PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN POISSON MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Oleh:
ROHMAWATI FITRIYA
NIM. 06510071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN POISSON MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ROHMAWATI FITRIYA
NIM: 06510071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN POISSON MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Oleh:
ROHMAWATI FITRIYA
NIM. 06510071

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 25 Agustus 2011

Pembimbing I	Pembimbing II
Mohammad Jamhuri, M.Si	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19810502 200501 1 004	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN POISSON MENGGUNAKAN JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS

SKRIPSI

Oleh:
ROHMAWATI FITRIYA
NIM. 06510071

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 13 September 2011

Penguji Utama	:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	………………………....
Ketua Penguji	:	Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	………………………....
Sekretaris Penguji	:	Mohammad Jamhuri, M.Si NIP. 19810502 200501 1 004	………………………..
Anggota Penguji	:	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	………………………....

Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Rohmawati Fitriya
NIM	: 06510071
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, Agustus 2011

Yang membuat pernyataan,

Rohmawati Fitriya

NIM. 06510071

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: ***"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan." (Qs. Al-Insyirah / 94 : 5)***

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini Penulis Persambahkan Teruntuk:

Kedua Orangtua Tercinta

Samsul Hadi dan Siti Jariyah

&

Kakak-kakak Penulis tersayang

Sahrul Munir & Ninir, dan Fathur Rohim

yang tiada henti selalu memberikan dukungan serta do'a

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمنِ الرَّحِيْمِ

Segala puji bagi Allah SWT atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada semua yang terlibat dan telah membantu terselesaikannya skripsi ini, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU.D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si selaku dosen wali sekaligus pembimbing skripsi yang telah bersedia meluangkan waktu, tenaga, pikiran serta memberikan arahan dan masukan yang sangat berguna dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A selaku pembimbing agama yang telah bersedia memberikan pengarahan keagamaan dalam penyelesaian skripsi ini.

6. Segenap dosen dan staf pengajar, terima kasih atas semua ilmu yang telah diberikan.
7. Kedua orangtua tercinta dan segenap keluarga yang tiada henti selalu memberikan dukungan dan do'a.
8. Prof. Dr. Kyai H. Ahmad Mudlor, S.H serta segenap keluarga besar Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang yang selalu memberikan semangat spiritual dan mengajarikan tentang makna hidup.
9. Teman-teman matematika angkatan 2006 terima kasih atas segala pengalaman yang berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
10. Sahabat-sahabat terdekat (Erni, Husnul, Zaenab, Anjani, Irma, Muhib, Zuhdi, Imam, Fahmi) dan teman-teman penulis di LTPLM terima kasih banyak atas motivasi dan semangat yang telah diberikan.
11. Semua pihak yang telah membantu hingga terselesaikannya skripsi ini, baik secara langsung maupun tidak langsung yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu, penulis selalu terbuka untuk menerima saran dan kritik yang konstruktif dari pembaca yang budiman, untuk perbaikan penulisan selanjutnya.

Malang, 7 Agustus2011

Penulis,

Rohmawati Fitriya

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Fitriya, Rohmawati. 2011. **Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing : (I) Mohammad Jamhuri, M. Si.
(II) Dr. Ahmad Barizi, M. A

Dalam skripsi ini akan dijelaskan sebuah pendekatan numerik untuk menyelesaikan persamaan Poisson yang didasarkan pada jaringan fungsi radial basis. Kelebihan dari penggunaan jaringan syaraf tiruan dalam bidang analisis numerik adalah sekali jaringan ditraining maka jaringan tersebut dapat digunakan untuk mencari solusi dari setiap titik yang dikehendaki dalam waktu yang relatif singkat. Sebagai ilustrasi dalam paper ini juga akan diberikan contoh persamaan Poisson yang diselesaikan dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis melalui bantuan *software* Matlab 7.

Ada beberapa langkah untuk menyelesaikan persamaaan Poisson dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis. Langkah pertama adalah menetukan persamaan Poisson beserta batas dan kondisi batasnya. Langkah berikutnya adalah mendiskritisasi domain menjadi beberapa bagian. Kemudian dilanjutkan pada langkah ketiga yakni merubah persamaan Poisson beserta kondisi batasnya dalam bentuk persamaan jaringan fungsi radial basis. Setelah persamaan jaringan fungsi radial basis terbentuk, maka dapat diperoleh nilai bobot (w) dengan menggunakan prinsip *least Square*. Kemudian langkah terakhir yang harus dilakukan adalah mengproksimasi penyelesaian dari persamaan Poisson. Setelah mendapatkan solusi numerik dari persamaan Poisson, maka analisis numerik pun dapat dilakukan untuk mengetahui keefektifan jaringan fungsi radial basis dalam menyelesaiakan persamaan Poisson.

Adapun contoh persamaan yang diambil adalah persamaan:

$$\nabla^2 U = (x^2 + y^2)e^{xy}$$

Hasil evaluasi contoh persamaan menunjukkan bahwa menggunakan jaringan fungsi radial basis menghasilkan suatu solusi pendekatan yang relatif sama dengan solusi eksaknya. Hal ini terlihat dari galat yang dihasilkan hanya berada pada selang $0 \leq \varepsilon \leq 0{,}0134$. Keefektifan penggunaan jaringan fungsi radial basis untuk mendapatkan penyelesaian persamaan Poisson juga dapat terlihat pada perbandingan grafik antara solusi analitik dan solusi pendekatannya. Dimana pada grafik terlihat bahwa untuk grafik dari solusi numerik hampir sama dengan grafik solusi eksaknya. Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa jaringan fungsi radial basis dapat digunakan sebagai metode alternatif dalam menyelesaiakan persamaan Poisson.

Kata kunci: *Penyelesaian Numerik, Persamaan Poisson, Jaringan Syaraf Tiruan, Fungsi Radial Basis*

ABSTRACT

Fitriya, Rohmawati. 2011. Numerical Solution Using the Poisson equation Radial Basis Function Network. Thesis, Department of Mathematics Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang
Adviser: (I) Mohammad Jamhuri, M. Si.
(II) Dr. Ahmad Barizi, M. A

In this thesis will be described a numerical approach to solve the Poisson's equation based on radial basis function network. The advantages of using artificial neural networks within the field of numerical analysis is that once trained network then the network can be used to find solutions of any desired point within a relatively short time. As an illustration within this thesis will also be given examples of Poisson's equation is solved by using radial basis function network with the help of the software Matlab 7.

There are several steps to solve the Poisson's equation using radial basis function network. The first step is to determine the Poisson's equation together with the domain and boundary conditions. The next step is discretization domain into several sections. Then proceed to step three which is modify the Poisson's equation and boundary condition equations in the form of radial basis function network. Once the equation of radial basis function network is formed, then the value can be gained weight (w) by using the principle of least Square. Then the last step to do is approach completion of the Poisson's equation. After obtaining the numerical solution of the Poisson's equation, then the numerical analysis can be conducted to determine the effectiveness of radial basis function network for solve Poisson equation.

The samples taken equation is an equation:

$$\nabla^2 U = (x^2 + y^2)e^{xy}$$

Evaluation results show that the equation example using radial basis function network approach produces a solution which is relatively equal to its exact solution. This can be seen from the error generated will be in the interval $0 \leq \varepsilon \leq 0.0134$. The effectiveness of the use of radial basis function network for settlement of the Poisson's equation can also be seen in a comparison chart between the analytic solution and the solution approach. Where on the graph shows that for graphs of the numerical solution is almost equal to its exact solution graph. From the above description it can be concluded that the radial basis function network can be used as an alternative method for solve Poisson' equation.

Keyword: *Numerical Solution, Poisson'n Equation, Neural Network, Radial Basis Function*

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari manusia tidak pernah luput dari berbagai macam permasalahan. Oleh karena itu, manusia diberi akal fikiran oleh Allah SWT untuk menyelesaikan semua masalah yang dihadapinya. Kreatifitas berpikir manusia dalam menyelesaikan masalah-masalah yang ada pada diri dan lingkungannya telah memberikan kontribusi yang besar bagi perkembangan ilmu pengetahuan sampai saat ini. Banyak teori-teori di berbagai disiplin ilmu lahir dari pengamatan manusia pada diri sendiri dan alam semesta.

Pemodelan matematika merupakan salah satu bentuk kreatifitas berpikir manusia. Permasalahan-permasalahan sains dan teknik banyak yang ditransformasi ke dalam persamaan-persamaan matematika melalui proses pemodelan matematika. Sehingga permasalahan yang ada menjadi lebih sederhana dan lebih mudah untuk diselesaikan. Oleh sebab itu, matematika banyak diterapkan di berbagai disiplin ilmu termasuk pada bidang fisika. Pada bidang ini persamaan-persamaan matematika dibentuk dari berbagai fenomena fisik. Salah satu persamaan yang terbentuk adalah persamaan Poisson.

Persamaan Poisson merupakan suatu persamaan yang dibentuk dari fenomena fisik yang terjadi pada distribusi panas dalam kondisi *steady-state*. Persamaan ini tidak memperhitungkan perubahan waktu namun lebih kepada utilitas luas dari berbagai permasalahan elektrostatis, teknik mesin dan fisika teoritis. Sehingga tidak ada nilai awal sebagaimana persamaan diferensial parsial yang berhubungan dengan waktu. Hanya saja persamaan ini diikuti dengan kondisi batas tertentu (Tveito, 1998: 209-2010).

Untuk mendapatkan solusi terbaik dari persamaan Poisson ini para ilmuwan telah mengembangkan berbagai metode baik secara analitik maupun secara numerik. Namun, karena keterbatasan kemampuan manusia dalam menghitung kadang-kadang persamaan ini sulit untuk dipecahkan secara analitik sehingga perlu menggunakan pendekatan numerik. Cara ini diambil sebagai usaha untuk mendapatkan solusi secara cepat dan tingkat ketelitian yang tinggi.

Dan dalam masalah kecepatan serta ketelitian perhitungan Allah SWT adalah rajanya. Allah SWT sangatlah cepat dalam menghitung dan sangat teliti (Abdussakir, 2007 : 83-84). Sebagaimana yang Allah jelaskan dalam firman-Nya pada Al- Qur'an Surat Maryam ayat 94 dan Al-Baqarah ayat 202 berikut ini:

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya : " Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (Qs. Maryam / 19: 94).

أُوْلَٰٓئِكَ لَهُمۡ نَصِيبٞ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٢٠٢

Artinya : " Mereka itulah orang-orang yang mendapat bagian daripada yang mereka usahakan, dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya".
(Qs. Al-Baqarah / 2 : 202).

Dari kedua ayat di atas Allah SWT menegaskan bahwa tidak ada yang membandingi kecepatan dan ketelitian-Nya dalam menghitung. Sebagai mahkluk yang diciptakan dari ruh-Nya, manusia hanya bisa berusaha meningkatkan kecepatan serta ketelitian mereka dalam menghitung. Salah satu cara yang dilakukan oleh manusia adalah dengan memanfaatkan kecanggihan teknologi seperti kalkulator dan komputer. Kedua alat hitung ini merupakan piranti pokok yang digunakan dalam memecahkan persamaan-persamaan matematika secara numerik. Disamping alat hitung yang canggih diperlukan juga metode yang tepat untuk mendapatkan solusi numerik dengan tingkat ketelitian yang tinggi dan hanya membutuhkan waktu yang relatif singkat.

Dalam jurnalnya Nam May-Duy dan Thanh Tran-Cong menyebutkan bahwa ada beberapa metode numerik yang telah dikembangkan oleh para ilmuwan dalam memecahkan persamaan Poisson. Metode-medote itu adalah *Finite Difference Method (FDM)*(cf. Smith,1978), *The Finite Element Method(FEM)*(cf. Cook et al, 1989; Hughes, 1987;Zienkiewicz and Taylor, 1991), *The Finite Volume Method (FVM)*(cf. Patankar,1980)dan *The Boundary Element Method(BEM)*(cf. Brebbia et al,1984). Secara umum metode-metode ini menghendaki adanya diskritisasi domain menjadi sejumlah elemen hingga. Dimana hal ini bukanlah tugas yang mudah terutama pada persamaan yang tingkat geometrinya lebih komplek. Oleh karena itu dibutuhkan proses komputasi untuk menyelesaikan persamaan Poisson secara numerik terutama untuk tingkat geometri yang komplek.

Dalam bidang komputasi sendiri telah banyak dikembangkan beberapa algoritma baru agar proses komputasi menjadi lebih cepat dan mudah digunakan diantaranya adalah algoritma jaringan syaraf tiruan. Saat ini, jaringan syaraf tiruan telah banyak digunakan di berbagai bidang tidak terkecuali dalam bidang matematika. Akhir- akhir ini jaringan syaraf tiruan juga telah dipertimbangkan sebagai skema approksimasi dimana data input untuk perencanaan dari jaringan hanya terdiri dari himpunan data diskrit yang tidak terstruktur. Jadi, sebuah aplikasi dari jaringan syaraf tiruan untuk menyelesaikan persamaan diferensial dapat dipandang sebagai sebuah metode numerik dengan *mesh* bebas (May-Duy, 2000: 4).

Jaringan fungsi radial basis merupakan salah satu *desain* jaringan syaraf tiruan yang sederhana dengan satu layar tersembunyi dan satu layar *output*. Jaringan fungsi radial basis dapat digunakan untuk mengaproksimasi fungsi dan ditraining dengan cepat. Untuk mengaproksimasi suatu fungsi, jaringan fungsi radial basis hanya membutuhkan input data yang tidak terstruktur yang diperoleh dengan mendiskritisasi domain. Sehingga jaringan fungsi radial basis juga dapat digunakan sebagai salah satu metode numerik untuk persamaan Poisson. Untuk melihat keefektifan jaringan fungsi radial basis sebagai salah satu metode numerik pada persamaan Poisson, maka penulis mengambil judul ***"Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis".***

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana penyelesaian numerik persamaan Poisson dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis?
2. Bagaimana analisis numerik dari penggunaan metode jaringan fungsi radial basis dalam menyelesaikan persamaan Poisson?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Untuk mengetahui penyelesaian numerik persamaan Poisson dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis.
2. Untuk mengetahui analisis numerik dari penggunaan metode jaringan fungsi radial basis dalam menyelesaikan persamaan Poisson.

2.1 Batasan Masalah

Persamaan Poisson yang dicari penyelesaiannya adalah persamaan Poisson dimensi 2 pada daerah segi empat:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \quad (1.1)$$

Dapat juga ditulis:

$$U_{xx} + U_{yy} = f \text{ atau } \nabla^2 U = f \quad (1.2)$$

Sedangkan fungsi basis yang digunakan pada jaringan fungsi radial basis adalah fungsi multikuadrik beserta turunannya.

2.2 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini dapat bermanfaat bagi:

1. Penulis, yaitu sebagai tambahan wawasan keilmuan dan pengetahuan tentang metode numerik.
2. Lembaga, yaitu sebagai bahan kepustakaan yang dapat dijadikan rujukan serta sarana pengembangan ilmu matematika.
3. Pemerhati matematika, yaitu dapat memperoleh kontribusi pemikiran untuk menambah khazanah keilmuan matematika.

2.3 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah:

BAB I : Pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, perumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika pembahasan

BAB II : Kajian Pustaka, yang terdiri dari persamaan Poisson, jaringan syaraf tiruan, jaringan fungsi radial basis, aproksimasi fungsi dengan jaringan fungsi radial basis, Metode *least square*, dan analisis galat .

BAB III : Metode Penelitian, yang terdiri dari jenis dan sumber penelitian, analisis data yang berupa algoritma dan diagram alirnya.

BAB IV : Pembahasan, yang terdiri dari penyelesaian numerik persamaan Poisson dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis dan analisis numerik hasil penyelesaian numerik persamaan Poisson dengan yang menggunakan jaringan fungsi radial basis.

BAB V : Penutup, yeng terdiri dari kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2. 1 Penyelesaian Numerik dalam Islam

Beragamnya permasalahan yang dihadapi oleh manusia dalam kehidupan sehari-hari telah melahirkan beragam cara penyelesaian terhadap masalah tersebut. Bahkan satu masalah dapat diselesaikan dengan beberapa cara penyelesaian karena berbedanya pemikiran subjek. Begitu juga dalam matematika, satu persamaan dapat diselesaiakan dengan berbagai cara. Secara umum solusi suatu persamaan ada dua macam yakni solusi analitik dan solusi numerik. Solusi analitik biasanya berbentuk sebuah fungsi matematik atau persamaan matematik yang dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Sedangkan solusi numerik solusi yang berbentuk angka dan nilainya merupakan nilai pendekatan terhadap solusi analitik (Munir, 2008: 5).

Dari uraian di atas dapat diketahui bahwasanya setiap permasalahan selalu ada solusinya meskipun harus melalui proses yang sulit. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT dalam Al-Qur’an surat Al-Insyiroh ayat 5 dan 6 berikut:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ﴿٦﴾

Artinya: *“Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”.*

Menurut Muhammad Abduh dalam tafsirnya menyebutkan bahwa ayat ini diawali dengan huruf *fa* untuk menunjukkan adanya kaitan antara kedua keadaan tersebut, yaitu antara timbulnya kesulitan dan datangnya kemudahan. Kemudian M. Quraish Shihab menukilkan pendapat ulama' lain yang menyoroti bentuk kata *'usr* dan *yusr* yang ternyata berbeda. Kata *usr* pada dua ayat itu diawali dengan *al* sehingga definit, seperti perkataan dalam bahas inggris yang diawali *the*. Sementara kata *yusr* tidak diawali dengan *al* sehingga *yusr* disini tidaklah definit. Hal ini mengandung makna bahwa dari suatu masalah yang telah dialami atau diketahui akan ada solusi yang tidak kita ketahui sebelumnya (Shihab, 2003: 361). Sebagaimana persamaan matematika yang sudah terdefinisi namun belum diketahui penyelesaiannya suatu saat pasti akan didapatkan solusinya baik secara analitik atau numerik.

Sebagian ulama' ada juga yang memaknai dua ayat di atas berdasarkan kaidah kebahasaan yakni berrmakna bahwa setiap satu kesulitan mengandung dua kemudahan (لكل عسر يسران). Hal ini merupakan pemaknaan yang lebih optimis lagi. Disebutkan juga dalam hadist yang diriwayatkan dari Nabi SAW bahwasanya beliau bersabda : *''Sekali-kali tidaklah satu kesulitan dapat mengalahkan dua kemudahan"*.

Tanpa kita sadari Allah SWT telah menunjukkan kepada umatnya bahwa suatu permasalahan itu tidak hanya mempunyai satu penyelesaian saja namun ada nanyak cara untuk menyelesaikan permasalahan tersebut tidak terkecuali dalam matematika. Ketika suatu persamaan sulit atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik maka masih ada jalan lain untuk mendapatkan solusinya yakni secara numerik. Dalam numerik pun masih ada berbagai macam metode untuk mencari nilai pendekatan dari fungsi tersebut. Sehingga dapat dikatakan bahwa setelah menghadapi satu kesulitan, jika mau bersungguh-sungguh dan optimis maka akan muncul kemudahan-kemudahan yang mengiringi satu kesulitan itu.

Oleh karena itu, setiap menghadapi berbagai kesulitan dalam menyelesaikan masalah kita harus tetap yakin bahwa akan ada penyelesainnya. Keyakinan ini merupakan energi yang sangat berharga untuk bisa menyelesaikan segala persoalan. Dari jiwa yang penuh optimis akan lahir kecerdasan dan kearifan. Karenanya, Allah SWT menegaskan dengan kalimat yang berulang-ulang (Amiruddin, 2004: 280)

Penyelesaian numerik merupakan penyelesaian alternatif dari persamaan matematika yang sulit diselesaikan secara analitik. Penyelesaian numerik ini dapat diperoleh dengan berbagai metode numerik. Dimana setiap metode mempunyai kelebihan dan kekurangan dalam mendapatkan nilai pendekatannya. Metode yang baik adalah metode yang dapat menghasilkan galat (*error*) sekecil mungkin dengan proses yang cepat. Ketelitian suatu metode dapat diukur melalui galat yang dihasilkan, sedangkan kemudahan proses komputasi dapat dilihat dari waktu yang diperlukan.

Sesungguhnya Islam juga sangat menekankan masalah ketelitian dan kecepatan dalam berhitung. banyak ayat Al-Qur’an yang menyebutkan tentang hitungan dan ketelitian. Dalam Al-Qur’an surat Maryam ayat 94 disebutkan:

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ﴿٩٤﴾

Artinya : "Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (Q.S Maryam/ 19: 94).

Kata (أَحۡصَىٰهُم) mempunyai pengertian bahwa Allah mengetahui secara rinci. Kata ini terambil dari akar kata yang terdiri dari *ha'*, *shad*, dan *ya'* yang mengandung tiga ma'na asal yaitu:

a) *menghalangi*, *melarang*,

b) *menghitung (dengan teliti) dan mampu*, dari sini lahir makna mengetahui, mencatat, dan memelihara,

c) *sesuatu yang merupakan bagian dari tanah*, kemudian lahir kata *hashaa* yang bermakan *batu*.

Selain itu, dalam *Asma' al-Husna* terdapat kata *al-Muhshi* yang dipahami oleh banyak ulama sebagai Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik yang dijangkau oleh manusia maupun yang tidak. Seperti hembusan nafas, rincian perolehan rezeki dan kadarnya untuk masa kini dan mendatang. Jadi, Allah SWT adalah Yang Maha Mengetahui dengan amat teliti rincian segala sesuatu dari segi jumlah dan kadarnya, panjang dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktu, kadar cahaya dan gelapnya. Dan semua ini telah diberikan oleh Allah SWT secara seimbang (Shihab, 2002: 256-257).

Sedangkan dalam hal kecepatan menghitung Allah SWT telah menjelaskan dalam Al-Qur'an Surat Al- Baqarah ayat 202 sebagaimana berikut:

أُوْلَٰٓئِكَ لَهُمۡ نَصِيبٞ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٢٠٢

Artinya: "Mereka Itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya".

Ayat ini menjelaskan bahwa Allah SWT merupakan raja dalam menghitung. Sehingga tidak membutuhkan waktu yang lama untuk menghitung balasan yang sesuai untuk semua amalan hambaNya. Allah akan memberikan imbalan/ pahala tersendiri kepada orang-orang yang telah berusaha dalam meraih apa yang mereka mohonkan kepada Allah SWT (Shihab, 2002: 413).

Allah selalu memperhitungkan amalan setiap hambaNya. Cohtohnya saja dalam masalah shalat berjam'ah. Dalam hadits Nabi SAW yang diriwayatkan oleh Bukhari dan Muslim disebutkan bahwa, "*Shalat jam'ah 70 derajat lebih utama daripada shalat sendirian*". Masalah ini jika dituliskan dalam suatu fungsi matematika maka:

Misal: Sholat sendiri = x

Sholat berjama'ah = y

Maka: $\frac{x}{y} = \frac{1}{70}$

$y = 70\,x$

Fungsi matematik di atas merupakan salah satu contoh kecil dari permasalah dalam Islam yang dapat didekati dengan fungsi matematik. Persamaan di atas dapat saja berubah sesuai dengan kualitas shalat dari seorang hamba dan Allah SWT Maha Mengetahui segala sesuatu.

2. 2 Persamaan Poisson

Persamaan Poisson merupakan salah satu persamaan differensial parsial tipe elips yang diambil dari nama matematikawan Perancis, ahli ilmu ukur dan fisika yakni Simeon-Denis Poisson (Anonim, *wikipedia*). Persamaan ini mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{2.1}$$

Dimana $f(x,y)$ adalah sebuah fungsi yang telah diberikan. Jika $f(x,y) = 0$, maka diperoleh persamaan yang lebih sederhana yang disebut sebagai persamaan Laplace (Stavroulakis, 2004: 169).

Contoh 2.2.1

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 12xy \tag{2.2}$$

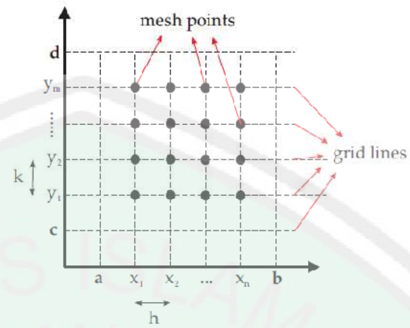
Pada daerah segiempat $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ dengan syarat batas:

$U(x,0) = x^3$ dan $U(x, 1) = x^3$

$U(0,y) = 0$ dan $U(1,y) = 1$

Dari contoh di atas dapat kita ketahui bahwa persamaan ini tidak memperhitungkan perubahan waktu sehingga tidak disertai kondisi awal tetapi disertai dengan kondisi batas tertentu. Dari kondisi batas yang ada persamaan ini dapat didiskritisasi menjadi beberapa bagian dengan ukuran tertentu. Untuk selanjutnya titik-titik perpotongan antara garis-garis horisontal dan vertikal (*grid lines*) dinamakan sebagai *mesh points*.

Misal R merupakan domain dari persamaan (2.1) yang berbentuk persegi dimana $R = [(x, y)|\ a < x < b,\ c < y < d]$. Maksud dari kondisi batas R adalah variasi titik-titik x berada di antara a dan b. Sedangkan variasi titik-titik y berada antara c sampai d sebagaimana terlihat pada gambar berikut:



Gambar 2.1 *Mesh* Persamaan Poisson dengan Domain Segi Empat

Persamaan ini biasanya digunakan pada masalah-masalah keseimbangan atau aliran permanen seperti aliran air tanah di bawah bendungan karena adanya pemompaan, defleksi plat karena adanya pembebanan, kondisi panas saat *steady state* dsb (Chapra dan Cande, 2002:815).

Islam sebagai agama juga telah mengajarkan pada umatnya untuk menjaga keseimbangan terutama antara kehidupan dunia dan kehidupan akhirat. Sebagaimana yang telah dijelaskan dalam sebuah hadits untuk menyeimbangkan antara ilmu untuk dunia maupun akhirat.

مَنْ أَرَدَ الدُّنْيَا فَعَلَيْهِ بِلْعِلْمِ وَ مَنْ أَرَدَ الأَخِرَةَ فَعَلَيْهِ بِلْعِلْمِ وَ مَنْ أَرَدَ هُمَا فَعَلَيْهِ بِلْعِلْمِ

Artinya : Barangsiapa menginginkan kehidupan dunia maka dengan ilmu dan barangsiapa menginginkan kehidupan akhirat maka dengan ilmu dan barangsiapa menginginkan keduanya maka juga dengan ilmu.

Hadits ini menjelaskan kepada kita bahwasanya jika kita ingin menginginkan sukses dunia dan akhirat tiada jalan lain selain dengan ilmu.

Untuk kehidupan dunia kita membutuhkan ilmu duniawi (umum) sementara untuk kehidupan kita memerlukan ilmu agama. Dimana kedua ilmu ini juga dapat dibagi-bagi menjadi beberapa bahasan ilmu. Ilmu agama dapat dibagi menjadi ilmu tauhid, fiqih, tasawuf, tafsir, falak dsb. Begitu juga dengan ilmu umum yang dapat dibagi ke dalam beberapa disiplin ilmu seperti filsafat, ilmu eksak, ilmu ekonomi, teknik, dll. Fenomena ini dapat kita analogkan pada proses diskritisasi domain dari persamaan Poisson sebagaimana yang telah diuraikan sebelumnya.

Gabungan antara ilmu dunia dengan ilmu agama akan memberikan nilai tersendiri bagi seseorang. Seseorang yang ilmu agama dan ilmu umumnya mumpuni pasti berbeda dengan orang yang hanya mumpuni di dalam ilmu agama saja ataupun sebaliknya. Nilai ini jika dalam persamaan Poisson diibaratkan dengan titik-titik pertemuan antara perpanjangan nilai *x* dan *y*. Dimana titik-titik ini mempunyai nilai fungsi yang berbeda-beda sesuai fungsi dan nilai *x* serta *y*-nya.

2. 3 Jaringan Syaraf Tiruan

2.3.1 Jaringan Syaraf Biologi

Dalam kalamullah Allah SWT telah berulang kali menyuruh hamba-Nya untuk senantiasa memikirkan tanda-tanda kebesaran-Nya melalui ciptaan-ciptaan-Nya. Salah satunya Allah berfirman dalam Al-Qur’an surat Adz-Dzariyaat ayat 20-21 sebagaimana berikut:

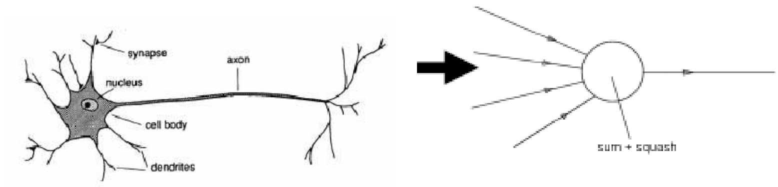
وَفِي ٱلۡأَرۡضِ ءَايَٰتٞ لِّلۡمُوقِنِينَ ﴿٢٠﴾ وَفِيٓ أَنفُسِكُمۡۚ أَفَلَا تُبۡصِرُونَ ﴿٢١﴾

Artinya : "Dan di bumi itu terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi orang-orang yang yakin. Dan (juga) pada dirimu sendiri, maka Apakah kamu tidak memperhatikan?" (Q.s Adz-Dzariyat / 51 : 20-21)

Tanda-tanda kebesaran Allah dapat kita ketahui melalui ciptaan-ciptaan-Nya yakni alam beserta isinya tidak terkecuali pada tubuh manusia sendiri. Sepenggal ayat di atas sudah selayaknya membuat kita berfikir, apakah dan bagaimanakah sistem tubuh kita tersusun, bekerja dan berproduksi sehingga menjadi sebuah sebuah pabrik raksasa yang sangat canggih yang tidak dapat terlihat oleh mata telanjang. Tubuh kita melakukan seluruh proses tersebut secara otomatis. Dan tubuh kita menggunakan jaringan syaraf untuk melakukannya. Jaringan ini terbentuk oleh persatuan triliunan sel syaraf. Berkat jaringan ini, sel-sel di otak kita terhubung dengan sel otot di seluruh sel tubuh sehingga dapat berkomunikasi satu sama lain dengan kecepatan yang tidak dapat dibayangkan (Arza, 2009: 1).

Pembuatan sruktur jaringan syaraf tiruan diilhami oleh struktur jaringan biologi, khususnya jaringan otak manusia. Untuk lebih mengenal asal-usul serta bagaimana suatu struktur jaringan syaraf tiruan dibuat dan dapat dipakai sebagai suatu alat penghitung, berikut ini akan diulas sedikit istilah yang secara umum digunakan.

Neuron adalah suatu unit pemroses terkecil pada otak, bentuk sederhana sebuah neuron yang oleh para ahli dianggap sebagai satuan unit pemroses tersebut digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Sruktur dasar jaringan syaraf tiruan dan sruktur sederhana sebuah neuron

Struktur pada gambar di atas adalah bentuk standard dasar satuan unit jaringan otak manusia yang telah disederhanakan. Bentuk standard ini mungkin di kemudian hari akan berubah bila ada ilmuwan yang dapat menciptakan bentuk standard yang lebih baik untuk memperbaiki bentuk standard yang digunakan saat ini. Jaringan otak manusia tersusus tidak kurang dari 10^{13} buah neuron yang masing-masing terhubung oleh sekitar 10^{15} buah dendrit. Fungsi dendrit adalah sebagai penyampai sinyal dari neuron tersebut ke neuron yang terhubung dengannya.Sebagai keluaran, setiap neuron memiliki akson, sedangkan bagian penerima sinyal disebut sinapsis.

Secara umum jaringan syaraf terbentuk dari jutaan (bahkan lebih) struktur dasar neuron yang terkoneksi dan terintegrasi antara satu dengan yang lainnya sehingga dapat melaksanakan aktifitas secara teratur dan terus menerus sesuai kebutuhan (Kusumadewi, 2004 : 1-2).

2.3.2 Pengertian Jaringan Syaraf Tiruan (JST)

Suatu jaringan syaraf tiruan memproses sejumlah besar informasi secara paralel dan terdistribusi, hal ini terinspirasi oleh model kerja otak biologis.Beberapa definisi tentang jaringan syaraf tiruan adalah sebagai berikut di bawah ini.

Hecht-Nielsend (1988) mendefinisikan sistem syaraf buatan sebagai suatu *neural network (NN)*, adalah suatu struktur pemroses informasi yang terdistribusi dan bekerja secara paralel, yang terdiri atas elemen pemroses (yang memiliki memori lokal dan beroperasi dengan informasi lokal) yang diinterkoneksi bersama dengan alur sinyal searah yang disebut koneksi. Setiap elemen pemroses memiliki koneksi keluaran tunggal yang bercabang (*fan out*) ke sejumlah koneksi kolateral yang diinginkan (setiap koneksi membawa sinyal yang sama dari keluaran elemen pemroses tersebut). Keluaran dari elemen pemroses tersebut dapat merupakan sebarang jenis persamaan matematis yang diinginkan. Seluruh proses yang berlangsung pada setiap elemen pemroses harus benar-benar dilakukan secara lokal, yaitu keluaran hanya bergantung pada nilai masukan pada saat itu yang diperoleh melalui koneksi dan nilai yang tersimpan dalam memori local (Anonim, http://id.wikipedia.org/wiki/Jaringan_ syaraf_tiruan, 2010).

Sedangkan menurut Haykin (1994), definisi dari jaringan syaraf tiruan adalah sebuah prosesor yang terdistribusi paralel dan mempuyai kecenderungan untuk menyimpan pengetahuan yang didapatkannya dari pengalaman dan membuatnya tetap tersedia untuk digunakan. Hal ini menyerupai kerja otak dalam dua hal yaitu:

1. Pengetahuan diperoleh oleh jaringan melalui suatu proses belajar.

2. Kekuatan hubungan antar sel syaraf yang dikenal dengan bobot sinapsis digunakan untuk menyimpan pengetahuan (Anonim, http://id.wikipedia.org/wiki/Jaringan_ syaraf_tiruan, 2010).

Dan menurut Zurada, J.M. (1992) menyebutkan sistem syaraf tiruan atau jaringan syaraf tiruan adalah sistem selular fisik yang dapat memperoleh, menyimpan dan menggunakan pengetahuan yang didapatkan dari pengalaman" (Anonim, http://id.wikipedia.org/wiki/Jaringan_ syaraf_tiruan, 2010).

Kemudian DARPA Neural Network Study (1988, AFCEA International Press, p. 60) mendefinisikan jaringan syaraf buatan sebagai suatu sistem yang dibentuk dari sejumlah elemen pemroses sederhana yang bekerja secara paralel dimana fungsinya ditentukan oleh stuktur jaringan, kekuatan hubungan, dan pegolahan dilakukan pada komputasi elemen atau nodes (Anonim, http://id.wikipedia.org/wiki/Jaringan_ syaraf_tiruan, 2010).

Sedangkan menurut Jong Jek Siang Jaringan syaraf tiruan (JST) adalah sistem pemroses informasi yang memiliki karakteristik mirip dengan jaringan syaraf biologi. JST dibentuk sebagai generalisasi model matematika dari jaringan syaraf biologi, dengan asumsi bahwa (Siang, 2005: 2-3) :

a) Pemrosesan informasi terjadi pada banyak elemen sederhana (neuron).
b) Sinyal dikirirnkan diantara neuron-neuron melalui penghubung-penghubung.
c) Penghubung antar neuron memiliki bobot yang akan memperkuat atau memperlemah sinyal.

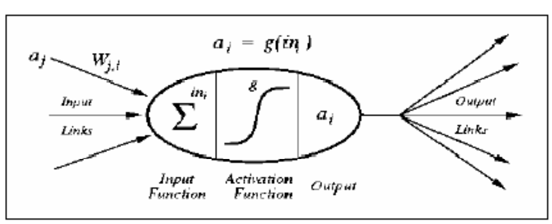
d) Untuk menentukan output, setiap neuron menggunakan fungsi aktivasi (biasanya bukan fungsi linier) yang dikenakan pada jumlahan input yang diterima. Besarnya output ini selanjutnya dibandingkan dengan suatu batas ambang.

Dari beberapa definisi di atas secara umum jaringan syaraf tiruan ditentukan oleh tiga hal (Siang, 2005: 3):

a. Pola hubungan antar neuron (disebut arsitektur jaringan)
b. Metode untuk menentukan bobot penghubung (disebut metode learning/training)
c. Fungsi aktivasi

2. 4 Konsep Dasar dan Komponen Dasar Jaringan Syaraf Tiruan

Tiruan neuron dalam struktur jaringan syaraf tiruan adalah sebagai elemen pemroses yang dapat berfungsi seperti halnya sebuah neuron. Sejumlah sinyal masukan *a* dikalikan dengan masing-masing penimbang yang bersesuaian *w*. Kemudian dilakukan penjumlahan dari seluruh hasil perkalian tersebut dan keluaran yang dihasilkan dilakukan ke dalam fungsi pengaktif untuk mendapatkan tingkatan derajat sinyal keluaran F(*a*,*w*). Walaupun masih jauh dari sempurna, kinerja dari jaringan syaraf tiruan ini identik dengan kinerja dari sel biologi yang kita kenal saat ini.



Gambar 2.3 Model tiruan sebuah neuron

Keterangan:

a_j : Nilai aktivasi dari unit *j*

w_{ji} : Bobot dari unit *j* ke *i*

in_i : Penjumlahan bobot dan masukan ke unit *i*

g : Fungsi aktivasi

a_i : Nilai aktivasi dari unit *i*

Misalkan ada *n* buah sinyal masukan dan *n* buah fungsi penimbang, fungsi keluaran dari neuron adalah seperti persamaan berikut:

$$f(a_j) = \sum_{j=1}^{n} W_j * a_j \qquad (2.3)$$

Kumpulan dari neuron dibuat menjadi sebuah jaringan yang akan berfungsi sebagai alat komputasi. Jumlah neuron dan struktur jaringan untuk setiap permasalahan yang akan diselesaikan adalah berbeda (Puspitaningrum, 2006: 5).

2. 5 Jaringan Fungsi Radial Basis (*Radial Basis Function (RBF) Network*)

Jaringan syaraf yang dibentuk dengan menggunakan fungsi aktivasi berupa fungsi radial basis dinamakan jaringan fungsi radial basis. Jaringan ini merupakan sebuah pemetaan dari vektor *input* dengan *p*-dimensi ke vektor *output* yang hanya satu dimensi. Secara matematis dapat disimbolkan sebagai $f: R^p \rightarrow R^1$. Fungsi f terdiri dari himpunan bobot $\{w_k\}_{k=1}^{n}$ dan himpunan dari fungsi radial basis $\varphi_k(x) = \varphi(\|x - c_k\|)$, dimana $\|.\|$ merupakan vektor normal.

Misal dalam 1D terdapat fungsi *f(x)* yang akan diaproksimasi dengan jaringan fungsi radial basis maka *f(x)* dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$f(x) \approx \hat{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} w_k \varphi(x, c_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} w_k \varphi(\|x - c_k\|) \quad (2.4)$$

Keterangan:

$f(x)$: fungsi dari *x*

$\hat{f}(x)$: fungsi pendekatan dari *x*

n : jumlah fungsi radial basis (*neuron*) dan *center*

w_k : bobot untuk fungsi radial basis ke-*k*

φ_k : fungsi radial basis ke-*k*

x : vektor *input*

c_k : titik pusat (*center*) ke-*k*

$\|.\|$: jarak Euclid (*r*) tiap titik terhadap titik pusat

$\|x - c_k\|$: $\sqrt{(x - c_k)^2}$

Kemudian untuk fungsi yang berada pada dimensi dua (2D), dimensi dua (3D) dan seterusnya maka hanya akan merubah jarak Euclidnya saja. Misal terdapat fungsi *f(x)* pada 2D yang akan diaproksimasi dengan jaringan fungsi radial basis maka:

$$f(x, y) \approx \hat{f}(x, y) = \sum_{k=0}^{n} w_k \varphi(x, y, c_k, d_k)$$

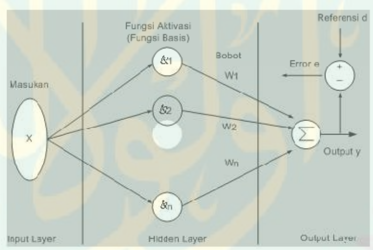
$$= \sum_{k=0}^{n} w_k \varphi(\|(x, y) - (c_k, d_k)\|) \quad (2.5)$$

Keterangan:

$f(x)$: fungsi dari *x*

$\hat{f}(x)$	:	fungsi pendekatan dari *x*
n	:	jumlah fungsi radial basis (*neuron*) dan *center*
w_k	:	bobot untuk fungsi radial basis ke-*k*
φ_k	:	fungsi radial basis ke-*k*
(x, y)	:	vektor *input* 2D
(c_k, d_k)	:	titik pusat (*center*) ke-*k*
$\lVert . \rVert$	:	jarak Euclid (*r*) tiap titik terhadap titik pusat
$\lVert (x, y) - (c_k, d_k) \rVert$	:	$\sqrt{(x - c_k)^2 + (y - d_k)^2}$

Jaringan fungsi radial basis terdiri atas 3 *layer* yaitu *layer input*, *hidden layer* / *kernel layer* (unit tersembunyi) dan *layer output*. Struktur dasar jaringan RBF ditunjukkan oleh gambar berikut ini:



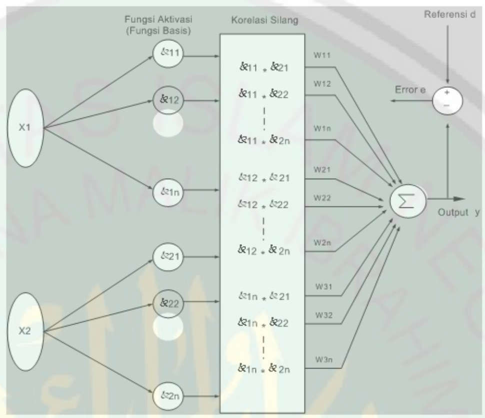
Gambar 2.4 Struktur Dasar Jaringan Fungsi Radial Basis.

Setiap *layer* mempunyai fungsi masing-masing sebagaimana yang akan di uraikan di bawah ini.

a. *Layer input*.

Pada jaringan fungsi radial basis setiap input dimasukkan ke dalam *layer input*. Dan *input* dari jaringan ini akan mengaktifkan semua fungsi aktivasi pada *hidden layer* seperti yang terlihat pada gambar 2.3. Gambar di atas merupakan gambar struktur jaringan fungsi radial basis dengan satu unit *input*.

Kemudian untuk jaringan RBF dengan 2 masukan, proses pemetaanya ditunjukkan pada berikut:



Gambar 2.5 Operasi Jaringan Fungsi Radial Basis dengan 2 *input*

Setiap masukan akan mengaktifkan setiap fungsi *basis* pada jaringannnya sendiri. Misalkan pada operasi masukan $[x_1 x_2]$. Masukan x_1 akan mengaktifkan setiap fungsi basis pada jaringan RBF pertama, sehingga masukan x_1 akan mengaktifkan fungsi *basis*φ_{11},φ_{12} sampai dengan φ_{1n}. Masukan x_2 akan mengaktifkan setiap fungsi basis pada jaringan RBF kedua, sehingga masukan x_2 akan mengaktifkan fungsi *basis* φ_{21}. φ_{22}sampai dengan φ_{2n}. Langkah selanjutnya adalah melakukan korelasi silang antara setiap keluaran fungsi *basis* pada jaringan pertama dengan setiap keluaran fungsi basis pada jaringan kedua. Masing – masing hasil korelasi silang antar fungsi *basis* ini kemudian diboboti dengan bobot tertentu (Setiawan,2002: 22-23).

b. *Hidden layer*

Setiap unit dari *hidden layer* merupakan fungsi aktivasitertentu yang disebut sebagai fungsi basis.Di dalam *hidden layer* terdapat sejumlah fungsi basis yang sesuai dengan perancangan. Setiap fungsi *basis* akan menghasilkan sebuah keluaran dengan bobot tertentu.

Fungsi basis yang sering digunakan dalam mengaktifkan jaringan fungsi radial basis ini diantaranya (May-Dui, 2002: 2):

a. Fungsi Gaussian

Fungsi basis ini merupakan fungsi yang paling sering digunakan untuk fungsi aktivasi pada jaringan fungsi radial basis. Fungsinya adalah:

1) Fungsi Gaussian 1D :

$$g(x_i, c_k) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(x_i - c_k)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,3,\dots,m \\ k = 1,2,3,\dots,n \end{array} \qquad (2.6)$$

2) Fungsi Gaussian 2D :

$$g(x_i, c_k) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(x_i - c_k)^2 + (y_j - d_k)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \begin{array}{r} i = j = 1,2,3,\dots,m \\ k = 1,2,3,\dots,n \end{array} \qquad (2.7)$$

b. Fungsi Multikuadratik

1) Fungsi Multikuadrik 1D

$$M(x_i, c_k) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$$

$$= \sqrt{(x_i - c_k)^2 + \sigma^2} \qquad (2.8)$$

Dengan $i = 1,2,3,\dots,m$ dan $k = 1,2,3,\dots,m$

2) Fungsi Multikuadrik 2D

$$M(x_i, c_k) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$$

$$= \sqrt{(x_i - c_k)^2 + (y_j - c_k)^2 + \sigma^2} \quad (2.9)$$

Dengan $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $k = 1,2,3, \dots, m$

Keterangan:

c_k = titik *center* pada *x*

d_k = titik *center* pada *y*

σ^2 = varian dari *center*.

r = jarak Euclid tiap titik dengan titik *center*.

c. *Layer output*

Lapisan ini berfungsi untuk menampung hasil pemrosesan data input oleh *hidden layer*. *Output* dari jaringan ini merupakan penjumlahan dari seluruh *output* fungsi basis dikalikan dengan bobot masing-masing.

2. 6 Aproksimasi Fungsi dan Turunannya dengan Jaringan fungsi Radial Basis.

Salah satu aplikasi dari jaringan fungsi radial basis adalah untuk mengaproksimasi fungsi dan turunan-turunannya. Hal ini dapat dilakukan dengan menentukan sebuah himpunan *input* x_i dan sebuah himpunan *output* y_i, dimana y_i merupakan himpunan hasil fungsi dari x_i pada dimensi satu. Dari kedua input akan didapatkan nilai w_i jika kedua input ini dimasukkan kedalam persamaan (2.4) dengan menggunakan fungsi basis multikuadrik berikut:

$$y_i = f(x_i) = \sum_{k=0}^{n} w_k M(x_i, c_k) \tag{2.10}$$

$$= w_1 M(x_i, c_1) + \ w_2 M_2(x_i, c_2) + \cdots + w_n M_n(x_i, c_n) \tag{2.11}$$

$$= w_1 \sqrt{(x_i - c_1)^2 + \sigma^2} + w_2 \sqrt{(x_i - c_2)^2 + \sigma^2} + \ldots +$$

$$w_n \sqrt{(x_i - c_n)^2 + \sigma^2} \tag{2.12}$$

Dengan $y_i = f(x_i)$ dan x_i merupakan vektor masukan untuk fungsi basis.

Misal $x_i = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$ dan fungsi basis yang digunakan adalah fungsi mutiquadrik maka untuk $x = x_1$ diperoleh:

$$f(x_1) = \sum_{k=0}^{n} w_k M(x_i, c_k) \tag{2.13}$$

$$= w_1 M(x_i, c_1) + \ w_2 M(x_i, c_2) + \cdots + w_n M(x_i, c_n) \tag{2.14}$$

$$= w_1 M(\|x_1 - c_1\|) + \ w_2 M(\|x_1 - c_2\|) + \cdots +$$

$$w_n M(\|x_1 - c_n\|) \tag{2.15}$$

$$= w_1 \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + \sigma^2} + w_2 \sqrt{(x_1 - c_2)^2 + \sigma^2} + \ldots +$$

$$w_n \sqrt{(x_1 - c_n)^2 + \sigma^2} \tag{2.16}$$

Begitu juga untuk x_2 sampai x_n, sehingga dengan memasukkan semua elemen x akan terbentuk sistem persamaan:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= w_1 M(x_1, c_1) + \ w_2 M(x_1, c_2) + \cdots + w_n M(x_1, c_n) \\
f(x_2) &= w_1 M(x_2, c_1) + \ w_2 M(x_2, c_2) + \cdots + w_n M(x_2, c_n) \\
f(x_3) &= w_1 M(x_2, c_1) + \ w_2 M(x_2, c_2) + \cdots + w_n M(x_2, c_n) \\
\vdots & \qquad\qquad\qquad \ddots \\
f(x_m) &= w_1 M(x_m, c_1) + \ w_2 M(x_m, c_2) + \cdots + w_n M(x_m, c_n)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

yang dapat diubah ke dalam bentuk matrik berikut:

$$\begin{bmatrix} M(x_1,c_1) & M(x_1,c_2) & \dots M(x_1,c_n) \\ M(x_2,c_1) & M(x_2,c_2) & \dots M(x_2,c_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ M(x_m,c_n) & M(x_m,c_n) & \dots M(x_m,c_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}$$

Persamaan matrik di atas dapat dituliskan ke dalam bentuk:

$$\mathbf{M}w = \boldsymbol{f} \tag{2.18}$$

Pada jaringan fungsi radial basis w dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa metode salah satunya dengan metode *least square*. Pencarian nilai w ini disebut sebagai proses *training*. Nilai w yang didapatkan kemudian digunakan untuk mencari nilai aproksimasi fungsi dengan memasukkan *input* baru yang berbeda. Dimana data *input* pada proses training tadi pada tahap selanjutnya digunakan sebagai titik pusat (*center*) pada fungsi basis. Aproksimasi fungsi y dengan jaringan fungsi radial basis akan dinotasikan dengan $\hat{y}_i$. Nilai fungsi aproksimasi ini dapat diperoleh dengan menjumlahkan perkalian antara w dengan x yang baru (Hajek, 2005: 100-101).

Sedangkan untuk mengaproksimasi turunan fungsi maka persamaan jaringan fungsi radial basisnya juga harus diturunkan. Jika ingin mencari nilai aproksimasi turunan pertama dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis maka persamaan (2.9) juga harus diturunkan satu kali seperti berikut ini:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k \frac{\partial M(x_i,c_k)}{\partial x_i} \qquad (w_k \text{ konstanta}) \tag{2.19}$$

Dari persamaan (2.19) dapat diketahui bahwa untuk mengaproksimasi suatu turunan fungsi dengan jaringan fungsi radial basis maka cukup dengan menurunkan fungsi basisnya saja.

Adapun turunan dari beberapa fungsi basis sebagaimana yang telah disebutkan pada sub bab sebelumnya dapat dicari dengan menggunakan aturan rantai sebagai berikut (Mai-Dui dan Tran-Cong, 2002: 3-4):

a. Fungsi Gaussian

1) Fungsi Gaussian 1D :

$$g(x_i) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(x_i-c_k)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \begin{matrix} i = 1,2,3,\dots,m \\ k = 1,2,3,\dots,n \end{matrix} \tag{2.20}$$

2) Fungsi Gaussian 2D :

$$g(x_i) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \begin{matrix} i = j = 1,2,3,\dots,m \\ k = 1,2,3,\dots,n \end{matrix} \tag{2.21}$$

Untuk mendapatkan turunan pertama dari fungsi Gaussian dapat digunakan aturan rantai seperti yang akan dijelaskan berikut ini:

misal : $u = -\frac{r^2}{\sigma^2}$ (2.22)

maka :

$$g(x_i, c_k) = \exp\,(u)$$

$$\frac{\partial g(x_i,c_k)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\exp(u) = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial r^2}{\partial x_i}\exp(u) \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial g(x_i,c_k)}{\partial y_j} = \frac{\partial u}{\partial y_j}\exp\,(u) = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial r^2}{\partial y_j}\exp(u) \tag{2.24}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.22) dan persamaan (2.23) maka akan didapatkan:

1) Turunan pertama fungsi Gaussian 1D

$$\frac{\partial g(x_i, c_k)}{\partial x_i} = \frac{-2(x_i - c_j)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_i - c_j)^2}{\sigma^2}\right) \tag{2.25}$$

2) Turunan fungsi Gaussian 2D

$$\frac{\partial g(x_i, c_k)}{\partial x_i} = \frac{-2(x_i - d_k)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_i - c_k)^2 + \left(y_j - d_k\right)^2}{\sigma^2}\right) \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial g(x_i, c_k)}{\partial y_j} = \frac{-2(y_i - d_k)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_i - c_k)^2 + \left(y_j - d_k\right)^2}{\sigma^2}\right) \tag{2.27}$$

Sedangkan turunan kedua dari fungsi Gaussian juga dapat diperoleh melalui aturan rantai sebagaimana berikut :

misal :

$$u = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial r^2}{\partial x_i} \tag{2.28}$$

$$v = -\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial r^2}{\partial y_j} \tag{2.29}$$

$$w = \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \tag{2.30}$$

maka :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{x_i}} = \frac{\partial v}{\partial \mathrm{x_i}} = \frac{-2}{\sigma^2} \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial g(x_i, c_k)}{\partial x_i} = uw \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial^2 g(x_i, c_k)}{\partial {x_i}^2} = \frac{\partial u}{\partial x_i} w + \frac{\partial w}{\partial x_i} u \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial g(x_i,c_k)}{\partial y_i} = vw \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial^2 g(x_i,c_k)}{\partial {y_j}^2} = \frac{\partial v}{\partial y_j} w + \frac{\partial w}{\partial y_j} v \tag{2.36}$$

Berdasarkan persamaan (2.28) sampai dengan persamaan (2.36) maka akan didapatkan:

1) Turunan kedua fungsi Gaussian 1D

$$\frac{\partial^2 g(x_i,c_k)}{\partial x^2} = \frac{-2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right) + \frac{-2(x_i-c_j)}{\sigma^2}\left(\exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right)\right)\left(\frac{-2(x_i-c_j)}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{-2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right) + \left(\frac{-2(x_i-c_j)}{\sigma^2}\right)^2 \exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sigma^2}\left[\frac{2}{\sigma^2}(x_i - c_j)^2 - 1\right] \exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right) \tag{2.37}$$

2) Turunan kedua fungsi Gaussian 2D

$$\frac{\partial^2 g(x_i,c_k)}{\partial x^2} = \frac{-2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right) +$$

$$\frac{-2(x_i-c_j)}{\sigma^2}\left(\exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right)\right)\left(\frac{-2(x_i-c_j)}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{-2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right) + \left(\frac{-2(x_i-c_j)}{\sigma^2}\right)^2 \exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sigma^2}\left[\frac{2}{\sigma^2}(x_i - c_j)^2 - 1\right] \exp\left(-\frac{(x_i-c_j)^2}{\sigma^2}\right) \tag{2.38}$$

b. Fungsi multikuadrik

1) Fungsi multikuadrik 1D

$$M(x_i, c_k) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$$

$$= \sqrt{(x_i - c_k)^2 + \sigma^2} \tag{2.39}$$

Dengan $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $k = 1,2,3, \dots, m$

2) Fungsi multikuadrik 2D

$M(x_i, c_k) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$

$$= \sqrt{(x_i - c_k)^2 + \left(y_j - c_k\right)^2 + \sigma^2} \quad (2.40)$$

dengan $i = 1,2,3, \dots, m$ dan $k = 1,2,3, \dots, m$

Sebagaimana pada fungsi Gauss untuk mendapatkan turunan pertama dan kedua dari fungsi multikuadrik dapat digunakan aturan rantai. Adapun prosesnya adalah sebagai berikut:

Missal: $u = r^2 + \sigma^2$ (2.41)

maka

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial r^2}{\partial x} \quad (2.42)$$

$M(x_i, c_k) = \sqrt{u}$

$M_x(x_i, c_k) = \frac{\partial M}{\partial x_i} = \frac{1}{2} u^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$$= \frac{\left(r^2+\sigma^2\right)^{-1/2}}{2} \left(\frac{\partial r^2}{\partial x_i}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial r^2}{\partial x_i}}{2\sqrt{r^2+\sigma^2}} \quad (2.43)$$

$M_y(x_i, c_k) = \frac{\partial M}{\partial y_j} = \frac{1}{2} u^{-1/2} \frac{\partial u}{\partial y_i}$

$$= \frac{\left(r^2+\sigma^2\right)^{-1/2}}{2} \left(\frac{\partial r^2}{\partial y_j}\right)$$

$$= \frac{\frac{\partial r^2}{\partial y_j}}{2\sqrt{r^2+\sigma^2}} \quad (2.44)$$

Dengan memasukkan r ke dalam persamaan (2.43) maka akan didapatkan:

1) Turunan pertama fungsi multikuadrik 1D

$$r = \sqrt{(x_i - c_k)^2} \tag{2.45}$$

$$r^2 = (x_i - c_k)^2 \tag{2.46}$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial x} = 2(x_i - c_k) \tag{2.47}$$

$$M_x(x_i, c_k) = \frac{2(x_i - c_k)}{2\sqrt{(x_i - c_k)^2 + \sigma^2}}$$

$$= \frac{(x_i - c_k)}{\sqrt{(x_i - c_k)^2 + \sigma^2}} \tag{2.48}$$

2) Turunan pertama fungsi multikuadrik 2D

$$r = \sqrt{(x_i - c_k)^2 + (y_j - d_k)^2} \tag{2.49}$$

$$r^2 = (x_i - c_k)^2 + (y_j - d_k)^2 \tag{2.50}$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial x_i} = 2(x_i - c_k) \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial y_j} = 2(y_j - d_k) \tag{2.52}$$

$$M_x(x_i, c_k) = \frac{2(x_i - c_k)}{2\sqrt{(x_i - c_k)^2 + (y_j - d_k)^2 + \sigma^2}}$$

$$= \frac{(x_i - c_k)}{\sqrt{(x_i - c_k)^2 + (y_j - d_k)^2 + \sigma^2}} \tag{2.53}$$

$$M_y(x_i, c_k) = \frac{2(y_j - d_k)}{2\sqrt{(x_i - c_k)^2 + (y_j - d_k)^2 + \sigma^2}}$$

$$= \frac{(y_j - d_k)}{\sqrt{(x_i - c_k)^2 + (y_j - d_k)^2 + \sigma^2}} \tag{2.54}$$

Sedangkan turunan keduanya juga didapatkan dari penggunaan aturan rantai seperti berikut ini:

misal :

$$u = \frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial x_i} \tag{2.55}$$

$$v = \frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial y_i} \tag{2.56}$$

$$w = \sqrt{r^2 + \sigma^2} \tag{2.57}$$

maka:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_i^2} \tag{2.58}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial y_j^2} \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial r^2}{\partial x_i}}{2\sqrt{r^2+\sigma^2}} \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y_i} = \frac{\frac{\partial r^2}{\partial y_i}}{2\sqrt{r^2+\sigma^2}} \tag{2.61}$$

Sehingga diperoleh turunan keduanya sebagaimana berikut:

$$M_{xx}(x_i, c_k) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}w - \frac{\partial w}{\partial x_i}u}{w^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_i^2}\right)\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right) - \left(\frac{\frac{\partial r^2}{\partial x_i}}{2\sqrt{r^2+\sigma^2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial x_i}\right)\right)}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^2} \tag{2.62}$$

$$M_{yy}(x_i, c_k) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}w - \frac{\partial w}{\partial x_i}u}{w^2}$$

$$M_{yy}(x_i, c_k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 r^2}{\partial y_j^2}\right)\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right) - \left(\frac{\frac{\partial r^2}{\partial y_j}}{2\sqrt{r^2+\sigma^2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial y_j}\right)\right)}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^2} \tag{2.63}$$

Dengan memasukkan r ke dalam persamaan (2.62) dan (2.63) maka akan diperoleh:

1) Turunan kedua fungsi multikuadrik 1D

$$r = \sqrt{(x_i - c_k)^2} \tag{2.64}$$

$$r^2 = (x_i - c_k)^2 \tag{2.65}$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial x} = 2(x_i - c_k) \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial^2 r^2}{\partial x^2} = 2 \tag{2.67}$$

$$M_{xx}(x_i, c_k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_i^2}\right)\right)\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right) - \left(\frac{\frac{\partial r^2}{\partial x_i}}{2\sqrt{r^2+\sigma^2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial x_i}\right)\right)}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2)\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2} - \left(\frac{2(x_i-c_k)}{2\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}}\left(\frac{1}{2}\left(2(x_i-c_k)\right)\right)\right)}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2} - \frac{(x_i-c_k)^2}{\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}}}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}\right)^2 - (x_i-c_k)^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{(x_i-c_k)^2+\sigma^2-(x_i-c_k)^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{\sigma^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}\right)^3} \tag{2.68}$$

2) Turunan kedua fungsi multikuadrik 2D

$$r \quad = \sqrt{(x_i - c_k)^2 + (y_j - d_k)^2} \tag{2.69}$$

$$r^2 \; = (x_i - c_k)^2 + (y_j - d_k)^2 \tag{2.70}$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial x_i} = 2(x_i - c_k) \tag{2.71}$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial y_j} = 2(y_j - d_k) \tag{2.72}$$

$$M_{xx}(x_i, c_k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_i^2}\right)\right)\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right) - \left(\frac{\frac{\partial r^2}{\partial x_i}}{2\sqrt{r^2+\sigma^2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial r^2}{\partial x_i}\right)\right)}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2)\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2} - \left(\frac{2(x_i-c_k)}{2\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}}\left(\frac{1}{2}\left(2(x_i-c_k)\right)\right)\right)}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2} - \frac{(x_i-c_k)^2}{\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}}}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^2 - (x_i-c_k)^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2-(x_i-c_k)^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{(y_j-d_k)^2+\sigma^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^3} = \frac{(y_j-d_k)^2+\sigma^2}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^3} \tag{2.73}$$

$$M_{yy}(x_i, c_k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 r^2}{\partial y_j^2}\right)\right)\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right) - \left(\frac{\frac{\partial r^2}{\partial y_j}}{2\sqrt{r^2+\sigma^2}}\left(\frac{1\partial r^2}{2\partial y_j}\right)\right)}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(2)\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2} - \left(\frac{2(y_j-d_k)}{2\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}}\left(\frac{1}{2}\left(2(y_j-d_k)\right)\right)\right)}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2} - \frac{(y_j-d_k)^2}{\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}}}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^2 - (y_j-d_k)^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2-(y_j-d_k)^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+(y_j-d_k)^2+\sigma^2}\right)^3} = \frac{(x_i-c_k)^2+\sigma^2}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^3} \quad (2.74)$$

2.7 Analisis Galat (*Erorr*)

Menganalisis galat sangat penting didalam perhitungan yang menggunakan metode numerik. Galat (*error*) dapat merepresentasikan sebarapa dekat solusi hampiran terhadap solusi analitiknya. Semakin kecil galatnya maka semakin teliti solusi numerik yang didapatkan. Sekecil apapun galat itu sangat berarti untuk mengetahui efektifitas sebuah metode numerik untuk menyelesaikan suatu persamaan.

Jika kita telaah secara mendalam sesungguhnya Allah SWT telah mengajarkan kepada kita agar menghargai segala hal yang ada di sekitar kita sekecil apapun itu termasuk galat dari suatu penyelesaian numerik. Dalam Al-Qur’an Allah SWT telah memberikan perumpaan dengan menggunakan makhluk-makhluk yang kecil seperti nyamuk, semut, bahkan *dzarrah* (biji sawi). Sebagaimana yang Allah SWT firmankan dalam Al- Qur’an surat Al- Zalzalah / 99 ayat 7-8 berikut ini

فَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٍ خَيۡرٗا يَرَهُۥ ٧ وَمَن يَعۡمَلۡ مِثۡقَالَ ذَرَّةٖ شَرّٗا يَرَهُۥ ٨

Artinya: Barangsiapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya. dan Barangsiapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrahpun, niscaya Dia akan melihat (balasan)nya pula (Q.S. Al-Zalzalah / 99 :7-8).

Dari ayat ini, dapat kita ketahui bahwa Allah SWT memperhitungkan amal manusia sampai sekecil *dzarrah* yang ditafsirkan sebagai biji sawi yang sangat kecil. Betapa Allah menghargai usaha hambaNya sampai hal yang sekecil-kecilnya tetap diperhitungkan olehNya. Oleh karena itu, sebagai insan yang diciptakan Allah patutnya kita tidak usah ragu untuk berbuat kebaikan karena sekecil apapun amal kita pasti Allah SWT memperhitungkannya.

Galat (*error*) ditinjau dari sumbernya dapat dibedakan menjadi dua yakni galat pemotongan dan galat pembulatan (Munir, 2008: 25).

Sedangkan jika ditinjau dari cara menghitung galat maka galat dibagi menjadi dua yakni galat mutlak (*absolute*) dan galat relatif. Adapun analisis galat yang digunakan dalam penelitian ini adalah analisis galat relatif yakni dengan membandingkan galat mutlak dengan nilai analitik fungsi. Misalkan $\hat{u}$ merupakan hampiran nilai analitik u maka galatnya adalah:

$$\varepsilon = u - \hat{u} \tag{2.75}$$

Galat mutlaknya diperoleh dengan memutlakan ε tanpa memperhitungkan tanda galat negatif maupun positif atau dapat juga didefinisikan sebagaimana berikut:

$$|\varepsilon| = |u - \hat{u}| \tag{2.76}$$

Adapun galat relatif digunakan untuk mengatasi interpretasi nilai galat yang kurang bermakna maka galat harus dinormalkan terhadap nilai analitiknya. Dan galat relatif ini didefinisikan sebagai

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{u} \tag{2.77}$$

atau dalam presentase

$$\varepsilon_R = \frac{\varepsilon}{u} \text{x } 100\% \tag{2.78}$$

Karena galat dinormalkan terhadap nilai sejati, maka galat relatif tersebut dinamakan galat relatif sejati. Namun jika galat (ε) dinormalkan dengan nilai pendekatannya maka galat relatif tersebut dinamakan galat relatif hampiran (Munir, 2008: 23-24).

2.8 Metode *Least Square*

Telah disebutkan pada bab sebelumnya bahwa untuk mencari nilai bobot *w* pada jaringan fungsi radial basis dapat menggunakan metode *least square*. Oleh karena itu, dalam sub bab ini akan diuraikan konsep dari metode *least square*. Metode *least square* merupakan metode untuk memperkecil *error* dengan menggunakan kuadrat jumlah dari galat (*erorr*).

Untuk mendapatkan nilai *w* dari persamaan (2.4) dengan fungsi basis multikuadrik dapat digunakan metode *least square* ini. Adapun prosesnya adalah sebagai berikut:

$$\hat{u}_i = f(x_i, w_k) = \sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k)$$
$$= w_1 M(x_i, c_k) + w_2 M(x_i, c_k) + \cdots + w_n M(x_i, c_k) \quad (2.79)$$

$\hat{u}_i = f(x_i, w_k)$ merupakan suatu fungsi dari x_i yang mengandung parameter w_k dengan i = 1, 2, 3, ..., m dan k = 1, 2, 3, ..., n. Setelah diketahui persamaan pendekatannya maka dapat dihitung selisih dari hasil analitik (u_i) dengan hasil pendekatannya ($\hat{u}_i$) yang disebut sebagai galat (*error*). Galat dapat dicari melalui persamaan (2.75) :

$$\varepsilon = u_i - \hat{u}_i$$
$$= u_i - \sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k) \quad (2.80)$$

Setelah diperoleh galat maka langkah selanjutnya adalah mencari jumlah kuadrat galatnya (*Sr*) yakni dengan :

$$\varepsilon_i{}^2 = (u_i - \hat{u}_i)^2$$
$$= u_i^2 - 2u_i\hat{u}_i + \hat{u}_i{}^2$$

$$\varepsilon_i{}^2 = u_i^2 - 2u_i \sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k) + (\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k))^2 \quad (2.81)$$

$$S_r = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i{}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (u_i^2 - 2u_i \sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k) + (\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k))^2) \quad (2.82)$$

Dengan menggunakan sifat kelinear $\sum$ maka persamaan (2.82) dapat dirubah menjadi persamaan (2.83) berikut ini :

$$s_r = \sum_{i=1}^{m} u_i^2 - \sum_{i=1}^{m} (2u_i \sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k)) \sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k))^2$$

Kemudian untuk mendapatkan nilai w_k, maka persamaan (2.83) dideferensialkan parsial terhadap w_k.

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_k} = \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{m} u_i^2 - \sum_{i=1}^{m}(2u_i \sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i)) + \sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i))^2\right)}{\partial w_k}$$

$$= \frac{\partial \sum_{i=1}^{m} u_i^2}{\partial w_k} - \frac{\partial \sum_{i=1}^{m}(2u_i \sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i))}{\partial w_k} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i))^2}{\partial w_k}$$

$$= 0 - \frac{\partial \sum_{i=1}^{m}(2u_i \sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i))}{\partial w_k} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k))^2}{\partial w_k}$$

$$= \frac{\partial \sum_{i=1}^{m}(2u_i \hat{u}_i)}{\partial w_k} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{m}(\hat{u}_i)^2}{\partial w_k}$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} 2u_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_k} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (\hat{u}_i)^2}{\partial w_k} \quad (2.84)$$

Dari persamaan 2.84 dapat kita ketahui bahwa untuk mendapatkan $\frac{\partial S_r}{\partial w_k}$ terlebih dahulu harus diketahui $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_k}$ dan $\frac{\partial (\hat{u}_i)^2}{\partial w_k}$. Dan $\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_k}$ dan $\frac{\partial (\hat{u}_i)^2}{\partial w_k}$ dapat diperoleh dari :

$$\hat{u}_i = \sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k)$$

$$= w_1 M(x_i, c_1) + w_2 M(x_i, c_2) + \cdots + w_n M(x_i, c_n) \quad (2.85)$$

dan

$$\hat{u}_i{}^2 = \left(w_1 M(x_i, c_1) + w_2 M(x_i, c_2) + \cdots + w_n M(x_i, c_n)\right)^2$$

$$\hat{u}_i^{\,2} = w_1M(x_i,c_1)\big(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big) +$$
$$w_2M(x_i,c_2)\big(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big) +$$
$$\ldots + w_nM(x_i,c_n)\big(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big)$$
$$= \big(w_1M(x_i,c_1)\big)^2 + \big(w_2M(x_i,c_2)\big)^2 + \cdots + \big(w_nM(x_i,c_n)\big)^2 +$$
$$2w_1M(x_i,c_1)\big(w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big) +$$
$$2w_2M(x_i,c_2)\big(w_3M(x_i,c_3) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big) + \cdots +$$
$$2w_{n-1}M(x_i,c_{n-1}) \qquad (2.86)$$

Sehingga :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial w_k}\left(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\right) \qquad (2.87)$$

Jika k =(1,2,...,n) disubsitusikan ke dalam persamaan maka akan diperoleh:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_1} = \frac{\partial}{\partial w_1}\left(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\right)$$
$$= M(x_i,c_1)$$
$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_2} = \frac{\partial}{\partial w_1}\left(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\right)$$
$$= M(x_i,c_2)$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_n} = \frac{\partial}{\partial w_1}\left(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\right)$$
$$= M(x_i,c_n)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_k} = M(x_i,c_k) \qquad k = 1,2,3,\ldots,n \qquad (2.88)$$

dan dengan memasukkan nilai k satu persatu ke dalam persamaan (2.86) maka akan diperoleh:

$$\frac{\partial(\hat{u}_i)^2}{\partial w_1} = 2w_1M^2(x_i,c_1) + 2M(x_i,c_1)\big(w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big)$$

$$= 2M(x_i,c_1)\big(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big)$$

$$\frac{\partial(\hat{u}_i)^2}{\partial w_2} = 2w_2M^2(x_i,c_2) + 2w_1M(x_i,c_1)M(x_i,c_2) +$$

$$2M(x_i,c_2)\big(w_3M(x_i,c_3) + \quad ... + w_nM(x_i,c_n)\big)$$

$$= 2M(x_i,c_2)\big(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big)$$

$$\frac{\partial(\hat{u}_i)^2}{\partial w_3} = 2w_3M^2(x_i,c_3) + 2w_1M(x_i,c_1)M(x_i,c_3) +$$

$$2w_1M(x_i,c_2)M(x_i,c_3) + 2M(x_i,c_3)\big(w_3M(x_i,c_3) + \ ... +$$

$$w_nM(x_i,c_n)\big)$$

$$= 2M(x_i,c_3)\big(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \ddots$$

$$\frac{\partial(\hat{u}_i)^2}{\partial w_n} = 2M(x_i,c_n)\big(w_1M(x_i,c_1) + w_2M(x_i,c_2) + \cdots + w_nM(x_i,c_n)\big)$$

Dengan demikian diferensial $(\hat{u}_i)^2$ terhadap w_k dapat dirumuskan menjadi:

$$\frac{\partial(\hat{u}_i)^2}{\partial w_k} = 2M(x_i,c_k)\left(\sum_{l=1}^{n} w_lM(x_i,c_l)\right) \qquad k=l=1,2,..,n. \qquad (2.89)$$

Dengan mensubsitusikan persamaan (2.88) dan persamaan (2.89) ke dalam persamaan (2.84) maka akan diperoleh jumlah kuadrat galat yang telah dideferensial parsialkan terhadap w_k, yaitu:

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_k} = \sum_{i=1}^{m} -2u_i\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_k} + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial(\hat{u}_i)^2}{\partial w_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} -2u_i\, M(x_i,c_k) + \sum_{i=1}^{m} 2M(x_i,c_k)\left(\sum_{l=1}^{n} w_lM(x_i,c_l)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} -2M(x_i,c_k)\left(u_i - \sum_{l=1}^{n} w_lM(x_i,c_l)\right)$$

$$= -2\{\textstyle\sum_{i=1}^{n}[u_i - \sum_{l=1}^{n} w_l M(x_i, c_l)]\, M(x_i, c_k)\} \tag{2.90}$$

Dengan menyamadenganankan persamaan (2.90) dengan nol maka akan diperoleh persamaan berikut (Kiusalas. 2005: 125-127):

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_k} = 0$$

$$-2\{\textstyle\sum_{i=1}^{m}[u_i - \sum_{l=1}^{n} w_l M(x_i, c_l)]\, M(x_i, c_k)\} = 0 \tag{2.91}$$

$$\{\textstyle\sum_{i=1}^{m}[u_i M(x_i, c_k) - \sum_{l=1}^{n} w_l M(x_i, c_l)\, M(x_i, c_k)]\} = 0 \tag{2.92}$$

$$\textstyle\sum_{l=1}^{n} w_l \left[\sum_{i=1}^{m} M(x_{i,} c_l) M(x_i, c_k)\right] = \sum_{i=1}^{m} u_i M(x_i, c_k) \tag{2.93}$$

Persamaan (2.93) dapat diubah ke dalam persamaan matrik **M*w*=f.**

Dimana:

$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{m} M(x_{i,} c_l) M(x_i, c_k)$,

$\boldsymbol{w} = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$ dan

$\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{m} u_i M(x_i, c_k)$

Dan persamaan matriknya digambarkan pada persamaan (2.94) berikut:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} M^2(x_i, c_1) & \sum_{j=1}^{m} M(x_{i,} c_2) M(x_i, c_1) & \dots & \sum_{j=1}^{m} M(x_{i,} c_n) M(x_i, c_1) \\ \sum_{j=1}^{m} M(x_{i,} c_1) M(x_i, c_2) & \sum_{i=1}^{m} M^2(x_{i,} c_2) & \dots & \sum_{j=1}^{m} M(x_{i,} c_n) M(x_i, c_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots \\ \sum_{j=1}^{m} M(x_{i,} c_1) M(x_i, c_n) & \sum_{j=1}^{m} M(x_{i,} c_2) M(x_i, c_n) & \dots & \sum_{i=1}^{m} M^2(x_{i,} c_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} u_i M(x_i, c_1) \\ \sum_{i=1}^{m} u_i M(x_i, c_2) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} u_i M(x_i, c_n) \end{bmatrix}$$

Dari persamaan matrik 2.94 kita dapat mencari nilai koefisien (w_j) dengan menggunakan metode berikut:

a. Metode Invers

$\boldsymbol{w}$=**M**\\$\boldsymbol{f}$ (2.95)

b. Metode invers

$\boldsymbol{w}=\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{f}$ (2.96)

Metode ini hanya dapat digunakan untuk matrik persegi.

c. Metode Pseudoinvers

Jika matrik ***f*** bukan merupakan matrik persegi maka dapat menggunakan metode psedu invers.

$$\mathbf{M}*\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$$

$$\mathbf{M}^{\mathbf{T}}*\mathbf{M}*\boldsymbol{w} = \mathbf{M}^{\mathbf{T}}*\boldsymbol{y}$$

$$(\mathbf{M}^{\mathbf{T}}*\mathbf{M})^{-1}*\mathbf{M}^{\mathbf{T}}*\mathbf{M}*\boldsymbol{w} = (\mathbf{M}^{\mathbf{T}}*\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}*\boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{w}=(\mathbf{M}^{\mathbf{T}}*\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^{\mathbf{T}}*\boldsymbol{f} \tag{2.97}$$

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis dan Sumber Penelitian

Penelitian yang akan dilakukan adalah penelitian dasar (*basic reseach*) melalui pendekatan kepustakaan (*library research*). Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil kajian literatur dan hasil olah pikir peneliti mengenai suatu permasalahan atau topik kajian. Studi kepustakaan berisi satu topik kajian yang di dalamnya memuat beberapa gagasan dan atau proposisi yang berkaitan dan harus didukung oleh data yang diperoleh dari sumber kepustakaan.

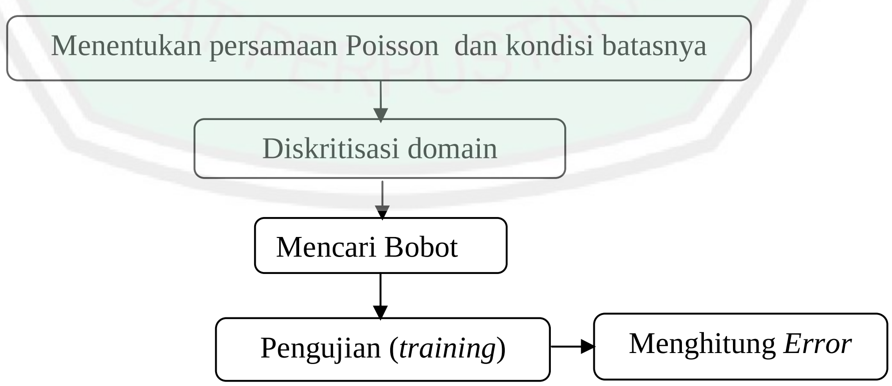
Sumber kajian pustaka dapat berupa jurnal penelitian, disertasi, tesis, skripsi, laporan penelitian, atau diskusi-diskusi ilmiah. Bahan-bahan pustaka tersebut harus dibahas secara mendalam sehingga mendukung gagasan dan atau proposisi untuk menghasilkan kesimpulan dan saran. Data yang diperlukan dalam penelitian ini adalah data yang bersifat tekstual meliputi persamaan Poisson, jaringan syaraf tiruan, jaringan fungsi radial basis.

3.2 Metode Analisis Data

Penelitian ini menggunakan analisis numerik dalam mengolah data yang ada yakni persamaan Poisson. Adapun metode numerik yang digunakan adalah metode jaringan fungsi radial basis. Metode ini merupakan salah satu dari bentuk skema jaringan syaraf tiruan yang banyak dikembangkan dalam bidang komputasi.

Konsep kerja jaringan syaraf tiruan ini adalah dengan menggunakan tiga lapisan yaitu lapisan *input*, lapisan tersembunyi, dan lapisan *output*. Dimana pada lapisan tersembunyi terdapat fungsi basis untuk mengolah data *input* menjadi persamaan yang nonlinear. Sedangkan *output* dari jaringan merupakan kombinasi linear dari perkalian keluaran dari lapisan tersembunyi dengan bobot (w) tertentu. Untuk mendapatkan bobot yang sesuai maka perlu adanya pembelajaran (*training*) terhadap jaringan sebelum akhirnya jaringan ini diuji.

Untuk penggunaan jaringan fungsi radial basis dalam menyelesaikan persamaan Poisson dapat dilakukan dengan memasukkan hasil diskritisasi domain persamaan ke dalam lapisan *input*. Dari situ nilai bobot (w) dapat diperoleh dengan proses *training*. Kemudian bobot (w) yang ada digunakan untuk proses aproksimasi fungsi yang ingin di cari . Untuk lebih jelasnya dapat diperlihatkan pada diagram alir berikut:



Gambar 3.1 Diagram Alir Proses Analisis Numerik Persamaan Poisson dengan Jaringan Fungsi Radial Basis

3.3 Algoritma Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson dengan Jaringan Fungsi Radial Basis.

3.3.1 Algoritma *Training* (Menentukan Koefisien bobot (*w*))

1. Masukkan n data pelatihan meliputi

   $x = [x_1, x_2, x_3……,x_n]$

   $y = [y_1, y_2, y_3……,y_n]$

2. Gunakan data *input* sebagai center
3. Masukkan data input ke dalam contoh kasus persamaan
4. Membentuk sebuah matrik laplacian dari fungsi basis mutikuadrik (*L*).
5. Gunakan metode *least square* untuk memperoleh bobot
6. *Output* : bobot (*w*).

3.3.2 Algoritma Pengujian (*Training*)

1. Masukkan m data training dengan dengan m ≥ n

   $x = [x_1, x_2, x_3……,x_m]$

   $y = [y_1, y_2, y_3……,y_m]$

   $w = [w_1, w_2, w_3,…., w_n]$

2. Gunakan data *input* pada tahap pembelajaran sebagai center
3. Membentuk sebuah matrik fungsi basis multikuadrik (M).
4. Kalikan matrik fungsi basis dengan vektor bobot (*w*) dari proses *training*.
5. *Output* : nilai aproksimasi fungsi

3.3.3 Algoritma Analisis Galat (*Error*)

1. Menghitung nilai analitik
2. Menghitung nilai pendekatan
3. Menghitung galat antar nilai analitik dengan nilai pendekatan.
4. *Output* : galat.

BAB IV

PEMBAHASAN

Perasamaan Poisson mempunyai bentuk umum:

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{4.1}$$

dengan kondisi batas:

$U_{1,j} = g(x_1, y_j)$ $\quad$ $U_{n,j} = g(x_m, y_j)$

$U_{i,1} = g(x_i, y_1)$ $\quad$ $U_{i,n} = g(x_i, y_n)$

Keterangan:

i= 1, 2, 3,…,m

j=1, 2, 3,…,n

Persamaan ini sering muncul pada masalah fisis dan teknik. Ada banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan ini. Namun, pada tugas akhir ini hanya akan dijabarkan metode penyelesaian numerik dari persamaan Poisson ini yaitu dengan metode jaringan fungsi radial basis.

4. 1 METODE JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS UNTUK MENENTUKAN SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN POISSON

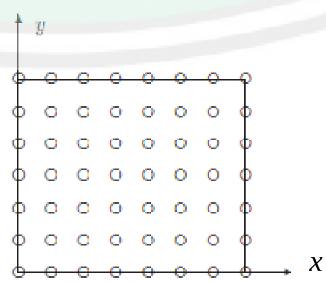
Jaringan fungsi radial basis dapat digunakan sebagai metode alternatif untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Pada pembahasan kali ini ini akan dipaparkan mengenai konsep dari jaringan fungsi radial basis dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial bentuk elliptik yakni pada persamaan Poisson. Ada beberapa langkah yang harus dilakukan untuk menyelesaikan persamaan Poisson dengan jaringan fungsi radial basis. Untuk langkah umum dan pemrogramannya sudah dijelaskan pada di bab sebelumnya.

Langkah 1

Menentukan Persamaan Poisson yang akan diselesaikan beserta kondisi batasnya. Persamaan (4.1) adalah bentuk umum dari persamaan Poisson. Pada penerapannya, setiap contoh kasus yang diambil mempunyai fungsi $f(x,y)$ serta kondisi batas yang berbeda- beda. Sehingga perlu adanya pendefinisian fungsi $f(x,y)$yang diambil beserta kondisi batasnya.

Langkah 2

Mendiskritisasi domain dengan cara membagi domain ke dalam beberapa bagian yang lebih kecil. Hal ini dapat dilakukan dengan membagi daerah x dan y menjadi beberapa bagian yang lebih kecil. Sehingga dapat diketahui jarak antara x yang satu dengan x yang berikutnya yang kemudian disebut sebagai Δx. Begitu juga dengan y, terdapat jarak antara y yang satu dengan y setelahnya yang disebut sebagai Δy. Hasil dari pendiskritisasian ini jika digambarkan akan membentuk sebuah jala pada domain. Dimana akan dicari nilai fungsi pada titik-titik pertemuan antar x dan y.



Gambar 4.1 Gambar Diskritisasi Domain Persamaan Poisson

Langkah 3

Setelah mendiskritisasi domain menjadi beberapa bagian, maka langkah selanjutnya adalah merubah persamaan Poisson yang telah didefinisikan beserta kondisi batasnya ke dalam persamaan jaringan fungsi radial basis. Seperti yang telah diuraikan pada bab II bahwa suatu fungsi U serta turunan-turunannya dapat didekati dengan persamaan jaringan fungsi radial basis. Adapun untuk mengaproksimasi fungsi U dari persamaan Poisson (4.1) dengan fungsi basis multikuadrik, dapat digunakan persamaan (2.15) dengan mengganti fungsi basisnya dengan fungsi multikuadrik (M) sebagaimana berikut:

$$U\big((x_i, y_j), w\big) = \sum_{k=1}^{n} w_k M\big(x_i, c_{k,} y_j, d_k\big) \qquad i = j = 1,2,3, \dots, m \quad (4.2)$$

Sedangkan laplacian dari U dapat didekati dengan menggunakan turunan parsial kedua U baik yang terhadap x maupun terhadap y. Jika melihat pada persamaan (2.19) maka turunan kedua U baik terhadap x maupun y dapat didekati dengan:

$$\frac{\partial^2 U(x_i, y_j)}{\partial x^2} = U_{xx} = \frac{\partial^2\left(\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_{k,} y_j, d_k)\right)}{\partial x^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k \frac{\partial^2 M(x_i, c_{k,} y_j, d_k)}{\partial x^2} \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} w_k \; konstanta\right)$$

$$= \sum_{a=1}^{n} w_k M_{xx}\big(x_i, c_{k,} y_j, d_k\big) \qquad i = j = 1,2,3, \dots, m \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial U^2(x_i, y_j)}{\partial y^2} = U_{yy} = \frac{\partial^2\left(\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_{k,} y_j, d_k)\right)}{\partial y^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k \frac{\partial^2 M(x_i, c_{k,} y_j, d_k)}{\partial y^2}$$

$$= \sum_{a=1}^{n} w_k M_{yy}\big(x_i, c_{k,} y_j, d_k\big) \qquad i = j = 1,2,3, \dots, m \quad (4.4)$$

Keterangan:

M : fungsi multikuadrik 2D yang diperoleh dari persamaan (2.39) berikut

$$M(x_i, c_k) = \sqrt{r^2 + \sigma^2}$$

$$= \sqrt{(x_i - c_k)^2 + \left(y_j - c_k\right)^2 + \sigma^2}$$

M_{xx} : turunan parsial kedua fungsi multikuadrik terhadap x yang diperoleh dari persamaan 2. 73

$$M_{xx} = \frac{\left(y_j-d_k\right)^2+\sigma^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+\left(y_j-d_k\right)^2+\sigma^2}\right)^3} = \frac{\left(y_j-d_k\right)^2+\sigma^2}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^3}$$

M_{yy} : turunan parsial kedua fungsi multikuadrik terhadap x yang diperoleh dari persamaan 2. 74

$$M_{yy} = \frac{(x_i-d_k)^2+\sigma^2}{\left(\sqrt{(x_i-c_k)^2+\left(y_j-d_k\right)^2+\sigma^2}\right)^3} = \frac{(y_i-d_k)^2+\sigma^2}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^3}$$

Dengan mensubsitusikan persamaan (4.2) sampai (4.4) ke dalam persamaan (4.1) maka akan didapatkan persamaan:

$$\sum_{a=1}^{n} w_a M_{xx}\left(x_i, c_{a,} y_j, d_a\right) + \sum_{a=1}^{n} w_a M_{yy}\left(x_i, c_{a,} y_j, d_a\right) = f(x_i, y_j) \qquad (4.5)$$

$$\sum_{a=1}^{n} w_a \left(M_{xx}\left(x_i, c_{a,} y_j, d_a\right) + M_{yy}\left(x_i, c_{a,} y_j, d_a\right)\right) = f(x_i, y_j) \qquad (4.6)$$

Misal:

$$L\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right) = M_{xx}\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right) + M_{yy}\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^2-(x_i-c_k)^2}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^3} + \frac{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^2-(y_i-c_k)^2}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{(r^2+\sigma^2)+(r^2+\sigma^2)-((x_i-c_k)^2+(y_i-c_k)^2)}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$= \frac{2(r^2+\sigma^2)-(r^2)}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^3}$$

$$L\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right) = \frac{r^2+2\sigma^2}{\left(\sqrt{r^2+\sigma^2}\right)^3} \tag{4.7}$$

maka persamaan (4.1) dapat ditulis menjadi :

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \, L\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right) = f\left(x_i, y_j\right) \tag{4.8}$$

Dengan kondisi batas:

$$U_{1,j} = g\left(x_1, y_j\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_1, c_{k,} y_j, d_k\right) = g\left(x_1, y_j\right) \tag{4.9}$$

$$U_{m,j} = g\left(x_m, y_j\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_m, c_{k,} y_j, d_k\right) = g\left(x_m, y_j\right) \tag{4.10}$$

$$U_{i,1} = g(x_i, y_1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k, y_1, d_k) = g(x_i, y_1) \tag{4.11}$$

$$U_{i,m} = g(x_i, y_m)$$

$$\sum_{k=1}^{n} w_k M(x_i, c_k, y_m, d_k) = g(x_i, y_m) \tag{4.12}$$

Langkah 4

Nilai bobot (*w*) mempunyai peranan penting pada metode jaringan fungsi radial basis. Karena nilai bobot ini yang kemudian digunakan untuk mengaproksimasi selesaian dari persamaan Poisson atau untuk mencari nilai fungsi *U*. Oleh karena itu nilai *w* harus cukup representatif untuk digunakan dalam mengaproksimasi fungsi *U*. Artinya jika bobot (*w*) digunakan untuk mengaproksimasi fungsi *U* akan menghasilkan nilai fungsi dengan galat yang sekecil-kecilnya.

Untuk mendapatkan nilai *w* dapat digunakan beberapa metode. Namun, pada penelitian ini akan digunakan metode *least square* dimana metode ini mengasumsikan bahwa galat dari persamaan (4.8) mendekati nol. Prinsip utama pada metode ini adalah bagaimana caranya untuk mendapatkan nilai w yang dapat menghasilkan galat (e) sekecil mungkin sebagaimana yang telah dijelaskan pada bab kajian pustaka.

Dalam masalah persamaan dengan kondisi batas tertentu, nilai bobot (w) yang dihasilkan dituntut untuk sesuai dengan PDP dan kondisi batasnya. Sehingga untuk mendapatkan bobot yang demikian maka digunakan penjumlahan dari jumlah kuadrat galat(*Sum Square error*) dari PDP serta kondisi batasnya. Secara matematis dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} S_r = &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(f(x_i, y_j) - \sum_{k=1}^{n} w_k L\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right)\right) + \\ &\sum_{j=1}^{m}\left(g\left((x_1, y_j)\right) - \sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_i, c_{1,} y_j, d_k\right)\right) + \\ &\sum_{j=1}^{m}\left(g\left((x_m, y_j)\right) - \sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_m, c_{k,} y_j, d_k\right)\right) + \\ &\sum_{i=1}^{m}\left(g((x_i, y_1)) - \sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_m, c_{k,} y_1, d_k\right)\right) + \\ &\sum_{i=1}^{m}\left(g((x_i, y_m)) - \sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_i, c_{k,} y_m, d_k\right)\right) \to 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Misal :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(U\left((x_i, y_j), w\right) - \sum_{k=1}^{n} w_k L\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right)\right) \quad (4.14)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{m}\left(g\left((x_1, y_j), w\right) - \sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_i, c_{1,} y_j, d_k\right)\right) \quad (4.15)$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{m}\left(g\left((x_m, y_j), w\right) - \sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_m, c_{k,} y_j, d_k\right)\right) \quad (4.16)$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{m}\left(g((x_i, y_1), w) - \sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_m, c_{k,} y_1, d_k\right)\right) \quad (4.17)$$

$$S_5 = \sum_{i=1}^{m}\left(g((x_i, y_m), w) - \sum_{k=1}^{n} w_k M\left(x_i, c_{k,} y_m, d_k\right)\right) \quad (4.18)$$

maka *Sr* dapat ditulis menjadi:

$$S_r = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \to 0 \quad (4.19)$$

Dan untuk mendapatkan nilai bobot (w) maka S_r diturunkan parsial terhadap w_k dan menyamadengankannya dengan nol seperti berikut ini:

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_k} = \frac{\partial}{\partial w_k}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5) = 0 \quad (4.20)$$

Berdasarkan teorema aturan jumlah pada diferensial yang menyebutkan bahwa jika f dan g fungsi-fungsi yang terdiferensialkan maka (Purcell,1993 :116):

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Sehingga persamaan (4.20) dapat juga ditulis dengan:

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_k} = \frac{\partial S_1}{\partial w_k} + \frac{\partial S_2}{\partial w_k} + \frac{\partial S_3}{\partial w_r} + \frac{\partial S_4}{\partial w_r} + \frac{\partial S_5}{\partial w_r} \quad (4.21)$$

Turunan parsial dari S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 dapat diperoleh dengan dengan merubah u_i dan $\hat{u}_i$ pada persamaan (2.90) berikut:

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_k} = \sum_{i=1}^{m} -2u_i \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial w_k} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (\hat{u}_i)^2}{\partial w_k}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} -2u_i\, M(x_i, c_k) + \sum_{i=1}^{m} 2M(x_i, c_k)\left(\sum_{l=1}^{n} w_l M(x_i, c_l)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} -2M(x_i, c_k)\left(u_i - \sum_{l=1}^{n} w_l M(x_i, c_l)\right)$$

$$= -2\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[u_i - \sum_{l=1}^{n} w_l M(x_i, c_l)\right] M(x_i, c_k)\right\}$$

sesuai dengan persamaan yang akan diturunkan parsial terhadap w_k .

Keterangan:

u_i = fungsi analitik atau yang sudah diketahui

$\hat{u}_i$ = fungsi pendekatan untuk u_i yang berupa persamaan jaringan fungsi radial basis

$M(x_i, c_k)$= fungsi koefisien w_k

Untuk turunan parsial masing-masing S akan diuraikan di bawah ini. Telah diketahui bahwasanya:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\underbrace{f(x_i, y_j)}_{u_i} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_k \, L(x_i, c_{k,} y_j, d_k)}_{\hat{u}_i} \right)^2 \quad (4.22)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{m} \left(\underbrace{g(x_1, y_j)}_{u_i} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_k \, M(x_1, c_{k,} y_j, d_k)}_{\hat{u}_i} \right)^2 \quad (4.23)$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{m} \left(\underbrace{g(x_m, y_j)}_{u_i} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_k \, M(x_m, c_{k,} y_j, d_k)}_{\hat{u}_i} \right)^2 \quad (4.24)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\underbrace{g(x_i, y_1)}_{u_i} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_k \, M(x_i, c_{k,} y_m, d_k)}_{\hat{u}_i} \right)^2 \quad (4.25)$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{m} \left(\underbrace{g(x_i, y_m)}_{u_i} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_k \, M(x_i, c_{k,} y_m, d_k)}_{\hat{u}_i} \right)^2 \quad (4.26)$$

Kemudian dengan mengganti u_i dan $\hat{u}_i$ pada persamaan (2.90) dengan u_i dan $\hat{u}_i$ pada persamaan (4.22) sampai (4.25) maka akan diperoleh:

$$\frac{\partial S_1}{\partial w_k} = -2\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(f\left(x_i, y_j\right) - \sum_{l=1}^{n} w_k \, L\left(x_i, c_{l,} y_j, d_l\right)\right) L\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right)\right\}$$

$$= -2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i, y_j\right) L\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right) -$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l \, L(x_i, c_l, y_j, d_l)\right) L(x_i, c_l, y_j, d_l) \quad (4.27)$$

$$= -2\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(g(x_1, y_j) - \sum_{l=1}^{n} w_l \, M(x_1, c_{l,} y_j, d_l)\right) M(x_1, c_l, y_j, d_l)\right\}$$

$$= -2\{\sum_{j=1}^{m} g(x_1, y_j) M(x_1, c_k, y_j, d_k) -$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_a \, M(x_1, c_{l,} y_j, d_l)\right) M(x_1, c_{k,} y_j, d_k)\} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial S_3}{\partial w_k} = -2\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(g\left(x_m, y_j\right) - \sum_{l=1}^{n} w_l \, M\left(x_m, c_{l,} y_j, d_l\right)\right) M\left(x_m, c_l, y_j, d_l\right)\right\}$$

$$= -2\{\sum_{j=1}^{m} g(x_m, y_j) M(x_m, c_k, y_j, d_k) -$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_a\, M\left(x_m, c_{l,} y_j, d_l\right)\right) M\left(x_m, c_{k,} y_j, d_k\right)\} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial S_4}{\partial w_k} = -2\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(g\left(x_i, y_1\right) - \sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_i, c_{l,} y_1, d_l\right)\right) M\left(x_i, c_l, y_1, d_l\right)\right\}$$

$$= -2\,\{\sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_1) M(x_i, c_k, y_1, d_k) -$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_a\, M\left(x_i, c_{l,} y_1, d_l\right)\right) M\left(x_i, c_{k,} y_1, d_k\right)\} \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial S_5}{\partial w_k} = -2\left\{\sum_{i=1}^{m}\left(g\left(x_i, y_m\right) - \sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_i, c_l, y_m, d_l\right)\right) M\left(x_i, c_l, y_m, d_l\right)\right\}$$

$$= -2\,\{\sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_m) M(x_i, c_k, y_m, d_k) -$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_a\, M\left(x_i, c_{l,} y_m, d_l\right)\right) M\left(x_i, c_{k,} y_m, d_k\right)\} \quad (4.31)$$

Dengan mensubsitusikan persamaan (4.27) sampai persamaan (4.31) ke dalam persamaan (4.20) maka akan didapatkan

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_k} = \frac{\partial S_1}{\partial w_k} + \frac{\partial S_2}{\partial w_k} + \frac{\partial S_3}{\partial w_r} + \frac{\partial S_4}{\partial w_r} + \frac{\partial S_5}{\partial w_r}$$

$$= -2\,\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i, y_j\right) L\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right) -$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, L\left(x_i, c_l, y_j, d_l\right)\right) L\left(x_i, c_l, y_j, d_l\right)\} +$$

$$-2\,\{\sum_{j=1}^{m} g\left(x_1, y_j\right) M\left(x_1, c_k, y_j, d_k\right) -$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_1, c_{l,} y_j, d_l\right)\right) M\left(x_1, c_{k,} y_j, d_k\right)\} +$$

$$-2\,\{\sum_{j=1}^{m} g\left(x_m, y_j\right) M\left(x_m, c_k, y_j, d_k\right) -$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_m, c_{l,} y_j, d_l\right)\right) M\left(x_m, c_{k,} y_j, d_k\right)\}+$$

$$-2\,\{\sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_1) M(x_i, c_k, y_1, d_k) -$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_i, c_{l,} y_1, d_l\right)\right) M\left(x_i, c_{k,} y_1, d_k\right)\}+$$

$$-2\{\sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_m) M(x_i, c_k, y_m, d_k) -$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_i, c_l, y_m, d_l\right)\right) M\left(x_i, c_k, y_m, d_k\right)\}$$

$$= 2\,\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, L\left(x_i, c_l, y_j, d_l\right)\right) L\left(x_i, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_1, c_l, y_j, d_l\right)\right) M\left(x_1, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_m, c_l, y_j, d_l\right)\right) M\left(x_m, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_i, c_l, y_1, d_l\right)\right) M\left(x_i, c_k, y_1, d_k\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l\, M\left(x_i, c_l, y_m, d_l\right)\right) M\left(x_i, c_k, y_m, d_k\right) - 2$$

$$\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i, y_j\right) L\left(x_i, c_k, y_j, d_k\right) + \sum_{j=1}^{m} g\left(x_1, y_j\right) M\left(x_1, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{j=1}^{m} g(x_m, y_j) M(x_m, c_k, y_j, d_k) + \sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_1) M(x_i, c_k, y_1, d_k) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_m) M(x_i, c_k, y_m, d_k)\}$$

$$= 2\sum_{l=1}^{n} w_l\,\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} L\left(x_i, c_l, y_j, d_l\right) L\left(x_i, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{j=1}^{m} M\left(x_1, c_l, y_j, d_l\right) M\left(x_1, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{j=1}^{m} M\left(x_m, c_l, y_j, d_l\right) M\left(x_m, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} M\left(x_i, c_l, y_1, d_l\right) M\left(x_i, c_k, y_1, d_k\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} M\left(x_i, c_l, y_m, d_l\right) M\left(x_i, c_k, y_m, d_k\right)\} - 2$$

$$\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i, y_j\right) L\left(x_i, c_k, y_j, d_k\right) + \sum_{j=1}^{m} g\left(x_1, y_j\right) M\left(x_1, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{j=1}^{m} g(x_m, y_j) M(x_m, c_k, y_j, d_k) + \sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_1) M(x_i, c_k, y_1, d_k) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_m) M(x_i, c_k, y_m, d_k)\} \qquad (4.32)$$

Misal:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} L\left(x_i, c_l, y_j, d_l\right) L\left(x_i, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{j=1}^{m} M\left(x_1, c_l, y_j, d_l\right) M\left(x_1, c_k, y_j, d_k\right) +$$

$$\sum_{j=1}^{m} M(x_m, c_{l,} y_j, d_l) M(x_m, c_{k,} y_j, d_k) \ +$$

$$\sum_{i=1}^{m} M(x_i, c_{l,} y_1, d_l)\, M(x_i, c_{k,} y_1, d_k) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} M(x_i, c_{l,} y_m, d_l)\, M(x_i, c_{k,} y_m, d_k) \quad (4.33)$$

$\boldsymbol{w} = w_k = (w_1, w_2, \dots, w_m)$

dan

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) L(x_i, c_{k,} y_j, d_k) + \sum_{j=1}^{m} g(x_1, y_j) M(x_1, c_k, y_j, d_k) +$$

$$\sum_{j=1}^{m} g(x_m, y_j) M(x_m, c_k, y_j, d_k) + \sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_1) M(x_i, c_k, y_1, d_k) +$$

$$\sum_{i=1}^{m} g(x_i, y_m) M(x_i, c_k, y_m, d_k) \quad (4.34)$$

Maka :

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_k} = \boldsymbol{Aw} - \boldsymbol{b} \quad (4.35)$$

Selanjutnya $\frac{\partial S_r}{\partial w_k}$ diminimum dengan disamadenganka dengan nol sehingga didapatkan:

$$\frac{\partial S_r}{\partial w_k} = 0 \quad (4.36)$$

$$\boldsymbol{Aw} - \boldsymbol{b} = 0 \quad (4.37)$$

$$\boldsymbol{Aw} = \boldsymbol{b} \quad (4.38)$$

Dengan demikian nilai bobot (w) dari persamaan Poisson dapat dicari dengan menggunakan beberapa metode. Namun pada penelitian kali ini akan digunakan

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b} \quad (4.39)$$

Langkah 5 :Mencari solusi persamaan Poisson dengan menggunakan bobot yang telah didapatkan dari langkah 4

Mengaproksimasi solusi numerik dari persamaan Poisson dengan menggunakan *w* yang didapatkan dari langkah 4. Sebagaimana telah disebutkan bahwa untuk mengaproksimasi fungsi dengan jaringan fungsi radial basis ini tidak perlu mengubah nilai *w* dan hanya mengubah fungsi basisnya saja. Jadi, untuk mendapatkan nilai $U(x,y)$ cukup dengan mengalikan *w* dengan fungsi basisnya seperti berikut ini:

$$U\left(\left(x_i, y_j\right), w\right) = \sum_{k=1}^{n} w_k M_k\left(\left(x_i, c_k, y_j, d_k\right)\right)$$

$$= M_1\left(x_i, c_1, y_j, d_1\right) + w_2 M_2\left(x_i, c_2, y_j, d_2\right) + \cdots + w_n M_n\left(x_i, c_n, y_j, d_n\right) \quad (4.40)$$

Karena untuk:

$i = 1$ dan $j = 1$,

$$U(x_1, y_1) = \sum_{a=1}^{n} w_a\, M\left(x_1, c_{a,} y_1, d_a\right)$$

$$= w_1 M\left(x_1, c_{1,} y_1, d_1\right) + \cdots + w_n M(x_1, c_n y_1, d_n) \quad (4.40a)$$

$i = 1$ dan $j = 2$,

$$U(x_1, y_2) = \sum_{a=1}^{n} w_a\, M\left(x_1, c_{a,} y_2, d_a\right)$$

$$= w_1 M\left(x_1, c_{1,} y_1, d_1\right) + \cdots + w_n M(x_1, c_n y_1, d_n) \quad (4.40b)$$

$\vdots \qquad\qquad \ddots$

$i = 1$ dan $j = m$,

$$U(x_1, y_m) = \sum_{a=1}^{n} w_a\, M\left(x_1, c_{a,} y_m, d_a\right)$$

$$= w_1 M\left(x_1, c_{1,} y_m, d_1\right) + \cdots + w_n M(x_1, c_n y_1, d_n) \quad (4.40c)$$

i = 2 dan j = 1,

$$U(x_2, y_1) = \sum_{a=1}^{n} w_a\, M\big(x_2, c_{a,} y_1, d_a\big)$$

$$= w_1 M\big(x_2, c_{1,} y_1, d_1\big) + \cdots + w_n M(x_2, c_n y_1, d_n) \qquad (4.40d)$$

$\vdots \qquad \ddots$

i = 2 dan j = m,

$$U(x_2, y_m) = \sum_{a=1}^{n} w_a\, M\big(x_2, c_{a,} y_m, d_a\big)$$

$$= w_1 M\big(x_2, c_{1,} y_m, d_1\big) + \cdots + w_n M(x_2, c_n y_m, d_n) \qquad (4.40e)$$

$\vdots \qquad \ddots$

i= l dan j= 1,

$$U(x_1, y_1) = \sum_{a=1}^{n} w_a\, M\big(x_l, c_{a,} y_1, d_a\big)$$

$$= w_1 M\big(x_l, c_{1,} y_1, d_1\big) + \cdots + w_n M(x_l, c_n y_1, d_n) \qquad (4.40f)$$

$\vdots \qquad \ddots$

i = l dan j = m,

$$U(x_1, y_1) = \sum_{a=1}^{n} w_a\, M\big(x_l, c_{a,} y_m, d_a\big)$$

$$= w_1 M\big(x_l, c_{1,} y_m, d_1\big) + \cdots + w_n M(x_l, c_n y_m, d_n) \qquad (4.40g)$$

Maka persamaan di atas dapat diubah ke dalam bentuk matrik berikut:

$$\begin{bmatrix} M_1(x_1, c_{1,}y_1, d_1) & M_2(x_1, c_{2,}y_1, d_2) & \dots & M_n(x_1, c_{n,}y_1, d_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1(x_1, c_{1,}y_m, d_1) & M_2(x_1, c_{1,}y_m, d_1) & \dots & M_n(x_1, c_{n,}y_m, d_n) \\ & & \ddots & \\ M_1(x_l, c_{1,}y_1, d_1) & M_2(x_l, c_{2,}y_1, d_2) & \dots & M_n(x_l, c_{n,}y_1, d_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1(x_l, c_{1,}y_m, d_1) & M_1(x_l, c_{1,}y_m, d_1) & \dots & M_n(x_l, c_{n,}y_m, d_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} U(x_1, y_1) \\ \vdots \\ U(x_1, y_m) \\ \vdots \\ U(x_m, y_1) \\ \vdots \\ U(x_l, y_m) \end{bmatrix} \qquad (4.41)$$

4. 2 ANALISIS NUMERIK METODE JARINGAN FUNGSI RADIAL BASIS DALAM MENYELESAIKAN PERSAMAAN POISSON.

Untuk lebih memahami kinerja dari jaringan fungsi radial basis dalam menyelesaikan persamaan Poisson maka akan diambil salah satu contoh persamaan Poisson sebagai data uji coba. Adapun contoh yang di ambil adalah:

$$\nabla^2 U = (x^2 + y^2)\, e^{xy} \qquad (4.42)$$

pada daerah $0 < x < 1$ dan $0 < y < 1$ dengan kondisi batas:

$U(0,y) = 1$ $\qquad$ $U(1,y) = e^y$

$U(x,0) = 1$ $\qquad$ $U(x,1) = e^x$

Penyeleseaian numerik persamaan (4.42) dengan jaringan fungsi radial basis dapat dilakukan dengan beberapa langkah seperti yang telah dijelaskan pada sub bab sebelumnya.

Langkah 1

Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan persamaan Poisson yang akan diselesaikan beserta domain dan kondisi batasnya. Pada simulasi kali ini akan digunakan persamaan Poisson (4.42) yang telah didefinisikan sebelumnya.

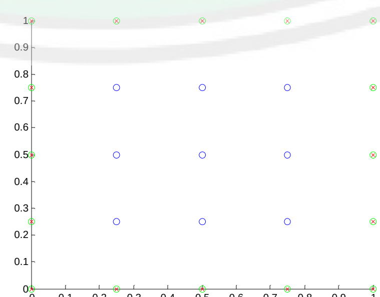
Langkah 2

Langkah selanjutnya adalah mendiskritisasi domain menjadi beberapa data diskrit. Pada simulasi kali ini domain pada persamaan (4.42) masing-masing akan dibagi menjadi lima bagian sehingga membentuk 5 x 5 titik perpotongan. Diskritisasi domain ini dilakukan dengan bantuan *soft ware* matlab 7 yang mendiskritisasi domain secara acak dengan jarak yang sama. Adapun hasil diskritisasi dari domainnya adalah:

Tabel 4.1 Tabel Hasil Diskritisasi Domain

No	*x*	*Y*
1	0.00	0.00
2	0.25	0.25
3	0.50	0.50
4	0.75	0.75
5	1.00	1.00

Adapun grafik titik-titik hasil diskritisasi domain dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 4.2. Grafik diskritisasi domain menjadi 5 bagian

Langkah 3

Setelah persamaan diketahui dan domainnya telah di diskritisasi, maka langkah selanjutnya adalah merubah persamaan (4.42) ke dalam bentuk jaringan fungsi radial basis. Dengan memasukkan semua fungsi yang diketahui ke dalam persamaan (4.8) sampai (4.12) maka persamaan (4.42) dirubah menjadi:

$$\sum_{k=1}^{n} w_k\, L\left(x_i, c_{k,} y_j, d_k\right) = \left({x_i}^2 + {y_j}^2\right) e^{xy} \qquad i{=}j{=}1, 2, 3,..,5 \tag{4.43}$$

Dengan kondisi batas:

$$U_{1,j} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{25} w_k M\left(0, c_{k,} y_j, d_k\right) = 1 \tag{4.44}$$

$$U_{5,j} = e^y$$

$$\sum_{k=1}^{25} w_k M\left(1, c_{k,} y_j, d_k\right) = e^y \tag{4.45}$$

$$U_{i,1} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{25} w_k M(x_i, c_k, 0, d_k) = 1 \tag{4.46}$$

$$U_{i,5} = e^x$$

$$\sum_{k=1}^{25} w_k M(x_i, c_k, 1, d_k) = e^x \tag{4.47}$$

Langkah 4

Menentukan nilai bobot (w) dengan metode *least square*. Nilai bobot (w) dapat diperoleh dengan memasukkan persamaan (4.3) sampai persamaan (4.47) ke dalam persamaan (4.3.2). Kemudian didapatkan:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} L\big(x_i, c_l, y_j, d_l\big)\, L\big(x_i, c_k, y_j, d_k\big) +$$

$$\sum_{j=1}^{5} M\big(0, c_{l,} y_j, d_l\big) M\big(0, c_{k,} y_j, d_k\big) +$$

$$\sum_{j=1}^{5} M\big(1, c_{l,} y_j, d_l\big) M\big(1, c_{k,} y_j, d_k\big) +$$

$$\sum_{i=1}^{5} M\big(x_i, c_{l,} 0, d_l\big)\, M\big(x_i, c_{k,} 0, d_k\big) +$$

$$\sum_{i=1}^{5} M\big(x_i, c_{l,} 1, d_l\big)\, M(x_i, c_k, 1, d_k) \qquad (4.48)$$

$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_{25}$

dan

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} f\big(x_i, y_j\big) L\big(x_i, c_{k,} y_j, d_k\big) + \sum_{j=1}^{5} g\big(0, y_j\big) M\big(0, c_k, y_j, d_k\big) +$$

$$\sum_{j=1}^{5} g\big(1, y_j\big) M\big(1, c_k, y_j, d_k\big) + \sum_{i=1}^{5} g(x_i, 0) M(x_i, c_k, 0, d_k) +$$

$$\sum_{i=1}^{5} g(x_i, 1) M(x_i, c_k, 1, d_k) \qquad (4.49)$$

Sesuai dengan persamaan (4.39) bobot (*w*) dapat diperoleh dengan mengevaluasi ***A, b,*** dan ***w*** sehingga membentuk sebuah matrik. Dari matrik ***A, b,*** dan ***w*** nilai bobot (*w*) dapat ditentukan dengan cara pembagian kanan:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b} \qquad (4.50)$$

Dalam kasus ini penulis menggunakan bantuan *soft ware* matlab 7 untuk menghitung nilai *w* yang terbaik. Pada contoh kasus persamaan (4.2) nilai bobot yang representatif digunakan untuk mengaproksimasi fungsi ***U*** adalah:

w = (-0.0209, -0.1134, -0.0312, -0.1134, 0.1004, -0.0167, -0.0312, -0.0167, -0.4242, 0.2372, -0.2319, 0.4170, -0.6438, 1.0637, -0.2319, -0.2500, 0.4170, -0.1283, -0.6438, 1.2291, 1.0637, -0.2500, -0.1283, 1.2291, -2.0249)

Langkah 5

Mengaproksimasi fungsi U merupakan langkah terakhir untuk mendapatkan nilai fungsi U. Aproksimasi fungsi ini dapat dilakukan dengan memasukkan semua *input* yang diketahui yakni nilai x_i, y_i dan w_k ke dalam persamaan (4.40) sehingga diperoleh:

$$U\left((x_i, y_j)\right) = \sum_{k=1}^{n} w_k M_k\left((x_i, c_k, y_j, d_k)\right)$$

$$= M_1(x_i, c_1, y_j, d_1) + w_2 M_2(x_i, c_2, y_j, d_2) + \cdots +$$

$$w_n M_n(x_i, c_n, y_j, d_n) \tag{4.51}$$

Atau membentuk persamaan matrik:

$$\begin{bmatrix} M_1(x_1, c_{1,} y_1, d_1) & M_2(x_1, c_{2,} y_1, d_2) & \dots & M_n(x_1, c_{n,} y_1, d_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1(x_1, c_{1,} y_5, d_1) & M_2(x_1, c_{1,} y_5, d_1) & \dots & M_n(x_1, c_{n,} y_5, d_n) \\ & \ddots & & \\ M_1(x_5, c_{1,} y_1, d_1) & M_2(x_3, c_{2,} y_1, d_2) & \dots & M_n(x_3, c_{n,} y_1, d_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1(x_5, c_{1,} y_5, d_1) & M_1(x_5, c_{1,} y_5, d_1) & \dots & M_n(x_l, c_{n,} y_5, d_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} U(x_1, y_1) \\ \vdots \\ U(x_1, y_5) \\ \vdots \\ U(x_5, y_1) \\ \vdots \\ U(x_5, y_5) \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

Hasil simulsi aproksimasi persamaan (4.42) dengan diskritisasi lima titik menghasilkan nilai $U(x,y)$ seperti tercantum dalam tabel 4.2 berikut ini:

Tabel 4.2 Tabel Penyelesaian Numerik Persamaan $\nabla^2 U = (x^2+y^2)\, e^{xy}$

No	Koordinat (x,y)	$\widehat{U}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} w_k M_k\big((x, c_k, y, d_k)\big)$
1	(0.00, 0,00)	1.0000
2	(0.00, 0,25)	1.0000
3	(0.00, 0,50)	1.0000
4	(0.00, 0,75)	1.0000
5	(0.00, 1,00)	1.0000
6	(0.25, 0,00)	1.0000
7	(0.25, 0,25)	1.0552
8	(0.25, 0,50)	1.1239
9	(0.25, 0,75)	1.1928
10	(0.25, 1,00)	1.2840
11	(0.50, 0,00)	1.0000
12	(0.50, 0,25)	1.1239
13	(0.50, 0,50)	1.2773
14	(0.50, 0,75)	1.4466
15	(0.50, 1,00)	1.6487
16	(0.75, 0,00)	1.0000
17	(0.75, 0,25)	1.1928
18	(0.75, 0,50)	1.4466
19	(0.75, 0,75)	1.7534
20	(0.75, 1,00)	2.1170
21	(0.00, 0,00)	1.0000
22	(0.00, 0,25)	1.2840
23	(0.00, 0,50)	1.6487
24	(0.00, 0,75)	2.1170
25	(0.00, 1,00)	2.7183

Setelah mendapatkan penyelesaian numerik persamaan (4.42), maka hal terpenting yang harus dilakukan adalah menganalisis hasil terutama tentang galat yang dihasilkan. Galat dapat diketahui jika solusi eksaknya dapat diketahui. Adapun solusi eksak dari persamaan (4.42) adalah e^{xy}.

Bukti:

misal: $U(x,y) = e^{xy}$ (4.52)

maka:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = xe^{xy} \qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = ye^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} = x^2 e^{xy} \qquad \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2} = y^2 e^{xy}$$

Sehingga:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}$$

$$= x^2 e^{xy} + y^2 e^{xy}$$

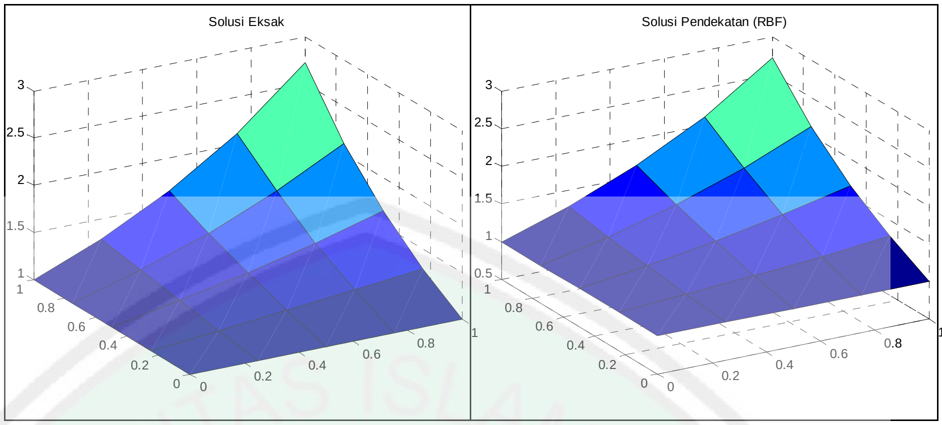
$$= (x^2 + y^2)e^{xy} \qquad \text{(terbukti)}$$

Dengan menggunakan solusi analitik dari persamaan (4.42) maka galat yang dihasilkan dari penyelesaian numerikny dapat diketahui. Galat yang dihasilkan dari penggunaan jaringan fungsi radial basis pada persamaan Poisson (4.42) dapat dicari dengan mengurangkan solusi analitik dengan solusi pendekatannya. Galat ini dapat digunakan untuk melihat seberapa efektifnya penggunaan jaringan fungsi radial basis untuk mendapatkan penyelesaian numerik dari persamaan Poisson (4.42). Adapun galat yang dihasilkan dapat dilihat pada tabel 4.3 berikut ini:

Tabel 4.3 Tabel Galat dari Penyelesaian Numerik Persamaan $\nabla^2 U = (x^2+y^2)\, e^{xy}$ Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis

(x,y)	Solusi Analitik $U(x,y) = e^{xy}$	Solusi Pendeketan $\widehat{U}(x,y) = \sum_{k=1}^{n} w_k M_k\big((x, c_k, y, d_k)\big)$	Galat= $U(x,y)$-$\widehat{U}(x,y)$
(0.00, 0,00)	1.0000	1.0000	0.0000
(0.00, 0,25)	1.0000	1.0000	0.0000
(0.00, 0,50)	1.0000	1.0000	0.0000
(0.00, 0,75)	1.0000	1.0000	0.0000
(0.00, 1,00)	1.0000	1.0000	0.0000
(0.25, 0,00)	1.0000	1.0000	0.0000
(0.25, 0,25)	1.0645	1.0552	0.0093
(0.25, 0,50)	1.1331	1.1239	0.0092
(0.25, 0,75)	1.2062	1.1928	0.0134
(0.25, 1,00)	1.2840	1.2840	0.0000
(0.50, 0,00)	1.0000	1.0000	0.0000
(0.50, 0,25)	1.1331	1.1239	0.0092
(0.50, 0,50)	1.2840	1.2773	0.0067
(0.50, 0,75)	1.4550	1.4466	0.0084
(0.50, 1,00)	1.6487	1.6487	0.0000
(0.75, 0,00)	1.0000	1.0000	0.0000
(0.75, 0,25)	1.2062	1.1928	0.0134
(0.75, 0,50)	1.4550	1.4466	0.0084
(0.75, 0,75)	1.7551	1.7534	0.0017
(0.75, 1,00)	2.1170	2.1170	0.0000
(0.00, 0,00)	1.0000	1.0000	0.0000
(0.00, 0,25)	1.2840	1.2840	0.0000
(0.00, 0,50)	1.6487	1.6487	0.0000
(0.00, 0,75)	2.1170	2.1170	0.0000
(0.00, 1,00)	2.7183	2.7183	0.0000

Perbandingan antara solusi numerik dari jaringan fungsi radial basis dengan solusi eksaknya juga dapat dilihat dari grafiknya. Adapun grafik dari kedua penyelesaian baik yang secara analitik maupun secara numerik dapat dilihat pada grafik-grafik berikut:



Gambar 4.3 Perbadingan Grafik Solusi Eksak dengan Solusi Numerik Persamaan $\nabla^2 U = (x^2+y^2)\, e^{xy}$

Jika dibandingkan antara kedua gambar di atas dapat kita lihat bahwa grafik dari solusi numerik dengan menggunakan jaringan fungsi radial basis hampir menyamai grafik dari solusi eksaknya. Oleh karena itu, galat yang dihasilkan juga relatif kecil yakni antara $0 \leq \varepsilon \leq 0{,}0134$. Hal ini menunjukkan bahwa jaringan fungsi radial basis cukup efektif digunakan untuk mencari penyelesaian dari persamaan Poisson.

BAB V

PENUTUP

1.1 Kesimpulan

Dari uraian dan pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Dalam pencarian solusi persamaan Poisson dengan menggunakan metode jaringan fungsi radial basis digunakan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Menentukan persamaan Poisson beserta kondisi batasnya
   b. Mendiskritisasi domain.
   c. Mencari nilai bobot (w).
   d. Mengaproksimasi fungsi dengan menggunakan nilai bobot (w) dan fungsi basis multikuadrik.
2. Analisis numerik dari satu contoh persamaan Poisson $\nabla^2 U = (x^2 + y^2)e^{xy}$ menunjukkan bahwa metode jaringan fungsi radial cukup efektif untuk digunakan dalam mencari penyelesaian numerik persamaan Poisson karena galat yang dihasilkan relatif kecil yakni .

1.2 Saran

Untuk selanjutnya penulis memberikan saran sebagai berikut:

1. Persamaan diferensial parsial yang digunakan berbentuk non linear
2. Metode jaringan fungsi radial basis ini dapat dibandingkan dengan metode numerik lain dalam menyelesaikan persamaan Poisson.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Press.

Al-jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-aisar*. Jakarta: Darus Sunah Perss.

Amiruddin, Aam. 2004. Tafsir Al-Qur'an kontemporer. Bandung: Khazanah Intelektual

Anonim. *Jaringan Syaraf Tiruan*, http://id.wikipedia.org/wiki/Jaringan_syaraf_tiruan, 2010, diakses tanggal 26 Oktober 2010.

Arza. 2009. *Tahukah Anda Tentang Otak Manusia*. Yahoo Answer, diakses pada tanggal 26 Oktober 2010.

Capra, Steven C. dan Canale, Raymond P. 2002. *Numerical Method for Engineeres with Software and Programing Aplication*. New York : The Mc Graw-Hill Companies, Inc.

Hajek, M. 2005. *Neural Networks*. Neural network.doc

Kiusalas, Juan.2005. *Numerical Method in Enginering with Matlab*. New York: Cambridge University Press.

Kusumadewi, Sri. 2004. *Membangun Jaringan Syaraf Tiruan Menggunakan Matlab*. Yogyakarta : Penerbit Graha Ilmu.

Mai-Duy, Nam dan Thanh Tran-Cong. 2001.*Approksimation Of Function And Its Derivatives Using Radial Basis Function Networks*. Australia: University of Southern Queensland.

Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

Puspitaningrum, Diyah. 2006. *Pengantar Jaringan Syaraf Tiruan*. Yogyakarta : Penerbit Andi.

Setiawan, Iwan.2002. *Jaringan Syaraf Tiruan* . UNDIP

Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al-Mishbah(Pesan,kesan, dan keserasian Al-Qur'an)*. Jakarta: Lentera Hati.

Siang, Jong Jek. 2005. *Jaringan Syaraf Tiruan Pemrograman Menggunakan Matlab*. Yogyakarta : Penerbit Andi.

Stavroulakis, Ioannis P. dan Stepan A. Teresian. 2004. *Partial Differential Equation (Second Edition)*. London: World Scientific Publishing.

Tveito, Aslak dan Winther, Ragnar. 1998. *Introduction to Partial Differential Equation: a Computation Approach*. New York : Spinger

Lampiran 1 Program Matlab untuk Metode Jaringan Fungsi Radial Basis pada Persamaan Poisson

```
function [points, N] = CreatePoints(N,s,gridtype)
switch gridtype
    case 'c'
        ppd = zeros(1,s);
        for j=1:s
            ppd(j) = floor(nthroot(N,s+1-j));
            N = N/ppd(j);
        end
        gam = 0.5*ones(1,s);  % density for point distribution, 0.5=Chebyshev
        points = chebsamp([zeros(1,s); ones(1,s)], ppd, gam);
        N = prod(ppd);
    case 'f'
        points = lattice(N,s);  % N should be(?) power of 2
    case 'h'
        points = haltonseq(N,s);
        %temp = haltonset(s);
        %points = net(temp,N);
    case 'l'
        points = lhsamp(N,s);
    case 'r'
        rand('state',47);
        points = rand(N,s);
    case 's'
        sp = max(2,s);
        points = zeros(N,sp);
        seed = 0; for i=1:N; [points(i,:) seed] = i4_sobol(sp,seed); end
        points = points(:,1:s);
        points = N*points/(N-1);
        % Very similar, but not quite the same:
        %temp = sobolset(s);
        %points = net(temp,N);
        %points = N*points/(N-1);
    case 'u'
        ppd = zeros(1,s);
        for j=1:s
            ppd(j) = floor(nthroots(N,s+1-j));
            N = N/ppd(j);
        end
        points = gridsamp([zeros(1,s); ones(1,s)], ppd);
        N = prod(ppd);
    otherwise
        error('Please use c, f, h, r, s or u data types')
end
```

```
function DM = DifferenceMatrix(datacoord,centercoord)
[dr,cc] = ndgrid(datacoord(:),centercoord(:));
  DM = dr-cc;

function DM = DistanceMatrix(dsites,ctrs)
  [M,s] = size(dsites); [N,s] = size(ctrs);
  DM = zeros(M,N);
  % Accumulate sum of squares of coordinate differences
  for d=1:s
     %%% Uses less memory
     DM = DM + (repmat(dsites(:,d),1,N)-repmat(ctrs(:,d)',M,1)).^2;
  end
  DM = sqrt(DM);

function  S = gridsamp(range, q)

[mr n] = size(range);    dr = diff(range);
if  mr ~= 2 | any(dr < 0)
  error('range must be an array with two rows and range(1,:) <= range(2,:)')
end
sq = size(q);
if  min(sq) > 1 | any(q <= 0)
  error('q must be a vector with non-negative elements')
end
p = length(q);
if  p == 1,  q = repmat(q,1,n);
elseif  p ~= n
  error(sprintf('length of q must be either 1 or %d',n))
end

i = find(dr == 0);  % Check for degenerate intervals
if  ~isempty(i),  q(i) = 0*q(i); end

% Recursive computation
if  n > 1
  A = gridsamp(range(:,2:end), q(2:end));  % Recursive call
  [m p] = size(A);   q = q(1);
  S = [zeros(m*q,1) repmat(A,q,1)];
  y = linspace(range(1,1),range(2,1), q);
  k = 1:m;
  for  i = 1 : q
    S(k,1) = repmat(y(i),m,1);  k = k + m;
  end
else
  S = linspace(range(1,1),range(2,1), q).';
End
```

```
function H = haltonseq(NUMPTS,NDIMS);

if (NDIMS < 12)
	P = [2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31];
else
	P = primes(1.3*NDIMS*log(NDIMS));
	P = P(1:NDIMS);
end


if isequal(size(NUMPTS),[1 1])
	int_pts = [1:NUMPTS];
else %User has put in the points to sample.
	int_pts = NUMPTS;
	NUMPTS = length(int_pts);
end

H = zeros(NUMPTS,NDIMS);


for i = 1:NDIMS
	V = fliplr(dec2bigbase(int_pts,P(i)));
	pows = -repmat([1:size(V,2)],size(V,1),1);
	H(:,i) = sum(V.*(P(i).^pows),2);
end

function s = dec2bigbase(d,base,n)
error(nargchk(2,3,nargin));

if size(d,2) ~= 1,
  d = d(:);
 end

base = floor(base);
if base < 2, error('B must be greater than 1.'); end
if base == 2,
  [x,nreq] = log2(max(d));
else
  nreq = ceil(log2(max(d) + 1)/log2(base));
end

if nargin == 3
    nreq = max(nreq,1);
    n = max(n,nreq);
    last = n - nreq + 1;
else
```

```
    n = max(nreq,1);
    last = 1;
end

s(:,n) = rem(d,base);
while n ~= last
    n = n - 1;
    d = floor(d/base);
    s(:,n) = rem(d,base);
end
```

Lampiran 2 Program Utama untuk menyelesaikan Persamaan $\nabla^2 u = (x^2 + y^2)e^{xy}$

```
clc,clear,close
tic;
disp('=========================================================')
disp('Program menyelesaikan Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi
      Radial Basis')
disp('            fungsi yang diberikan adalah Lu = (x.^2+y.^2).*exp(x.*y)')
disp('                        Rohmawati Fitriya (06510071)')
disp('=========================================================')

% Calls on: CreatePoints, DistanceMatrix, PlotSurf, PlotError2D
  % MQ RBF and its Laplacian
  rbf = @(e,r) sqrt(1+(e*r).^2); ep = 3;
  Lrbf = @(e,r) e^2*((e*r).^2+2)./(1+(e*r).^2).^(3/2);

  % Exact solution and its Laplacian for test problem
  u = @(x,y) exp(x.*y);
  Lu = @(x,y) (x.^2+y.^2).*exp(x.*y);

  % Mencari center dan batas
  N = 25;  [collpts, N] = CreatePoints(N, 2, 'u'); % banyaknya  center
  indx = find(collpts(:,1)==0 | collpts(:,2)==0 | ...
           collpts(:,1)==1 | collpts(:,2)==1);
  bdypts = collpts(indx,:);
  intpts = collpts(setdiff([1:N],indx),:);
  ctrs = [intpts; bdypts];

 % Tahap Aproksimasi
  M = 25;  epoints = CreatePoints(M,2,'u');    % M = Banyaknya titik
 % Compute evaluation matrix
  DM_eval = DistanceMatrix(epoints,ctrs);    % Menghitung jarak (r)
  EM = rbf(ep,DM_eval);                      % Menghitung Matrik rbf
  exact = u(epoints(:,1),epoints(:,2));      % Menghitung solusi eksak

% Compute blocks for collocation matrix
  DM_int = DistanceMatrix(intpts,ctrs);
  LCM = Lrbf(ep,DM_int);
  DM_bdy = DistanceMatrix(bdypts,ctrs);
  BCM = rbf(ep,DM_bdy);
  CM = [LCM; BCM];
```

```
% Menentukan nilai fungsi sebelah kanan
  %rhs = [Lu(intpts(:,1),intpts(:,2)); ...
  %       u(bdypts(:,1),bdypts(:,2))];
      rhs = zeros(N,1);  NI = size(intpts,1);
      rhs(1:NI) = Lu(intpts(:,1),intpts(:,2));

  %Boundary Condition
  %untuk x=0
  indx = find(bdypts(:,1)==0);
  rhs(NI+indx) = 1;

  %untuk y=0
  indx = find(bdypts(:,2)==0);
  rhs(NI+indx) = 1;

  %untuk x=1
  indx = find(bdypts(:,1)==1);
  rhs(NI+indx) = exp(bdypts(indx,2));

  %untuk y=1
  indx = find(bdypts(:,2)==1);
  rhs(NI+indx) = exp(bdypts(indx,1));

  % Compute RBF solution
  Pf = EM * (CM\rhs);
  % Compute maximum error on evaluation grid
  maxerr = norm(Pf-exact,inf)
  rms_err = norm(Pf-exact)/sqrt(M)
  fprintf('RMS error:     %e\n', rms_err)
  fprintf('Maximum error: %e\n', maxerr)

  xe = reshape(epoints(:,1),sqrt(M),sqrt(M));
  ye = reshape(epoints(:,2),sqrt(M),sqrt(M));


  figure(1)
  surf(xe,ye,exact),title('Solusi Eksak')
  view(fview)

  figure(2)
  surf(xe,ye,Pf),title('Solusi Pendekatan (RBF)')
  view(fview)
```

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI

Nama : **Rohmawati Fitriya**
NIM : **06510071**
Pembimbing I : **Mohammad Jamhuri, M.Si**
Pembimbing II : **Dr. H. Ahmad Barizi, M.A**
Judul Skripsi : **Penyelesaian Numerik Persamaan Poisson Menggunakan Jaringan Fungsi Radial Basis**

No	Tanggal	Materi	TTD	
1	19-11-2010	Acc Proposal	1	
2	26-11-2010	Konsultasi Bab I dan Bab II		2
3	28-02-2011	Konsultasi Bab I, Bab II, dan konsultasi Bab III	3	
4	29-04-2011	Revisi Bab III dan Konsultasi Bab IV		4
5	17-05-2011	Revisi Bab IV	5	
6	13-07-2011	Revisi Bab IV		6
7	15-07-2011	Konsultasi Keagamaan Bab I dan Bab II	7	
8	16-07-2011	Acc Bab I, II, III, IV		8
9	10-08-2011	Acc Keagamaan	9	
10	22-08-2011	Acc Keseluruhan		10

Malang, 19 Agustus 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
19751006 200312 1 001