_{x_r}^{x_{r+1}} \left\{ \begin{aligned} &[x^2 - (x_r + x_{r-1})x + (x_r)(x_{r-1})]f_{r-2} \\ &-2[x^2 - (x_r + x_{r-2})x + (x_r)(x_{r-2})]f_{r-1} + \\ &[x^2 - (x_{r-1} + x_{r-2})x + (x_{r-2})(x_{r-1})]f_r \end{aligned} \right\} dx \\
&\approx \frac{1}{2h^2} \left[\begin{aligned} &\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2(x_r) + x_{r-1})x^2 + (x_r)(x_{r-1})x \right] f_{r-2} \\ &-2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2x_r + x_{r-2})x^2 + (x_r)(x_{r-2})x \right] f_{r-1} + \\ &\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(x_r + x_{r-1} + x_{r-2})x^2 + (x_{r-2})(x_{r-1})x \right] f_r \end{aligned} \right]_{x_r}^{x_{r+1}} \\
&\approx \frac{1}{2h^2} \left[\begin{aligned} &\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2(0) + (-h))x^2 + (0)(-h)x \right] f_{r-2} \\ &-2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2(0) + (-2h))x^2 + (0)(-2h)x \right] f_{r-1} + \\ &\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(0 + (-h) + (-2h))x^2 + (-2h)(-h)x \right] f_r \end{aligned} \right]_{x_r}^{x_{r+1}}
\end{aligned}$$

$$\approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(-h)x^2 + (0)x \right] f_{r-2} - 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(-2h)x^2 + (0)x \right] f_{r-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(-3h)x^2 + (2h^2)x \right] f_r \right]_{x_r}^{x_{r+1}}$$

dengan mengambil $x_r = 0$ dan $x_{r+1} = h$

$$\approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{h}{2}x^2 \right] f_{r-2} - 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + hx^2 \right] f_{r-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3h}{2}x^2 + 2h^2x \right] f_r \right]_{x_r}^{x_{r+1}}$$

$$\approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[\frac{1}{3}h^3 + \frac{h}{2}h^2 \right] f_{r-2} - 2 \left[\frac{1}{3}h^3 + hh^2 \right] f_{r-1} + \left[\frac{1}{3}h^3 + \frac{3h}{2}h^2 + 2h^2h \right] f_r \right]_{x_r}^{x_{r+1}}$$

$$\approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[\frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}h^3 \right] f_{r-2} - 2 \left[\frac{1}{3}h^3 + h^3 \right] f_{r-1} + \left[\frac{1}{3}h^3 + \frac{3}{2}h^3 + 2h^3 \right] f_r \right]_{x_r}^{x_{r+1}}$$

$$\approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[\frac{5}{6}h^3 \right] f_{r-2} - 2 \left[\frac{8}{6}h^3 \right] f_{r-1} + \left[\frac{23}{6}h^3 \right] f_r \right]_{x_r}^{x_{r+1}}$$

$$\approx \frac{5h^3}{12h^2} f_{r-2} - \frac{16h^3}{12h^2} f_{r-1} + \frac{23h^3}{12h^2} f_r$$

$$\approx \frac{5}{12} hf_{r-2} - \frac{16}{12} hf_{r-1} + \frac{23}{12} hf_r$$

$$\approx \frac{h}{12} (5f_{r-2} - 16f_{r-1} + 23f_r) \quad (3.5)$$

Hasil integrasi yang diperoleh pada persamaan (3.5) dimasukkan dalam persamaan (3.1), sehingga diperoleh persamaan prediktor:

$$y_{r+1}^* = y_r + \frac{h}{12} (5f_{r-2} - 16f_{r-1} + 23f_r) \quad (3.6)$$

dimana:

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

$$f_{r-2} = f(x_{r-2}, y_{r-2})$$

$$f_{r-1} = f(x_{r-1}, y_{r-1})$$

$$f_r = f(x_r, y_r)$$

Contoh soal yang diselesaikan dengan metode prediktor Adams-Bashforth-Moulton:

Carilah nilai $y(0,08)$ dari persamaan diferensial di bawah ini dengan metode prediktor Adams-Bashforth-Moulton.

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = 2x + y$$

jika diketahui:

s	X	Y
1	0	1,000000000
2	0,02	1,020402680
3	0,04	1,041621548

Penyelesaian:

$$h = x_2 - x_1 = 0,02 - 0 = 0,02$$

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,041621548 + 2(0,04) = 1,121621548$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,020402680 + 2(0,02) = 1,06040268$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1 + 0 = 1$$

sehingga

$$\begin{aligned} y^*_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\ &= 1,041621548 + \frac{0,02}{12}(23[1,121621548] - 16[1,06040268] + 5[1]) \\ &= 1,023570127 \end{aligned}$$

jadi penyelesaian persoalan di atas adalah $y(0,08) = 1,023570127$

Persamaan Korektor

Persamaan korektor dibentuk dengan cara yang sama seperti pada persamaan prediktor. Untuk memperoleh persamaan korektor berorde tinggi

dapat diperoleh dengan menggunakan polinom interpolasi Lagrange berderajat n yang menginterpolasi pada titik $x_{r+1}, x_r, x_{r-1}, \dots, x_{r-m}$ untuk bilangan bulat $m > 0$. Jika dimasukkan ke dalam (3.1), maka akan diperoleh persamaan korektor:

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx \quad (3.7)$$

dengan catatan jarak antara titik sama (konstan) dan pengintegrasian dari $x_r = 0$ sampai $x_{r+1} = h$ dan titik baru yang diperoleh dari persamaan prediktor. Persamaan (3.6) sama dengan (3.2) yang membedakan hanya pada titik yang diinterpolasi. Pada prediktor menggunakan titik $x_r, x_{r-1}, x_{r-2}, \dots, x_{r-m}$ untuk bilangan bulat $m > 0$ dan pada korektor menggunakan titik $x_{r+1}, x_r, x_{r-1}, \dots, x_{r-m}$ untuk bilangan bulat $m > 0$ (Samuel D.Conte/Carl de Boor: 1993).

Misal kita ambil polinom derajat dua $p_2(x)$. Tetapi, titik-titik yang diperlukan untuk pembentukan polinom interpolasi ialah $(x_{r-1}, f_{r-1}), (x_r, f_r)$, dan titik baru $(x_{r+1}, f_{r+1}^*) = (x_{r+1}, f(x_{r+1}, y_{r+1}^*))$ yang diperoleh dari persamaan prediktor. Dari tiga buah titik tersebut, dibentuklah polinom interpolasi Lagrange derajat dua.

Polinom derajat 2 $\rightarrow n = 1$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) L_i(x)$$

$$p_2(x) = f(x_0) L_0 + f(x_1) L_1 + f(x_2) L_2$$

misal:

$$f(x_0) = f_{r-1} \quad x_0 = x_{r-1}$$

$$f(x_1) = f_r \quad x_1 = x_r$$

$$f(x_2) = f^*_{r+1} \quad x_2 = x_{r+1}$$

maka

$$L_0(x) = \frac{(x - x_r)(x - x_{r+1})}{(x_{r-1} - x_r)(x_{r-1} - x_{r+1})}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})}{(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_{r-1})(x - x_r)}{(x_{r+1} - x_{r-1})(x_{r+1} - x_r)}$$

sehingga

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x)$$

$$p_2(x) = f(x_0)L_0 + f(x_1)L_1 + f(x_2)L_2$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_r)(x - x_{r+1})}{(x_{r-1} - x_r)(x_{r-1} - x_{r+1})} f_{r-1} + \frac{(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})}{(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})} f_r + \frac{(x - x_{r-1})(x - x_r)}{(x_{r+1} - x_{r-1})(x_{r+1} - x_r)} f^*_{r+1}$$

$$f(x, y(x)) \approx p_2(x) = \sum_{i=0}^2 f(x_i)L_i(x)$$

$$\approx \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x)) dx \approx \int_0^h \left(\frac{(x - x_r)(x - x_{r+1})f_{r-1}}{(x_{r-1} - x_r)(x_{r-1} - x_{r+1})} + \frac{(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})f_r}{(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})} + \frac{(x - x_{r-1})(x - x_r)f^*_{r+1}}{(x_{r+1} - x_{r-1})(x_{r+1} - x_r)} \right) dx$$

$$\int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x)) dx \approx \frac{1}{2h^2} (x - x_r)(x - x_{r+1})f_{r-1} - (x - x_{r-1})(x - x_{r+1})f_r + \frac{1}{2h^2} (x - x_{r-1})(x - x_r)f_{r+1}^*$$

$$\approx \frac{1}{2h^2} \left\{ \begin{aligned} & [(x - x_r)(x - x_{r+1})] f_{r-1} \\ & - 2[(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})] f_r + \\ & [(x - x_{r-1})(x - x_r)] f_{r+1}^* \end{aligned} \right\}$$

$$\approx \frac{1}{2h^2} \left\{ \begin{aligned} & [x^2 - (x_{r+1} + x_r)x + (x_{r+1})(x_r)] f_{r-1} \\ & - 2[x^2 - (x_{r+1} + x_{r-1})x + (x_{r+1})(x_{r-1})] f_r + \\ & [x^2 - (x_{r-1} + x_r)x + (x_{r-1})(x_r)] f_{r+1}^* \end{aligned} \right\}$$

kemudian di integralkan dari x_r sampai x_{r+1} ,

$$\approx \int_{x_r}^{x_{r+1}} \left\{ \begin{aligned} & [x^2 - (x_{r+1} + x_r)x + (x_{r+1})(x_r)] f_{r-1} \\ & - 2[x^2 - (x_{r+1} + x_{r-1})x + (x_{r+1})(x_{r-1})] f_r + \\ & [x^2 - (x_{r-1} + x_r)x + (x_{r-1})(x_r)] f_{r+1}^* \end{aligned} \right\} dx$$

$$\approx \frac{1}{2h^2} \left[\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2x_r + x_{r+1})x^2 + (x_r)(x_{r+1})x \right] f_{r-1} \\ & - 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(x_{r+1} + x_r + x_{r-1})x^2 + (x_{r-1})(x_{r+1})x \right] f_r + \\ & \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2x_r + x_{r-1})x^2 + (x_{r-1})(x_r)x \right] f_{r+1}^* \end{aligned} \right]_{x_r}^{x_{r+1}}$$

dengan mengambil $x_r = 0$ dan $x_{r+1} = h$

$$\approx \frac{1}{2h^2} \left[\begin{aligned} & \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2(0) + h)x^2 + (0)(h)x \right] f_{r-1} \\ & - 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(h + 0 + (-h))x^2 + (-h)(h)x \right] f_r + \\ & \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2(0) + (-h))x^2 + (0)(-h)x \right] f_{r+1}^* \end{aligned} \right]_{x_r}^{x_{r+1}}$$

$$\begin{aligned}
& \approx \frac{1}{2h^2} \left[\begin{array}{l} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2(0)+h)x^2 + (0)(h)x \right] f_{r-1} \\ -2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(h+0+(-h))x^2 + (-h)(h)x \right] f_r + \\ \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(2(0)+(-h))x^2 + (0)(-h)x \right] f_{r+1}^* \end{array} \right]_{x_r}^{x_{r+1}} \\
& \approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}hx^2 + 0 \right] f_{r-1} - 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - 0 - h^2x \right] f_r + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}hx^2 + 0 \right] f_{r+1}^* \right]_{x_r}^{x_{r+1}} \\
& \approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}hx^2 \right] f_{r-1} - 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - h^2x \right] f_r + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}hx^2 \right] f_{r+1}^* \right]_{x_r}^{x_{r+1}} \\
& \approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[\frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{2}hh^2 \right] f_{r-1} - 2 \left[\frac{1}{3}h^3 - h^2h \right] f_r + \left[\frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}hh^2 \right] f_{r+1}^* \right]_{x_r}^{x_{r+1}} \\
& \approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[\frac{1}{3}h^3 - \frac{1}{2}h^3 \right] f_{r-1} - 2 \left[\frac{1}{3}h^3 - h^3 \right] f_r + \left[\frac{1}{3}h^3 + \frac{1}{2}h^3 \right] f_{r+1}^* \right]_{x_r}^{x_{r+1}} \\
& \approx \frac{1}{2h^2} \left[\left[-\frac{1}{6}h^3 \right] f_{r-1} + 2 \left[\frac{4}{6}h^3 \right] f_r + \left[\frac{5}{6}h^3 \right] f_{r+1}^* \right]_{x_r}^{x_{r+1}} \\
& \approx -\frac{h^3}{12h^2} f_{r-1} + \frac{8h^3}{12h^2} f_r + \frac{5h^3}{12h^2} f_{r+1}^* \\
& \approx -\frac{h}{12} f_{r-1} + \frac{8}{12} hf_r + \frac{5}{12} hf_{r+1}^* \\
& \approx \frac{h}{12} (-f_{r-1} + 8f_r + 5f_{r+1}^*) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

dari integrasi persamaan di atas (3.7) diperoleh persamaan korektor:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{12} (-f_{r-1} + 8f_r + 5f_{r+1}^*) \quad (3.9)$$

Contoh soal yang diselesaikan dengan metode prediktor Adams-Bashforth-Moulton:

Carilah nilai $y(0,08)$ dari persamaan diferensial di bawah ini dengan metode korektor Adams-Bashforth-Moulton.

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = 2x + y$$

jika diketahui:

s	x	y
1	0	1,000000000
2	0,02	1,020402680
3	0,04	1,041621548

Penyelesaian:

$$h = x_2 - x_1 = 0,02 - 0 = 0,02$$

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,041621548 + 2(0,04) = 1,121621548$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,020402680 + 2(0,02) = 1,06040268$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1 + 0 = 1$$

sehingga

$$\begin{aligned} y^*_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12} (23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\ &= 1,041621548 + \frac{0,02}{12} (23(1,121621548) - 16(1,06040268) + 5(1)) \\ &= 1,023570127 \end{aligned}$$

jadi hasil prediksi $y(0,08) = 1,023570127$ yang digunakan untuk menentukan

f^*_{r+1} , yaitu:

$$f^*_{r+1} = y^*_{r+1} + x_{r+1} = 1,023570127 + 0,08 = 1,103570127$$

sehingga nilai korektornya adalah:

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{12} (5f^*_{r+1} + 8f_r - f_{r-1})$$

$$\begin{aligned}
&= 1,041621548 + \frac{0,02}{12} (5[1,103570127] + 8[1,121621548] - 1,06040268) \\
&= 1,310230584
\end{aligned}$$

Jadi, metode Adams-Bashforth-Moulton dapat diringkas sebagai berikut:

$$\text{Prediktor: } y_{r+1}^* = y_r + \frac{h}{12} (23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2})$$

$$\text{Korektor: } y_{r+1} = y_r + \frac{h}{12} (5f_{r+1}^* + 8f_r - f_{r-1})$$

3.3 Galat

Galat pada metode Adams-Bashforth-Moulton berupa galat perlangkah atau sering dikenal dengan galat pemotongan (*truncation error*) dan galat longgokan yaitu galat yang terkumpul pada akhir langkah ke- r (Rinaldi Munir: 2003).

Galat Persamaan Prediktor

Galat per langkah persamaan prediktor pada Metode Adams-Bashforth-Moulton di atas dapat dilakukan dengan menguraikan persamaan prediktor dan y_{r+1} sejati di sekitar x_r .

Prediktor

Hampiran:

$$\begin{aligned}
y_{r+1}^* &= y_r + \frac{h}{12} (23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\
&= y_r + \frac{h}{12} [23f_r - 16(f_r - hf_r' + \frac{1}{2}h^2f_r'' - \frac{1}{6}h^3f_r''' + \dots) \\
&\quad + 5(f_r - 2hf_r' + 2h^2f_r'' - \frac{8}{6}h^3f_r''' + \dots)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= y_r + \frac{h}{12}[12f_r - 6hf_r' + 2h^2f_r'' - 4h^3f_r''' + \dots] \\
 &= y_r + hf_r - \frac{1}{2}h^2f_r' + \frac{1}{6}h^3f_r'' - \frac{1}{24}h^4f_r''' + \dots
 \end{aligned}$$

Sejati:

$$\begin{aligned}
 Y_{r+1} &= y_r + hy_r' + \frac{1}{2}h^2y_r'' + \frac{1}{6}h^3y_r''' + \frac{1}{24}h^4y_r^{(4)} + \dots \\
 &= y_r + hf_r' + \frac{1}{2}h^2f_r'' + \frac{1}{6}h^3f_r''' + \frac{1}{24}h^4f_r^{(4)} + \dots
 \end{aligned}$$

Galat per langkah prediktor:

$$\begin{aligned}
 Ep &= Y_{r+1} - y_{r+1}^* \\
 &= \frac{1}{24}h^4f_r^{(4)} + \frac{1}{3}h^4f_r^{(4)} + \dots \\
 &= \frac{9}{24}h^4f_r^{(4)} = \frac{9}{24}h^4y_r^{(4)}, \quad x_{r-2} < 1 < x_{r+1} \\
 &= O(h^4)
 \end{aligned}$$

Orde metode = 4 - 1 = 3

Galat longgokan prediktor adalah:

$$E = y(b)_{\text{sejati}} - y_{r+1}^*$$

Galat Persamaan Korektor

Galat per langkah persamaan korektor pada Metode Adams-Bashforth-Moulton di atas juga dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti prediktor yaitu menguraikan persamaan korektor dan y_{r+1} sejati di sekitar x_r .

korektor

Hampiran:

$$\begin{aligned}
 y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12} (5f_{r+1}^* + 8f_r - f_{r-1}) \\
 &= y_r + \frac{h}{12} [5(f_r + hf_r' + \frac{1}{2}h^2f_r'' - \frac{1}{6}h^3f_r''' + \dots) + 8f_r \\
 &= y_r + \frac{h}{12} (12f_r + 6hf_r' + 2h^2f_r'' - h^3f_r''' + \dots) \\
 &= y_r + hf_r' + \frac{1}{2}h^2f_r'' + \frac{1}{6}h^3f_r''' - \frac{1}{12}h^4f_r^{(4)} + \dots
 \end{aligned}$$

Galat per langkah korektor:

$$\begin{aligned}
 Ep &= Y_{r+1} - y_{r+1}^* \\
 &= \frac{1}{24}h^4f_r^{(4)} + \frac{1}{12}h^4f_r^{(4)} + \dots \\
 &= -\frac{1}{24}h^4f_r^{(4)} = -\frac{1}{24}h^4f_r^{(4)}(t), \quad x_{r-2} < t < x_{r+1} \\
 &= O(h^4)
 \end{aligned}$$

Orde metode = 4 - 1 = 3

Galat longgokan korektor adalah:

$$E = y(b)_{sejati} - y_{r+1}$$

Sehingga diperoleh galat metode Adams-Bashforth-Moulton adalah dalam orde

 $O(h^4)$, yaitu:

$$\text{Prediktor: } Ep = Y_{r+1} - y_{r+1}^* = \frac{9}{24}h^4y^{(4)}(t), \quad x_{r-2} < t < x_{r+1}$$

$$\text{Korektor: } Ep = Y_{r+1} - y_{r+1} = -\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(t), \quad x_{r-2} < t < x_{r+1}$$

Sedang galat longgokan metode Adams-Bashforth-Moulton di atas ada dalam

orde $O(h^4)$. Karena itu, metode Adams-Bashforth-Moulton di atas dinamakanjuga **metode Adams-Bashforth-Moulton orde-3.**

3.4 Algoritma Metode Adams-Bashforth-Moulton

Langkah-langkah untuk mempermudah pengerjaan masalah dalam persamaan diferensial yang diselesaikan dengan menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton orde 3, antara lain:

1. Menuliskan persamaan diferensial dengan syarat awal yang telah ditentukan.
2. Menentukan bentuk persamaan dari solusi sejatinya (solusi khusus) untuk mengetahui besarnya galat yang dihasilkan.
3. Menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan mencari nilai h dan f_r, f_{r-1} , dan f_{r-2} dari metode satu-langkah.
4. Menentukan nilai y_{r+1}^* pada titik x_{r+1} melalui tahap prediktor dengan persamaan:
$$y_{r+1}^* = y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}).$$
5. Menentukan nilai y_{r+1}^* pada titik x_{r+1} melalui tahap korektor dengan persamaan:
$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{12}(5f_{r+1}^* + 8f_r - f_{r-1}).$$
6. Menentukan galat pada tahap prediktor dan tahap korektornya.:

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$Ep = Y_{r+1} - y_{r+1}^* = \frac{9}{24}h^4 y^{(4)}(t), \quad x_{r-2} < t < x_{r+1}$$

Galat longgokan: $\varepsilon = y(x)_{sejati} - y_{r+1}^*$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$Ep = Y_{r+1} - y_{r+1}^* = -\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(t), \quad x_{r-2} < t < x_{r+1}$$

Galat longgokan: $\varepsilon = y(x)_{sejati} - y_{r+1}$

7. Proses tersebut akan berhenti pada langkah ke-n sesuai dengan nilai h yang ditentukan.

Contoh yang dengan metode Adams-Bashforth-Moulton:

Gunakan metode satu-langkah untuk mencari nilai $y(0,10)$ dari persamaan diferensial di bawah ini dengan metode Adams-Bashforth-Moulton.

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = x + y \text{ dengan masalah nilai awal } y(0) = 1$$

Penyelesaian:

Langkah 1:

$$f(x, y) = \frac{dy}{dx} = x + y \text{ dengan } y(0) = 1$$

Langkah 2:

Solusi sejati dari persamaan diferensial tersebut adalah:

$$y(x) = 2e^x - x - 1$$

$$y(0,10) = 2e^{0,10} - 0,10 - 1 = 1,110341836$$

Langkah 3:

Mencari nilai h dan f_r, f_{r-1}, f_{r-2} yang diperoleh dari metode satu-langkah yaitu **metode Euler**.

x	y
0,00	1,000000000
0,02	1,020000000
0,04	1,040800000
0,06	1,062416000
0,08	1,084864320

Untuk menentukan $y(0,10)$ dengan metode Adams-Bashforth-Moulton kita ambil tiga buah titik yaitu:

S	x	y
1	0,04	1,040800000
2	0,06	1,062416000
3	0,08	1,084864320

Nilai h dapat diperoleh dengan $h = x_2 - x_1 = 0,06 - 0,04 = 0,02$

(h konstan sehingga metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan)

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,084864320 + 0,08 = 1,164864320$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,062416000 + 0,06 = 1,122416000$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,040800000 + 0,04 = 1,080800000$$

Langkah 4:

Menentukan prediktor melalui persamaan di bawah ini, dengan memasukkan hasil dari langkah 3 sehingga didapatkan hasil:

$$\begin{aligned} y^*_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\ &= 1,084864320 + \frac{0,02}{12} \left(23[1,164864320] \right. \\ &\quad \left. - 16[1,122416000] + 5[1,080800000] \right) \\ &= 1,108593026 \end{aligned}$$

jadi hasil prediktor nilai $y(0,10) = 1,108593026$

Langkah 5:

Mencari nilai f^*_{r+1} yang diperoleh dari langkah 4 yaitu:

$$f^*_{r+1} = y^*_{r+1} + x_{r+1} = 1,108593026 + 0,10 = 1,208593026$$

sehingga dapat ditentukan nilai korektornya melalui persamaan dibawah ini:

$$\begin{aligned} y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12} (5f^*_{r+1} + 18f_r - f_{r-1}) \\ &= 1,084864320 + \frac{0,02}{12} \left(5[1,208593026] + 8[1,164864320] - [1,122416000] \right) \\ &= 1,108596759 \end{aligned}$$

jadi hasil korektor nilai $y(0,10) = 1,108596759$

Langkah 6:

Galat metode Adams-Bashforth-Moulton

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned} y^4(x) &= f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,10 + 1,108593026 = 2,208593026 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ep &= \frac{9}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ &= \frac{9}{24} (0,02)^4 \cdot 2,208593026 = 1,325155816 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= y(x)_{sejati} - y^*_{r+1} \\ &= 1,110341836 - 1,108593026 = 0,00174881 \end{aligned}$$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$y^4(x) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f(x, y) = 1 + f(x, y) \\ = 1 + 0,10 + 1,108596759 = 2,208596759$$

$$Ep = -\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(t) \\ = -\frac{1}{24}(0,02)^4 \cdot 2,208596759 = 14,72397839 \cdot 10^{-7}$$

Galat longgokan:

$$\varepsilon = y(x)_{\text{sejati}} - y_{r+1} \\ = 1,110341836 - 1,108596759 = 0,001745077$$

Langkah 7:

Pada langkah ini akan dihitung $y(0,12)$ sesuai dengan $h = 0,02$.

$$\text{Solusi sejati } y(0,14) = 2e^{0,12} - 0,12 - 1 = 1,134993703$$

Maka yang menjadi f_r, f_{r-1}, f_{r-2} adalah:

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,108596759 + 0,10 = 1,208596759$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,084864320 + 0,08 = 1,164864320$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,062416000 + 0,06 = 1,122416000$$

Persamaan prediktor untuk $y(0,12)$ dapat di tulis:

$$y^*_{r+1} = y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\ = 1,108596759 + \frac{0,02}{12}(23[1,208596759] - 16[1,164864320] + 5[1,122416000]) \\ = 1,133217135$$

jadi hasil prediktor nilai $y(0,12) = 1,133217135$

$$f^*_{r+1} = y^*_{r+1} + x_{r+1} = 1,133217135 + 0,12 = 1,253217135$$

Persamaan korektor untuk $y(0,12)$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned} y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12} (5f_{r+1}^* + 8f_r - f_{r-1}) \\ &= 1,108596759 + \frac{0,02}{12} (5[1,253217135] + 8[1,208596759] - [1,164864320]) \\ &= 1,133213418 \end{aligned}$$

jadi hasil korektor nilai $y(0,12) = 1,133213418$

Galat metode Adams-Bashforth-Moulton

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned} y^4(x) &= f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,12 + 1,133213418 = 2,253213418 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ep &= \frac{9}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ &= \frac{9}{24} (0,02)^4 \cdot 2,253213418 = 1,351928051 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= y(x)_{\text{sejati}} - y_{r+1}^* \\ &= 1,134993703 - 1,133213418 = 0,001780285 \end{aligned}$$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned} y^4(x) &= f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,12 + 1,133213418 = 2,253213418 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ep &= -\frac{1}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ &= -\frac{1}{24} (0,02)^4 \cdot 2,253213418 = -15,02142279 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= y(x)_{sejati} - y_{r+1} \\ &= 1,134993703 - 1,133213418 = 0,001780285\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dibandingkan dengan menggunakan metode Heun, metode Deret

Taylor dan metode Runge Kutta.

Metode Heun

Untuk menentukan $y(0,10)$ dengan metode Adams-Bashforth-Moulton kita ambil tiga buah titik yaitu:

s	x	y
1	0,04	1,041616080
2	0,06	1,063664725
3	0,08	1,086562752

Nilai h dapat diperoleh dengan $h = x_2 - x_1 = 0,06 - 0,04 = 0,02$

(h konstan sehingga metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan)

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,086562752 + 0,08 = 1,166562752$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,063664725 + 0,06 = 1,123664725$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,041616080 + 0,04 = 1,081616080$$

Menentukan prediktor melalui persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned}y^*_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\ &= 1,086562752 + \frac{0,02}{12} \left(23[1,166562752] \right. \\ &\quad \left. - 16[1,123664725] + 5[1,081616080] \right) \\ &= 1,110330066\end{aligned}$$

jadi hasil prediktor nilai $y(0,10) = 1,110330066$

Mencari nilai f^*_{r+1} yang diperoleh dari persamaan prediktor yaitu:

$$f^*_{r+1} = y^*_{r+1} + x_{r+1} = 1,110330066 + 0,10 = 1,210330066$$

sehingga dapat ditentukan korektornya melalui persamaan dibawah ini:

$$\begin{aligned} y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(5f^*_{r+1} + 8f_r - f_{r-1}) \\ &= 1,086562752 + \frac{0,02}{12}(5[1,210330066] + 8[1,166562752] - [1,123664725]) \\ &= 1,110330231 \end{aligned}$$

jadi hasil korektor nilai $y(0,10) = 1,110330231$

Galat metode Adams-Bashforth-Moulton

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned} y^4(x) &= f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,10 + 1,110330066 = 2,210330066 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{9}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ &= \frac{9}{24} (0,02)^4 \cdot 2,210330066 = 1,32619804 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= y(x)_{sejati} - y^*_{r+1} \\ &= 1,110341836 - 1,110330066 = 0,00001177 \end{aligned}$$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned} y^4(x) &= f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,10 + 1,110330231 = 2,210330231 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Ep &= -\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(t) \\
 &= -\frac{1}{24}(0,02)^4 \cdot 2,210330231 = -1,473553487 \cdot 10^{-8}
 \end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= y(x)_{\text{sejati}} - y_{r+1} \\
 &= 1,110341836 - 1,110330231 = 0,000011605
 \end{aligned}$$

Pada langkah ini akan dihitung $y(0,12)$ sesuai dengan $h = 0,02$.

$$\text{Solusi sejati } y(0,12) = 2e^{0,12} - 0,12 - 1 = 1,134993703$$

Maka yang menjadi f_r, f_{r-1}, f_{r-2} adalah:

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,110330231 + 0,10 = 1,210330231$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,086574129 + 0,08 = 1,166574129$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,063673089 + 0,06 = 1,123673089$$

Persamaan prediktor untuk $y(0,12)$ dapat di tulis:

$$\begin{aligned}
 y^*_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\
 &= 1,110330231 + \frac{0,02}{12}(23[1,210330231] - 16[1,166574129] + 5[1,123673089]) \\
 &= 1,134981522
 \end{aligned}$$

jadi hasil prediktor nilai $y(0,12) = 1,134981522$

$$f^*_{r+1} = y^*_{r+1} + x_{r+1} = 1,134981522 + 0,12 = 1,254981522$$

Persamaan korektor untuk $y(0,12)$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
 y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(5f^*_{r+1} + 8f_r - f_{r-1}) \\
 &= 1,110330231 + \frac{0,02}{12}(5[1,134981522] + 8[1,210330231] - [1,166574129]) \\
 &= 1,133981857
 \end{aligned}$$

jadi hasil korektor nilai $y(0,12) = 1,133981857$

Galat metode Adams-Bashforth-Moulton

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$y^4(x) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ = 1 + 0,12 + 1,134981522 = 2,254981522$$

$$E_p = \frac{9}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ = \frac{9}{24} (0,02)^4 \cdot 2,254981522 = 1,352988913 \cdot 10^{-7}$$

Galat longgokan:

$$\varepsilon = y(x)_{sejati} - y_{r+1}^* \\ = 1,134993703 - 1,134981522 = 0,000012181$$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$y^4(x) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ = 1 + 0,12 + 1,133981857 = 2,253981857$$

$$E_p = -\frac{1}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ = -\frac{1}{24} (0,02)^4 \cdot 2,253981857 = -1,502654571 \cdot 10^{-8}$$

Galat longgokan:

$$\varepsilon = y(x)_{sejati} - y_{r+1} \\ = 1,134993703 - 1,133981857 = 0,001011846$$

Metode Deret Taylor

Untuk menentukan $y(0,10)$ dengan metode Adams-Bashforth-Moulton kita ambil

empat buah titik yaitu:

s	x	y
1	0,04	1,041621547
2	0,06	1,063673089
3	0,08	1,086574129

Nilai h dapat diperoleh dengan $h = x_2 - x_1 = 0,06 - 0,04 = 0,02$

(h konstan sehingga metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan)

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,086574129 + 0,08 = 1,166574129$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,063673089 + 0,06 = 1,123673089$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,041621547 + 0,04 = 1,081621547$$

Menentukan prediktor melalui persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} y^*_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\ &= 1,086574129 + \frac{0,02}{12}(23[1,166574129] - 16[1,123673089] + 5[1,081621547]) \\ &= 1,110341701 \end{aligned}$$

jadi hasil prediktor nilai $y(0,10) = 1,110341701$

Mencari nilai f^*_{r+1} yang diperoleh dari persamaan prediktor yaitu:

$$f^*_{r+1} = y^*_{r+1} + x_{r+1} = 1,110341701 + 0,10 = 1,210341701$$

sehingga dapat ditentukan korektornya melalui persamaan dibawah ini:

$$\begin{aligned} y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(5f^*_{r+1} + 8f_r - f_{r-1}) \\ &= 1,086574129 + \frac{0,02}{12}(5[1,210341701] + 8[1,166574129] - [1,123673089]) \\ &= 1,110341843 \end{aligned}$$

jadi hasil korektor nilai $y(0,10) = 1,110341843$

Galat metode Adams-Bashforth-Moulton

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$y^4(x) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ = 1 + 0,10 + 1,110341701 = 2,210341701$$

$$Ep = \frac{9}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ = \frac{9}{24} (0,02)^4 \cdot 2,210341701 = 1,326205021 \cdot 10^{-7}$$

Galat longgokan:

$$\varepsilon = y(x)_{sejati} - y_{r+1}^* \\ = 1,110341836 - 1,110341701 = 0,000000135$$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$y^4(x) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ = 1 + 0,10 + 1,110341843 = 2,210341843$$

$$Ep = -\frac{1}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ = -\frac{1}{24} (0,02)^4 \cdot 2,210341843 = -1,473561229 \cdot 10^{-8}$$

Galat longgokan:

$$\varepsilon = y(x)_{sejati} - y_{r+1} \\ = 1,110341836 - 1,110341843 = -0,000000007$$

Pada langkah ini akan dihitung $y(0,12)$ sesuai dengan $h = 0,02$.

$$\text{Solusi sejati } y(0,12) = 2e^{0,12} - 0,12 - 1 = 1,134993703$$

Maka yang menjadi f_r, f_{r-1}, f_{r-2} adalah:

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,110341843 + 0,10 = 1,210341843$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,086574129 + 0,08 = 1,166574129$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,063673089 + 0,06 = 1,123673089$$

Persamaan prediktor untuk $y(0,12)$ dapat di tulis:

$$\begin{aligned} y_{r+1}^* &= y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\ &= 1,110341843 + \frac{0,02}{12}(23[1,210341843] - 16[1,166574129] + 5[1,123673089]) \\ &= 1,134993579 \end{aligned}$$

jadi hasil prediktor nilai $y(0,12) = 1,134993579$

$$f_{r+1}^* = y_{r+1}^* + x_{r+1} = 1,134993579 + 0,12 = 1,254993579$$

Persamaan korektor untuk $y(0,12)$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned} y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(5f_{r+1}^* + 8f_r - f_{r-1}) \\ &= 1,110341843 + \frac{0,02}{12}(5[1,254993579] + 8[1,210341843] - [1,166574129]) \\ &= 1,134993724 \end{aligned}$$

jadi hasil korektor nilai $y(0,12) = 1,134993724$

Galat metode Adams-Bashforth-Moulton

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned} y^5(x) &= f^4(x, y) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,12 + 1,134993579 = 2,254993579 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ep &= \frac{9}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ &= \frac{9}{24} (0,02)^4 \cdot 2,254993579 = 1,352996147 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= y(x)_{sejati} - y^*_{r+1} \\ &= 1,134993703 - 1,134993579 = 0,000000124\end{aligned}$$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned}y^5(x) &= f^4(x, y) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,12 + 1,134993724 = 2,254993724\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Ep &= -\frac{1}{24} h^5 y^{(5)}(t) \\ &= -\frac{1}{24} (0,02)^4 \cdot 2,254993724 = -1,503329149 \cdot 10^{-9}\end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= y(x)_{sejati} - y_{r+1} \\ &= 1,134993703 - 1,134993724 = -0,000000021\end{aligned}$$

Metode Runge Kutta

Untuk menentukan $y(0,10)$ dengan metode Adams-Bashforth-Moulton kita ambil tiga buah titik yaitu:

s	x	y
1	0,04	1,041621548
2	0,06	1,063673092
3	0,08	1,086574134

Nilai h dapat diperoleh dengan $h = x_2 - x_1 = 0,06 - 0,04 = 0,02$

(h konstan sehingga metode Adams-Bashforth-Moulton dapat digunakan)

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,086574134 + 0,08 = 1,166574134$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,063673092 + 0,06 = 1,123673092$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,041621548 + 0,04 = 1,081621548$$

Menentukan prediktor melalui persamaan di bawah ini:

$$\begin{aligned} y^*_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\ &= 1,086574134 + \frac{0,02}{12}(23[1,166574134] - 16[1,123673092] + 5[1,081621548]) \\ &= 1,110341706 \end{aligned}$$

jadi hasil prediktor nilai $y(0,10) = 1,110341706$

Mencari nilai f^*_{r+1} yang diperoleh dari persamaan prediktor yaitu:

$$f^*_{r+1} = y^*_{r+1} + x_{r+1} = 1,110341706 + 0,10 = 1,210341706$$

sehingga dapat ditentukan korektornya melalui persamaan dibawah ini:

$$\begin{aligned} y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12}(5f^*_{r+1} + 8f_r - f_{r-1}) \\ &= 1,086574134 + \frac{0,02}{12}(5[1,210341706] + 8[1,166574134] - [1,123673092]) \\ &= 1,110341848 \end{aligned}$$

jadi hasil korektor nilai $y(0,10) = 1,110341848$

Galat metode Adams-Bashforth-Moulton

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned} y^5(x) &= f^4(x, y) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,10 + 1,110341706 = 2,210341706 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ep &= \frac{9}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ &= \frac{9}{24} (0,02)^4 \cdot 2,210341706 = 1,326205024 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= y(x)_{sejati} - y^*_{r+1} \\ &= 1,110341836 - 1,110341706 = 0,00000013 \end{aligned}$$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$y^5(x) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ = 1 + 0,10 + 1,110341848 = 2,210341848$$

$$Ep = -\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(t) \\ = -\frac{1}{24}(0,02)^4 \cdot 2,210341848 = -1,473561232 \cdot 10^{-8}$$

Galat longgokan:

$$\varepsilon = y(x)_{\text{sejati}} - y_{r+1} \\ = 1,110341836 - 1,110341848 = -0,000000012$$

Pada langkah ini akan dihitung $y(0,12)$ sesuai dengan $h = 0,02$.

$$\text{Solusi sejati } y(0,12) = 2e^{0,12} - 0,12 - 1 = 1,134993703$$

Maka yang menjadi f_r, f_{r-1}, f_{r-2} adalah:

$$f_r = f_3 = y_3 + x_3 = 1,110341848 + 0,10 = 1,230341848$$

$$f_{r-1} = f_2 = y_2 + x_2 = 1,086574134 + 0,08 = 1,166574134$$

$$f_{r-2} = f_1 = y_1 + x_1 = 1,063673092 + 0,06 = 1,123673092$$

Persamaan prediktor untuk $y(0,12)$ dapat di tulis:

$$y^*_{r+1} = y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2}) \\ = 1,110341848 + \frac{0,02}{12}(23[1,230341848] - 16[1,166574134] + 5[1,123673092]) \\ = 1,135760251$$

jadi hasil prediktor nilai $y(0,1) = 1,135760251$

$$f^*_{r+1} = y^*_{r+1} + x_{r+1} = 1,135760251 + 0,12 = 1,255760251$$

Persamaan korektor untuk $y(0,12)$ dapat ditulis:

$$\begin{aligned} y_{r+1} &= y_r + \frac{h}{12} (5f_{r+1}^* + 8f_r - f_{r-1}) \\ &= 1,110341848 + \frac{0,02}{12} (5[1,255760251] + 8[1,230341848] - [1,166574134]) \\ &= 1,135266785 \end{aligned}$$

jadi hasil korektor nilai $y(0,12) = 1,135266785$

Galat metode Adams-Bashforth-Moulton

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned} y^4(x) &= f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,10 + 1,135266785 = 2,235266785 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ep &= \frac{9}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ &= \frac{9}{24} (0,02)^4 \cdot 2,255760251 = 1,353456151 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= y(x)_{\text{sejati}} - y_{r+1}^* \\ &= 1,134993703 - 1,135760251 = -0,000766548 \end{aligned}$$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$\begin{aligned} y^5(x) &= f^4(x, y) = f'''(x, y) = f''(x, y) = f'(x, y) = 1 + f(x, y) \\ &= 1 + 0,12 + 1,135266785 = 2,255266785 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ep &= -\frac{1}{24} h^4 y^{(4)}(t) \\ &= -\frac{1}{24} (0,02)^4 \cdot 2,255266785 = -1,50351119 \cdot 10^{-8} \end{aligned}$$

Galat longgokan:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= y(x)_{sejati} - y_{r+1} \\ &= 1,134993703 - 1,135266785 = -0,000273082\end{aligned}$$

Dari contoh 1 dapat kita lihat perbandingan penentuan nilai hampiran $y(0,10)$ dan $y(0,12)$ pada persamaan prediktor dan korektor metode Adams-Bashforth-Moulton melalui metode satu-langkah .

Solusi sejati $y(0,10) = 1,110341836$

Metode satu-langkah	Prediktor(0,10)	Korektor(0,10)
Metode Euler	1,108593026	1,108596759
Metode Heun	1,110330066	1,110330231
Metode Deret Taylor	1,110341790	1,110341843
Metode Runge Kutta	1,110341706	1,110341848

Solusi sejati $y(0,12) = 1,134993703$

Metode satu-langkah	Prediktor(0,12)	Korektor(0,12)
Metode Euler	1,133217135	1,333213418
Metode Heun	1,134981522	1,133981857
Metode Deret Taylor	1,134993579	1,134993724
Metode Runge Kutta	1,135760251	1,135266785

Jadi, cara menentukan solusi masalah nilai batas persamaan diferensial biasa dengan metode Adams-Bashforth-Moulton memerlukan nilai awal dari metode satu langkah untuk menentukan $y_r, y_{r-1}, y_{r-2}, \dots, y_{r-m}$. Perhitungan nilai y^*_{r+1} pada metode Adams-Bashforth-Moulton dapat dilakukan dengan memilih metode satu-langkah yang memberikan ketelitian yang lebih baik dan pemilihan ukuran langkah h yang tepat dan konstan. Dari contoh 1 metode Adams-Bashforth-Moulton dapat dibandingkan dengan metode satu-langkah. Metode ini

menghasilkan error yang lebih kecil atau mendekati solusi sebenarnya sehingga lebih efisien untuk penentuan beberapa nilai taksiran.

3.5 Tinjauan Agama Terhadap Hasil Pembahasan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, bahwa metode Adams-Bashforth-Moulton dapat dilakukan dengan memilih metode satu-langkah yang memberikan ketelitian yang lebih baik. Metode ini menghasilkan error yang lebih kecil atau mendekati solusi sebenarnya sehingga lebih efisien untuk penentuan beberapa nilai taksiran. Dari sini, dapat diambil hikmahnya, bahwa suatu permasalahan matematis yang sulit diselesaikan dengan metode analitik untuk mendapatkan solusi sejatinya (jawab eksak) ternyata dapat diselesaikan dengan penghitungan numerik berupa beberapa metode sehingga didapatkan jawab yang mendekati solusi sejatinya (jawab eksaknya).

Dari sekian banyak masalah yang penulis temui, khususnya dalam bidang matematika, ternyata dapat menambah keyakinan bahwa semua pasti ada jalan keluar dan hikmahnya tersendiri. Manusia telah diberi akal oleh Allah, sehingga mereka harus menggunakan nikmat Allah tersebut untuk berkembang dan meningkatkan taraf hidupnya. Dengan nikmat yang telah diberikan oleh Allah tersebut, harus berusaha dengan sungguh-sungguh dan harus yakin bahwa setiap permasalahan pasti terdapat penyelesaiannya. Allah SWT telah berfirman dalam Al Quran surat Alam Nasyrah ayat 5:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

Artinya: “*Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.*”

Dari ayat tersebut memberikan suatu keterangan, bahwa sesuatu yang sukar pasti ada jalan keluarnya selagi mau berusaha, sabar, dan tabah hati dalam menghadapi. Kaitannya

dengan pembahasan ini yaitu bahwa dalam persoalan matematika, permasalahan yang ada harus dikerjakan dengan sungguh-sungguh dan memilih metode yang tepat untuk digunakan, sehingga akan didapatkan selesai dengan mudah.

Dalam menyelesaikan permasalahan maka kita harus teliti dalam setiap langkah-langkahnya, untuk memperoleh hasil yang tepat dalam perhitungan secara matematis. Adapun kemudahan dalam penyelesaian permasalahan itu, khususnya dalam ilmu matematika perlu adanya penjelasan yang berkaitan dengan hadist diriwayatkan oleh Bukhari, sebagai berikut:

Artinya: *“Dari Anas r.a dari Rosulullah saw bersabda: Hendaklah kamu memudahkan dan jangan mempersulit, hendaklah kamu memberikan kabar gembira dan jangan menyebabkan orang lari.” (HR. Bukhari)*

Berdasarkan hadist di atas bahwasannya dalam mengerjakan sesuatu maka hendaknya kita ikhlas dan merasa senang dalam mengerjakannya agar dapat diselesaikan dengan mudah termasuk dalam mengerjakan permasalahan matematika. Dan dalam hadist lain yang diriwayatkan oleh Muslim juga dijelaskan, dari Ibnu Abbas ra., katanya: "Rasulullah SAW. bersabda kepada Asyaj Abdul Qais:

Artinya: *"Sesungguhnya dalam dirimu itu ada dua macam perkara yang dicintai oleh Allah, yaitu sabar dan perlahan-lahan - dalam tindakan."* (Nizam, 2003. : 2)

Masalah matematika khususnya solusi masalah nilai batas persamaan diferensial biasa dengan metode Adams-Bashforth-Moulton. Solusi analitik merupakan solusi kontinu sehingga solusi dari nilai variabel bebas dapat ditemukan, sangat akurat dan tepat. Sedangkan solusi numerik dapat diperoleh dari poin-poin grid terpisah, aproksimasi, kesalahan kuantitatif harus dikendalikan dengan baik untuk ketelitian (Lam, 1994: 20), sehingga dalam pengerjaan langkah demi langkah harus teliti dan cermat. Dalam Islam sangat menekankan keharusan melakukan penyelidikan yang teliti dan pengamatan yang benar terhadap fakta-fakta konkret dalam alam semesta untuk

kemudian merenungkan temuannya itu untuk mencapai Kebenaran Hakiki. Sebagai manusia yang tidak lepas dari kesalahan, maka dalam melakukan perhitungan harus dengan teliti untuk mendapatkan kebenaran dalam hasil perhitungannya. Bahkan jumlah manusia yang akan datang menghadap Allah SWT, selaku seorang hamba pada hari yang telah dijanjikan (telah) ditetapkan dengan hitungan yang teliti. Seperti dalam QS. Maryam:94 sebagai berikut:

لَقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا

Artinya: *"Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti."*

Ayat di atas dipahami oleh banyak ulama sebagai "Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik apa yang terjangkau oleh makhluk maupun yang tidak terjangkau, seperti hembusan nafas, rincian perolehan rezeki dan kadarnya untuk masa kini dan mendatang." Allahlah yang mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, kadar cahaya dan gelapnya, sebelum, sedang atau ketika dan saat wujudnya dan lain-lain sebagainya (Shihab, 2002:257).

Sedangkan untuk penerapan persamaan diferensial itu sendiri semakin meluas, karena adanya permasalahan mengenai kuantitas bahwa perubahan terus-menerus, yang berkaitan dengan waktu dapat digambarkan dengan suatu persamaan diferensial (Finizio, 1988:108).

Dalam hadits Nabi Muhammad SAW. Yang berbunyi:

الإِيمَانُ يَزِيدُ وَيَنْقُصُ

Artinya: *"Iman itu akan bertambah dan berkurang"*

Hadits di atas menjelaskan tentang perubahan iman seseorang. Yaitu keimanan seseorang akan berubah sesuai dengan perilaku atau perbuatan yang dilakukan setiap hari. Jika seseorang itu selalu melakukan kebaikan maka keimanannya akan selalu bertambah, dan jika seseorang itu selalu melakukan perbuatan buruk maka keimanannya akan semakin berkurang.

Dalam konsep fungsi persamaan diferensial hadits di atas dapat digambarkan dengan fungsi $f(x) = x^2 + 6x - 1$. Jika nilai x adalah kebaikan dan $f(x)$ adalah keimanan maka jika nilai x besar maka nilai $f(x)$ juga besar, Sebaiknya jika nilai x kecil maka nilai $f(x)$ juga kecil. Maksudnya jika seseorang memperbanyak kebaikan maka keimanannya akan bertambah pula, dan sebaliknya, jika seseorang mengurangi jumlah kebaikan maka keimanannya akan berkurang.

Dalam Al-Qur'an disebutkan:

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنفُسِهِمْ.

Artinya: "Sesungguhnya Allah tidak akan merubah nasib suatu kaum kecuali mereka merubah nasib mereka sendiri".

Dalam konsep matematika, berdasarkan ordenya persamaan diferensial dibagi menjadi persamaan diferensial orde satu, dua, tiga, dan sampai orde-n. Fungsi diferensial jika menggunakan orde satu maka nasibnya akan stabil tidak akan berubah dan jika ia menggunakan orde 2, 3, sampai orde-n nasibnya akan berubah sesuai dengan bertambahnya orde yang dipakai.

Bagi orang yang mau berpikir, Al-Qur'an memiliki kedudukan dan peranan yang sangat besar dalam kehidupannya. Tidak hanya itu, Al-Qur'an mampu memberikan setiap jawaban sekaligus jalan keluar dari permasalahan di dunia ini. Seringkali Al-Qur'an mengajak umat manusia untuk memikirkan tentang Pencipta dan ciptaan-Nya. Yang Maha Kuasa telah menciptakan dirinya dan jagad raya, memberinya kehidupan ketika dirinya belum berwujud apa-apa, dan yang telah menganugerahkan kepada manusia nikmat dan keindahan yang tak terhitung jumlahnya (AA, 2009: vi-vii). Salah satunya, yaitu dengan mempelajari ilmu matematika.

Dalam ilmu matematika banyak memberikan manfaat bagi manusia dalam hal ilmu hitung-menghitung dalam kehidupan sehari-hari (misalkan perhitungan ilmu waris, perdagangan dan sebagainya), dan juga banyak menemukan nikmat dari Allah yang sebelumnya tidak ia ketahui. Al-Qur'an memberikan petunjuk tentang jalan yang benar menuju ilmu pengetahuan serta mampu mendapatkan kesimpulan yang benar berdasarkan penalaran dan observasi tentang keajaiban dan rahasia Allah.

Ciri khas nyata dari ilmu pengetahuan (*science*) yang tidak diingkari meskipun oleh para ilmuwan adalah bahwa ia tidak mengenal kata "kekal". Apa yang dianggap salah di masa silam misalnya, dapat diakui kebenarannya di abad modern (Shihab, 2000: 44). Dengan adanya kemajuan ilmu pengetahuan, semua nikmat yang dikaruniakan Allah kepada manusia dapat dengan mudah dirasakan, dibuka keajaiban dan rahasianya, sehingga akan membawa manusia lebih dekat kepada Allah melalui hasil-hasil perhitungan yang telah dilakukan dalam

menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan ilmu matematika. Karena penciptaan manusia bertujuan untuk mencapai kesempurnaan tertinggi tergantung pada kerja keras dan usaha yang terus-menerus, terutama dalam belajar matematika perlu adanya kerja keras dan terus-menerus dalam menyelesaikan permasalahan, sampai mendapatkan hasil yang tepat dan benar. Sebagai seorang ahli matematika, ketepatan serta akurasi dalam perhitungan yang dilakukan harus mempunyai hasil yang seksama dan akurat, sehingga menghasilkan kebenaran yang shahih. Semangat inilah yang ditekankan dalam Al-Qur'an. Seperti yang tercantum dalam Q.S An-Nisa':86 sebagai berikut:

..... إِنَّ اللَّهَ كَانَ عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ حَسِيبًا ﴿٨٦﴾

Artinya: "...Sesungguhnya Allah selalu membuat perhitungan atas tiap-tiap sesuatu."

BAB IV

PENUTUP

4.1 KESIMPULAN

Berdasarkan uraian pada bab III dapat disimpulkan bahwa Metode Adams-Bashforth-Moulton adalah proses mencari nilai fungsi $y(x)$ pada titik x tertentu dari persamaan diferensial biasa orde satu, yang diketahui dengan melakukan prediksi dengan persamaan prediktor dan melakukan koreksi dengan persamaan korektor (Abdul Munif: 2003). Metode ini merupakan salah satu dari metode Banyak Langkah (*Multi-step method*) yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas pada persamaan diferensial biasa dengan cukup akurat. Dengan tujuan menggunakan informasi dari beberapa titik sebelumnya $y_r, y_{r-1}, y_{r-2}, \dots, y_{r-m}$ yang dapat diperoleh melalui metode satu-langkah untuk menghitung taksiran nilai y_{r+1} yang lebih baik. Untuk perhitungan nilai taksiran dari beberapa titik metode Adams-Bashforth-Moulton lebih efisien dari metode satu langkah, karena langsung menggunakan persamaan prediktor dan korektornya tanpa harus mencari turunan-turunan fungsinya.

Sebelum menuju ke langkah-langkah untuk menentukan solusi persamaan diferensial biasa dengan metode Adams-Bashforth-Moulton harus dicari terlebih dahulu persamaan prediktor dan korektor. Persamaan prediktor diperoleh dari $y^*_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x)dx$ dengan menginterpolasi pada titik $x_r, x_{r-1}, x_{r-2}, \dots, x_{r-m}$ untuk bilangan bulat $m > 0$. Sedangkan persamaan korektor

diperoleh dari $y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx$ dengan menginterpolasi pada titik

$x_{r+1}, x_r, x_{r-1}, \dots, x_{r-m}$ untuk bilangan bulat $m > 0$.

Adapun langkah-langkah untuk mempermudah pengerjaan masalah dalam persamaan diferensial yang diselesaikan dengan menggunakan Metode Adams-Bashforth-Moulton orde 3, antara lain:

1. Menulis persamaan diferensial dengan syarat awal yang telah ditentukan.
2. Menentukan bentuk persamaan dari solusi sejatinya (solusi khusus) untuk mengetahui besarnya galat yang dihasilkan.
3. Menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan mencari nilai h dan f_r, f_{r-1} , dan f_{r-2} dari metode satu-langkah.
4. Menentukan nilai y^*_{r+1} pada titik x_{r+1} melalui tahap prediktor dengan persamaan: $y^*_{r+1} = y_r + \frac{h}{12}(23f_r - 16f_{r-1} + 5f_{r-2})$.
5. Menentukan nilai y^*_{r+1} pada titik x_{r+1} melalui tahap korektor dengan persamaan: $y_{r+1} = y_r + \frac{h}{12}(5f^*_{r+1} + 8f_r - f_{r-1})$.
6. Menentukan galat pada tahap prediktor dan tahap korektornya.:

Tahap prediktor

Galat per langkah:

$$Ep = Y_{r+1} - y^*_{r+1} = \frac{9}{24} h^4 y^{(4)}(t), \quad x_{r-2} < t < x_{r+1}$$

Galat longgokan: $\varepsilon = y(x)_{sejati} - y^*_{r+1}$

Tahap korektor

Galat per langkah:

$$Ep = Y_{r+1} - y_{r+1} = -\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(t), \quad x_{r-2} < t < x_{r+1}$$

Galat longgokan: $\varepsilon = y(x)_{sejati} - y_{r+1}$

7. Proses tersebut akan dihentikan pada langkah ke-n sesuai dengan nilai h yang ditentukan.

4.2 SARAN

Dari metode banyak langkah (Multi-Step) kita tahu bahwa masih banyak metode lain selain metode Adams-Bashforth-Moulton yaitu metode Milne-Simpson dan metode Hamming. Jadi disarankan kepada pembaca untuk mencoba menggunakan metode lain dalam menentukan solusi masalah batas persamaan diferensial. Sehingga dimungkinkan dapat menemukan metode dengan menghasilkan solusi yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

- AA, Gus Dan Ziyad U-Haq At-Tabany. 2009. *Struktur Matematika Al-Qur'an*. Surakarta : Rahma Media Pustaka
- Abdusysykir, M.Pd. 2006, *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press
- Baiduri. 2001. *Persamaan Differensial & Matematika Model*. Malang: Universitas Muhammadiyah Malang
- Chapra C. Steven dan Canale P. Raymond. 1985. *Numerical Methods For Engineers With Personal Computer Applications*. Michigan: McGRAW-Hill
- Chapra C. Steven dan Canale P. Raymond. 1990. *Numerical Methods for Engineers*. Singapore: McGRAW-Hill
- Chapra C. Steven dan Canale P. Raymond. 1994. *Metode Numerik*. Jakarta Erlangga
- Conte D. Samuel dan Carl de Boor. 1993. *Dasar-dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma*. Edisi Ketiga. Alih Bahasa: Ir. Mursaid.. Jakarta: Erlangga
- Djojodihardjo, Harijono. Ir. Dr. 1983. *Metode Numerik*. Jakarta: Erlangga
- Djojodihardjo, Harijono. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: PT. Gramedia Pustaka Utama
- Kartono. 1994. *Penuntun Belajar Persamaan Differensial*. Yogyakarta: Andi Offset
- Kreyszig, Erwin.1983. *Advanced Engineering Mathematics*. New York: John Wiley and Sons
- Munif, Abdul dan H. Prastyoko, Aries. 2003. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik*. Edisi Kedua. Surabaya: Guna Widya
- Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik*. Bandung: INFORMATIKA Bandung
- Purcell J. Edwin. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Edisi Kelima. Alih Bahasa: Drs. I Nyoman Susila M.Sc. Bana Kartasasmitha, Ph.D dan Drs Rawuh. Jakarta: Erlangga

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika Dalam Al-Qur'an*. Malang : UIN Press

Ratna, Lily. 1992. *Persamaan Diferensial Dalam Satuan SI Metric*. Jakarta : Erlangga

Shihab, Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati

