ESTIMASI *NONLINEAR LEAST TRIMMED SQUARES* (NLTS) PADA MODEL REGRESI NONLINIER YANG DIKENAI *OUTLIER*

SKRIPSI

OLEH
NUR LAILI AROFAH
NIM. 10610038

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

ESTIMASI *NONLINEAR LEAST TRIMMED SQUARES* (NLTS) PADA MODEL REGRESI NONLINIER YANG DIKENAI *OUTLIER*

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Nur Laili Arofah
NIM. 10610038

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

ESTIMASI *NONLINEAR LEAST TRIMMED SQUARES* (NLTS) PADA MODEL REGRESI NONLINIER YANG DIKENAI *OUTLIER*

SKRIPSI

Oleh
Nur Laili Arofah
NIM. 10610038

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 13 April 2015

Pembimbing I,

Dr. Sri Harini, M.Si
NIP. 19731014 200112 2 002

Pembimbing II,

Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 2000003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ESTIMASI *NONLINEAR LEAST TRIMMED SQUARES* (NLTS) PADA MODEL REGRESI NONLINIER YANG DIKENAI *OUTLIER*

SKRIPSI

Oleh
Nur Laili Arofah
NIM. 10610038

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 April 2015

Penguji Utama	: Abdul Aziz, M.Si	…………………………
Ketua Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si	…………………………
Sekretaris Penguji	: Dr. Sri Harini, M.Si	…………………………
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A	…………………………

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Laili Arofah

NIM : 10610038

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Estimasi *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS) pada Model Regresi Nonlinier yang Dikenai *Outlier*

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 29 April 2015
Yang membuat pernyataan,

Nur Laili Arofah
NIM. 10610038

MOTO

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan

Maka apabila kamu telah selesai (dari sesuatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan) yang lain dan hanya kepada Tuhanmulah hendaknya kamu berharap.

(Terjemahan Surat *al-Insyiroh* ayat 6-8)

Hidup ini tidak cukup dengan berhemat dan berhitung tapi harus diselesaikan, selesaikan apa yang kita pilih dengan baik dan benar.

“M_R”

PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Dengan mengucap syukur atas segala rahmat, nikmat dan hidayah-Nya, dengan penuh cinta penulis persembahkan karya tulis ini kepada:

Bapak dan Ibu Tercinta (Bapak M. Subadar dan Ibu Chusnul Chotimah), nenek penulis (Dewi Aminah) dan adik-adik tersayang (Khoiriyatul Matsnah, Ilham Ali Wafa, dan Ike Nur Fadilah) yang senantiasa mendo’akan dengan tulus ikhlas, serta memberi semangat dan motivasi demi keberhasilan penulis. Semoga semuanya selalu mendapatkan kasih sayang dari Allah Swt.

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur ke hadirat Allah Swt. yang telah melimpahkan rahmat, taufiq, dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi sebagai tugas akhir dengan judul "Estimasi *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS) pada Model Regresi Nonlinier yang Dikenai *Outlier*" .

Keberhasilan penulisan skripsi ini tidak lepas dari bimbingan dan pengarahan dari semua pihak, baik berupa motivasi, pikiran, tenaga maupun do'a. Untuk itu, penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Sri Harini, M.Si dan Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing skripsi yang tulus ikhlas serta penuh kesabaran dalam membimbing dan mengarahkan dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

6. Bapak M. Subadar, Ibu Chusnul Chotimah, Nenek Dewi Aminah dan adik-adikku Khoiriyatul Matsna, Ilham Ali Wafa dan Ike Nur Fadilah yang tidak pernah lelah memberikan do'a, kasih sayang serta semangat dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Sahabat-sahabat penulis (Syifa'ul Amamah, Ayu Dewi Purwandini, Afidah Karimatul L, Siska Dwi Oktafia, Fatma Mufidah, Farida Maslucha, Wahyudi, dan Rista Umdah) dan mahasiswa Jurusan Matematika 2010 khususnya Matematika A, dan "Asrama Al-Yasini" yang selalu memotivasi penulis, terima kasih atas semua pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
8. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, terima kasih atas do'a dan dukungan dalam kelancaran skripsi ini.

Semoga Allah Swt. akan membalas semua amalan mereka dengan pahala yang berlipat ganda, di dunia dan akhirat. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis pada khususnya dan bagi para pembaca pada umumnya, *Amin ya Robbal 'alamin...*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, April 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Lambang Matematika

$\sim$: Berdistribusi

$\leq$: Kurang dari atau sama dengan

$\geq$: Lebih dari atau sama dengan

$=$: Sama dengan

$\neq$: Tidak sama dengan

∞ : Tak berhingga

$>$: Lebih dari

$<$: Kurang dari

$\sum$: Sigma

$\approx$: Ekuivalen

$\sqrt{}$: Akar

Abjad Yunani

β : Bheta

∂ : Dho

σ : Sigma

ε : Epsilon

φ : Pshi

μ : Mu

Lambang Khusus

μ : Nilai tengah (rataan)

$\rightarrow$: Menuju

s^2 : Ragam untuk sampel

σ^2 : Ragam (varian) untuk populasi

Z : Matriks $f(X,\beta)$ yang entri-entrinya merupakan peubah acak

I : Matriks identitas

E : *Expectation* (nilai harapan)

$\hat{\beta}$: Penduga dari parameter β

$\widehat{\beta\varphi}$: Penduga dari parameter β yang dikenai *outlier*

T : *Transpose*

a^{-1} : *Inverse* dari a

L, K : Peubah bebas

Q : Peubah terikat

h : Konstanta pemotongan (*Trimming constant)*

ABSTRAK

Arofah, Nur Laili. 2015. **Estimasi *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS) pada Model Regresi Nonlinier yang Dikenai *Outlier***. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Sri Harini, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Model Statistik Nonlinier, Estimasi Parameter, Fungsi Produksi *Constant Elasticity of Substitution* (CES), *Outlier*, Metode *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS), Iterasi *Gauss Newton*.

Fungsi produksi *Constant Elasticity of Subtsitution* (CES) adalah model regresi nonlinier intrinsik yang sering digunakan untuk mengestimasi suatu data dalam sebuah industri. Model regresi nonlinier intrinsik merupakan suatu bentuk regresi nonlinier yang tidak dapat dilinierkan, sehingga untuk mengestimasi parameter β model statistik nonlinier yang digunakan adalah *Nonlinear Least Squares* (NLS) dengan pendekatan deret Taylor orde satu yang digunakan dalam iterasi *Gauss Newton*.

Salah satu masalah yang sering ditemui dalam analisis data adalah *outlier*. Keberadaan *outlier* dalam analisis data sangat mempengaruhi hasil analisis sehingga kurang valid dan sifat estimasi menjadi bias. Salah satu metode regresi yang kebal terhadap *outlier* adalah metode *Nonlinear Least Trimmed Squares*.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana sifat-sifat parameter fungsi produksi CES yang dikenai *outlier*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa parameter fungsi produksi CES yang dikenai *outlier* bersifat bias, dan tidak konsisten, sehingga fungsi produksi CES yang tidak dikenai *outlier* lebih baik dari pada yang dikenai *outlier*.

ABSTRACT

Arofah, Nur Laili. 2015. **Estimation Nonlinear Least Trimmed Squares (NLTS) on Nonlinear Regression Model Which Contains Outlier**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Sri Harini, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords: Nonlinear Statistic Model, Parameter Estimation, Constant Elasticity of Substitution (CES) Production Function, Outliers, Nonlinear Least Trimmed Squares (NLTS) Method, Gauss Newton Iteration.

Constant Elasticity of Substitution (CES) production function is the intrinsic nonlinear regression models that are often used to estimate data in an industry. Intrinsic nonlinear regression model is a kind of nonlinear regression that can not be linearized, so as to estimate the β parameters. Nonlinear statistical model use was Nonlinear Least Squares (NLS) using a first order Taylor series approach use in the Gauss Newton iteration.

One of the problems often encountered in the analysis of data is an outlier. The presence of outliers in the data analysis greatly influence the results of the analysis so it becomes less valid and the estimation become biased. One method that is resistant to outliers regression is a method of Nonlinear Least Trimmed Squares.

This research aims is to determine the characteristics of parameter CES production function which contains outlier. The result shows that parameter of the production function CES which contains outliers are bias, and inconsistent. So the CES production function which does not contain outliers is better than the are contains outliers.

ملخص

عرافة,نور ليلى. ٢٠١٥. تقدير (**NLTS**) ***Nonlinear Least Trimmed Squares*** على نماذج الانحدار غير الخطية بوجود ***Outlier***. البحث ألجامعى. قسم الرياضيات، كلية العلوم و التكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج .المشرف :(١) الدكتورة سري هاريني الماجستر (١١) أحمد ناصح الدين الماجستير.

رئيس البحث:النماذج الإحصائية غير الخطية، تقدير المعلمة، ذالة *Constant Elasticity of Substitution* (CES)، *Outlier*، طريقة (NLTS) *Nonlinear Least Trimmed Squares*، تكرار جاوس نيوتن.

دالة الإنتاج (CES) *Constant Elasticity of Substitution* هي غالبا ما تستخدم نماذج الانحدار غير الخطية الجوهرية لتقدير البيانات في الصناعة. نموذج الانحدار غير الخطية الجوهري هو شكل من أشكال الانحدار غير الخطية التي لا يمكن خطيطة، وذلك لتقدير المعلمات β نموذج إحصائي غير الخطية المستخدمة هو (NLS) *Nonlinear Least Squares* المربعات الصغرى مع مقاربة سلسلة تايلور الدرجة الأولى المستخدمة في التكرار جاوس نيوتن.

واحدة من المشاكل كثيرا ما تصادف واجهتها في تحليل البيانات هو *outlier*، فإن وجود *outlier* فى تحليل البيانات تؤثر بشكل كبير على نتائج التحليل أن التقديرات أقل دقة وكان منخيز. أحد الطريقة من الانحدار التى كانت مأمنة هي طريقة *Nonlinear Least Trimmed Squares*.

وتهدف هذه الدراسة إلى تحديد كيفية خصائص إنتاج ذالة CES التي تخضع *outlier*. وأظهرت النتائج أن المعلمات من دالة الإنتاج CES التي *outlier* منحاز وغير متسقة. وبالتالي فإن وظيفة الإنتاج CES التى لا تخضع *outlier* أفضل.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan firman Allah yang di dalamnya banyak memuat ilmu dan panduan dalam menjalani hidup, di dalamnya menyajikan banyak pengetahuan baik itu pengetahuan untuk bekal menuju kenikmatan akhirat ataupun bekal untuk kehidupan selama di dunia ini. Di dalam al-Quran tidak hanya menjelaskan tentang agama dan akhirat, akan tetapi dijelaskan pula ilmu-ilmu yang terkait dengan duniawi, seperti ilmu geografi, ekonomi, dan ilmu alam (*science*).

Salah satu contoh ilmu yang terdapat dalam al-Quran adalah matematika. Al-Quran juga membicarakan matematika dalam ayat-ayat-Nya. Abdussakir (2007) menyatakan bahwa alam semesta ini memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika. Allah Swt. berfirman dalam surat al-Ma'un/107:1-7 di bawah ini:

أَرَءَيۡتَ ٱلَّذِى يُكَذِّبُ بِٱلدِّينِ ﴿١﴾ فَذَٰلِكَ ٱلَّذِى يَدُعُّ ٱلۡيَتِيمَ ﴿٢﴾ وَلَا يَحُضُّ عَلَىٰ طَعَامِ ٱلۡمِسۡكِينِ ﴿٣﴾ فَوَيۡلٌ لِّلۡمُصَلِّينَ ﴿٤﴾ ٱلَّذِينَ هُمۡ عَن صَلَاتِهِمۡ سَاهُونَ ﴿٥﴾ ٱلَّذِينَ هُمۡ يُرَآءُونَ ﴿٦﴾ وَيَمۡنَعُونَ ٱلۡمَاعُونَ ﴿٧﴾

"Tahukah kamu (orang) yang mendustakan agama? Itulah orang yang menghardik anak yatim, dan tidak menganjurkan memberi makan orang miskin. Maka kecelakaanlah bagi orang-orang yang shalat, (yaitu) orang-orang yang lalai dari shalatnya,orang-orang yang berbuat riya dan enggan (menolong dengan) barang berguna"(QS. al–Ma'un/107:1-7).

Ayat-ayat di atas menjelaskan tentang sifat-sifat orang yang mendustakan agama dan ancaman bagi orang-orang yang mengerjakan shalat dengan lalai dan riya. Dalam ayat tersebut Allah Swt. menjelaskan orang-orang yang tergolong mendustakan agama adalah orang-orang yang menghardik anak yatim, dan tidak menganjurkan memberi makan orang miskin. Maka kecelakaanlah bagi orang-orang yang shalat, (yaitu) orang-orang yang lalai dari shalatnya, orang-orang yang berbuat riya dan enggan (menolong dengan) barang berguna (Shihab, 2003).

Salah satu orang yang mendustakan agama adalah orang yang shalat namun shalatnya bukan karena Allah melainkan karena ingin dilihat manusia. Mereka juga lalai akan pelaksanaan shalat maksudnya pelaksanaan shalat dilaksanakan saat akhir waktu dan mereka tidak dapat mengambil manfaat apapun dari shalatnya. Sebagaimana dalam skripsi ini, model regresi nonlinier merupakan suatu bentuk hubungan antara variabel bebas dan variabel terikat yang tidak mengikuti garis regresi. Interpretasi bentuk matematika dari ayat di atas yaitu adanya ketidaklinieran dalam hidup seseorang, mereka seolah-olah beriman namun mereka tidak dapat berlaku linier antara hubungan dengan Allah dan hubungan dengan manusia tidak seimbang sehingga mengakibatkan terjadinya ketidakseimbangan dalam hidup.

Salah satu bagian dari suatu penelitian terhadap suatu data adalah masalah *outlier* (*outlier*). *Outlier* sangat mempengaruhi terhadap model dan kesimpulan dari suatu penelitian. *Outlier* merupakan residu yang nilai mutlaknya jauh lebih besar dari residu lainnya dan bisa jadi terletak lebih dari 3 simpangan baku atau lebih jauh lagi dari nilai rata-rata residunya (Soemartini, 2007).

Jika keberadaan *outlier* pada suatu data tidak ditangani dengan benar maka dimungkinkan hasil kesimpulannya kurang tepat (Soemartini, 2007). Oleh karena itu, diperlukan suatu metode yang dapat mengatasi serta mendeteksi terhadap model yang dikenai *outlier*. Metode tersebut harus mampu memberikan hasil yang baik sehingga *outlier* tersebut tidak lagi berpengaruh buruk terhadap pendugaan parameter dan diharapkan mampu menghasilkan model yang cocok untuk menganalisis data.

Menurut Soemartini (2007) banyak cara untuk mengatasi *outlier*. Salah satunya dengan membuang data yang diduga *outlier*. Namun cara tersebut dianggap kurang efisien karena akan mengakibatkan hasil pengamatan kurang sahih, sehingga diperlukan suatu metode yang benar-benar dapat mengatasi *outlier*. Metode yang umum digunakan adalah metode kuadrat terkecil (*Ordinary Least Squares*), namun metode ini kurang efektif untuk mengatasi *outlier* karena menghasilkan nilai penduga parameter yang bersifat *bias*. Oleh karena itu diperlukan suatu metode yang dapat mengatasi *outlier* dan mampu menghasilkan nilai parameter yang bersifat *unbias*, salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode *robust.*

Pada penelitian terdahulu oleh Azizah (2013) diketahui bahwa metode *robust* yang digunakan untuk mendeteksi *outlier* adalah metode *Least Trimmed Squares* (LTS). Metode LTS merupakan metode yang mampu mengatasi *outlier* yang timbul dari variabel terikat (*dependent*) atau dari variabel bebas (*independent*) dengan baik pada model regresi linier. Namun pada penelitian ini, model regresi yang diteliti adalah model regresi nonlinier yang dikenai *outlier*, sehingga metode LTS tidak dapat diterapkan. Jadi pada penelitian ini penulis menggunakan metode *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS). Sifat dari metode ini hampir sama dengan metode LTS yaitu mengatasi *outlier* dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat residu dari *h* pengamatan. Penduga yang dihasilkan oleh metode ini tidak terpengaruh oleh keberadaan *outlier*. Analisis sifat penduga NLTS dilakukan dengan melihat nilai bias, ragam, dan *Mean Squares Error* (MSE) (Sundyni, 2014).

Fungsi produksi *Constant Elasticity of Substitution* (CES) merupakan salah satu model regresi yang sering dikembangkan dan dimanfaatkan dalam dunia ekonomi. Fungsi produksi ini merupakan berbentuk nonlinier intrinsik sehingga model fungsi produksi CES tidak dapat ditransformasikan menjadi bentuk linier, sehingga diperlukan proses iterasi dan didapatkan nilai estimasi yang memenuhi. Pada fungsi produksi ini rentan sekali terdeteksi adanya data *outlier*, sehingga keberadaan *outlier* perlu diperhatikan karena dapat mempengaruhi analisis data suatu produksi.

Berdasarkan latar belakang di atas maka dilakukan penelitian dengan judul "Estimasi *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS) pada Model Regresi Nonlinier yang Dikenai *Outlier*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana mendeteksi *outlier* pada model fungsi produksi CES dengan menggunakan metode NLTS?
2. Bagaimana sifat-sifat estimasi persamaan dari model fungsi produksi CES dengan menggunakan metode NLTS?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan yang ingin dicapai pada penelitian ini adalah:

1. Menjelaskan cara mendeteksi *outlier* pada model fungsi produksi CES dengan menggunakan metode NLTS.
2. Menjelaskan sifat-sifat estimasi dari model fungsi produksi CES dengan menggunakan metode NLTS.

1.4 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah disebutkan di atas, maka batasan masalah yang diberikan adalah:

1. Model nonlinier dalam penelitian ini adalah model fungsi produksi CES
2. Untuk mendeteksi *outlier* pada model fungsi produksi CES diasumsikan residu berdistribusi normal yaitu $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$.
3. Estimasi parameter β dan σ^2 dicari dengan metode NLTS.
4. Untuk mendeteksi *outlier* pada penelitian ini menggunakan *Laverage Value*, *The Difference in Fit Statistics* (DfFITs), dan *Boxplot.*
5. Iterasi yang digunakan adalah iterasi *Gauss Newton*.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Bagi peneliti
   a. Mengembangkan dan memperdalam ilmu pengetahuan tentang deteksi *outlier* menggunakan metode NLTS dengan analisis MSE.

b. Mengembangkan metode statistik dalam mendeteksi parameter *outlier* pada model regresi nonlinier fungsi produksi CES untuk mengetahui manakah yang lebih baik antara model fungsi produksi CES yang dikenai *outlier* dengan yang tidak dikenai *outlier*.

2. Bagi pembaca dan peneliti lain

   a. Sebagai tambahan wawasan dan memperdalam pengetahuan terutama dalam bidang pengujian signifikansi model regresi nonlinier fungsi produksi CES menggunakan metode NLTS.

   b. Sebagai bahan pertimbangan dalam mengambil suatu keputusan sehingga dapat digunakan sebagai bahan analisis.

   c. Sebagai bahan referensi atau tolak ukur jika ingin meneliti lebih lanjut tentang permasalahan ini.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami tulisan ini, maka penulis membagi tulisan ini ke dalam lima bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Dalam bab ini dijelaskan mengenai latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Dalam bab ini dijelaskan beberapa hal yang menjadi dasar dalam penelitian ini yaitu tentang analisis regresi, regresi nonlinier, regresi *robust*, fungsi produksi, model fungsi produksi *Constant Elasticity of*

Substitution (CES), estimasi parameter, pengertian estimasi, macam-macam estimasi, sifat-sifat estimasi, distribusi normal, distribusi chi-kuadrat (*Chi-square*), pengertian *outlier*, deteksi *Outlier*, *Mean Squares Error* (MSE), deret Taylor, metode *Least Squares Estimation*, *Nonlinear Least Squares* (NLS), iterasi *Gauss Newton*, metode *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS), dan pendusta agama dalam al-Quran.

Bab III Metode Penelitian

Dalam bab ini dijelaskan tentang metode penelitian yang dilakukan yaitu analisis data, tahap penelitian, dan contoh aplikasi.

Bab IV Pembahasan

Dalam bab ini berisi tentang langkah-langkah dalam estimasi parameter yang tidak dikenai *outlier* dan yang dikenai *outlier*, menentukan sifat-sifat estimasi parameter, dan aplikasi fungsi produksi CES pada data pengaruh *labor* dan *capital* terhadap *output* produksi.

Bab IV Penutup

Dalam bab ini dipaparkan mengenai kesimpulan yang diperoleh dari hasil penelitian dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Analisis regresi adalah metode yang digunakan untuk menentukan pola hubungan suatu variabel terikat (*dependent*) dengan satu atau lebih variabel bebas (*independent*). Hubungan yang didapat akan dinyatakan dalam bentuk persamaan matematik yang menyatakan hubungan fungsional antara variabel-variabel (Sudjana, 2002).

Penentuan variabel bebas ataupun variabel terikat harus teliti. Variabel yang mudah didapat atau tersedia sering dapat digolongkan ke dalam variabel bebas sedangkan variabel yang terjadi akibat variabel bebas merupakan variabel terikat. Untuk keperluan analisis, variabel bebas akan dinyatakan dengan X sedangkan variabel terikat akan dinyatakan dengan Y. Sehingga jika X adalah variabel bebas dan Y merupakan variabel terikat maka dinamakan regresi Y atas X. Jika yang terjadi sebaliknya yaitu Y variabel bebas dan X variabel terikat maka disebut regresi X atas Y (Sudjana, 2002).

2.1.1 Regresi Nonlinier

Model nonlinier merupakan bentuk hubungan antara peubah respon dengan peubah penjelas yang tidak linier dalam parameter. Menurut Draper dan Smith (1992), model umum regresi nonlinier adalah:

$$Y_i = f\left(X_{ij}, \beta_u\right) + e_i$$

$$e_i = Y_i - f\left(X_{ij}, \beta_u\right) \qquad (2.1)$$

dimana:

Y_i : nilai respon ke-i=1,2,…,n

X_{ij} : nilai prediktor ke-j pengamatan ke-i; j=1,2,…,p

β_u : nilai parameter ke-u; u=1,2,…,k (k=p+1)

e_i : nilai sisaan ke-i;

n : ukuran contoh

k : banyaknya parameter

p : banyaknya peubah prediktor

$f\left(X_{ij}, \beta_u\right)$: fungsi regresi nonlinier

Menurut Draper dan Smith (1992), model regresi nonlinier diklasifikasikan menjadi linier intrinsik dan nonlinier intrinsik. Model linier intrinsik dapat ditransformasikan menjadi bentuk linier, sedangkan model nonlinier intrinsik tidak dapat ditransformasikan menjadi bentuk linier.

Regresi nonlinier mengandung parameter bersifat nonlinier, dimana turunan persamaan terhadap salah satu parameter adalah fungsi dari parameter lain (masih mengandung parameter itu sendiri). Adapun contoh model nonlinier secara intrinsik nonlinier yaitu model fungsi produksi CES.

2.1.2 Regresi *Robust*

Menurut Chen (2002), regresi *robust* merupakan metode regresi yang digunakan untuk menganalisis data yang memuat *outlier*. Metode ini merupakan alat penting untuk menganalisis data yang dipengaruhi oleh *outlier* sehingga dihasilkan model yang *robust* atau kekar terhadap *outlier*. Metode ini dapat mengatasi *outlier* tanpa menghapus data *outlier* tersebut. Suatu estimator yang kekar adalah relatif tidak terpengaruh oleh perubahan besar pada bagian kecil data atau perubahan kecil pada bagian besar data (Kurniawati, 2011).

Menurut Ryan (2007) dalam Sundyni (2014), tujuan penggunaan regresi *robust* antara lain:

a. Menampilkan penduga yang sama baik dengan penduga kuadrat terkecil biasa jika asumsi analisis regresi terpenuhi dan data tidak mengandung pencilaan.
b. Menampilkan penduga yang lebih baik dari penduga kuadrat terkecil biasa jika asumsi analisis regresi tidak terpenuhi dan terdapat *outlier* dalam data.

Menurut Chen (2002) dalam Kurniawati (2011), metode-metode estimasi dalam regresi *robust* antara lain:

1. Estimasi *Maximum likelihood type* (M) yang dikenalkan oleh Huber (1973) adalah metode yang sederhana baik dalam penghitungan maupun secara teoritis. Estimasi ini menganalisis data dengan mengasumsikan bahwa sebagian besar yang terdeteksi *outlier* pada variabel bebas.
2. Estimasi *Least Trimmed Squares* (LTS) adalah metode dengan *high breakdown point* yang dikenalkan oleh Rousseeuw (1984). *Breakdown point* adalah ukuran proporsi minimal dari banyaknya data yang terkontaminasi *outlier* dibandingkan seluruh data pengamatan.
3. Estimasi *Scale* (S) juga merupakan metode dengan *high breakdown point* yang dikenalkan oleh Rousseeuw and Yohai (1984). Dengan nilai *breakdown* yang sama, metode ini mempunyai efisiensi yang lebih tinggi dibanding estimasi LTS.

4. Estimasi *Method of Moment* (MM), dikenalkan oleh Yohai (1987). Metode ini menggabungkan estimasi S (estimasi dengan *high breakdown point*) dengan estimasi M.

2.2 Fungsi Produksi

Fungsi produksi adalah suatu hubungan matematis yang menggambarkan suatu cara dengan jumlah dari hasil produksi tertentu tergantung dari jumlah input tertentu yang digunakan (Purniawati, 2009). Menurut Beattie dan Taylor (1994) dalam Herawati (2008), fungsi produksi adalah suatu deskripsi matematis atau kuantitatif dari kemungkinan-kemungkinan teknis yang dihadapi oleh suatu perusahaan.

Menurut Joesron dan Fathorrozi (2003) dalam Wibisono (2011), terdapat beberapa bentuk fungsi produksi antara lain fungsi produksi Cobb-Douglas, fungsi produksi CES dan fungsi produksi Leontief. Jones (2005) dalam Purniawati (2009) menjelaskan bahwa fungsi produksi dalam jangka panjang mereduksi ke fungsi produksi Cobb-Douglas. Fungsi produksi CES merupakan turunan fungsi produksi Cobb-Douglas yang mempunyai skala usaha produksi tetap, dan fungsi produksi leontief merupakan turunan dari fungsi produksi CES.

2.3 Model Produksi *Constant Elasticity of Substitution* (CES)

Fungsi produksi CES dikembangkan oleh Arrow, Chenery, Minhan, dan Solow (1961). Bentuk fungsi produksi CES:

$$Q_t = \beta_1 \left[\beta_2 L_t^{\beta_3} + (1-\beta_2) K_t^{\beta_3} \right]^{\frac{\beta_4}{\beta_2}} + e_t \qquad (2.2)$$

dimana Q_t adalah hasil keluaran (*output*) produksi pada saat t sebagai nilai respon, L_t adalah tenaga kerja (*labor*) pada saat t sebagai variabel pertama, dan K_t adalah modal (*capital*) pada saat t sebagai variabel kedua. Parameter-parameter β berhubungan secara tak linier dengan variabelnya (Aziz, 2010).

2.4 Estimasi Parameter

2.4.1 Pengertian Estimasi

Estimator adalah variabel random yang tergantung pada informasi sampel, dan memberikan perkiraan kepada parameter (populasi) yang tidak diketahui. Suatu variabel random yang spesifik disebut estimasi (Adiningsih, 2009).

Menurut Subagyo (2010) estimasi adalah pendugaan, yaitu menduga nilai suatu populasi dengan dasar nilai sampel. Penggunaan nilai sampel untuk mewakili nilai populasi ini disebabkan karena jumlah populasinya terlalu banyak, atau karena alasan lain sehingga harus dilakukan sampling.

2.4.2 Macam-Macam Estimasi

Adiningsih (2009) menyatakan bahwa terdapat 2 macam penaksiran yang biasa digunakan dalam statistik, yaitu:

1. Estimasi Titik

Estimasi titik (*point estimator*) parameter populasi adalah fungsi informasi sampel yang menghasilkan nilai tunggal. Nilai tunggal spesifik tersebut dinamakan estimasi titik dari parameter (*point estimate parameter*) (Adiningsih, 2009). Murray dan Larry (1999) menyatakan bahwa estimasi dari suatu parameter popuasi yang dinyatakan oleh bilangan tunggal disebut sebagai estimasi titik dari parameter tersebut. Sebuah nilai yang diperoleh dari sampel dan digunakan sebagai estimasi dari parameter yang nilainya tidak diketahui. Misal $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan sampel acak berukuran *n* dari X, maka statistik yang berkaitan dengan β dinamakan estimasi dari β. Setelah sampel diambil, nilai-nilai yang dihitung dari sampel itu digunakan sebagai taksiran titik bagi θ.

2. Estimasi Interval

Estimasi interval suatu parameter populasi adalah aturan untuk menentukan (berdasarkan informasi sampel) *range* atau interval dimana parameter (populasi) berada. Estimasi yang bersangkutan disebut estimasi interval (Adiningsih, 2009).

Estimasi dari parameter populasi dinyatakan dengan dua bilangan. Di antara posisi parameternya diperkirakan berbeda, sehingga disebut estimasi interval. Menurut Murray dan Larry (1999) estimasi interval mengindikasikan adanya tingkat akurasi dari sebuah estimasi sehingga estimasi interval akan dianggap semakin baik jika mendekati estimasi titik.

2.4.3 Sifat-Sifat Estimasi

Adiningsih (2009) menyatakan suatu penaksiran dinilai baik apabila memenuhi kriteria-kriteria tertentu, yaitu:

1. Estimator tak bias (*Unbiased Estimator*)

$$E\left(\hat{\beta}\right) = \beta \tag{2.3}$$

Estimator dikatakan tidak bias jika *mean* distribusi sampel adalah sama dengan *mean* parameter β yang tidak diketahui. β merupakan parameter yang diestimasikan, dan $\hat{\beta}$ sebagai estimator titik.

$\hat{\beta}$ adalah estimator β, maka bias $\hat{\beta}$ didefinisikan sebagai perbedaan antara nilai rata-rata (*mean*) dan β:

$$\text{Bias } \left(\hat{\beta}\right) = E\left(\hat{\beta}\right) - \beta \tag{2.4}$$

Bias untuk estimator tak bias adalah nol.

2. Efisien

Jika $\hat{\beta}$ adalah estimator β tak bias, dan tidak ada estimator tak bias lainnya yang memiliki varian yang lebih kecil, maka $\hat{\beta}$ dikatakan paling efisien atau *minimum variance unbiased estimator* β.

$\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$ adalah 2 estimator tak bias, maka:

(i) $\hat{\beta}_1$ dikatakan lebih efisien dari pada $\hat{\beta}_2$, jika:

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) < Var\left(\hat{\beta}_2\right) \tag{2.5}$$

(ii) Efisien relatif satu estimator terhadap estimator lain adalah rasio variannya:

$$\text{Efisiensi relatif} = \frac{Var\left(\hat{\beta}_2\right)}{Var\left(\hat{\beta}_1\right)}$$

3. Estimator yang Konsisten

$\hat{\beta}_n$ adalah estimator β berdasarkan n pengamatan. Jika untuk setiap jumlah ε positif, meskipun kecil. Maka probabilitas:

$$P\,[|\hat{\beta}_n - \beta| < \varepsilon] \tag{2.6}$$

Mendekati 1 bila ukuran sampel n menjadi besar tidak terbatas, maka $\hat{\beta}_n$ dikatakan estimator yang konsisten untuk β.

Adiningsih (2009) menyatakan bahwa estimator yang konsisten adalah:

(i) $\hat{\beta}_n$ merupakan estimator β. Jika bias dan varian $\hat{\beta}_n$ mendekati nol bila n bertambah tak terhingga, maka $\hat{\beta}_n$ adalah estimator konsisten.

(ii) Jika $\hat{\beta}_n$ merupakan estimator $\hat{\beta}$ yang konsisten, maka di bawah kondisi yang umum fungsi $g\left(\hat{\beta}_n\right)$ adalah estimator $g\left(\beta\right)$ yang konsisten.

2.5 Distribusi

2.5.1 Distribusi Normal

Distribusi normal adalah distribusi untuk variabel *continuous*, artinya variabel yang nilainya dapat berupa bilangan pecahan (Subagyo, 2010). Distribusi normal merupakan distribusi kontinu yang sangat penting dalam statistik dan banyak dipakai dalam memecahkan persoalan. Distribusi normal mempunyai persamaan umum sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{2.7}$$

dimana:

μ : rata-rata

σ : simpangan baku

π : 3,14159…, dan

e : 2,71828…

Distribusi normal dengan parameter μ dan σ^2 biasanya ditulis $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, bentuk kurva normal ditentukan oleh dua parameter, yaitu rata-rata (μ) dan simpangan baku $\left(\sigma^2\right)$. Bila nilai σ mengecil, maka bentuk kurva akan semakin rapat dan semakin runcing. Sebagian besar nilai x akan berkumpul atau mendekati nilai rata-rata μ. Sebaliknya makin besar nilai σ, maka bentuk kurva akan lebih renggang dan tumpul. Sebagian besar nilai-nilai x akan menjauhi nilai rata-rata μ (Boediono, 2004).

2.5.2 Distribusi Chi-Kuadrat (*Chi-square)*

Suatu variabel acak X berdistribusi *Chi-square* dengan derajat bebas *k*, dinyatakan dengan χ_k^2(0) bila untuk suatu bilangan bulat *k* > 0 (Turmudi dan Harini, 2008).

Chi kuadrat adalah teknis analisis statistik untuk mengetahui signifikansi perbedaan antara proposisi (dan atau probabilitas) subjek atau objek penelitian yang datanya telah terketagorikan. Dasar pijakan analisis dengan Chi kuadrat adalah jumlah frekuensi yang ada (Soepeno, 2002).

Soepeno (2002) menyatakan formulasi rumusan dasar untuk Chi kuadrat, yang juga dipakai sebagai alat estimasi adalah sebagai berikut:

$$X^2 = \frac{\sum\left(f_0 - f_e\right)^2}{f_e} \qquad (2.8)$$

keterangan:

X^2 : Chi kuadrat.

f_0 : frekuensi hasil observasi dari sampel penelitian.

f_e : frekuensi yang diharapkan pada populasi penelitian.

2.6 *Outlier*

2.6.1 Pengertian *Outlier*

Dalam statistika, *outlier* adalah suatu nilai pengamatan yang jaraknya jauh secara numerik dengan data yang lainnya. Dalam analisis regresi, salah satu asumsi yang harus dipenuhi adalah galat menyebar normal dengan rata-rata nol dan ragam tertentu (Berry dan Feldman, 1985).

Secara umum *outlier* dapat diartikan data yang tidak mengikuti pola umum pada model atau data yang keluar dari model dan tidak berada dalam daerah selang kepercayaan (Sembiring, 1995).

Outlier adalah pengamatan yang nilai galatnya jauh lebih besar dari pada galat pengamatan lain. *Outlier* kadang-kadang terletak tiga atau empat simpangan baku, atau lebih jauh lagi dari rata-rata galatnya. Keberadaan *outlier* akan menimbulkan beberapa masalah, diantaranya *outlier* akan mengubah atau mengaburkan kesimpulan yang dibuat oleh peneliti karena nilai penduga parameternya bersifat bias (Draper dan Smith, 1992).

Menurut Soemartini (2007) keberadaan *outlier* akan mengganggu dalam proses analisis data dan harus dihindari dalam banyak hal. Dalam kaitannya dengan analisis regresi, *outlier* dapat menyebabkan hal-hal berikut:

a. Galat yang besar dari model yang terbentuk atau $[e_i] \neq 0$

b. Varians pada data tersebut menjadi lebih besar

c. Taksiran interval memiliki rentang yang lebar.

2.6.2 Deteksi *Outlier*

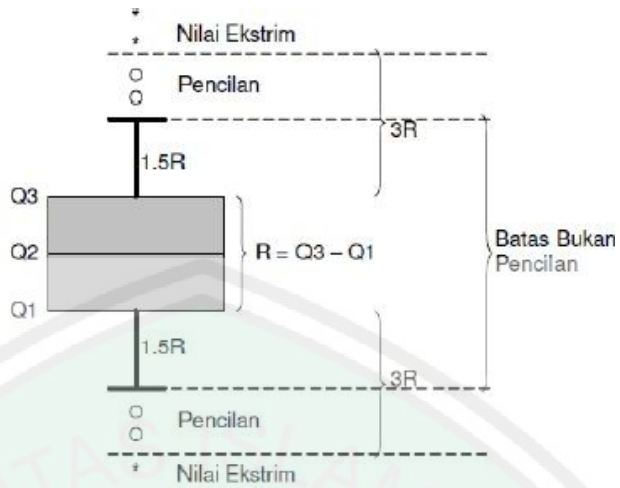
Menurut Soemartini (2007) metode yang digunakan untuk mengidentifikasi adanya *outlier* yang berpengaruh dalam koefisien regresi antara lain identifikasi dengan grafis, metode *Laverage Value* dan *The Difference in Fit Statistics*. Di bawah ini akan dijelaskan identifikasi *outlier*:

2.6.2.1 Identifikasi dengan Grafis

Metode ini merupakan metode yang mudah dipahami oleh para pembaca, karena metode ini menyajikan tampilan data berupa grafis (gambar) dan tidak melibatkan perhitungan yang sulit. Namun kekurangan metode ini adalah keputusan bahwa suatu data merupakan *outlier* sangat bergantung pada penilaian peneliti, karena hanya mengandalkan visualisasi grafis, untuk itu dibutuhkan seseorang yang ahli, berpengalaman dan penuh ketelitian dalam menginterpretasikan serta memvisualisasikan hasil gambar.

a. *Boxplot*

Boxplot merupakan salah satu metode grafis yang digunakan dalam analisis regresi, dalam identifikasi *outlier* dengan *boxplot* akan ditampilkan nilai dari kuartil bawah (Q1) dan kuartil atas (Q3), dan median yang menunjukkan 50 persentil data. Kuartil bawah memuat 25 persentil data dan kuartil atas memuat 75 persentil data. Pagar atas dan bawah biasanya memiliki jarak yang pasti berdasarkan jarak inter-kuartil (Q3 – Q1). Gambar 2.1 menunjukkan bahwa pagar atas dan bawah adalah 1,5 kali jarak inter-kuartil. Setiap pengamatan yang berada di luar pagar atas dan bawah maka kemungkinannya adalah *outlier*.



Gambar 2.1 Deteksi *Outlier* dengan BoxPlot (Sumber: Soemartini, 2007)

2.6.2.2 Metode *Leverage Value* dan *The Difference in Fit Statistics* (DfFITs)

a. Metode *Leverage Value*

Kutner (2004) menjelaskan bahwa nilai pengaruh digunakan untuk mengidentifikasi adanya *outlier* pada variabel prediktor X. Matriks H merupakan matriks segi berukuran $n \times n$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\underset{nxn}{H} = \underset{n(p-1)}{X} \underset{(p-1)(p-1)}{\left(X'X\right)^{-1}} \underset{(p-1)n}{X'}$$

untuk *i* : 1,2,3,…,*n*.

Maka banyaknya nilai h_{ii} dari $X\left(X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ik}\right)$ didefinisikan sebagai elemen ke-*i* dari diagonal utama matriks bar (H) adalah:

$$h_{ii} = X_i \left(X'X\right)^{-1} X_i'$$

dimana $X_i = \left(X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ip}\right)$ adalah vektor baris yang berisi nilai-nllai variabel prediktor dalam pengamatan ke-*i*.

Bowerman dan O'connel (1990) menyatakan bahwa nilai h_{ii} berkisar merupakan *outlier* terhadap variabel prediktor (X). Suatu nilai *leverage* h_{ii}

biasanya dianggap besar apabila nilainya lebih dari dua kali rataan semua *leverage*:

$$2\bar{h} = \frac{2\sum_{i=1}^{n} h_{ii}}{n} = 2\frac{(p+1)}{n} \tag{2.9}$$

p : banyaknya variabel prediktor

n : banyaknya pengamatan

b. *The Difference in Fit Statistics* (DfFITs)

Hipotesis untuk pengujian adanya pengamatan berpengaruh adalah sebagai berikut:

H_0 : pengatan ke-*i* tidak berpengaruh

H_1 : pengatan ke-*i* berpengaruh

Montgomery dan Peck (1992) menyatakan DfFITs merupakan pengaruh pengamatan atau observasi ke-*i* pada nilai penduga $\hat{y}_i$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$DFITS_i = t_i \left(\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.10}$$

dimana:

t_i : *studentized deleted residual* untuk kasus ke-*i*

$$t_i = e_i \left(\frac{n-p-1}{(n-p)JKG(1-h_{ii})-e_i^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e_i : residual ke-*i* dan JKG adalah jumlah kuadrat galat.

h_{ii} : nilai *leverage* untuk kasus ke-*i*.

Kriteria yang digunakan untuk menguji hipotesis tersebut adalah sebagai berikut:

$$|DFITS_i| \begin{cases} \leq 2\sqrt{\dfrac{p}{n}} & ; H_0 \ diterima \\ > 2\sqrt{\dfrac{p}{n}} & ; H_0 \ ditolak \end{cases} \tag{2.11}$$

2.7 *Mean Squares Error* (MSE)

Mean Squares Error (MSE) dapat dikatakan kriteria yang paling penting yang digunakan untuk mengevaluasi kinerja prediktor atau estimator. Penduga parameter dikatan baik apabila memiliki nilai bias dan ragam yang kecil. Oleh karena itu, untuk melihat kebaikan penduga parameter berdasarkan nilai bias dan ragam secara bersamaan maka diperlukan MSE. MSE merupakan nilai harapan dari kuadrat selisih penduga dengan parameter.

Menurut Mendenhall (1990) dalam Sundyni (2014) semakin kecil nilai MSE yang dihasilkan maka semakin baik penduga parameter:

$$\begin{aligned} MSE\left(\hat{\beta}\right) &= E\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2 \\ &= E\left(\hat{\beta}-E\left(\hat{\beta}\right)+E\left(\hat{\beta}\right)-\beta\right)^2 \\ &= E\left(\hat{\beta}-E\left(\hat{\beta}\right)\right)^2+E\left(E\left(\hat{\beta}\right)-\beta\right)^2 \\ &= -2E\left[\left(\hat{\beta}-E\left(\hat{\beta}\right)\right)E\left(\hat{\beta}\right)-\beta\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

Persamaan MSE diperoleh dengan menjumlahkan nilai bias kuadrat dengan varians (Sembiring, 1995).

Persamaan (2.12) disamadengankan nol:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\hat{\beta}-E\left(\hat{\beta}\right)\right)E\left(\hat{\beta}\right)-\beta\right] &= 0 \\ E\left[\left(\hat{\beta}\cdot E\left(\hat{\beta}\right)-\left(E\left(\hat{\beta}\right)\right)^2-\hat{\beta}\cdot\beta+\beta\cdot E\left(\hat{\beta}\right)\right)\right] &= 0 \\ \left(E\left(\hat{\beta}\right)\right)^2-\left(E\left(\hat{\beta}\right)\right)^2-\hat{\beta}\cdot\beta+\beta\cdot E\left(\hat{\beta}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Dari persamaan (2.13) didapatkan:

$$MSE\left(\hat{\beta}\right)=Var\left(\hat{\beta}\right)+\left(Bias\left(\hat{\beta}\right)\right)^2 \tag{2.14}$$

2.8 Deret Taylor

Dalam matematika, deret Taylor adalah representasi fungsi matematika sebagai hasil penjumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam metode numerik terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui titik x_i dan semua turunan dari semua f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka deret Taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i

$$f(x_{i+1})=f(x_i)+f'(x_i)\frac{\Delta x}{1!}+f''(x_i)\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x_i)\frac{\Delta x^n}{n!}+R_n \tag{2.15}$$

dengan:

$f(x_i)$: fungsi dititik x_i

$f(x_{i+1})$: fungsi dititik x_{i+1}

$f', f'',\cdots, f^n$: turunan pertama, kedua, ..., ke n dari fungsi

Δx : langkah ruang, yaitu jarak antara x_i dan x_{i+1}

R_n : kesalahan pemotongan

Dalam persamaan tersebut kesalahan pemotongan R_n diberikan dalam bentuk sebagai berikut:

$$R_n=f^{(n+1)}(x_i)\frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!}+f^{(n+2)}(x_i)\frac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)!}+\cdots \tag{2.16}$$

persamaan di atas yang mempunyai suku sebanyak tak hingga akan memberikan perkiraan nilai suatu fungsi sesuai dengan penyelesaian eksaknya.

2.9 Metode *Least Squares Estimation*

Least Squares merupakan salah satu metode yang sangat berguna dan popular, metode ini dapat digunakan untuk mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari variabel *random*. Menurut Aziz (2010), salah satu cara untuk mengidentifikasi nilai tengah dari suatu himpunan data adalah dengan mencari nilai μ'_r yang meminimumkan nilai fungsi:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^r - \mu'_r \right)^2 \tag{2.17}$$

Untuk meminimumkan sebuah fungsi dilakukan dengan menyamakan turunan pertama dengan nol, yaitu:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} -2\left(y_i - \hat{\beta} \right)^2 = 0 \tag{2.18}$$

sehingga diperoleh:

$$\hat{\beta}_{ls} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{2.19}$$

2.9.1 *Nonlinear Least Squares* (NLS)

Penaksiran β dengan metode *Nonlinear Least Squares* bertujuan untuk mendapatkan nilai β yang meminimumkan residual *sum of squares* $S(\beta)$.

$$\begin{aligned} S(\beta) &= e^T e \\ &= \left[y - f(X, \beta) \right]^T \left[y - f(X, \beta) \right] \end{aligned} \tag{2.20}$$

Untuk meminimumkan persamaan (2.20) dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap β^T :

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -2\left(\frac{\partial f^T}{\partial \beta} \mid \widehat{\beta}_{NLS}\right)\left(y - f\left(X, \widehat{\beta}_{NLS}\right)\right) = 0 \qquad (2.21)$$

Fungsi $f(X,\beta)$ adalah fungsi nonlinier sehingga penaksiran nilai β memerlukan proses iterasi yang memberikan global minimum. Secara umum, iterasi untuk mendapatkan taksiran β dengan *nonlinear least squares* adalah:

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^n\right)\right) \qquad (2.22)$$

2.10 Iterasi *Gauss Newton*

Salah satu jenis iterasi yang dapat digunakan untuk mendapatkan taksiran β dengan *nonlinear least squares* adalah iterasi *Gauss Newton*. Menurut Kutner (2005) dalam Sundyni (2014), iterasi *Gauss Newton* merupakan proses iterasi yang akan menghasilkan solusi untuk permasalahan regresi nonlinier. Iterasi *Gauss Newton* menggunakan deret Taylor untuk mendekati model regresi nonlinier dengan persamaan linier dan semua proses iterasi dibutuhkan penduga awal. Myers (1990) dalam Permatasari (2009), menjelaskan penduga awal dapat ditentukan lewat informasi. Kegagalan nilai awalan dalam menaksir dapat dikarenakan penduga awal terlalu dekat, terlalu kecil, atau menghasilkan matrik Hessian yang singular (Permatasari, 2009). Hal ini terjadi karena bentuk fungsi dari *sum of squares* sulit mencapai titik minimum. Pada kondisi seperti ini, penduga awal harus diubah-ubah atau mencobanya dengan menggunakan prosedur yang lain. Penduga awal yang baik dapat membuat penduga konvergen jauh lebih cepat (Draper dan Smith, 1992).

Menurut Aziz (2010) aproksimasi $f(X,\beta)$ disekitar *interval value* β^1 dilakukan dengan menggunakan deret Taylor orde 1, yaitu:

$$f(X,\beta) = f(X,\beta^1) + \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} (\beta - \beta^1) \tag{4.23}$$

Misalkan $\left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} = Z(\beta^1)$, maka dari persamaan di atas diperoleh:

$$\begin{aligned} y &= f(X,\beta) + e \\ &= f(X,\beta^1) + \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} (\beta - \beta^1) + e \\ &= f(X,\beta^1) + \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} \beta - \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} \beta^1 + e \\ &= f(X,\beta^1) + Z(\beta^1)\beta - Z(\beta^1)\beta^1 + e \end{aligned} \tag{2.24}$$

Persamaan (2.24) dapat dikonstruksi model *pseudo linear*, yaitu:

$$y - f(X,\beta^1) - Z(\beta^1)\beta^1 = Z(\beta^1)\beta + e \tag{2.25}$$

Misalkan $y - f(X,\beta^1) - Z(\beta^1) = y^*$ maka persamaan (2.25) menjadi:

$$y^*\beta^1 = Z(\beta^1)\beta + e \tag{2.26}$$

Berdasarkan persamaan (2.26) dilakukan estimasi dengan *least squares* untuk taksiran β^2, yaitu:

$$\begin{aligned}
S\left(\beta^{2}\right) &= e^{T}e \\
&= \left(y^{*}\beta^{1} - Z\left(\beta^{1}\right)\beta\right)^{T}\left(y^{*}\beta^{1} - Z\left(\beta^{1}\right)\beta\right) \\
&= \left(\beta^{1T}y^{*T} - \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}\right)\left(y^{*}\beta^{1} - Z\left(\beta^{1}\right)\beta\right) \\
&= \beta^{1T}y^{*T}y^{*}\beta^{1} - \beta^{1T}y^{*T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta - \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1} + \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta \\
&= \beta^{1T}y^{*T}y^{*}\beta^{1} - \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1} - \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1} + \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta \\
&= \beta^{1T}y^{*T}y^{*}\beta^{1} - 2\beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1} + \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta
\end{aligned}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap β^{T} :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \beta^{T}} &= 0 - 2Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1} + \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta + \left(\beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta\right)^{T} \\
&= -2Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1} + \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta + \beta^{T}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta \\
&= -2Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1} + Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta + Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta \\
&= -2Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1} + 2Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Dengan menyamakan persamaan (2.27) dengan nol, diperoleh:

$$Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\beta = Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1}$$

$$\begin{aligned}
\beta^{2} &= \left(Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}y^{*}\beta^{1} \\
&= \left(Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}\left(y - f\left(X,\beta^{1}\right)\right) + Z\left(\beta^{1}\right)\beta^{1} \\
&= \beta^{1} + \left(Z\left(\beta^{1}\right)^{T}Z\left(\beta^{1}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{1}\right)^{T}\left(y - f\left(X,\beta^{1}\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Bila proses di atas dilanjutkan sampai n maka diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut:

$$\beta^{n+1} = \beta^{n} + \left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\left(y - f\left(X,\beta^{n}\right)\right) \tag{2.29}$$

Bila iterasi $\beta^{n+1} = \beta^{n}$ (konvergen) maka diperoleh:

$$Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\left(y-f\left(X,\beta^{n}\right)\right)=0 \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) memenuhi *first order condition* (FOC) dari masalah residual *sum of squares* $S(\beta)$, dalam hal ini β^{n} dikatakan sebagai titik minimum. Dengan demikian, iterasi umum pada persamaan (2.29) dapat ditulis menjadi:

$$\beta^{n+1}=\beta^{n}+\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}\left.\frac{\partial f\left(X,\beta\right)}{\partial\beta^{1}}\right|_{\beta^{1}} \tag{2.31}$$

Persamaan (2.31) merupakan bentuk iterasi *Gauss Newton*.

2.11 Metode *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS)

Rousseuw (1997) dalam Azizah (2013) menyatakan salah satu metode pendugaan parameter model regresi terhadap data yang mengandung *outlier* adalah metode penduga *Least Trimmed Squares* (LTS). Metode ini merupakan salah satu metode pendugaan parameter pada regresi *robust* yang kekar terhadap keberadaan *outlier*. Metode LTS mempunyai prinsip pendugaan parameter yang sama dengan Metode Kuadrat Terkecil, yaitu meminimumkan jumlah kuadrat galat. Hanya saja pada metode LTS, jumlah kuadrat galat yang diminimumkan adalah jumlah kuadrat galat dari *h* pengamatan yang dianggap bukan *outlier*.

Namun menurut Cizek (2002) metode penduga LTS memiliki beberapa kekurangan, yaitu ketika metode ini diterapkan pada regresi nonlinier, maka hasil estimasinya kurang maksimal. Sehingga ditemukan metode penduga parameter regresi *robust* untuk regresi nonlinier terhadap data yang mengandung *outlier* yaitu metode *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS). Cizek (2001) dalam Sundyni (2014) menjelaskan bahwa penduga parameter NLTS dapat diselesaikan dengan metode *nonlinier least squares* untuk h pengamatan yang terletak dalam interval $\frac{n}{2} \le h \le n.$ Penduga NLTS didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{(NLTS,h)} &= \underset{\beta \in R^k}{\arg\ \min} \sum_{i=1}^{h} e_{[i]}^2 \\ &= \underset{\beta \in R^k}{\arg\ \min} \sum_{i=1}^{h} \left\{ Y_i - f\left(X_{ij}, \beta_u \right) \right\}^2\end{aligned} \tag{2.32}$$

dimana:

Arg : argument

Min : minimum

R^k : ruang *Euclidis* berdimensi k (k = p+1)

h : konstanta pemotongan (*Trimming constant)*

e_i^2 : statistik peringkat ke-i untuk $e_i^2 \left(e_{[1]}^2 \le e_{[2]}^2 \le \cdots \le e_{[n]}^2 \right)$

Nilai h yang digunakan ketika jumlah data lebih besar atau sama dengan 30 maka untuk mendapatkan nilai h adalah sebagai berikut:

$$h = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{p+1}{2} \right] \text{atau } h = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{p+2}{2} \right] \tag{2.33}$$

Sejumlah h pengamatan yang memiliki kuadrat sisaan $e_{[1]}^2 \le e_{[2]}^2 \le \cdots \le e_{[n]}^2$ digunakan untuk menduga parameter NLTS. Chen (2002) menjelaskan bahwa nilai h sekaligus menunjukkan jumlah pengamatan yang digunakan untuk menduga parameter model regresi dan memberikan bobot nol pada (n-h) pengamatan. Definisi h menunjukkan secara tidak langsung bahwa (n-h) pengamatan dengan kuadrat sisaan besar $e_{[1]}^2 \le e_{[2]}^2 \le \cdots \le e_{[n]}^2$ tidak akan mempengaruhi penduga parameter model.

2.12 Pendusta Agama dalam Al-Quran

Dusta adalah dosa terbanyak yang diperbuat oleh manusia, dosa ini jarang sekali disadari oleh manusia. Dusta merupakan salah satu sifat ketidakjujuran terhadap apa yang dia ucapkan ataupun yang dia kerjakan, seseorang dapat berdusta kapanpun dan kepada siapapun.

Dijelaskan salah satu sifat orang munafik adalah mereka yang berdusta, dalam hal ini berdusta tidak hanya berlaku terhadap sesama manusia namun berdusta terhadap agama dan Allah. Salah satu bentuk dusta terhadap agama oleh Allah telah dijelaskan dalam al-Quran surat al-Ma'un/107:1-7:

أَرَءَيۡتَ ٱلَّذِي يُكَذِّبُ بِٱلدِّينِ ١ فَذَٰلِكَ ٱلَّذِي يَدُعُّ ٱلۡيَتِيمَ ٢ وَلَا يَحُضُّ عَلَىٰ طَعَامِ ٱلۡمِسۡكِينِ
٣ فَوَيۡلٞ لِّلۡمُصَلِّينَ ٤ ٱلَّذِينَ هُمۡ عَن صَلَاتِهِمۡ سَاهُونَ ٥ ٱلَّذِينَ هُمۡ يُرَآءُونَ ٦ وَيَمۡنَعُونَ
ٱلۡمَاعُونَ ٧

"Tahukah kamu (orang) yang mendustakan agama? Itulah orang yang menghardik anak yatim, dan tidak menganjurkan memberi makan orang miskin. Maka kecelakaanlah bagi orang-orang yang shalat, (yaitu) orang-orang yang lalai dari shalatnya, orang-orang yang berbuat riya dan enggan (menolong dengan) barang berguna"(QS. al – Ma'un/107:1-7).

Al-Ma'un merupakan surat ke-107 yang berarti barang-barang yang berguna, sebagian ulama' menyatakan bahwa surat ini diturunkan setelah surat *al-Quraisy*, karena adanya hubungan yang erat antara kedua surat ini. Hal ini dapat diketahui pada surat *al-Quraisy* menggambarkan berbagai karunia yang dianugrahkan Allah kepada suku quraisy, lalu Allah memerintahkan untuk bersyukur, menyembah-Nya dan berbuat baik terhadap sesama manusia. Namun mereka menghiraukan perintah Allah dan mereka senantiasa bersikap kasar terhadap orang-orang yang lemah dan miskin, oleh karena itu Allah menurunkan surat al-Ma’un untuk memperingati mereka agar merubah sikap dan perilakunya. Adapun tafsir dari surat al-Ma’un ayat 1-7 di atas adalah sebagai berikut:

Surat al-Ma’un menjelaskan ciri-ciri orang yang mendustakan agama sehingga ayat pembuka pada surat ini berupa sebuah pertanyaan “*Tahukah kamu (orang) yang mendustakan agama?*”. Menurut Shihab dalam tafsir al-Mishbah (2002) ayat pertama pada surat ini berbentuk sebuah pertanyaan, namun pertanyaan yang terkandung pada ayat pertama ini bukan bertujuan untuk mendapatkan sebuah jawaban, karena Allah maha mengetahui tapi bertujuan agar manusia memerhatikan kandungan ayat-ayat berikutnya. Menurut Machmud (2005) pernyataan *yukaddzibu* secara harfiah berarti mendustakan, yang dimaksud adalah menganggap dusta atau tidak percaya. Muhammad Quraisy Shihab (2008) menyatakan bahwa kata *al-din* dapat juga berarti ‘pembalasan’. *Yaumuddin* berarti ‘hari pembalasan’ atau ‘hari kiamat’. Orang yang tidak percaya kepada hari kiamat tidak akan mengakui adanya pembalasan amal, bagi mereka tidak ada kehidupan keduan, tidak ada pertanggungjawaban amal, dan tidak ada sanksi akhirat.

Sikap orang-orang yang tidak percaya terhadap hari akhir atau mereka yang mendustakan agama, dijelaskan pada ayat kedua yaitu “*Itulah orang yang menghardik anak yatim, dan tidak menganjurkan memberi makan orang miskin*”. Ghoffar dalam tafsir Ibnu Katsir (2007) yang dimaksud dengan orang-orang yang menghardik anak yatim adalah mereka yang berbuat sewenang-wenang terhadap anak yatim dan menzalimi haknya, tidak memberi makan serta tidak berbuat baik kepadanya. Ayat selanjutnya diperintah untuk menganjurkan memberi makanan kepada orang miskin, yakni kepada orang fakir yang tidak memiliki apapun untuk memenuhi dan mencukupi kebutuhannya.

Menurut Machmud (2005) kata "*yadu'u*" berarti mendorong secara fisik dengan keras, ayat ke-3 ini tidak mengemukakan pula kewajiban untuk memberi makan kepada fakir miskin, tetapi berarti kewajiban untuk memperhatikan orang fakir miskin ada pada semua orang.

Ciri-ciri orang yang mendustakan agama selanjutnya dijelaskan pada ayat ke-4 dan ke-5 "*Maka kecelakaanlah bagi orang-orang yang shalat, (yaitu) orang-orang yang lalai dari shalatnya*". Menurut Machmud (2005) kedua ayat ini ditujukan secara tegas sebagai bentuk peringatan kepada orang-orang yang shalat, kata *Mushollin* dalam al-Quran tidak digunakan untuk menggambarkan orang yang menunaikan sholat dengan benar. Al-Quran menggunakan "*aqimuh shalah*" yang biasa diterjemahkan menunaikan shalat dengan baik, sesuai dengan syarat, rukun dan sunnahnya, dan memahami tujuan beserta hikmah shalat yang dikerjakan (Machmud, 2005).

Penjelasan tentang orang yang shalat yang baik dan benar sehingga mereka merupakan orang-orang yang bertakwa dijelaskan dalam surat al-Baqarah/2:3, yaitu:

ٱلَّذِينَ يُؤۡمِنُونَ بِٱلۡغَيۡبِ وَيُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَمِمَّا رَزَقۡنَٰهُمۡ يُنفِقُونَ ٣

"(yaitu) mereka yang beriman kepada yang ghaib, yang mendirikan shalat, dan menafkahkan sebagian rezki, yang Kami anugerahkan kepada mereka"(QS. al-Baqarah/2:3)

Ayat ini menjelaskan tentang orang-orang yang bertakwa, salah satunya adalah mereka yang shalat dan mereka yang menafkahkan sebagian rezekinya. Shalat menurut bahasa arab yaitu doa. Menurut istilah syara' ialah ibadah yang sudah dikenal, yang dimulai dengan takbir dan diakhiri dengan salam, yang dikerjakan untuk membuktikan pengabdian dan kerendahan diri kepada Allah. Pada ayat ini yang dimaksud dengan mendirikan shalat ialah menunaikannya dengan teratur, dengan melangkapi syarat-syarat, rukun-rukun dan adab-adabnya, baik yang lahir maupun yang batin, seperti khusyuk, memperhatikan apa yang dibaca dan sebagainya.

Shihab dalam tafsir al-Mishbah (2002) menjelaskan kata Musholllin pada ayat ini dapat diterjemahkan dengan *orang-orang yang shalat,* tetapi dalam al-Quran ditemukan makna khusus baginya. Al-Quran menggunakan kata *aqimu* untuk menggambarkan shalat yang sempurna rukun dan syarat-syaratnya. Maksud dari kata *mushollin* adalah mereka yang sholat namun shalat mereka tidak sempurna, tidak khusyuk, tidak pula memperhatikan syarat dan rukunnya dan mereka yang lalai tentang esensi makna dan tujuan shalat.

Menurut Rosyadi dalam tafsir al-Qurthubi (2008) riwayat dari Ibnu Abbas menyebutkan yang dimaksud *Mushollin* adalah orang-orang munafik, mereka hanya melakukan shalat ketika ada orang yang melihatnya, namun jika sedang sendiri mereka tidak melakukannya. Adh-Dhahhak meriwayatkan dari Ibnu Abbas dalam tafsir al-Qurthubi (2008) yang dimaksud *Mushollin* adalah orang-orang yang melakukan shalat namun tidak mengharapkan pahala dari shalatnya, dan apabila mereka meninggalkannya mereka tidak takut akan hukuman yang akan mereka terima. Riwayat lain dari Ibnu Abbas menyebutkan, bahwa mereka yang dimaksud adalah orang-orang yang mengakhirkan shalat mereka dari waktu-waktu yang semestinya.

Kata *MusholLin* pada ayat ke-4 dijelaskan lagi pada ayat ke-5, yaitu orang yang lalai sholatnya. Menurut Ibrahim yang diriwayatkan oleh al-Mughirah makna dari "*sahun*" adalah menyia-nyiakan waktu, begitu juga dengan riwayat dari Abul Aliyah dalam tafsir al-Qurthubi (2008) mereka yang lalai adalah mereka yang melakukan shalat tidak di waktu-waktu yang seharusnya, mereka juga tidak menyempurnakan ruku' dan sujud mereka.

Menurut Ghoffar dalam tafsir Ibnu Katsir (2007) menjelaskan orang yang mengakhirkan shalat adalah mereka yang secara terus menerus atau kebanyakan mengakhirkan shalat. Menurut Machmud (2005) yang dimaksud lalai adalah mereka yang enggan mengingat-ingat apakah sudah bersih dari hadast atau belum, atau enggan mengingat-ingat jumlah rakaat yang sudah ditunaikannya.

Ciri-ciri orang yang mendustakan agama yang terakhir dijelaskan pada ayat keenam dan ketujuh yaitu "*orang-orang yang berbuat riya dan enggan (menolong dengan) barang berguna*". Riya merupakan sifat suka dipuji dan senang dihormati oleh sesama manusia, semua apa yang dikerjakan bertujuan untuk mendapatkan pujian dari sesama. Rasulullah menyatakan riya sebagai syirik kecil, orang yang riya secara tidak langsung memandang dirinya setara atau mempunyai kemampuan yang mendekati Allah (Machmud, 2005).

Rosyadi dalam tafsir al-Qurthubi (2008) menjelaskan makna hakiki dari kata riya adalah mengharapkan sesuatu yang bersifat duniawi melalui ibadah, yakni ingin dilihat orang lain bahwa ia melakukan shalat karena ketaatan, padahal ia hanya melakukan shalat karena takut dituding tidak taat. Seperti halnya shalat yang dilakukan oleh orang-orang fasik, mereka hanya melalakukannya karena ingin dikatakan bahwa mereka melakukannya, bukan karena Allah.

Menurut Shihab dalam tafsir al-Mishbah (2002) kata "*yurâ'ân*" terambil dari kata *ra'â* yang berarti melihat, dari akar kata yang sama lahirlah kata *riyâ'* yang berarti seseorang ketika melakukan suatu pekerjaan selalu berusaha atau berkeinginan agar dilihat dan diperhatikan orang untuk mendapat pujian mereka. Riya adalah sesuatu yang abstrak, sulit bahkan mustahil dapat dideteksi oleh orang lain, bahkan yang bersangkutan sendiri kadang tidak menyadarinya, apalagi jika ia sedang tenggelam dalam suatu pekerjaan.

Menurut Shihab dalam tafsir al-Mishbah (2002) kata *"al-Ma'un"* menurut sebagian ulama' berasal dari kata *ma'ûnah* yang berarti bantuan, namun ada juga yang berpendapat bahwa al-Ma'un adalah bentuk maf'ul dari kata "*a'ûna-yu'înu*" yang berarti membantu dengan bantuan yang jelas baik dengan alat-alat atau fasilitas yang memudahkan tercapainya sesuatu yang diharapkan. Namun yang lebih umum kata *al-Ma'un* berasal dari kata *al-ma'n* yang berarti sedikit, sehingga dengan demikian ayat ini menggambarkan betapa kikirnya mereka, yakni jangankan bantuan yang sifatnya besar, hal-hal yang kecilpun enggan.

Menurut Ghoffar dalam tafsir ibnu Katsir (2007) maksud dari ayat ketujuh ini adalah mereka yang tidak mau berbuat baik dalam beribadah kepada Allah dan tidak juga berbuat baik kepada sesama makhluk-Nya, bahkan tidak mau meminjamkan barang yang bisa dimanfaatkan dan membantu orang lain padahal barang tersebut tetap utuh dan akan dikembalikan kepada mereka lagi. Diriwayatkan oleh Ibnu Abi Najih berkata dari Mujahid, dari Ibnu Abbas "*al-Ma'un*" berarti barang-barang perabotan rumah tangga. Demikian pula yang dikemukakan oleh Mujahid. Ikrimah mengatakan "kepala *al-Ma'un* adalah zakat dan barang paling bawahnya adalah saringan, ember dan jarum". Diriwayatkan oleh Ibnu Abi Haitam apa yang dikemukakan oleh Ikrimah ini adalah baik karena mencakup semua pendapat secara keseluruhan dan semuanya kembali kepada satu hal, yaitu keengganan memberikan pertolongan dalam bentuk harta maupun barang-barang bermanfaat.

Pada penggalan ayat surat al-Baqarah (2:3) yaitu "*wamimma razaqnahum yunfikun*" merupakan bentuk seruan kepada manusia untuk menafkahkan sebagian rizkinya kepada sesama, Ali bin Abi Thalhah dan sahabat yang lain menceritakan, dari Ibnu Abbas, ia mengatakan (maksud ayat ini adalah) mengeluarkan zakat dari harta kekayaan yang dimiliki. Namun As-Suddi menceritakan dari Ibnu Abbas dari Ibnu Mas'ud dan dari beberapa sahabat Rasulullah Saw., ia mengatakan maksud ayat ini adalah memberi nafkah seseorang kepada keluarganya.

Sedangkan Ibnu Jarir menentukan pilihannya bahwa ayat "*wamimma razaqnahum yunfikun*" bersifat umum mencakup segala bentuk zakat dan infak. Ia mengatakan, sebaik-baiknya tafsir mengenai sifat kaum itu adalah hendaklah mereka menunaikan semua kewajiban yang berada pada harta benda mereka, baik berupa zakat ataupun memberi nafkah orang-orang yang harus ia jamin dari kalangan keluarga, anak-anak dan yang lainnya dari kalangan orang-orang yang wajib ia nafkahi, karena hubungan kekerabatan, kepemilikan (budak) atau faktor lainnya.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian dalam bab I, maka dalam penelitian yang berjudul Estimasi *Nonlinear Least Trimmed Squares* (NLTS) pada Model Regresi Nonlinier yang Dikenai *Outlier*, digunakan pendekatan deskriptif kuantitatif dengan menggambarkan data yang sudah ada dan disusun kembali untuk dijelaskan dan dianalisis. Selain menggunakan pendekatan deskriptif kuantitatif, penelitian ini juga menggunakan pendekatan kualitatif dan studi literatur. Pandekatan kualitatif menunjukkan pengembangan dari kuantitatif, serta pendekatan studi literatur dengan mengumpulkan bahan pustaka sebagai bahan penunjang untuk menyelesaikan penelitian ini.

3.2 Sumber dan Metode Pengumpulan Data

Data dalam penelitian ini berupa data sekunder yang bersumber dari buku Ekonometrika Teori dan Praktik Eksperimen dengan MATLAB (Aziz, 2010). Data yang digunakan berjumlah 30 dengan 2 variabel bebas dan 1 variabel terikat.

3.3 Variabel Penelitian

Pada penelitian ini variabel yang digunakan adalah variabel x dan y, variabel y adalah variabel terikat yaitu *output*. Variabel x adalah variabel bebas yaitu *labor* (x_1), *capital* (x_2).

3.4 Analisis Data

Pada penelitian ini, untuk analisis data peneliti menggunakan software Matlab R 2010 a dan Minitab 14.

3.4.1 Estimasi Parameter Fungsi Produksi CES dengan Metode NLTS

Adapun tahapan untuk melakukan estimasi parameter fungsi produksi CES adalah sebagai berikut:

1. Membentuk model fungsi produksi CES
2. Estimasi parameter model fungsi produksi CES dengan menggunakan NLS
3. Model fungsi produksi CES dikenai *outlier*
4. Estimasi parameter model fungsi produksi CES dikenai *outlier* dengan menggunakan NLS.

3.4.2 Menentukan Sifat-Sifat Estimasi Parameter

Model yang digunakan untuk menentukas sifat-sifat estimasi parameter adalah model fungsi produksi CES yang tidak dikenai *outlier* dan yang dikenai *outlier*, adapun sifat-sifat estimasi parameter adalah sebagai berikut:

1. Tak Bias (*Unbias*)
2. Efisien
3. Konsisten
4. *Mean Squares Error* (MSE)

3.4.3 Aplikasi Fungsi Produksi CES pada Data Pengaruh *Labor* dan *Capital* terhadap *Output* Produksi

Langkah-langkah estimasi parameter regresi *robust* menggunakan metode NLTS pada data adalah sebagai berikut:

a. Deteksi *outlier*

   a) *Boxplot*

   b) *Leverage Value*, menghitung nilai *laverage* setiap pengamatan menggunakan persamaan (2.13)

   c) *The Difference in Fit Statistics* (DfFITs), menghitung nilai DfFITs pengamatan menggunakan persamann $2\sqrt{\frac{p}{n}}$, membandingkan nilai |DfFITs| dengan kriteria pada persamaan (2.15)

b. Menghitung nilai *h*, menggunakan persamaan (2.34)

c. Membuat urutan data ke-*i* untuk e_i^2, dimana $e_{[1]}^2 \leq e_{[2]}^2 \leq \cdots \leq e_{[n]}^2$

d. Urutkan hasil kuadrat residu dari yang terkecil ke yang terbesar

e. Mengurutkan $\left(X_{i,j}, Y_i\right)$ berdasarkan $e_{[i]}^2$

f. Melakukan estimasi parameter pada model fungsi produksi CES dengan menggunakan iterasi *Gauss Newton*

   a) Estimasi parameter pada data sebelum data *outlier* dibuang

   b) Estimasi parameter pada data setelah data *outlier* dibuang

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Estimasi Parameter Fungsi Produksi CES dengan Metode NLTS

4.1.1 Membentuk Model Fungsi Produksi CES

Fungsi produksi CES merupakan bentuk persamaan nonlinier intrinsik, dimana model produksi ini tidak dapat dilinierkan secara langsung karena tidak ada solusi persamaan normal secara intrinsik.

Bentuk fungsi produksi CES adalah sebagai berikut:

$$Q_t = \beta_1 \left[\beta_2 L_t^{-\beta_3} + (1-\beta_2) K_t^{-\beta_3} \right]^{\frac{\beta_4}{\beta_2}} + e_t \tag{4.1}$$

dengan

$$[L, K] = X$$

maka persamaan (4.1) dapat ditulis menjadi:

$$Q = f(X, \beta) \tag{4.2}$$

Persamaan (4.2) dapat ditulis menjadi:

$$y = Q + e$$

atau

$$y = f(X, \beta) + e \tag{4.3}$$

4.1.2 Estimasi Parameter $\hat{\beta}$ pada Model Fungsi Produksi CES dengan Menggunakan NLS.

Untuk menentukan penduga parameter dari fungsi produksi CES yang tidak dikenai *outlier* menggunakan bentuk regresi nonlinier dari fungsi produksi

CES yaitu dengan menggunakan persamaan (2.1), yaitu:

$$Y_i = f\left(X_{ij}, \beta_u\right) + e_i$$

Menurut Chen (2002) metode NLTS merupakan pengembangan dari metode LTS yang diterapkan pada regresi nonlinier. Metode NLTS mengestimasi parameter dengan meminimumkan nilai residual yang dikenai *outlier* dengan persamaan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i) = 0 \tag{4.4}$$

Persamaan (4.4) dijabarkan sehingga didapat:

$$\sum_{i=1}^{n}(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(y - f(X,\beta)\right) \tag{4.5}$$

Maka jumlah kuadrat residual yang dikenai *outlier* adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
S = e^T e &= \left(y - f(X,\beta)\right)^T \left(y - f(X,\beta)\right) \\
&= \left(y^T - \left[f(X,\beta)\right]^T\right)\left(y - f(X,\beta)\right) \\
&= \left(y^T - \left[f(X,\beta)\right]^T\right)\left(y - \left(f(X,\beta)\right)\right) \\
&= y^T y - y^T f(X,\beta) - \left[f(X,\beta)\right]^T y + \left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta) \\
&= y^T y - \left(y^T f(X,\beta)\right)^T - \left[f(X,\beta)\right]^T y + \left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta) \\
&= y^T y - \left(y^T f(X,\beta)\right)^T - \left[f(X,\beta)\right]^T y + \left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta) \\
&= y^T y - \left[f(X,\beta)\right]^T y - \left[f(X,\beta)\right]^T y + \left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta) \\
&= y^T y - 2\left[f(X,\beta)\right]^T y + \left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta)
\end{aligned}$$

Untuk meminimumkan fungsi tersebut, maka dilakukan dengan cara mencari turunan pertama S terhadap β^T, yaitu:

$$\frac{\partial e^T e}{\partial \beta^T} = 0 - 2\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T y}{\partial \beta^T} + \frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta)}{\partial \beta^T} + \left[\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta)}{\partial \beta}\right]^T$$

$$= -2\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T y}{\partial \beta^T} + \frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta)}{\partial \beta^T} + \left[\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right] f(X,\beta)^T}{\partial \beta^T}\right] \tag{4.6}$$

$$= -2\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T y}{\partial \beta^T} + 2\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta)}{\partial \beta^T}$$

Kemudian menyamakan persamaan (4.6) dengan nol, sehingga diperoleh:

$$-2\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T y}{\partial \beta^T} + 2\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta)}{\partial \beta^T} = 0$$

$$2\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta)}{\partial \beta^T} = 2\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T y}{\partial \beta^T}$$

$$\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T f(X,\beta)}{\partial \beta^T} = \frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T y}{\partial \beta^T}$$

$$f(X,\beta) = \left[\frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T}{\partial \beta^T}\right]^{-1} \frac{\partial\left[f(X,\beta)\right]^T y}{\partial \beta^T} \tag{4.7}$$

$$f(X,\beta) = \left[\left[f'(X,\beta)\right]^T\right]^{-1} \left[f'(X,\beta)\right]^T y$$

Persamaan (4.7) merupakan fungsi regresi nonlinier sehingga untuk penaksiran parameter β dilakukan dengan proses iterasi. Pada penelitian ini iterasi yang digunakan adalah iterasi *Gauss Newton*.

Untuk mendapatkan estimasi $\hat{\beta}$ langkah pertama yaitu mengaproksimasikan $f(X,\beta)$ di sekitar *interval value* β^1 dilakukan dengan menggunakan deret Taylor orde 1, yaitu:

$$f(X,\beta) = f(X,\beta^1) + \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} (\beta - \beta^1)$$

Misalkan $\left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} = Z(\beta^1)$, maka:

$$\begin{aligned} y &= f(X,\beta) + e \\ &= f(X,\beta^1) + \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} (\beta - \beta^1) + e \\ &= f(X,\beta^1) + \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} \beta - \left.\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta^1}\right|_{\beta^1} \beta^1 + e \\ &= f(X,\beta^1) + Z(\beta^1)\beta - Z(\beta^1)\beta^1 + e \end{aligned} \tag{4.8}$$

Persamaan (4.8) dapat mengkonstruksi model *pseudo linear*, yaitu:

$$y - f(X,\beta^1) - Z(\beta^1)\beta^1 = Z(\beta^1)\beta + e \tag{4.9}$$

Misalkan $y - f(X,\beta^1) - Z(\beta^1) = y^*$ maka persamaan (4.9) menjadi:

$$y^*\beta^1 = Z(\beta^1)\beta + e \tag{4.10}$$

Berdasarkan persamaan (4.10) dilakukan estimasi dengan *least squares* untuk taksiran β^2, yaitu:

$$\begin{aligned} S(\beta^2) &= e^T e \\ &= \left(y^*\beta^1 - Z(\beta^1)\beta\right)^T \left(y^*\beta^1 - Z(\beta^1)\beta\right) \\ &= \left(\beta^{1T} y^{*T} - \beta^T Z(\beta^1)^T\right)\left(y^*\beta^1 - Z(\beta^1)\beta\right) \\ &= \beta^{1T} y^{*T} y^* \beta^1 - \beta^{1T} y^{*T} Z(\beta^1)\beta - \beta^T Z(\beta^1)^T y^*\beta^1 + \beta^T Z(\beta^1)^T Z(\beta^1)\beta \\ &= \beta^{1T} y^{*T} y^* \beta^1 - \beta^T Z(\beta^1)^T y^*\beta^1 - \beta^T Z(\beta^1)^T y^*\beta^1 + \beta^T Z(\beta^1)^T Z(\beta^1)\beta \\ &= \beta^{1T} y^{*T} y^* \beta^1 - 2\beta^T Z(\beta^1)^T y^*\beta^1 + \beta^T Z(\beta^1)^T Z(\beta^1)\beta \end{aligned}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap β^T, yaitu:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta^T} = 0 - 2Z\left(\beta^1\right)^T y^* \beta^1 + \beta^T Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta + \left(\beta^T Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta\right)^T$$
$$= -2Z\left(\beta^1\right)^T y^* \beta^1 + \beta^T Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta + \beta^T Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta$$
$$= -2Z\left(\beta^1\right)^T y^* \beta^1 + Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta + Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta$$
$$= -2Z\left(\beta^1\right)^T y^* \beta^1 + 2Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta \qquad (4.11)$$

Dan menyamakan persamaan (4.11) dengan nol, diperoleh:

$$Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\beta = Z\left(\beta^1\right)^T y^* \beta^1$$

$$\beta^2 = \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T y^* \beta^1$$
$$= \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^1\right)\right) + Z\left(\beta^1\right)\beta^1 \qquad (4.12)$$
$$= \beta^1 + \left(Z\left(\beta^1\right)^T Z\left(\beta^1\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^1\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^1\right)\right)$$

Bila proses di atas dilanjutkan sampai n maka diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut:

$$\beta^{n+1} = \beta^n + \left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^n\right)\right) \qquad (4.13)$$

4.1.3 Model Fungsi Produksi CES Dikenai *Outlier*

Persamaan (4.3) merupakan bentuk sederhana dari model fungsi produksi CES, kemudian persamaan tersebut dikenai *outlier* sehingga didapatkan:

$$y = f\left(X\varphi, \beta\varphi\right) + e \qquad (4.14)$$

Dengan φ merupakan penduga *outlier*, sehingga persamaan (4.14) merupakan bentuk fungsi produksi CES yang dikenai *outlier*.

4.1.4 Estimasi Parameter $\hat{\beta}$ pada Model Fungsi Produksi CES dikenai *Outlier* dengan Menggunakan NLS

Untuk estimasi parameter $\hat{\beta}$ yang dikenai *outlier*, maka jumlah kuadrat residu yang dikenai *outlier* diestimasi dengan menggunakan metode *least squares* untuk taksiran β, yaitu:

$$
\begin{aligned}
S = e^T e &= \left(y - f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right)^T \left(y - f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right) \\
&= \left(y^T - \left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T\right)\left(y - f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right) \\
&= y^T y - y^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right) - \left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T y + \\
&\quad \left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right) \\
&= y^T y - \left(y^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right)^T - \left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T y + \\
&\quad \left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right) \\
&= y^T y - \left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T y - \left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T y + \\
&\quad \left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right) \\
&= y^T y - 2\left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T y + \left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Untuk mendapatkan nilai estimasi β maka persamaan (4.15) diminimumkan dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap $\left(\beta\varphi\right)^T$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial\left(\beta\varphi\right)^T} &= 0 - 2\frac{\partial\left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T y}{\partial\left(\beta\varphi\right)^T} + \frac{\partial\left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^T} \\
&\quad + \left[\frac{\partial\left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)}\right]^T \\
&= -2\frac{\partial\left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T y}{\partial\left(\beta\varphi\right)^T} + \frac{\partial\left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^T} \\
&\quad + \left[\frac{\partial\left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right] f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)^T}{\partial\left(\beta\varphi\right)^T}\right] \\
&= -2\frac{\partial\left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T y}{\partial\left(\beta\varphi\right)^T} + 2\frac{\partial\left[f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)\right]^T f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^T}
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Kemudian menyamakan persamaan (4.16) dengan nol, sehingga diperoleh:

$$0=-2\frac{\partial\left[f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}y}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{T}}+2\frac{\partial\left[f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{T}}$$

$$2\frac{\partial\left[f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}y}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{T}}=2\frac{\partial\left[f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{T}}$$

$$\frac{\partial\left[f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}y}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{T}}=\frac{\partial\left[f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{T}} \qquad (4.17)$$

$$f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)=\left[\frac{\partial\left[f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{T}}\right]^{-1}\frac{\partial\left[f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}y}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{T}}$$

$$f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)=\left[\left[f'\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}\right]^{-1}\left[f'\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right]^{T}y$$

Persamaan (4.17) merupakan fungsi regresi nonlinier yang dikenai *outlier* sehingga untuk penaksiran parameter $(\beta\varphi)$ dilakukan dengan proses iterasi *Gauss Newton*.

Untuk mendapatkan estimasi $(\hat{\beta}\varphi)$ langkah pertama yaitu mengaproksimasikan $f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)$ di sekitar *interval value* $(\beta\varphi)^{1}$ dilakukan dengan menggunakan deret Taylor orde 1, yaitu:

$$f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)=f\left(X\varphi,(\beta\varphi)^{1}\right)+\left.\frac{\partial f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{1}}\right|_{(\beta\varphi)^{1}}\left(\beta\varphi-(\beta\varphi)^{1}\right)$$

Misalkan $\left.\frac{\partial f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^{1}}\right|_{(\beta\varphi)^{1}}=Z\left((\beta\varphi)^{1}\right)$, maka:

$$
\begin{aligned}
y &= f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)+e \\
&= f\left(X\varphi, (\beta\varphi)^1\right)+\frac{\partial f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^1}\Bigg|_{(\beta\varphi)^1}\left(\beta\varphi-(\beta\varphi)^1\right)+e \\
&= f\left(X\varphi, (\beta\varphi)^1\right)+\frac{\partial f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^1}\Bigg|_{(\beta\varphi)^1}\beta-\frac{\partial f\left(X\varphi, \beta\varphi\right)}{\partial\left(\beta\varphi\right)^1}\Bigg|_{(\beta\varphi)^1}(\beta\varphi)^1+e \\
&= f\left(X\varphi, (\beta\varphi)^1\right)+Z\left((\beta\varphi)^1\right)\beta\varphi-Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)^1+e
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Dari persamaan (4.18) dapat mengkonstruksi model *pseudo linear*, yaitu:

$$
y-f\left(X\varphi, (\beta\varphi)^1\right)+Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)^1=Z\left((\beta\varphi)^1\right)\beta\varphi+e \tag{4.19}
$$

Misalkan $y-f\left(X\varphi, (\beta\varphi)^1\right)+Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)^1=y^*$ maka persamaan (4.19) Menjadi:

$$
\begin{aligned}
y^*(\beta\varphi)^1 &= Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)+e \\
e &= y^*(\beta\varphi)^1-Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Berdasarkan persamaan (4.20), kemudian dilakukan estimasi dengan *least squares* untuk taksiran $(\beta\varphi)^2$, yaitu:

$$
\begin{aligned}
S\left((\beta\varphi)^2\right) &= e^T e \\
&= \left(y^*(\beta\varphi)^1-Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)\right)^T\left(y^*(\beta\varphi)^1-Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)\right) \\
&= \left(\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^{*T}-(\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T\right)\left(y^*(\beta\varphi)^1-Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)\right) \\
&= \left((\beta\varphi)^1\right)^T y^{*T}y^*(\beta\varphi)^1-\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^{*T}Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)- \\
&\quad (\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^*(\beta\varphi)^1+(\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi) \\
&= \left((\beta\varphi)^1\right)^T y^{*T}y^*(\beta\varphi)^1-\left(\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^{*T}Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)\right)^T- \\
&\quad (\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^*(\beta\varphi)^1+(\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi) \\
&= \left((\beta\varphi)^1\right)^T y^{*T}y^*(\beta\varphi)^1-2(\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^*(\beta\varphi)^1+ \\
&\quad (\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)
\end{aligned}
$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama *S* terhadap $(\beta\varphi)^T$, yaitu:

$$\frac{\partial S(\beta\varphi)^2}{\partial(\beta\varphi)^T} = 0 - 2(\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^*(\beta\varphi)^1 + (\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)$$

$$= -2Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^*(\beta\varphi)^1 + (\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi) + \left((\beta\varphi)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)\right)^T$$

$$= -2\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^*(\beta\varphi)^1 + 2Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi) \tag{4.21}$$

Persamaan (4.21) disamadengankan nol, diperoleh:

$$-2\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^*(\beta\varphi)^1 + 2Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi) = 0$$

$$Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi) = \left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^*(\beta\varphi)^1$$

sehingga:

$$\begin{aligned}(\beta\varphi)^2 &= \left(Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T y^*(\beta\varphi)^1 \\ &= \left(Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T \left(y - f\left(X\varphi,(\beta\varphi)^1\right)\right. \\ &\quad \left. + Z\left((\beta\varphi)^1\right)\right)(\beta\varphi)^1 \\ &= \left(Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T Z\left((\beta\varphi)^1\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^1\right)^T \left(y - f\left(X\varphi,(\beta\varphi)^1\right)\right) \\ &\quad + Z\left((\beta\varphi)^1\right)(\beta\varphi)^1\end{aligned} \tag{4.22}$$

Bila proses di atas dilanjutkan sampai *n* maka diperoleh bentuk umum iterasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(\beta\varphi)^{n+1} = &\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T \\ &\left(y - f\left(X\varphi,(\beta\varphi)^n\right)\right) + Z\left((\beta\varphi)^n\right)(\beta\varphi)^n\end{aligned} \tag{4.23}$$

4.2 Menentukan Sifat-Sifat Estimasi Parameter pada Fungsi Produksi CES

Metode *Nonlinear Least Squares* merupakan suatu metode estimasi parameter yang digunakan untuk mengetahui hasil suatu estimasi, apakah telah memenuhi syarat-syarat suatu estimasi yang baik. Suatu estimasi dikatakan baik ketika memenuhi tiga sifat, yaitu: sifat tak bias (*unbias*), efisien, dan konsisten.

Untuk membuktikan sifat-sifat pada regresi nonlinier fungsi produksi CES ini, maka telah diketahui:

1. Bentuk persamaan regresi nonlinier yang tidak dikenai *outlier*

$$y = f\left(X,\beta\right)+e$$

dengan:

$$\begin{aligned} E[e] &= E\left[y - f\left(X,\beta\right)\right] \\ &= E[Y] - f\left(X,\beta\right) \\ &= f\left(X,\beta\right) - f\left(X,\beta\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Bentuk persamaan regresi nonlinier yang dikenai *outlier*

$$y = \left(f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right)+e$$

dengan:

$$\begin{aligned} E[e] &= E\left[y - f\left(X\varphi,\beta\varphi\right)\right] \\ &= E[y] - f\left(X\varphi,\beta\varphi\right) \\ &= f\left(X\varphi,\beta\varphi\right) - f\left(X\varphi,\beta\varphi\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Di bawah ini akan dipaparkan sifat-sifat estimasi pada regresi nonlinier:

4.2.1 Tak Bias (*Unbias*)

β yang digunakan untuk menentukan sifat estimasi dari parameter adalah β pada persamaan (4.13):

$$
\begin{aligned}
E\left[\hat{\beta}^{n+1}\right] &= E\left[\beta^n + \left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T \left(y - f\left(X,\beta^n\right)\right)\right] \\
&= E\left[\beta^n + \left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T e\right] \\
&= E\left[\beta^n\right] + \left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T E[e] \\
&= \beta^n
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

Persamaan (4.24) merupakan estimasi parameter β yang tidak dikenai *outlier* yang bersifat *unbias*, karena $E\left[\hat{\beta}^{n+1}\right] = \beta^n$, untuk estimasi parameter $\beta\varphi$ yang dikenai *outlier* akan dipaparkan sabagai berikut:

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right] &= E\left[\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T \right. \\
&\quad \left. \left(y - f\left(X\varphi,(\beta\varphi)^n\right)\right) + Z\left((\beta\varphi)^n\right)(\beta\varphi)^n\right] \\
&= \left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T E[e] + \\
&\quad Z\left((\beta\varphi)^n\right) E(\beta\varphi)^n \\
&= 0 + Z\left((\beta\varphi)^n\right)(\beta\varphi)^n \\
&= Z\left((\beta\varphi)^n\right)(\beta\varphi)^n
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

Persamaan (4.25) dapat diketahui bahwa $\beta\varphi$ dari model regresi nonlinier yang dikenai *outlier* bersifat *bias* karena $E\left[\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right] \neq (\beta\varphi)^n$ dan estimasi β yang tidak dikenai *outlier* bersifat *unbias* karena $E\left[\hat{\beta}^{n+1}\right] = \beta^n$.

4.2.2 *Efisien*

$\hat{\beta}_1$ dan $\hat{\beta}_2$ adalah 2 estimator tak bias, maka $\hat{\beta}_1$ dikatakan lebih efisien dari pada $\hat{\beta}_2$ jika:

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) < Var\left(\hat{\beta}_2\right)$$

$$R\left(\hat{\beta}^{n+1},\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)=\left(E\left[\left(\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}-\beta^{n+1}\right)\left(\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}-\beta^{n+1}\right)^{T}\right]\right)$$
$$=\left(Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}\right)\left(Var\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)^{-1} \quad (4.26)$$

Untuk mengetahui hasil dari persamaan $\left(Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}\right)\left(Var\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)^{-1}$, maka terlebih dahulu ditentukan $Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}$ dan $Var\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}$, sebagai berikut:

Untuk $Var\,\hat{\beta}$ yang tidak dikenai *outlier* adalah sebagai berikut:

$$Var\,\hat{\beta}^{n+1}=E\left[\left(\hat{\beta}^{n+1}-E\left[\hat{\beta}^{n+1}\right]\right)\left(\hat{\beta}^{n+1}-E\left[\hat{\beta}^{n+1}\right]\right)^{T}\right]$$
$$=E\left[\left(\hat{\beta}^{n+1}-\beta^{n}\right)\left(\hat{\beta}^{n+1}-\beta^{n}\right)^{T}\right]$$

terlebih dahulu dicari:

$$\left(\hat{\beta}^{n+1}-\beta^{n}\right)=\left(\beta^{n}+\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\left(y-f\left(X,\beta^{n}\right)\right)\right)-\beta^{n}$$
$$=\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}e\right)$$

sehingga:

$$Var\,\hat{\beta}^{n+1}=E\left[\left(\hat{\beta}^{n+1}-\beta^{n}\right)\left(\hat{\beta}^{n+1}-\beta^{n}\right)^{T}\right]$$
$$=Var\left[\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}e\right)\left(\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}e\right)^{T}\right)\right]$$
$$=\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\left(Var\left(e\right)\right)\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)^{T}$$
$$=\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\left(\sigma^{2}.I\right)\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)^{T}$$
$$=\sigma^{2}\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)^{T}$$
$$=\sigma^{2}DD^{T}$$

$$=\sigma^{2}\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)^{T} \quad (4.27)$$
$$=\sigma^{2}DD^{T}$$

Persamaan di atas disederhanakan menjadi $\sigma^2 DD^T$, dengan $D=\left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right)\right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T$. Setelah $Var\left(\widehat{\beta}^{n+1}\right)$ yang tidak dikenai *outlier* diketahui, maka akan ditentukan $Var\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}$ yang dikenai *outlier* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Var\left((\beta\varphi)^{(n+1)}\right) = Var\Bigg(&\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T \left(y-f\left(X\varphi,(\beta\varphi)^n\right)\right) \\ &+Z\left((\beta\varphi)^n\right)(\beta\varphi)^n\Bigg) \end{aligned}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right]-(\beta\varphi)^n &= \Bigg(\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T \left(y-f\left(X\varphi,(\beta\varphi)^n\right)\right) \\ &\quad +Z\left((\beta\varphi)^n\right)(\beta\varphi)^n-(\beta\varphi)^n\Bigg) \\ &= \Bigg(\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T \left(y-f\left(X\varphi,(\beta\varphi)^n\right)\right) \\ &\quad +Z\left((\beta\varphi)^n\right)\Bigg) \end{aligned}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} Var\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right) &= Var\Bigg(\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T \left(y-f\left(X\varphi,(\beta\varphi)^n\right)\right) \\ &\quad +Z\left((\beta\varphi)^n\right)\Bigg) \\ &= Var\left(\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T (e)+Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right) \\ &= \left(\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T +Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right) Var(e) \\ &\quad \left(\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T +Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^T \\ &= \left(\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T +Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)\left(\sigma^2 I\right) \\ &\quad \left(\left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T +Z\left((\beta\varphi)^n\right)\right)^T \end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \left(\left(Z\left((\beta\varphi)^n \right)^T Z\left((\beta\varphi)^n \right) \right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n \right)^T + Z\left((\beta\varphi)^n \right) \right)$$
$$\left(\left(Z\left((\beta\varphi)^n \right)^T Z\left((\beta\varphi)^n \right) \right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n \right)^T + Z\left((\beta\varphi)^n \right) \right)^T \quad (4.28)$$
$$= \sigma^2 CC^T$$

Persamaan (4.28) di atas disederhanakan sehingga menjadi $\sigma^2 CC^T$, dengan $\left(\left(Z\left((\beta\varphi)^n \right)^T Z\left((\beta\varphi)^n \right) \right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n \right)^T + Z\left((\beta\varphi)^n \right) \right) = C$.

Setelah diketahui $Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}$ dan $Var\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}$, maka subsitusikan persamaan (4.27) dan (4.28) kepersamaan (4.26):

$$R\left(\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}, \hat{\beta}^{n+1} \right) \geq \left(\sigma^2 DD^T \right) \left(\sigma^2 CC^T \right)^{-1}$$

Suatu korelasi dikatakan baik ketika $R \geq 1$, sehingga dari persamaan di atas, dapat diketahui bahwa:

$$R\left(\hat{\beta}^{n+1}, \left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1} \right) \geq \left(Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1} \right) \left(Var\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1} \right)^{-1}$$
$$1 \geq \frac{\left(Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1} \right)}{\left(Var\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1} \right)} \quad (4.29)$$
$$\left(Var\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1} \right) > \left(Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1} \right)$$

Dari persamaan (4.29) diketahui $Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}$ dari estimasi $\hat{\beta}$ yang tidak dikenai *outlier* lebih kecil dari pada $Var\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}$ dari estimasi $\hat{\beta}$ yang dikenai *outlier*, maka dapat disimpulkan $Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}$ dari estimasi $\hat{\beta}$ yang tidak dikenai *outlier* lebih efisien dibandingkan dengan $Var\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}$ dari estimasi $\hat{\beta}$ yang dikenai *outlier*.

4.2.3 Konsisten

Suatu estimasi disebut konsisten jika:

$$E\left[\left(\hat{\beta}-E\left[\hat{\beta}\right]\right)\right]^2 \to 0 \text{ jika } n \to \infty$$

Untuk $\hat{\beta}$ yang tidak dikenai *outlier* adalah:

$$E\left[\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-E\left[\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}\right]\right)\right]^2 = E\left[\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-E\left[\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}\right]\right)\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-E\left[\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}\right]\right)^T\right]$$

Diketahui $E\left[\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}\right]=\beta^n$, sehingga:

$$\begin{aligned}E\left[\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-E\left[\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}\right]\right)\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-E\left[\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}\right]\right)^T\right] &= E\left[\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-\beta^n\right)\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-\beta^n\right)^T\right]\\ &= \left(E\left[\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}\right]-E\left[\beta^n\right]\right)\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-\beta^n\right)^T\\ &= \left(\beta^n-\beta^n\right)\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-\beta^n\right)^T\\ &= 0\left(\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}-\beta^n\right)^T\\ &= 0\end{aligned}$$

Estimasi $\hat{\beta}^{n+1}$ merupakan estimasi yang konsisten, kerena dapat diketahui $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\hat{\beta}^{n+1}-\beta^n\right|<\varepsilon\right)=1$ dengan $\varepsilon = k\sigma$, dimana $\sigma=\sqrt{Var\left(\hat{\beta}\right)^{n+1}}$ dan $k^2=\dfrac{\varepsilon^2}{\sigma^2}$. Sehingga,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\left|\hat{\beta}^{n+1}-\beta^n\right|<\varepsilon\right) &= 1-\frac{1}{k^2}\\ &\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\end{aligned} \tag{4.30}$$

Ketika limit $n\to\infty$ pada kedua ruas persamaan (4.30), maka diperoleh $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\hat{\beta}^{n+1}-\beta^n\right|<\varepsilon\right) \geq \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$. Sehingga σ^2 konvergen ke 0, maka diperoleh $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\hat{\beta}^{n+1}-\beta^n\right|<\varepsilon\right) \geq \lim\limits_{n\to\infty} 1$, dan nilai probabilitasnya adalah

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|\hat{\beta}^{n+1}-\beta^{n}\right|<\varepsilon\right)=1$. Maka $\mathrm{P}Lim\hat{\beta}^{n+1}=\beta^{n}$, sehingga $\hat{\beta}^{n+1}$ merupakan penduga yang konsisten untuk β^{n}.

Untuk $\widehat{\beta}\varphi$ yang dikenai *outlier*, maka hasil estimasinya sebagai berikut:

diketahui:

$$E\left[\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right]=Z\left(\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)\left(\beta\varphi\right)^{n}$$

maka:

$$E\left[\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}-E\left[\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right]\right)\right]^{2}=E\left[\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}-E\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)\right)\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}-E\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)\right)^{T}\right]$$

$$\begin{aligned}&E\left[\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}-E\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)\right)\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}-E\left(\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)\right)^{T}\right]=\\&=E\left[\left(\widehat{\beta}\varphi-Z\left(\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)\left(\widehat{\beta}_{Out}-Z\left(\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)^{T}\right]\\&=E\left[\left(\widehat{\beta}\varphi\left(Z\left(\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)\left(\beta\varphi\right)^{n}-\left(Z\left(\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)^{T}\right)\right]\end{aligned} \tag{4.28}$$

Persamaan (4.28) menunjukkan bahwa estimasi parameter $\widehat{\beta}\varphi$ yang dikenai *outlier* merupakan penduga yang tidak konsisten karena $E\left[\left(\widehat{\beta}\varphi\left(Z\left(\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)\left(\beta\varphi\right)^{n}-\left(Z\left(\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)\left(\beta\varphi\right)^{n}\right)^{T}\right)\right]\neq 0$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\widehat{\beta}^{n+1}$ yang tidak dikenai *outlier* lebih konsisten dibandingkan dengan $\left(\widehat{\beta}\varphi\right)^{n+1}$ yang dikenai *outlier*.

4.2.4 *Mean Squares Error* (MSE)

Mean Squares Error (MSE) merupakan salah satu cara untuk mengetahui baik atau tidaknya suatu parameter. Untuk mencari MSE sebagai berikut:

$$MSE\left(\hat{\beta}\right)=Var\left(\hat{\beta}\right)+\left(Bias\left(\hat{\beta}\right)\right)^{2}$$

Di bawah ini akan diteliti nilai MSE dari parameter $\hat{\beta}^{n+1}$ yang tidak dikenai *outlier:*

$$\begin{aligned}MSE\left(\hat{\beta}^{n+1}\right)&=Var\left(\hat{\beta}^{n+1}\right)+\left(Bias\left(\hat{\beta}^{n+1}\right)\right)^{2}\\&=\left(\sigma^{2}\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)^{T}\right)+0\\&=\sigma^{2}\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)\left(\left(Z\left(\beta^{n}\right)^{T}Z\left(\beta^{n}\right)\right)^{-1}Z\left(\beta^{n}\right)^{T}\right)^{T}\end{aligned}$$

Untuk MSE dari parameter $\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}$ adalah:

$$\begin{aligned}MSE\left(\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)&=Var\left(\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)+\left(Bias\left(\left(\hat{\beta}\varphi\right)^{n+1}\right)\right)^{2}\\&=\left(\sigma^{2}\left(\left(Z\left((\beta\varphi)^{n}\right)^{T}Z\left((\beta\varphi)^{n}\right)\right)^{-1}Z\left((\beta\varphi)^{n}\right)^{T}+Z\left((\beta\varphi)^{n}\right)\right)\right.\\&\quad\left.\left(\left(Z\left((\beta\varphi)^{n}\right)^{T}Z\left((\beta\varphi)^{n}\right)\right)^{-1}Z\left((\beta\varphi)^{n}\right)^{T}+Z\left((\beta\varphi)^{n}\right)\right)^{T}\right)+\\&\quad Z\left((\beta\varphi)^{n}\right)(\beta\varphi)^{n}\end{aligned}$$

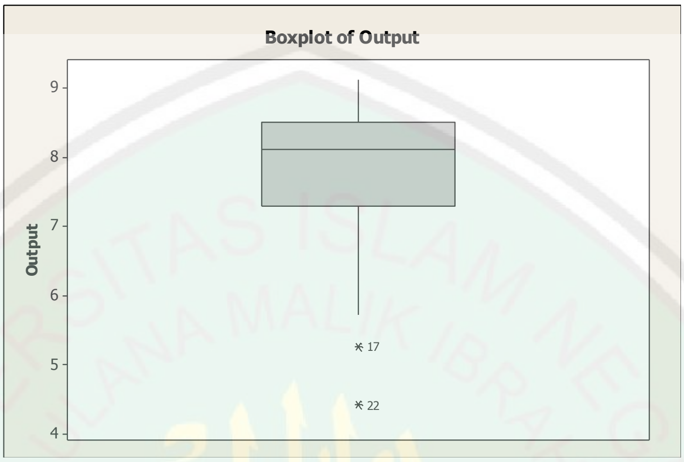
4.3 Aplikasi Fungsi Produksi CES pada Data Pengaruh *Labor* dan *Capital* terhadap *Output* Produksi

Metode NLTS merupakan salah satu metode *robust* yang kekar terhadap keberadaan *outlier*, metode ini digunakan untuk menangani *outlier* pada model regresi nonlinier intrinsik. Untuk mendapatkan nilai estimasi parameter dengan metode ini langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

4.3.1 Deteksi *Outlier*

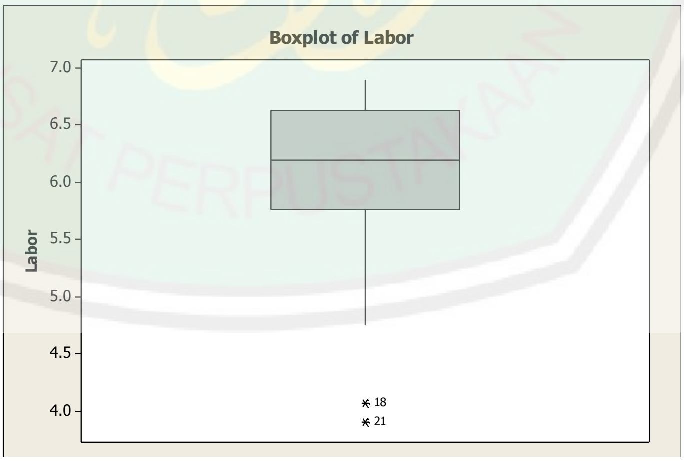
a. *Boxplot*

Deteksi *outlier* dengan menggunakan grafis yang dianggap bisa memaparkan dengan jelas keberadaan *outlier* adalah dengan menggunakan *boxplot*. *Boxplot* memaparkan dengan jelas keberadaan *outlier*, data yang *outlier* dilambangkan dengan *. Di bawah ini adalah hasil dari deteksi *outlier* dengan menggunakan program MINITAB 14 sebagai berikut:



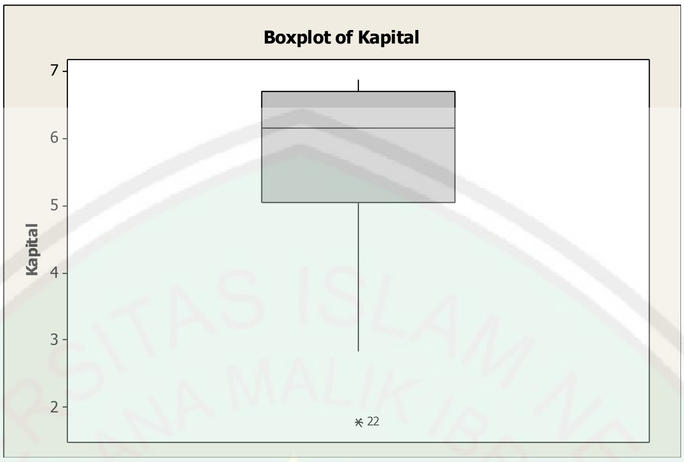
Gambar 4.1 *Boxplot* Variabel *Output* (Y)

Pada Gambar 4.1 diketahui, terdapat *outlier* pada variabel *output* yaitu pada data ke-17 dan data ke-22. Nilai statistik yang ada pada badan *boxplot* untuk variabel *output* adalah nilai Q_1 = 7.29752, nilai median = 8.11225 dan nilai Q_3 = 8.50375. Sebaran data pada variabel *output* adalah simetris.



Gambar 4.2 *Boxplot* Variabel *Labor* (X2)

Pada Gambar 4.2 diketahui, terdapat *outlier* pada variabel *labor* yaitu pada data ke-18 dan data ke-21. Nilai statistik yang ada pada badan *boxplot* untuk variabel *labor* adalah nilai Q_1 = 5.76435, nilai median = 6.19645 dan nilai Q_3 = 6.62073. Sebaran data pada variabel *labor* adalah simetris.



Gambar 4.3 *Boxplot* Variabel *Capital* (X3)

Dari Gambar 4.3 diketahui, terdapat *outlier* pada variabel *output* yaitu pada data ke-22. Nilai statistik yang ada pada badan *boxplot* untuk variabel *capital* adalah nilai Q_1 = 7.29752, nilai median = 8.11225 dan nilai Q_3 = 8.50375. Sebaran data pada variabel *capital* adalah simetris.

Dari ketiga *boxplot* di atas diketahui pada analisis data pengaruh *labor* dan *capital* terhadap *output* ditemukan 4 *outlier*.

b. *Leverage Value*

Leverage Value merupakan metode yang digunakan untuk mendeteksi *outlier* terhadap variabel bebas X, untuk mendeteksi *outlier* dengan metode ini menggunakan persamaan (2.13). Jika nilai h_{ii} lebih besar dari $2\bar{h}$ maka pengamatan ke-*i* merupakan *outlier*, diketahui p = 2 dan n = 30. Adapun nilai dari $2\bar{h}$ adalah sebagai berikut:

$$2\bar{h} = \frac{(2 * p - 1)}{n} = \frac{(4-1)}{30} = \frac{3}{30} = 0.1$$

Tabel 4.1 Hasil Deteksi *Outlier* dengan Melihat Nilai *Laverage Value*

Data Ke-	h_{ii}		Data Ke-	h_{ii}	
1	0.068636		16	0.052903	
2	0.051313		17	0.199261	*Outlier*
3	0.09565		18	0.265021	*Outlier*
4	0.069586		19	0.057724	
5	0.058746		20	0.056797	
6	0.038944		21	0.358402	*Outlier*
7	0.055897		22	0.343567	*Outlier*
8	0.089858		23	0.062539	
9	0.089231		24	0.060998	
10	0.092974		25	0.140595	*Outlier*
11	0.065709		26	0.040355	
12	0.185955	*Outlier*	27	0.037358	
13	0.059557		28	0.070602	
14	0.033362		29	0.039521	
15	0.058367		30	0.100573	*Outlier*

Dari Tabel 4.1, dapat diketahui bahwa terdapat data yang memiliki nilai h_{ii} lebih besar dari 0.1, sehingga data tersebut adalah data *outlier*, yaitu pada data ke-12, ke-17, ke-18, ke-21, ke-22, ke-25 dan ke-30.

c. *The Difference in Fit Statistic* (DfFITs)

Setelah mengidentifikasi *outlier* dengan *boxplot* dan *Laverage Value*, langkah selanjutnya untuk mengetahui keberadaan *outlier* pada data digunakan metode DfFITs. Data yang merupakan *outlier* adalah data yang memiliki nilai mutlak dari DfFITs lebih besar dari $2\sqrt{\frac{p}{n}}$. Dari data ini nilai dari $2\sqrt{\frac{p}{n}}$ adalah

$$2\sqrt{\frac{2}{30}} = 0.51639$$

Tabel 4.2 Hasil Deteksi *Outlier* dengan Melihat Nilai DfFITs

Data ke-	DfFITs		Data Ke-	DfFITs	
1	0.22395		16	0.0059	
2	0.11432		17	0.48857	
3	0.04493		18	0.08732	

Lanjutan 4.2

4	0.34334		19	0.23874	
5	0.20812		20	0.16601	
6	0.22255		21	0.41505	
7	0.15235		22	1.04445	*Outlier*
8	0.30862		23	0.05826	
9	0.39197		24	0.16727	
10	0.61359	*Outlier*	25	0.63159	*Outlier*
11	0.34948		26	0.17804	
12	0.35215		27	0.22769	
13	0.1056		28	0.43055	
14	0.29561		29	0.24232	
15	0.23196		30	0.17005	

Dari Tabel 4.2, terdapat data yang memiliki nilai DfFITs lebih besar dari 0.51639. Data tersebut terdapat pada data ke-10, ke-22 dan 25, sehingga ke-3 data tersebut merupakan data *outlier*.

Setelah mengetahui keberadaan data *outlier*, terlihat *laverage value* memiliki deteksi *outlier* lebih teliti atau peka terhadap *outlier* dibandingkan dengan metode grafis *boxplot* dan DfFITs. Hal itu terlihat dari jumlah hasil deteksi *outlier*, yaitu pada metode grafis *boxplot* ditemukan 4 data *outlier* dan pada DfFITs mampu mendeteksi *outlier* sebanyak 3 *outlier* sedangkan *Laverage Value* mampu mendeteksi 7 data *outlier*.

4.3.2 Menghitung Nilai *h (Trimming Constan)*

Untuk menduga parameter dengan metode NLTS, maka digunakan sejumlah h dari pengamatan yang memiliki kuadrat sisaan. Pada penelitan ini jumlah data adalah 30 (genap) sehingga untuk mengetahui nilai h digunakan rumus $h = \frac{n+p+2}{2}$. Sehingga nilai h yang digunakan pada penelitian ini adalah:

$$h = \frac{n+p+2}{2}$$
$$= \frac{30+2+2}{2}$$
$$= 17$$

Nilai h yang digunakan untuk dilakukan iterasi dan digunakan sebagai model fungsi produksi CES adalah data yang memiliki nilai residu terkecil sampai nilai residu terkecil ke-17.

4.3.3 Membuat Urutan Data ke-*i* untuk e_i^2

Diketahui nilai h pada penelitian ini adalah 17, setelah diketahui nilai residu dari data pengamatan maka nilai residunya diurutkan dari data terkecil sampai ke urutan data terkecil ke-h. Di bawah ini adalah statistik peringkatnya:

0.00001623 < 0.00042679 < 0.00047398 < 0.00130834 < 0.00452041 < 0.00537348 < 0.00624116 < 0.00632900 < 0.01002001 < 0.01093321 < 0.01165752 < 0.01189561 < 0.01697366 < 0.01748504 < 0.01931822 < 0.02035616 < 0.02173678 < 0.02325961 < 0.02326571 < 0.03083009 < 0.03361172 < 0.03480799 < 0.03570664 < 0.03701699 < 0.03799615 < 0.04179531 < 0.05264822 < 0.05697721 < 0.06128843 < 0.08021810.

Dari nilai residu di atas, nilai residu yang digunakan untuk estimasi parameter adalah nilai residu yang terkecil sampai dengan nilai residu terkecil ke-h (nilai residu ke-17) sebagai berikut:

0.00001623 < 0.00042679 < 0.00047398 < 0.00130834 < 0.00452041 < 0.00537348 < 0.00624116 < 0.00632900 < 0.01002001 < 0.01093321 < 0.01165752 < 0.01189561 < 0.01697366 < 0.01748504 < 0.01931822 < 0.02035616 < 0.02173678.

4.3.4 Mengurutkan $\left(X_{i,j}, Y_i\right)$ Berdasarkan $e_{[i]}^2$

Setelah membuat urutan data untuk nilai residu, selanjutnya akan diurutkan nilai $\left(X_{i,j}, Y_i\right)$ berdasarkan urutan nilai residu. Pada penelitian ini jumlah pengamatan sebanyak 30, namun dipotong pada data ke-17 dari hasil mengurutkan nilai residu, sehingga urutan datanya menjadi seperti di bawah ini:

Tabel 4.3 Data Hasil Pemotongan Setelah Dideteksi Keberadaan *Outlier*

No	Data ke	*Labor*	Kapital	*Output*
1	16	6.4983	4.8598	7.2432
2	18	4.0775	6.809	7.722
3	3	6.7105	6.6477	8.9496
4	23	6.1800	6.7286	8.7229
5	13	6.6931	5.687	8.1641
6	21	3.9120	5.0814	5.9833
7	2	5.5530	5.5175	7.4104
8	30	5.0876	6.8395	8.1922
9	7	6.5191	6.1137	8.4877
10	24	6.5250	6.2558	8.6233
11	20	6.6307	4.9767	7.3157
12	12	6.8886	3.0445	5.7132
13	1	5.4293	6.6871	8.1879
14	5	6.2046	6.6307	8.5519
15	26	6.0868	6.2046	8.0981
16	17	6.4473	2.8332	5.2521
17	15	5.4424	6.3026	8.1264

4.3.5 Estimasi Parameter pada Model Fungsi Produksi CES dengan Menggunakan Iterasi *Gauss Newton*

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data yang diadobsi dari buku Ekonometrika Teori dan Praktik Eksperimen dengan MATLAB (Aziz, 2010). Data ini akan digunakan untuk model fungsi produksi CES, dengan data x dan y dibentuk matriks LKy dan memberikan nilai β awal. Kemudian dilakukan estimasi terhadap parameter β pada model fungsi produksi CES dengan menggunakan metode *Nonlinear Least Squares*, fungsi produksi CES diiterasi sehingga didapatkan iterasi yang konvergen. Nilai tiap-tiap β yang digunakan adalah beta hasil iterasi yang konvergen. Di bawah ini akan dipaparkan hasil estimasi parameter sebagai berikut:

a. Estimasi Parameter pada Data Sebelum Data *Outlier* Dibuang

Hasil estimasi dari parameter $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ dan S dari data fungsi produksi CES dengan menggunakan iterasi *Gauss Newton* dengan nilai awal parameter $\beta_1 = 0.8$ $\beta_2 = 0.2$ $\beta_3 = 0.7$ dan $\beta_4 = 0.8$ dan jumlah iterasi untuk mencapai konvergen S sebanyak 250 iterasi. Namun diperoleh nilai optimum (konvergen) pada iterasi ke-187, sehingga diperoleh nilai tiap-tiap β dari hasil iterasi dijelaskan pada tabel di bawah ini:

Tabel 4.4 Hasil Iterasi *Gauss Newton* untuk Fungsi Produksi CES dengan Banyak Data 30 Data

n	β_1	β_2	β_3	β_4	S
0	0.8	0.2	0.7	0.8	
15	1.372418098258	0.389438365689	0.309978140986	0.986867728586	0.507279846408950
45	1.372418103552	0.389438366049	0.309978124938	0.986867726493	0.507279846408943
80	1.372418102887	0.389438366217	0.309978123956	0.986867726766	0.507279846408949
95	1.372418092486	0.389438365409	0.309978156797	0.986867730874	0.507279846408949
100	1.372418091061	0.389438365309	0.309978161848	0.986867731434	0.507279846408947
135	1.372418095856	0.389438365647	0.309978147832	0.986867729536	0.507279846408947
150	1.372418104765	0.389438366273	0.309978119162	0.986867726020	0.507279846408944
187	1.372418099933	0.389438365935	0.309978135216	0.986867727926	0.507279846408947

Dengan demikian, model fungsi produksi CES yang dianggap konvergen pada data yang sebelum *outlier* dipotong adalah sebagai berikut:

$$Q_t = 1.372418099933\left[0.389438365935 L_t^{-0.309978135216} + (1-0.389438365935L)K_t^{-0.309978135216}\right]^{\frac{0.986867727926}{0.389438365935}} + e_t$$

b. Estimasi Parameter pada Data Setelah Data *Outlier* Dibuang

Setelah mendapatkan data hasil potongan dari nilai residu, maka data tersebut akan kembali diiterasikan untuk mendapatkan nilai estimasi dari β yang lebih baik. Data pada tabel 4.3 di atas akan dilakukan iterasi kembali, dengan menggunakan nilai $\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.2, \beta_3 = 0.7$ dan $\beta_4 = 0.8$, dengan jumlah iterasi untuk konvergen S sebanyak 250 iterasi. Namun iterasi sudah konvergen pada iterasi ke-38, sehingga diperoleh nilai tiap-tiap β dan S adalah sebagai berikut:

Tabel 4.5 Hasil Iterasi *Gauss Newton* untuk Fungsi Produksi CES dengan Banyak Data 17 Data

n	β_1	β_2	β_3	β_4	S
0	0.8	0.2	0.7	0.8	
10	1.157904775113298	0.374055057428141	0.718576020119541	1.078809273894091	0.134586412937
15	1.157904777474569	0.374055057691831	0.718576008382521	1.078809272811976	0.134586412937
28	1.157904791271901	0.374055058488787	0.718575956850703	1.078809266404415	0.134586412937
38	1.157904777292774	0.374055057744644	0.718576008036560	1.078809272901171	0.134586412937

Dari tabel 4.5 ini diketahui perubahan nilai tiap-tiap β dan S terus mengalami perubahan, sehingga pada iterasi ke-38 dinyatakan sudah konvergen dengan β sebagai berikut:

$\beta_1 = 1.157904777292774$ $\beta_3 = 0.718576008036560$

$\beta_2 = 0.374055057744644$ $\beta_4 = 1.078809272901171$

Dengan demikian diperoleh model fungsi produksi CES yang dianggap konvergen dengan menggunakan iterasi *Gauss Newton* adalah sebagai berikut:

$$Q_t = 1.1579047772927774\left[0.374055057744644\ L_t^{-0.718576008036560} + (1-0.374055057744644\ )K_t^{-0.718576008036560}\right]^{\frac{1.078809272901171}{0.718576008036560}} + e_t$$

4.4 Pendusta Agama dalam Konteks Model Regresi

Regresi nonlinier merupakan bentuk hubungan antara satu atau lebih variabel bebas dan variabel terikat, dimana bentuk hubungannya tidak linier. Hal ini terjadi karena hubungan atau persamaan tersebut terdapat variabel bebas yang keluar atau tidak mengikuti garis linier, sehingga diperlukan suatu perlakuan khusus agar persamaan tersebut dapat menjadi linier dengan melakukan berbagai pendekatan.

Dalam matematika suatu persamaan dikategorikan sebagai bentuk regresi nonlinier jika variabel-variabelnya nonlinier, sehingga persamaan tersebut dapat dilinierkan dengan mentransformasikan. Namun ketika nonlinier dalam variabel dan parameternya maka persamaan tersebut merupakan bentuk regresi nonlinier yang intrinsik dan tidak dapat dilinierkan melainkan menggunakan iterasi.

Dari penjelasan di atas, diasumsikan persamaan liniernya adalah bentuk hubungan antara orang yang beriman dan bertakwa kepada Allah Swt. dangan ciri-ciri orang yang beriman dan bertakwa. Orang-orang yang beriman dan bertakwa akan taat pada perintah Allah dan menjauhi semua larangan-Nya. Ciri-ciri orang yang bertakwa telah dijelaskan dalam surat al-Baqarah/2:3. Orang-orang yang beriman diasumsikan sebagai variabel terikat, orang yang taat terhadap perintah dan menjauhi larangan diasumsikan sebagai variabel bebas dan ciri-ciri orang yang beriman dan bertakwa diasumsikan sebagai garis regresi, sedangkan persamaan nonlinier diasumsikan sebagai bentuk hubungan antara variabel terikat yaitu orang yang mendusakan agama dan variabel bebas yaitu sifat-sifat orang yang mendustakan agama.

Dalam surat al-Baqarah ayat 3-4, menjelaskan ciri-ciri orang yang bertakwa, yaitu: mereka yang beriman kepada yang ghaib, mereka yang mendirikan shalat, menafkahkan sebagian rizki, mereka yang beriman kepada kitab (al-Quran) yang telah diturunkan kepadamu dan kitab-kitab yang telah diturunkan sebelummu dan mereka yakin akan adanya (kehidupan) akhirat.

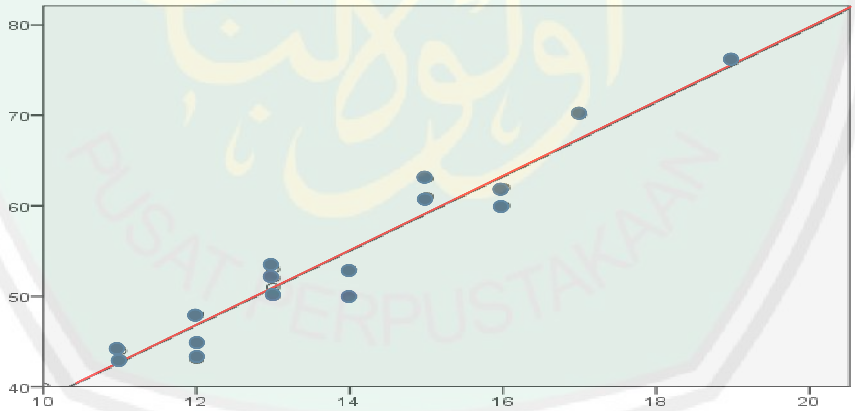
Surat al-Ma'un menjelaskan ciri-ciri orang yang mendustakan agama adalah orang yang menghardik anak yatim, orang yang tidak menganjurkan memberi makan orang miskin, orang yang shalat, (yaitu) orang-orang yang lalai dari shalatnya, orang yang berbuat riya dan enggan (menolong dengan) barang berguna.

Keempat ciri-ciri di atas diasumsikan sebagai suatu variabel bebas dan orang yang mendustakan agama diasumsikan variabel terikat, dan bentuk hubungan antara orang yang mendustakan agama dengan ciri-ciri orang yang mendustakan agama sebagai suatu persamaan regresi nonlinier.

Ciri-ciri di atas terdapat salah satu ciri-ciri dari orang yang bertakwa yaitu orang yang shalat. Namun meskipun orang yang shalat merupakan salah satu ciri-ciri dari orang yang bertakwa, tapi dijelaskan lagi dalam ayat selanjutnya orang yang shalat namun mereka lalai dengan shalatnya. Selain orang yang shalat ayat di atas juga menyebutkan orang yang berbuat riya, orang yang memiliki sifat riya ini mereka juga melakukan kebaikan bahkan melaksanakan perintah Allah. Namun apa yang mereka lakukan itu bukan karena kesadaran dari diri sendiri dan bukan karena Allah Swt. melainkan hanya untuk mendapat simpati dan pujian dari manusia lainnya.

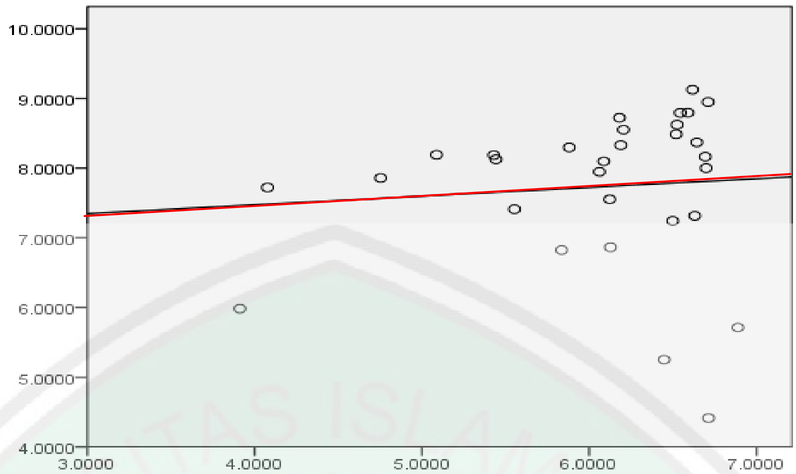
Dari penjelasan di atas diketahui ada satu variabel bebas dari regresi linier namun tergolong dalam persamaan regresi nonlinier, hal ini terjadi karena variabel shalat dalam ayat di atas tidak memenuhi kriteria shalat yang baik dan benar. Sehingga hal tersebut dianggap sebagai bentuk suatu variabel yang keluar dari garis regresi yang menyebabkan model tersebut menjadi suatu model regresi nonlinier.

Setelah mengetahui bagaimana bentuk hubungan antara orang yang mendustakan agama dengan keimanan, hal tersebut dapat digambarkan sebagaimana grafik regresi dari suatu hubungan atau persamaan sebagaimana berikut:



Gambar 4.4 Contoh Grafik Regresi Linier

Dari Gambar 4.4 diketahui titik-titik biru merupakan data observasi, sementara garis lurus yang berwarna merah merupakan garis regresi dari sekumpulan data tersebut. Grafik di atas jika diinterpretasika pada surat al-Baqarah ayat 3-4, titik-titik yang berwarna biru adalah manusia yang bertakwa sedangkan garis merah menggambarkan ciri-ciri orang yang beriman. Surat al-Ma’un digambarkan dengan grafik di bawah ini:



Gambar 4.5 Contoh Grafik Regresi Nonlinier

Gambar 4.5 di atas, dapat diintegrasikan terhadap maksud dari surat al-Ma'un yaitu adanya manusia-manusia yang kurang sempurna dalam keimanan bahkan enggan beriman. Data observasi (bentuk o) dimisalkan sebagai manusia sedangkan garis berwarna merah dimisalkan sebagai ciri-ciri orang yang beriman. Pada Gambar 4.5 ini terdapat data observasi yang tidak mengikuti garis bahkan cenderung menjauh dari garis regresi dimana data yang cenderung menjauhi garis merah ini dimisalkan sebagai orang-orang yang mendustakan agama.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab IV diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Untuk mendeteksi keberadaan *outlier* pada fungsi produksi CES adalah dengan melihat nilai *leverage value*, DfFITs dan *boxplot*. Kemudian dilakukan estimasi parameter dengan menggunakan metode NLTS, yang menghasilkan estimasi parameter sebagai berikut:

   a. Estimasi parameter pada model CES yang tidak dikenai *outlier*

   $$\beta^{n+1} = \beta^n + \left(Z\left(\beta^n\right)^T Z\left(\beta^n\right) \right)^{-1} Z\left(\beta^n\right)^T \left(y - f\left(X, \beta^n\right) \right)$$

   b. Estimasi parameter pada model CES yang dikenai *outlier*

   $$(\beta\varphi)^{n+1} = \left(Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T Z\left((\beta\varphi)^n\right) \right)^{-1} Z\left((\beta\varphi)^n\right)^T \left(y - f\left(X\varphi, (\beta\varphi)^n\right) \right. \\ \left. + Z\left((\beta\varphi)^n\right)(\beta\varphi)^n \right)$$

2. Sifat-sifat estimasi parameter pada model CES yang tidak dikenai *outlier* lebih baik dibandingkan dengan sifat-sifat estimasi parameter yang dikenai *outlier*. Hal ini terbukti bahwa pada model yang tidak memuat *outlier* sifat-sifat estimasi yaitu *unbias*, konsisten dan efisien terpenuhi, sedangkan pada model yang dikenai *outlier* sifat-sifat estimasi tidak terpenuhi.

5.2 Saran

Pada penelitian ini, model yang digunakan adalah fungsi produksi CES yang dikenai *outlier* dan yang tidak dikenai *outlier* dan untuk mengestimasi parameter pada fungsi produksi ini digunakan metode NLTS. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian serupa, maka disarankan menggunakan model nonlinier intrinsik yang lainnya seperti fungsi produksi *Leontief*.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Adiningsih, S. 2009. *Statistik Edisi Pertama.* Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Aziz, A. 2010. *Ekonometrika Teori & Praktik Eksperimen dengan MATLAB.* Malang: UIN Maliki Press.

Azizah, A.N. 2013. *Analisis Sifat Penduga Least Trimmed Squares* (LTS) *pada Regresi Linier Berganda yang Mengandung Outlier dengan Berbagai Ukuran Contoh*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Brawijaya Malang.

Berry, W.O dan Stanley F. 1985. *Multiple Regression in Practice*. London: Sage Publications.

Boediono. 2004. *Teori dan Aplikasi Statistika dan Probabilitas.* Bandung: PT. Remaja Rosdakarya

Bowerman, B.L dan O'Connel, R.T. 1990. *Linier Statistical Models: an Applied Approach*. Second Ed. Boston: PWS-KENT Publishing Company.

Chen, C. 2002. *Robust Regression and Outlier Detection with Robustreg Procedur,* SAS *Institute Inc*. http://www.sas.com/proceedings/sugi27/p265-27.pdf (diunduh pada tanggal 5 April 2014).

Cizek, P. 2002. *Nonlinear Least Trimmed Squares*. Humboldt University. http://www.statspol.cz/robust/2002_cizek.pdf (diunduh pada tanggal 25 September 2014)

Draper, N.R. dan Smith H. 1992. *Analisis Regresi Terapan*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Ghoffar, M.A. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 8*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i

Herawati, E. 2008. *Analisis Pengaruh Factor Produksi Modal, Bahan Baku, Tenaga Kerja dan Mesin Terhadap Produksi Gycerine pada PT.Flora Sawit Chemindo Medan*. Tesis tidak dipublikasikan. Universitas Sumatera Utara.

Kurniawati, L.D. 2011. *Kekekaran Regresi Linier Ganda dengan Estimasi MM (Method of Moment) dalam Mengatasi Outlier*. Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Kutner, C.H, J. Neter, and Nachtsteim. 2004. *Applied Linier Regression Models*. New York: Mc Graw Hill.

Machmud, S. 2005. *Mutiara Juz 'Amma.* Bandung: Penerbit Mizan

Montgomery, C.D dan E.A Peck. 1992. *Introduction to Linear Regression Analysis*. New York: John Wiley and sons, inc.

Murray dan Larry. 1999. *Statistik Edisi ke-3*. Jakarta: Erlangga

Permatasari, D. 2009. *Pemodelan Kurva Imbal Hasil Obligasi Korporasi Rating AA dan A dengan Nelson Siegel Svensson dan Cubic Spline Smoothing*. Skripsi tidak dipublikasikan. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.

Purniawati, F.H. 2009. *Aplikasi Fungsi Produksi Cobb-Douglas dalam Mengestimasi Pendapatan Pajak Hotel Kota Surakarta Berdasarkan Jumlah Tenaga Kerja dan Pengunjung Hotel*. Skripsi tidak dipublikasikan. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Surakarta.

Rosyadi, D. 2008. *Tafsir Al-Qurthubbi*. Jakarta: Penerbit Azzam

Sembiring, R.K. 1995. *Analisis Regresi*. Bandung: ITB

Shihab, M.Q. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati

Soemartini. 2007. *Pencilaan (Outlier)*. Makalah Statistika FMIPA Universitas Padjajaran, Bandung. Tersedia: http://id.scribd.com/doc/92860263/OUTLIER-OUTLIER (diunduh pada tanggal 31 Maret 2014).

Soepeno, B. 2002. *Statistik Terapan dalam Penelitian Ilmu-ilmu Sosial*. Jakarta: Rineka Cipta.

Subagyo, P. 2010. *Statistika Terapan Edisi Kedua*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Sudjana. 2002. *Metode Statistika*. Bandung: Penerbit Transito

Sundyni. R.C. 2014. *Sifat Penduga Nonlinear Least Square* (NLS) *dan Nonlinear Least Trimmed Square* (NLTS) *Akibat Pertambahan Banyaknya Outlier dan Ukuran Contoh*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Brawijaya Malang.

Turmudi dan Harini, S. 2008. *Metode Statistika Pendekatan Teoritis dan Aplikatif*. Malang: UIN-Malang Press.

Wibisono, H. 2011. *Analisis Efisiensi Usaha Tani Kubis*. Skripsi tidak dipublikasikan. Semarang: Universitas Diponegoro.

LAMPIRAN 1

Data pengaruh *Labor* (Tenaga Kerja) dan *Capital* (Modal) terhadap *Output* suatu Perusahaan

No	*Labor*	*Capital*	*Output*
1	5.4293	6.6871	8.1879
2	5.5530	5.5175	7.4104
3	6.7105	6.6477	8.9496
4	6.6425	6.2364	8.3695
5	6.2046	6.6307	8.5519
6	6.1883	6.0521	8.3299
7	6.5191	6.1137	8.4877
8	6.6174	6.7056	9.1260
9	6.5889	6.7393	8.7961
10	6.5439	6.8648	8.7941
11	6.1269	4.4308	6.8657
12	6.8886	3.0445	5.7132
13	6.6931	5.6870	8.1641
14	6.0615	5.6240	7.9482
15	5.4424	6.3026	8.1264
16	6.4983	4.8598	7.2432
17	6.4473	2.8332	5.2521
18	4.0775	6.8090	7.7220
19	6.6983	5.4072	8.0002
20	6.6307	4.9767	7.3157
21	3.9120	5.0814	5.9833
22	6.7130	1.7918	4.4132
23	6.1800	6.7286	8.7229
24	6.5250	6.2558	8.6233
25	4.7536	6.8352	7.8589
26	6.0868	6.2046	8.0981
27	6.1225	5.2204	7.5533
28	5.8348	4.5218	6.8249
29	5.8805	6.1841	8.2967
30	5.0876	6.8395	8.1922

LAMPIRAN 2

Program Estimasi Fungsi Produksi CES dengan menggunakan iterasi *Gauss Newton* sebelum dilakukan deteksi terhadap *outlier*

```
clc; tic; format long;
LKy=[5.4293 6.6871 8.1879
     5.5530 5.5175 7.4104
     6.7105 6.6477 8.9496
     6.6425 6.2364 8.3695
     6.2046 6.6307 8.5519
     6.1883 6.0521 8.3299
     6.5191 6.1137 8.4877
     6.6174 6.7056 9.1260
     6.5889 6.7393 8.7961
     6.5439 6.8648 8.7941
     6.1269 4.4308 6.8657
     6.8886 3.0445 5.7132
     6.6931 5.6870 8.1641
     6.0615 5.6240 7.9482
     5.4424 6.3026 8.1264
     6.4983 4.8598 7.2432
     6.4473 2.8332 5.2521
     4.0775 6.8090 7.7220
     6.6983 5.4072 8.0002
     6.6307 4.9767 7.3157
     3.9120 5.0814 5.9833
     6.7130 1.7918 4.4132
     6.1800 6.7286 8.7229
     6.5250 6.2558 8.6233
     4.7536 6.8352 7.8589
     6.0868 6.2046 8.0981
     6.1225 5.2204 7.5533
     5.8348 4.5218 6.8249
     5.8805 6.1841 8.2967
     5.0876 6.8395 8.1922];


L=LKy(:,1); K=LKy(:,2); y=LKy(:,3); x=[L K];
b=[0.8;0.2;0.7;0.8];
k=length(b)
T=length(x);
e=eye(k);
f=f2(b,x);
S=(y-f)'*(y-f);
repkon = 250;

for i = 1:repkon;
    z=numgradf2(b,x);
    zS=numgradS2(b,x,y);
    step=-0.5*inv(z'*z)*zS;
    bnew=b+step;
    fnew=f2(bnew,x);
    Snew=(y-fnew)'*(y-fnew);

      if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(S-Snew) <= 1e-9
      disp('S sudah konvergen dengan jumlah iterasinya adalah: ');
```

```
        disp(i);
        disp(' ');
        break;
    end
    iterasi=i
    b=bnew
    f=f2(b,x);
    S=(y-f)'*(y-f)

    if mod(i,repkon/10)==0
        disp('Hasil iterasi untuk i b1 b2 b3 b4 S :'); [i b' Snew]
    end;

    if i==repkon
        disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah!');
        disp('atau ubahlah initial values untuk b');
        disp(' ');
    end;
end;
bnls=bnew;
Snls=S;
disp('Hasil Nonlinier Least squares untuk fungsi CES dg iterasi
Gauss Newton adalah:');
disp('b1 b2 b3 b4 S');[bnls' Snls]
waktu_hitung=toc
```

Program Estimasi Fungsi Produksi CES dengan menggunakan iterasi *Gauss Newton* setelah dilakukan pemotongan terhadap data yang telah dideteksi keberadaan *outlier*

```
clc; tic; format long;
LKy=[6.4983 4.8598  7.2432
     4.0775  6.809   7.722
     6.7105  6.6477  8.9496
     6.1800  6.7286  8.7229
     6.6931  5.687   8.1641
     3.9120  5.0814  5.9833
     5.5530  5.5175  7.4104
     5.0876  6.8395  8.1922
     6.5191  6.1137  8.4877
     6.5250  6.2558  8.6233
     6.6307  4.9767  7.3157
     6.8886  3.0445  5.7132
     5.4293  6.6871  8.1879
     6.2046  6.6307  8.5519
     6.0868  6.2046  8.0981
     6.4473  2.8332  5.2521
     5.4424  6.3026  8.1264];


L=LKy(:,1); K=LKy(:,2); y=LKy(:,3); x=[L K];
b=[0.8;0.2;0.7;0.8];
k=length(b)
T=length(x);
e=eye(k);
```

```
f=f2(b,x);
S=(y-f)'*(y-f);
repkon = 250;

for i = 1:repkon;
    z=numgradf2(b,x);
    zS=numgradS2(b,x,y);
    step=-0.5*inv(z'*z)*zS;
    bnew=b+step;
    fnew=f2(bnew,x);
    Snew=(y-fnew)'*(y-fnew);

    if norm(bnew-b) <= 1e-9 & abs(S-Snew) <= 1e-9
        disp('S sudah konvergen dengan jumlah iterasinya adalah:
');
        disp(i);
        disp(' ');
        break;
    end

    iterasi=i
    b=bnew
    f=f2(b,x);
    S=(y-f)'*(y-f)


    if mod(i,repkon/10)==0
        disp('Hasil iterasi untuk i b1 b2 b3 b4 S :'); [i b' Snew]
    end;

    if i==repkon
        disp('S belum konvergen, banyak iterasi perlu ditambah!');
        disp('atau ubahlah initial values untuk b');
        disp(' ');
    end;
end;
bnls=bnew;
Snls=S;
disp('Hasil Nonlinier Least squares untuk fungsi CES dg iterasi
Gauss Newton adalah:');
disp('b1 b2 b3 b4 S');[bnls' Snls]
waktu_hitung=toc
```

```
function f=f2(b,x)
L=x(:,1);
K=x(:,2);
b1=b(1,:);
b2=b(2,:);
b3=b(3,:);
b4=b(4,:);
f=b1*(b2*L.^b3+(1-b2)*K.^b3).^(b4/b3);
```

```
function z=numgradf2(b,x)
k=length(b);
h=1e-7;
```

```
e=eye(k);
for j =1:k;
    bplus=b+h*e(:,j);
    bmin=b-h*e(:,j);
    fplus=feval('f2',bplus,x);
    fmin=feval('f2',bmin,x);
    z(:,j)=(fplus-fmin)/(2*h);
end
```

```
function z=numgradS2(b,x,y)
k=length(b);
h=1e-7;
e=eye(k);
for j=1:k;
    bplus=b+h*e(:,j);
    bmin=b-h*e(:,j);
    fplus=feval('f2',bplus,x);
    fmin=feval('f2',bmin,x);
    Splus=(y-fplus)'*(y-fplus);
    Smin=(y-fmin)'*(y-fmin);
    z(j,:)=(Splus-Smin)/(2*h);
end
```
