

**PENERAPAN METODE HONGARIA DAN METODE SIMPLEKS  
DALAM UPAYA OPTIMASI**

**SKRIPSI**

**OLEH  
ELVA YUSTHUVIA 'AZMI  
NIM. 09610037**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**PENERAPAN METODE HONGARIA DAN METODE SIMPLEKS  
DALAM UPAYA OPTIMASI**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Elva Yusthuvia 'Azmi  
NIM. 09610037**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**PENERAPAN METODE HONGARIA DAN METODE SIMPLEKS  
DALAM UPAYA OPTIMASI**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Elva Yusthuvia 'Azmi**  
**NIM. 09610037**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 8 Juni 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Evawati Alisah, M.Pd  
NIP. 19720604199903 2 001

Abdul Aziz, M.Si  
NIP. 19760318 200604 1 003

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENERAPAN METODE HONGARIA DAN METODE SIMPLEKS  
DALAM UPAYA OPTIMASI**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Elva Yusthuvia 'Azmi  
NIM. 09610037**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal 25 Juni 2015

Penguji Utama : Drs. H. Turmudi, M.Si .....

Ketua Penguji : Dr. H.Imam Sujarwo, M.Pd .....

Sekretaris Penguji : Evawati Alisah, M.Pd .....

Anggota Penguji : Abdul Aziz, M.Si .....

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Elva Yusthuvia 'Azmi

NIM : 09610037

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Penerapan Metode Hongaria dan Metode Simpleks dalam  
Upaya Optimasi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 8 Juni 2015  
Yang membuat pernyataan,

Elva Yusthuvia 'Azmi  
NIM. 09610037

## MOTO

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا  
 إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ  
 قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۗ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ  
 مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

*“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (Mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'afilah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir" (QS. al-Baqarah/2:286)*

## PERSEMBAHAN

**Skripsi ini penulis persembahkan untuk:**

*Ayahanda Syamsul Huda tercinta*, yang selalu mendukung, memotivasi dan selalu rela berkorban dhohir bathin. *Allohummaghfirlahu warhamhu wa'afihi wa'fu 'anhu. Aamiin*

*Ibunda Fathimatuz Zahroh*, yang selalu berikan mendukung dan motivasi dhohir bathin

Adik-adik tersayang, *Muhammad Haidar Hadziq* dan *Hilda Ziana Mahdia*

*Dzakhirotul Farohah*, bibi yang selalu berikan motivasi dan dukungan dhohir bathin

*Muhammad Maimun Muzakka*, sepupu yang selalu rela berkorban

*Faiq Dzawatin Nadwa*, *Iin Inayatul Farichah* dan *Prasyifa Khabibatul Luthfa*, Sepupu dan saudara di rumah yang selalu yakinkan penulis adalah selalu jadi yang terbaik

*Fulan*, yang selalu memberikan motivasi dan do'a meski berada pada jarak yang sangat jauh

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Puji syukur ke hadirat Allah Swt., atas segala limpahan rahmat, hidayah serta inayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan kepada penulis.
6. Bapak dan Ibu yang selalu memberikan do'a, semangat, pengorbanan waktu, tenaga, dan pikiran sehingga dapat selalu memberikan motivasi kepada penulis hingga saat ini dan seterusnya.

7. Seluruh keluarga yang telah memotivasi dan segala pengorbanan waktu dan pikirannya untuk membantu lancarnya proses pengerjaan skripsi, khususnya Muhammad Haidar Hadziq, Muhammad Maimun Muzakka, dan Dzakhiretul Farohah.
8. Seluruh teman-teman pengurus Ma'had Sunan Ampel Al-'Aly Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah membantu melancarkan proses pengerjaan skripsi yang tak mungkin penulis sebutkan satu persatu.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika seluruh angkatan yang telah memberikan saran, bantuan, dorongan, semangat, dan motivasi selama studi.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan seluruh pembaca pada umumnya. Aamiin.

*Wassalamu'alaikum Warohmatullohi Wabarokaatuh.*

Malang, Juni 2015

Penulis

## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>ABSTRAK</b> .....	xiv
<b>ABSTRACT</b> .....	xv
<b>ملخص</b> .....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	7
1.3 Tujuan Penelitian.....	7
1.4 Batasan Masalah .....	7
1.5 Manfaat Penelitian.....	8
1.6 Sistematika Penulisan.....	8
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Pemrograman Linier .....	10
2.2 Metode Hongaria .....	36
2.3 Metode Simpleks .....	39
2.4 Kajian al-Quran tentang Optimasi.....	64
<b>BAB III METODE PENELITIAN</b>	
3.1 Pendekatan Penelitian.....	69
3.2 Jenis dan Sumber Data .....	69
3.3 Metode Pengumpulan Data .....	69
3.4 Cara Pengolahan Data .....	70
3.5 Penyajian Data.....	71
3.6 Analisis Data .....	71

<b>BAB IV PEMBAHASAN</b>	
4.1 Optimasi Menggunakan Metode Hongaria .....	72
4.2 Optimasi Menggunakan Metode Simpleks .....	80
<b>BAB V PENUTUP</b>	
5.1 Kesimpulan.....	103
5.2 Saran .....	103
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>104</b>
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>	
<b>RIWAYAT HIDUP</b>	



## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Pemecahan Optimal.....	33
Tabel 2.2	Pemecahan Optimal.....	35
Tabel 2.3	Bentuk Dasar Tabel Simpleks .....	45
Tabel 4.1	Kemampuan Produksi Karyawan dalam Pembuatan Seragam .....	72
Tabel 4.2	Kelebihan dan Kekurangan Metode Hongaria .....	79
Tabel 4.3	Waktu Proses Produksi Seragam.....	82
Tabel 4.4	Simpleks Awal .....	86
Tabel 4.5	Simpleks Awal dengan Rasio.....	88
Tabel 4.6	Simpleks Awal dengan Kolom Kunci dan Baris Kunci.....	88
Tabel 4.7	Persamaan Pivot Iterasi Pertama .....	89
Tabel 4.8	Simpleks Iterasi Pertama .....	90
Tabel 4.9	Simpleks Iterasi Pertama dengan Persamaan Pivot Baru.....	91
Tabel 4.10	Simpleks Iterasi Kedua dengan Persamaan Pivot Lama .....	92
Tabel 4.11	Simpleks Iterasi Kedua dengan Persamaan Pivot Baru .....	92
Tabel 4.12	Simpleks Iterasi Ketiga dengan Persamaan Pivot lama .....	94
Tabel 4.13	Simpleks Iterasi Ketiga dengan Persamaan Pivot Baru .....	94
Tabel 4.14	Simpleks Iterasi Keempat dengan Persamaan Pivot Lama .....	96
Tabel 4.15	Simpleks Iterasi Keempat dengan Persamaan Pivot Baru .....	96
Tabel 4.16	Simpleks Iterasi Kelima dengan Persamaan Pivot Lama.....	98
Tabel 4.17	Simpleks Iterasi Kelima dengan Persamaan Pivot Baru .....	98
Tabel 4.18	Kelebihan dan Kekurangan Metode Simpleks.....	101

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Poligon Diarsir sebagai Daerah Pemecahan Fisibel .....	34
Gambar 2.2	Poligon sebagai Daerah Pemecahan Fisibel .....	35
Gambar 2.3	Kurva dengan Pemecahan Tidak Terbatas.....	36
Gambar 2.4	Proses Mengeluarkan Vektor.....	49
Gambar 2.5	<i>Flowchart</i> .....	63
Gambar 2.6	<i>Flowchart</i> Metode Hongaria.....	64



## ABSTRAK

‘Azmi, Elva Yusthuvia. 2015. **Penerapan Metode Hongaria dan Metode Simpleks dalam Upaya Optimasi**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si.

**Kata kunci:** Pemrograman Linier, Metode Hongaria, Metode Simpleks

Pada skripsi ini penulis membahas tentang upaya optimasi dengan cara menerapkan data menggunakan metode Hongaria dan metode Simpleks. Upaya ini digunakan untuk mengetahui bagaimana penerapan data menggunakan metode Hongaria dan metode Simpleks dalam upaya optimasi. Sebagaimana lazimnya, kedua metode ini adalah metode yang digunakan untuk mencari solusi terbaik dalam pemrograman linier.

Adapun langkah optimasi simpleks, yang pertama adalah mengubah model program linier ke dalam bentuk kanoniknya atau bentuk bakunya. Kedua, membuat tabel simpleks awal. Ketiga, menentukan baris dan kolom kunci sebagai dasar iterasi. Keempat, iterasi. Iterasi akan berhenti apabila seluruh nilai pada  $Z$  atau fungsi tujuan tidak ada yang bernilai negatif. Sehingga dengan itu, maka hasil telah optimal.

Selanjutnya langkah optimasi metode Hongaria adalah menyusun matriks biaya, mengurangi elemen-elemen pada setiap baris dengan elemen terkecil atau terbesar pada baris yang sama, mengurangi elemen-elemen pada setiap kolom dengan elemen terkecil pada kolom yang sama. Langkah ini akan menghasilkan biaya *opportunity* keseluruhan. Selanjutnya adalah menutup elemen-elemen bernilai nol dengan garis-garis mendatar atau tegak. Misalkan  $m$  adalah banyaknya baris atau kolom dan banyaknya garis penutup elemen nol sekurang-kurangnya  $k$ , maka; jika  $k = n$ , berarti sudah diperoleh program optimal. Proses dihentikan dan menyusun penugasan. Jika  $k < n$ , maka proses dilanjutkan dengan mengikuti langkah selanjutnya. Langkah selanjutnya yakni mencari bilangan terkecil dari bilangan-bilangan yang tidak tertutup garis, misalkan  $e$ . Selanjutnya: (a) semua elemen yang tidak tertutup garis dikurangi  $e$ , (b) semua elemen yang tertutup oleh satu garis tidak diubah, (c) semua elemen yang tertutup oleh dua garis ditambah dengan  $e$ , dan (d) setelah diperoleh tabel baru kembali ke langkah sebelumnya.

Perlu diperhatikan bahwasanya dalam upaya optimasi menggunakan metode Hongaria pada langkah kedua yakni pengurangan dengan elemen terbesar atau terkecil adalah disesuaikan dengan tujuan optimalisasi. Jika tujuannya adalah maksimasi, maka pengurangan dilakukan dengan menggunakan elemen terbesar. Namun, jika tujuan minimasi, maka pengurangan dilakukan dengan menggunakan elemen terkecil.

Hasil dari penelitian ini adalah ditemukannya letak perbedaan kedua metode tersebut yang meliputi banyak hal, mulai dari *input*, proses hingga *output*-nya. Pada metode Hongaria, penerapan metodenya cenderung lebih sederhana sedangkan pada metode Simpleks lebih rumit.

## ABSTRACT

‘Azmi, Elva Yusthuvia. 2015. **Application of Hungarian Method and Simplex Method in Optimization**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si.

**Keywords:** Linear Programming, Hungarian Method, Simplex Method

On this thesis the author discussed about optimization by applying Hungarian method and Simplex method. Which this effort is used to find out how the application the data using Hungarian method and Simplex method in optimization. As usual, both of these methods are methods used to find the best solution in the linear programming.

The step of Simplex optimization has to be defined, then formulating the objective function, formulating the constraint function first and non-positive constraint. After formulating the problem of linear programming, and the next is optimization. The first step of Simplex optimization is changing linear program models into the raw form. Second, making the initial Simplex table. Third, determining the key rows and columns as the basis of iteration. Fourth, iteration. Iteration will stop when all the negative values on  $Z$  is nothing. Then the result has been optimal.

The step of optimization Hungarian methods; determining matrix of cost, subtracting the elements on each line with the smallest element on the same line, subtracting the elements in each column with the smallest elements in the same column. This step will result in an overall cost of lost opportunity. The next step is closing the zero value elements with lines horizontal or vertical. Suppose that  $n$  is the number of lines or columns and the number of the line of the zero element of the cover at least  $k$ , then; If  $k = n$ , meaning the optimized program is already acquired. The process was halted and set the assignment. If  $k < n$ , the process continued by following the next steps. The next step is determining the smallest number that are not covered by lines, called  $e$ . Next: (a) all elements that are not covered by lines  $e$ , (b) all the elements covered by a single is not modified, (c) all elements enclosed by two lines is added to  $e$ , and (d) after obtaining a new table, back to previous step.

Important to note that in order to use the optimization method of Hungarian in the second step is doing reduction values by the largest or smallest elements based on objective optimization. If the object is maximization, then the subtraction using the largest element. However, if the object is minimization, then subtraction using the smallest element.

The result of this research was the discovery both of a two method that includes many things, from the input, process until output. In Hungarian method, the application of his method tends to be more simple, whereas in more complex Simplex method.

## ملخص

عزمي، إلف مصطفى. 2015. التطبيق بين أسلوب هنغاريا وأسلوب Simpleks في التكميل. بحث جامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرفة الأولى: إيفاوتي أليسة الماجستير، المشرف الثاني: عبد العزيز الماجستير.

## الكلمات الرئيسية: برمجة لينر، أسلوب هنغاريا، أسلوب Simpleks

في هذا الأطروحة حول كيفية تنفيذ مساعي تحسين البيانات باستخدام أسلوب هنغاريا والأسلوب Simpleks. يستخدم هذا الجهد لمعرفة كيفية تطبيق البيانات باستخدام الأسلوب هنغاريا والأسلوب Simpleks في التحسين. كالعادة، كل من هذه الأساليب هي الطرق المستخدمة لإيجاد أفضل الحلول في البرمجة الخطية.

الخطوة التكميل Simpleks، الأول هو أن تغيير النماذج خطية أو شكل إلى المعيار. وثانياً، جعل جدول Simpleks مبكراً. ثالثاً، تحديد الصفوف والأعمدة المفتاح كأساس للتكرار. الرابعة، التكرار. سيتم إيقاف التكرار عند القيمة في الدالة  $Z$  أو الغرض ليس سلبياً. لذا، تم تشغيل النتيجة على النحو الأمثل.

تمثل الخطوة التالية أساليب التحسين الهنغارية تجميع مصفوفة تكلفة، وطرح العناصر الموجودة في كل سطر مع عنصر أصغر أو أكبر على نفس السطر، طرح العناصر الموجودة في كل عمود مع عناصر أصغر في نفس العمود. ستؤدي هذه الخطوة إجمالي تكلفة الفرصة الضائعة. التالي هو قريب من عناصر القيمة صفر مع خطوط أفقياً أو عمودياً. لنفترض أن  $n$  هو عدد الأسطر أو الأعمدة ورقم السطر العنصر صفر الغطاء على الأقل  $k$ ، ثم؛ إذا كانت  $k = n$ ، معنى البرنامج الأمثل اكتسبت بالفعل. العملية توقفت وطابقين الإحالة. إذا  $k < n$ ، واستمرت العملية باتباع الخطوة التالية. الخطوة التالية هي تبحث عن أصغر العدد وليس محصور خط، وافترض أن  $e$  التالية: (أ) جميع العناصر التي ليست محصور  $e$  خط الحد، (ب) كل ما لم يتم تغيير العناصر التي محاطة بخط، (ج) جميع العناصر التي يتم إحاطتها بخطين أضيف مع  $e$ ، و (د) بعد أن اكتسب الجدول فقط عادوا إلى الخطوة قبل.

يرجى ملاحظة أنه من أجل استخدام الأسلوب الأمثل لهنغاريا في الخطوة الثانية هي الحد مع العناصر الأكبر أو الأصغر قابل للتعديل غرض التكميل. إذا كان الكائن ماكسيميسي، ثم ذلك الطرح باستخدام العنصر الأكبر. ومع ذلك، إذا كان هدف تدنية، ثم الطرح القيام به باستخدام عنصر أصغر.

وكانت نتيجة هذا البحث اكتشاف كلا من أسلوب اثنين يتضمن أشياء كثيرة، بدءاً من الإدخال، عملية حتى الإخراج. في أسلوب هنغاري، تطبيق الأسلوب الذي يميل إلى أن يكون أكثر بساطة، بينما في الأسلوب Simpleks أكثر تعقيداً.



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari sering kali manusia menjumpai masalah yang dalam penyelesaiannya menghendaki hasil yang optimum padahal sumber daya yang tersedia untuk mencapai hasil tersebut terbatas. Untuk memecahkan permasalahan tersebut, dikenal metode yang disebut dengan Riset Operasional. Sebenarnya masalah serupa serta metode penyelesaiannya sudah diketengahkan sejak lama. Namun, perkembangannya kurang begitu pesat, belum banyak ahli yang berkecimpung dalam penyelesaian masalah tersebut dan belum banyak hasil temuan metode yang dipublikasikan. Akan tetapi, sejak adanya perang dunia kedua, dengan dipicu oleh pihak sekutu untuk mengakhiri perang secepatnya, para ahli strategi militer maupun ilmuwan banyak mencurahkan diri untuk mencari perencanaan strategi operasi militer yang diharapkan dapat menyelesaikan perang secepatnya. Masalah yang dihadapi sebenarnya serupa dengan masalah di atas, yaitu berangkat dari keterbatasan sumber daya (personil, biaya, peralatan), waktu maupun resiko yang minimum ataupun berhubungan dengan keuntungan, manfaat yang maksimum. Sehingga dalam Riset Operasional telah dibahas dengan lengkap dalam Pemrograman Linier.

Pemrograman Linier disingkat PL merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan seperti memaksimalkan keuntungan dan meminimumkan biaya. PL banyak diterapkan dalam masalah ekonomi, industri, militer, sosial, dan lain-lain. PL berkaitan

dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linier dengan beberapa kendala linier (Siringoringo, 2005).

Menurut Arifin (1994), persoalan *programming* pada dasarnya berkenaan dengan penentuan alokasi yang optimal dari sumber-sumber yang langka untuk memenuhi suatu tujuan (obyektif). Misalnya: bagaimana mengkombinasikan beberapa sumber yang serba terbatas seperti tenaga kerja, material, mesin, tanah, pupuk, air, sehingga diperoleh *output* yang maksimum. Oleh sebab itu, suatu persoalan disebut program linier bila memenuhi:

1. Tujuan/obyektif dinyatakan dalam fungsi linier, fungsi ini disebut fungsi tujuan.
2. Harus ada alternatif pemecahan-pemecahan, ini berupa laba yang maksimum, biaya yang minimum, dan sebagainya yang harus dipilih.
3. Sumber-sumber tersedia dalam jumlah terbatas (seperti modal terbatas). Pembatasan (yang merupakan syarat/kendala) harus dinyatakan di dalam ketidaksamaan yang linier (Arifin, 1994).

*Linear programming* adalah suatu cara untuk menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas di antara beberapa aktivitas yang bersaing dengan cara yang terbaik yang mungkin dilakukan (Dimiyati, 1994). Hal ini juga berkenaan dengan solusi-solusi tak negatif sistem persamaan linier. Kadang-kadang dirujuk sebagai aljabar bilangan-bilangan tak negatif dan melibatkan penggunaan aneka metode atau algoritma untuk mengekspresikan persoalan. Perkataan “linier” dalam pemrograman linier menyatakan bahwa perubah-perubahnya linier atau dapat diekspresikan dalam hubungan yang

dijumpai dalam persamaan-persamaan linier. Beberapa masalah khas dalam pemrograman linier adalah:

1. *Masalah Pencampuran*, contoh: Harga makanan berubah-ubah dari hari ke hari dan seorang ibu rumah tangga harus membeli makanan yang memenuhi persyaratan vitamin di samping batasan keuangan.
2. *Masalah Produksi*, contoh: Penjadwalan mesin untuk memperoleh keluaran terbesar dengan biaya termurah.
3. *Masalah Transportasi*, contoh: Hasil produksi disimpan di beberapa gudang yang harus disebarakan ke aneka toko pengecer dan langganan dalam waktu minimum dan dengan cara yang semurah-murahnya (Clark, 1991).

PL menggunakan model sistematis untuk menjelaskan persoalan yang dihadapinya. Sifat linier di sini memberi arti bahwa seluruh fungsi matematis dalam model ini merupakan fungsi yang linier, sedangkan kata *programa* merupakan sinonim untuk perencanaan aktivitas-aktivitas untuk memperoleh suatu hasil yang optimum, yaitu suatu hasil yang mencapai tujuan terbaik di antara seluruh alternatif yang fisibel. Clark (1991) menyebutkan bahwa PL adalah suatu alat penting dalam mencari nilai optimum dari fungsi linier terhadap pembatas (*constraint*) tertentu.

Dalam PL terdapat beberapa teknik penentuan solusi optimal, di antaranya adalah metode Hongaria dan metode Simpleks. Penentuan solusi optimal menggunakan metode Hongaria didasarkan pada teknik operasi matriks. Dimana matriks yang akan dioperasikan adalah matriks biaya masalah penugasan. Sedangkan penentuan solusi optimal menggunakan metode Simpleks didasarkan pada teknik eliminasi Gauss Jordan. Penentuan solusi optimal dilakukan dengan

memeriksa titik ekstrim satu per satu dengan cara perhitungan iteratif. Sehingga penentuan solusi optimal dengan simpleks dilakukan tahap demi tahap yang disebut dengan iterasi. Iterasi ke- $i$  hanya tergantung dari iterasi sebelumnya (Siringoringo, 2005).

Optimalisasi adalah suatu proses memaksimalkan atau meminimumkan fungsi tujuan suatu instansi. Dalam upaya untuk mengoptimalkan, ada dua macam masalah dalam PL, yakni masalah maksimisasi dan minimisasi. Memaksimalkan berarti mengalokasikan masukan untuk mendapatkan keuntungan maksimum, sedangkan meminimumkan berarti menghasilkan tingkat *output* tertentu dengan menggunakan biaya seminimum mungkin. Teknik optimasi ini dapat dilakukan melalui analisis secara grafis, analisis marjinal, dan analisis menggunakan matematika (Kusumastanto, 2002).

Tergantung kepada informasi yang ada, penyelesaian masalah ini dapat diarahkan kepada maksimisasi atau minimisasi. Bila berkaitan dengan masalah, kerugian, cacat, dan hal-hal yang negatif itu berarti persoalan minimisasi. Sebaliknya, bila berkaitan dengan perolehan, prestasi, dan hal-hal yang positif itu berarti persoalan maksimisasi. Penerapannya bahwa setiap sumber daya harus ditugaskan hanya untuk satu pekerjaan. Untuk suatu masalah penugasan  $n \times n$ , jumlah penugasan yang mungkin dilakukan sama dengan  $n!$  karena berpasangan satu-satu (Anton dan Rorress, 1988).

Berkenaan dengan masalah optimasi sesungguhnya dalam setiap kejadian di alam dunia ini Allah Swt. telah menetapkannya dengan tepat, seperti halnya aktivitas manusia Sang *Khaliq* tidak akan pernah membebankan sesuatu apapun di

luar kemampuan hamba-Nya, seperti yang termaktub dalam firman Allah al-Quran surat al-Baqarah/2:286:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إِكْرَامًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

*“Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri maafilah kami, ampunilah kami, dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir" (QS. al-Baqarah/2:286).*

Dalam ayat tersebut disebutkan bahwa Allah Swt. tidak akan memberikan beban kepada seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Sehingga juga memberikan pengertian bahwa perbuatan baik itu adalah perbuatan yang mudah dikerjakan manusia karena sesuai dengan watak dan tabiatnya, sedang perbuatan yang jahat adalah perbuatan yang sukar dikerjakan manusia karena tidak sesuai dengan watak dan tabiatnya. Manusia dilahirkan dalam keadaan fitrah yang suci dan telah tertanam dalam hatinya jiwa ketauhidan. Sekalipun manusia oleh Allah Swt. diberi persediaan untuk menjadi baik dan persediaan menjadi buruk, tetapi dengan adanya jiwa tauhid yang telah tertanam dalam hatinya sejak ia masih dalam rahim ibunya, maka tabiat ingin mengerjakan kebajikan itu lebih nyata dalam hati manusia dibanding dengan tabiat ingin mengerjakan kejahatan.

Mengenai aplikasi metode Hongaria, Susanto (2006) menyebutkan dalam penelitiannya tentang “Penggunaan Algoritma Hungarian dalam Menyelesaikan Persoalan Matriks Berbobot”. Hasil dari penelitian ini adalah tentang keoptimalan

penggunaan Algoritma Hungarian, sehingga disimpulkan bahwa Algoritma Hungarian merupakan salah satu algoritma yang dapat dipergunakan untuk menyelesaikan persoalan *assignment* dengan biaya terkecil. Dalam penelitian lain, tentang “Optimalisasi Keuntungan pada Perusahaan Keripik Balado Mahkota dengan Metode Simpleks”, Muzakki (2012) menyebutkan bahwa keuntungan optimal yang diperoleh Perusahaan Keripik Balado Mahkota apabila menggunakan perhitungan secara manual dan bantuan *software* QSB (*Quantitative System for Busnissess*) adalah Rp 5.187.596 dengan memfokuskan produksi pada keripik balado bulat  $\frac{1}{2}$  kg ( $x_1$ ) sebanyak 278 bungkus dan keripik balado panjang  $\frac{1}{2}$  kg ( $x_3$ ) sebanyak 412 bungkus. Hasil uji sensitivitas QSB (*Quantitative System for Bussines*) dapat menjelaskan faktor-faktor yang menyebabkan produksi yang tidak optimal dan keuntungan tidak maksimal yaitu berlebihnya sumber daya yang disediakan dimana  $S_3 = 4,83$  kg (minyak goreng),  $S_4 = 16,57$  kg (bumbu-bumbu),  $S_5 = 8,6597967$  liter (minyak solar) dan  $S_6 = 14,94$  jam (waktu tenaga kerja). Sumber daya yang berlebih dapat ditolerir perubahannya dengan meningkatkan sumber daya persediaan untuk  $S_1 = 161,0556$  kg (ubi kayu bulat) dan  $S_2 = 226,0556$  kg (ubi kayu panjang), dengan meningkatkan persediaan sumber daya  $S_1$  dan  $S_2$  dapat meminimalkan sumber-sumber daya yang berlebih pada  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$ , dan  $S_6$ .

Berdasarkan latar belakang tersebut, penulis tertarik untuk membandingkan *input* dan *output* data dalam penerapan metode Penugasan Hongaria dengan metode Simpleks dalam upaya optimasi. Pemikiran tersebut secara lengkap disajikan dalam judul “*Penerapan Metode Hongaria dan Metode Simpleks dalam Upaya Optimasi*”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penerapan metode Hongaria dan metode Simpleks dalam upaya optimasi?
2. Bagaimana penerapan metode Hongaria dan metode Simpleks dalam upaya optimasi?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui penerapan metode Hongaria dan metode Simpleks dalam upaya optimasi.
2. Untuk mengetahui penerapan metode Hongaria dan metode Simpleks dalam upaya optimasi

## 1.4 Batasan Masalah

Penelitian ini dibatasi pada beberapa hal agar pembahasannya lebih fokus, sehingga batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Data kemampuan produksi para karyawan, yang meliputi data nominal hasil produksi setiap karyawan.
2. Data proses produksi, yang meliputi lama proses produksi (waktu) setiap karyawan.

3. Data yang bisa diproses menggunakan gabungan metode Hongaria dan metode Simpleks adalah data perusahaan, lembaga atau instansi yang melakukan proses produksi.

### **1.5 Manfaat Penelitian**

Penelitian ini dilakukan dengan harapan dapat bermanfaat bagi:

1. Bagi mahasiswa, dengan penelitian ini diharapkan dapat menerapkan teori yang didapat dalam masalah optimasi penugasan.
2. Bagi fakultas, dengan penelitian ini diharapkan dapat meningkatkan peran serta Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang dalam pengembangan wawasan keilmuan dan peningkatan kualitas fakultas dari segi pengembangan penelitian.

### **1.6 Sistematika Penulisan**

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari lima bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I   Pendahuluan.

Dalam bab pendahuluan ini berisikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II   Kajian Pustaka.

Pada bab kajian pustaka ini berisikan tentang landasan teori yang

menguatkan analisis dari hasil penelitian, yaitu pemrograman linier, metode Hongaria, metode Simpleks, dan kajian al-Quran tentang optimasi.

### Bab III Metode Penelitian.

Pada bab metode penelitian ini berisikan tentang informasi rinci tentang proses penelitian, mulai dari lokasi penelitian hingga analisis hasil penelitian.

### Bab IV Pembahasan

Pada bab pembahasan ini berisikan pembahasan hasil penelitian, yakni mengenai efektifitas penggunaan metode hasil penggabungan metode Hongaria dan metode Simpleks dalam upaya optimasi.

### Bab V Penutup

Pada bab ini berisi kesimpulan dari hasil penelitian yang telah dilakukan dan saran-saran untuk penelitian selanjutnya.



## **BAB II**

### **KAJIAN PUSTAKA**

#### **2.1 Pemrograman Linier**

Pemrograman linier disingkat PL adalah suatu alat yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi suatu model linier dengan keterbatasan-keterbatasan sumber daya yang tersedia. Masalah PL berkembang pesat setelah ditemukan suatu metode penyelesaian PL dengan metode Simpleks yang dikemukakan oleh George Dantzig pada tahun 1947. Selanjutnya berbagai alat dan metode dikembangkan untuk menyelesaikan masalah PL bahkan sampai pada masalah riset operasi hingga tahun 1950-an seperti pemrograman dinamik, teori antrian, dan teori persediaan.

PL banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dalam industri, perbankan, pendidikan, dan masalah-masalah lain yang dapat dinyatakan dalam bentuk linier. Bentuk linier di sini berarti bahwa seluruh fungsi dalam model ini merupakan fungsi linier.

Menurut Aminuddin (2005), PL merupakan suatu model matematika untuk mendapatkan alternatif penggunaan terbaik atas sumber-sumber yang tersedia. Kata linier digunakan untuk menunjukkan fungsi matematika yang digunakan dalam bentuk linier, sedangkan program merupakan penggunaan teknik matematika tertentu. Jadi pengertian PL adalah suatu teknis perencanaan yang bersifat analitis yang analisisnya menggunakan model matematika, dengan tujuan menemukan beberapa alternatif pemecahan optimum terhadap persoalan. Dimiyati dan Dimiyati (1994) juga mendefinisikan PL sebagai suatu cara untuk

menyelesaikan persoalan pengalokasian sumber-sumber yang terbatas di antara beberapa aktivitas, dengan cara yang terbaik yang mungkin dapat dilakukan.

Ditambahkan pula oleh Siringoringo (2005) bahwasanya PL merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan seperti memaksimalkan keuntungan dan meminimumkan biaya. PL banyak diterapkan dalam masalah ekonomi, industri, militer, sosial, dan lain-lain. PL berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linier dengan beberapa kendala linier.

Masalah yang dialami perusahaan adalah alokasi optimum sumber daya yang langka. Sumber daya dapat berupa modal, tenaga kerja, bahan mentah, kapasitas mesin, waktu, ruangan atau teknologi. Perusahaan menginginkan tercapainya hasil terbaik yang mungkin dengan keterbatasan sumber daya ini. Hasil yang diinginkan mungkin ditunjukkan sebagai maksimisasi dari beberapa ukuran seperti profit, penjualan dan kesejahteraan, atau minimalisasi seperti biaya, waktu, dan jarak.

Pokok pikiran yang utama dalam menggunakan PL adalah merumuskan masalah dengan jelas dengan menggunakan sejumlah informasi yang tersedia. Sesudah masalah dirumuskan dengan baik, langkah berikutnya menerjemahkan masalah ini ke dalam bentuk model matematika, yang terang mempunyai cara pemecahan yang lebih mudah dan rapi guna menemukan jawaban terhadap masalah yang dihadapi (Siagian, 1987).

Sehingga untuk merumuskan suatu masalah ke dalam bentuk model PL, harus dipenuhi syarat-syarat berikut:

1. Tujuan masalah tersebut harus jelas dan tegas.

Pada contoh masalah, tujuan masalah tersebut harus jelas dan tegas, yaitu ingin mendapatkan keuntungan yang maksimal.

2. Harus ada sesuatu atau beberapa alternatif yang ingin membandingkan.

Pada contoh masalah, alternatif perbandingannya adalah kombinasi jumlah produksi dan keuntungan yang diperoleh.

3. Adanya sumber daya yang terbatas.

Pada contoh masalah, sumber daya yang terbatas adalah waktu untuk *subassembly*, *assembly*, dan inspeksi.

4. Bisa dilakukan perumusan kuantitatif.

Fungsi tujuan dan kendala harus dapat dirumuskan secara kuantitatif.

5. Adanya keterkaitan peubah

Adanya hubungan keterkaitan antara peubah-peubah yang membentuk fungsi tujuan dan kendala.

Setelah masalah diidentifikasi, langkah selanjutnya adalah formulasi model matematik yang meliputi tiga tahap:

1. Menentukan variabel yang tidak diketahui (variabel keputusan) dan menyatakan dalam simbol matematik.
2. Membentuk fungsi tujuan yang ditunjukkan sebagai suatu persamaan linier dari variabel keputusan.
3. Menentukan semua kendala masalah tersebut dan mengekspresikan dalam persamaan dan pertidaksamaan yang juga merupakan persamaan linier dari variabel keputusan yang mencerminkan keterbatasan sumber daya masalah itu.

Dijelaskan bahwa tahap berikutnya yang harus dilakukan setelah memahami permasalahan optimasi adalah membuat model yang sesuai untuk analisis. Pendekatan konvensional riset operasional untuk pemodelan adalah membangun model matematik yang menggambarkan inti permasalahan. Kasus dari bentuk cerita diterjemahkan ke model matematik. Model matematik merupakan representasi kuantitatif tujuan dan sumber daya yang membatasi sebagai fungsi variabel keputusan. Model matematika permasalahan optimal terdiri dari dua bagian. Bagian pertama memodelkan tujuan optimasi. Model matematik tujuan selalu menggunakan bentuk persamaan. Bentuk persamaan digunakan karena ingin mendapatkan solusi optimum pada satu titik. Fungsi tujuan yang akan dioptimalkan hanya satu. Bukan berarti bahwa permasalahan optimasi hanya dihadapkan pada satu tujuan. Tujuan dari suatu usaha bisa lebih dari satu. Tetapi pada bagian ini hanya fokus pada permasalahan optimal dengan satu tujuan.

Bagian kedua merupakan model matematik yang merepresentasikan sumber daya yang membatasi. Fungsi pembatas bisa berbentuk persamaan ( $=$ ) atau pertidaksamaan ( $\leq$  atau  $\geq$ ). Fungsi pembatas disebut juga sebagai *constraint*. Konstanta (baik sebagai koefisien maupun nilai kanan) dalam fungsi pembatas maupun pada tujuan dikatakan sebagai parameter model. Model matematika mempunyai beberapa keuntungan dibandingkan pendeskripsian permasalahan secara verbal. Salah satu keuntungan yang paling jelas adalah model matematik menggambarkan permasalahan secara lebih ringkas. Hal ini cenderung membuat struktur keseluruhan permasalahan lebih mudah dipahami dan membantu mengungkapkan relasi sebab akibat penting. Model matematik juga memfasilitasi

segala sesuatu yang berhubungan dengan permasalahan dan keseluruhannya serta mempertimbangkan semua keterhubungannya secara simultan. Terakhir, model matematik membentuk jembatan ke penggunaan teknik matematik dan komputer kemampuan tinggi untuk menganalisis permasalahan.

Di sisi lain, model matematik mempunyai kelemahan. Tidak semua karakteristik sistem dengan mudah dimodelkan menggunakan fungsi matematik. Meskipun dapat dimodelkan dengan fungsi matematik, kadang-kadang penyelesaiannya sulit diperoleh karena kompleksitas fungsi dan teknik yang dibutuhkan.

Bentuk umum pemrograman linier adalah sebagai berikut:

1. Fungsi tujuan:

$$\text{Maksimumkan atau minimumkan } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

2. Sumber daya yang membatasi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = / \leq / \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = / \leq / \geq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = / \leq / \geq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

Simbol  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ( $x_i$ ) menunjukkan variabel keputusan. Jumlah variabel keputusan ( $x_i$ ) tergantung dari jumlah kegiatan atau aktivitas yang dilakukan untuk mencapai tujuan. Simbol  $c_1, c_2, \dots, c_n$  merupakan kontribusi masing-masing variabel keputusan terhadap tujuan, disebut juga koefisien fungsi tujuan pada model matematiknya. Simbol  $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}$  merupakan penggunaan per unit variabel keputusan akan sumber daya yang membatasi, atau

disebut juga sebagai koefisien fungsi kendala pada model matematikanya. Simbol  $b_1, b_2, \dots, b_m$  menunjukkan jumlah masing-masing sumber daya yang ada. Jumlah fungsi kendala akan tergantung dari banyaknya sumber daya yang terbatas (Siringoringo, 2005).

Untuk membentuk suatu model PL perlu diterapkan asumsi-asumsi berikut:

1. Sifat Linieritas

Fungsi obyektif dan kendala haruslah merupakan fungsi linier dan variabel keputusan. Hal ini akan mengakibatkan fungsi bersifat proporsional dan additif, misalnya untuk memproduksi 1 kursi dibutuhkan waktu 5 jam, maka untuk memproduksi 2 kursi dibutuhkan waktu 10 jam.

Sifat linieritas suatu kasus dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa cara. Secara statistik, kelinieran dapat diperiksa menggunakan grafik (diagram pencar) ataupun menggunakan uji hipotesa. Secara teknis, linieritas ditunjukkan oleh adanya sifat proporsionalitas, additivitas, divisibilitas dan kepastian fungsi tujuan dan pembatas.

2. Sifat Proporsional

Sifat proporsional dipenuhi jika kontribusi setiap variabel pada fungsi tujuan atau penggunaan sumber daya yang membatasi proporsional terhadap level nilai variabel. Jika harga per unit produk misalnya adalah sama berapapun jumlah yang dibeli, maka sifat proporsional dipenuhi. Atau dengan kata lain, jika pembelian dalam jumlah besar mendapatkan diskon, maka sifat proporsional tidak dipenuhi. Jika penggunaan daya per unitnya tergantung dari jumlah yang diproduksi, maka sifat proporsionalitas tidak dipenuhi.

### 3. Sifat Additivitas

Sifat additivitas mengasumsikan bahwa tidak ada bentuk perkalian silang di antara berbagai aktivitas, sehingga tidak akan ditemukan bentuk perkalian silang pada model. Sifat additivitas dipenuhi jika fungsi tujuan merupakan penambahan langsung kontribusi masing-masing variabel keputusan. Jika dua variabel keputusan misalnya merepresentasikan dua produk substitusi, dimana peningkatan volume penjualan salah satu produk akan mengurangi volume penjualan produk lainnya dalam pasar yang sama, maka sifat additivitas tidak terpenuhi.

### 4. Sifat Divisibilitas

Sifat divisibilitas berarti unit aktivitas dapat dibagi ke dalam sembarang level fraksional, sehingga nilai variabel keputusan *non integer* dimungkinkan. Nilai variabel keputusan dapat berupa bilangan pecahan. Apabila diinginkan solusi berupa bilangan bulat (*integer*), maka harus digunakan metode untuk *integer programming*.

### 5. *Non negativity*

Nilai variabel keputusan haruslah non negatif ( $\geq 0$ ).

### 6. Sifat Kepastian (*Certainty*)

Sifat kepastian menunjukkan bahwa semua parameter model berupa konstanta. Artinya koefisien suatu tujuan maupun fungsi pembatas merupakan suatu nilai pasti, bukan merupakan nilai dengan peluang tertentu.

Semua konstanta (parameter) yaitu  $C_j, a_{ij}, b_i$  (Siringoringo, 2005).

Siringoringo (2005) juga menjelaskan tentang formulasi permasalahan, bahwasanya urutan pertama dalam penyelesaian adalah mempelajari sistem

relevan dan mengembangkan pernyataan permasalahan yang dipertimbangkan dengan jelas. Penggambaran sistem dalam pernyataan ini termasuk pernyataan tujuan, sumber daya yang membatasi, alternatif keputusan yang mungkin (kegiatan atau aktivitas), batasan waktu pengambilan keputusan, hubungan antara bagian yang dipelajari dan bagian lain dalam perusahaan, dan lain-lain.

Penetapan tujuan yang tepat merupakan aspek yang sangat penting dalam formulasi masalah. Untuk membentuk tujuan optimalisasi, diperlukan identifikasi anggota manajemen yang benar-benar akan melakukan pengambilan keputusan dan mendiskusikan pemikiran mereka tentang tujuan yang ingin dicapai.

Kasus pemrograman linier sangat beragam. Dalam setiap kasus, hal yang penting adalah memahami setiap kasus dan memahami konsep pemodelannya. Meskipun fungsi tujuan, misalnya hanya mempunyai kemungkinan bentuk maksimisasi dan minimisasi, keputusan untuk memilih salah satunya bukan pekerjaan mudah. Tujuan pada suatu kasus bisa menjadi batasan pada kasus yang lain. Harus hati-hati dalam menentukan tujuan, koefisien fungsi tujuan, batasan, dan koefisien pada fungsi pembatas (Siringoringo, 2005).

Banyak sekali persoalan ekonomi dan bisnis yang sangat berkaitan dengan alokasi sumber-sumber yang sangat terbatas, yaitu uang, tenaga kerja, bahan mentah, mesin, ruangan untuk menyimpan barang, waktu, dan permintaan masyarakat terhadap barang atau jasa tertentu, dan juga waktu agar dapat memaksimalkan suatu tujuan yang menguntungkan (seperti jumlah penerimaan devisa hasil ekspor harus maksimum), hasil penjualan atau laba suatu perusahaan harus maksimum atau meminimumkan suatu tujuan yang tidak menguntungkan seperti jumlah kerugian harus minimum (*minimized loss*), jumlah biaya harus

minimum (*minimized cost*), jumlah kekalahan dalam permainan harus minimum, dan lain sebagainya (Supranto, 2006).

Teknik matematis untuk perencanaan, seperti alokasi sumber yang terbatas, disebut *mathematical programming*. Suatu kasus khusus dimana ukuran keberhasilan (*permormance*) atau biaya merupakan suatu fungsi linier dan kendala maupun utilitas pada tersedianya sumber-sumber dapat dinyatakan/diekspresikan sebagai persamaan atau ketidaksamaan linier disebut sebagai *linear programming* (Supranto, 2006).

Lebih spesifik lagi, persoalan *linear programming* yang umum mencakup memaksimalkan atau meminimumkan suatu fungsi linier dari beberapa variabel primer; (disebut fungsi tujuan atau fungsi objektif) dengan memperhatikan suatu set persamaan atau pertidaksamaan linier (disebut kendala atau pembatasan (*constraint*)). Tidak satu pun dari variabel ini yang nilainya boleh negatif (Supranto, 2006).

Sehingga dalam pengertian lain juga disebutkan bahwa pemrograman linier berkenaan dengan solusi-solusi tak negatif sistem persamaan linier. Kadang-kadang dirujuk sebagai aljabar bilangan-bilangan tak negatif dan melibatkan penggunaan aneka metode atau algoritma untuk mengekspresikan persoalan. Masalah pemrograman linier mempunyai ciri-ciri berikut:

- a. Tujuan yang diinginkan, misal: keuntungan maksimum, biaya minimum atau waktu minimum.
- b. Sejumlah besar peubah harus dimanipulasi pada waktu yang bersamaan, misalnya bahan dalam campuran bensin, uang, ruangan pabrik, produksi, orang atau waktu mesin.

- c. Kendala atau batasan pada peubah, misalnya banyaknya jam-orang yang diperbolehkan oleh kontrak kerja serikat buruh, keluaran yang mungkin dari sebuah mesin, kebutuhan akan suatu hasil produksi di pasaran terbuka, tanpa pembatasan pada peubah, kebanyakan masalah adalah trivial.
- d. Interaksi antara peubah, misalnya, dalam penentuan barang mana yang harus diproduksi, keuntungan maksimum, jam-orang, kapasitas pabrik, dan biaya untuk semua hasil produksi harus ditinjau. Pabrik mempunyai kapasitas terbatas, beberapa jenis karyawan terlatih memerlukan biaya lebih daripada lainnya, jenis tertentu bahan baku lebih sulit diperoleh daripada yang lain dan seterusnya. Untuk alasan seperti itu, hasil produksi berkompetisi untuk sumber-sumber, dan metode-metode PL dapat digunakan untuk menentukan pendekatan produksi yang paling menguntungkan (Clark, 1991).

Perkataan “linier” dalam pemrograman linier membawakan bahwa peubah-peubahnya linier atau dapat diekspresikan dalam hubungan yang dijumpai dalam persamaan-persamaan linier. Beberapa masalah khas dalam pemrograman linier adalah:

1. Masalah Pencampuran, contoh: harga makanan berubah-ubah dari hari ke hari dan seorang ibu rumah tangga harus membeli makanan yang memenuhi persyaratan vitamin di samping batasan keuangan.
2. Masalah Produksi, contoh: penjadwalan mesin untuk memperoleh keluaran terbesar dengan biaya termurah.
3. Masalah Transportasi, contoh: hasil produksi disimpan di beberapa gudang yang harus disebarakan ke aneka toko pengecer dan langganan dalam waktu minimum dan dengan cara yang semurah-murahnya (Clark, 1991).

### 2.1.1 Pemecahan dengan Cara Aljabar

Untuk memecahkan persoalan *linear programming* dengan cara aljabar, terlebih dahulu harus mencari seluruh pemecahan dasar sebanyak  $K$ , yaitu

$$K = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

dimana,  $n$ : banyaknya variabel yang harus dicari nilainya.

$m$ : banyaknya persamaan  $m < n$ , artinya banyaknya persamaan lebih sedikit dari banyaknya variabel.

Persoalan *programming* pada dasarnya berkenaan dengan penentuan alokasi yang optimal dari sumber-sumber yang langka (*limited resource*) untuk memenuhi suatu tujuan (*objective*). Misalnya, bagaimana mengkombinasikan beberapa sumber yang serba terbatas, seperti tenaga kerja, material, mesin, tanah, pupuk, dan air sehingga diperoleh *output* yang maksimum.

Persoalan *linear programming* ialah suatu persoalan untuk masing-masing nilai variabel, sedemikian rupa sehingga (s.r.s.) nilai fungsi tujuan atau objektif (*objective function*) yang linier menjadi optimum (maksimum atau minimum) dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada, yaitu pembatasan mengenai *inputnya*. Pembatasan-pembatasan ini pun harus dinyatakan dalam pertidaksamaan yang linier (*linear inequalities*).

Untuk mudahnya, telah disediakan contoh berikut.

Pemilik perusahaan mempunyai dua macam bahan mentah, katakan bahan mentah I dan II, yang masing-masing tersedia sebesar 60 dan 48 satuan (kg, m, l, ton, dan sebagainya). Dari dua bahan mentah tersebut akan diproduksi 2 macam barang, yaitu barang A dan B, baik barang A maupun barang B memerlukan bahan mentah I dan II sebagai *inputnya*. Perincian penggunaan bahan mentah

adalah sebagai berikut: 1 satuan barang A memerlukan 4 satuan bahan I dan 2 satuan bahan II, 1 satuan barang B memerlukan 2 satuan bahan I dan 4 satuan bahan II. Apabila barang A dan B dijual, 1 satuan barang A laku Rp 8.000.000 sedangkan barang B laku Rp 6.000.000. Berapa besarnya produksi barang A dan B agar penerimaan seluruh hasil penjualan maksimum dengan memperhatikan pembatasan bahwa penggunaan bahan I dan II tidak boleh melebihi 60 satuan dan 48 satuan? (semua barang laku dijual)

Perumusan persoalan PL:

Misalnya, banyaknya barang A dan B masing-masing  $x_1$  dan  $x_2$ .

Cari  $x_1$  dan  $x_2$ , sedemikian sehingga:

$$\text{s.r.s.} \quad : Z = 8x_1 + 6x_2 : \text{maksimum}$$

$$\text{d.p} \quad : 4x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 48$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Keterangan:

$$Z = f(x_1, x_2) = 8x_1 + 6x_2 : \text{fungsi tujuan (obyektif) yang linier}$$

s.r.s : sedemikian rupa sehingga

d.p : dengan pembatasan

$\leq$  artinya kurang dari sama dengan

$\geq$  artinya lebih dari sama dengan

(simbol pertidaksamaan untuk menunjukkan pembatasan)

1 satuan barang A laku Rp 8.000.000  $\rightarrow x_1$  satuan laku  $8x_1$ .

1 satuan barang B laku Rp 6.000.000  $\rightarrow x_2$  satuan laku  $6x_2$ .

Jumlah penerimaan hasil penjualan =  $Z = 8x_1 + 6x_2$  harus maksimum.

1 satuan barang A memerlukan 4 satuan bahan I  $\rightarrow x_1$  satuan =  $4x_1$ . 1 satuan barang B memerlukan 2 satuan bahan I  $\rightarrow x_2$  satuan =  $2x_2$ . Jumlah bahan mentah I yang diperlukan =  $4x_1 + 2x_2$  (hanya tersedia sebanyak 60 satuan). 1 satuan barang A memerlukan 2 satuan bahan II  $\rightarrow x_1$  satuan =  $2x_1$ . 1 satuan barang B memerlukan 4 satuan bahan II  $\rightarrow x_2$  satuan =  $4x_2$ . Jumlah bahan mentah II yang diperlukan =  $2x_1 + 4x_2$  (hanya tersedia sebanyak 48 satuan).  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ , artinya  $x_1$  dan  $x_2$  tidak boleh mengambil nilai negatif, paling kecil 0. Syarat ini disebut *non-negativity constraint*, juga merupakan pembatasan (*limitation*) yang harus diperhatikan di dalam pemecahan persoalan PL.

Suatu persoalan disebut persoalan PL apabila memenuhi hal-hal berikut:

1. Tujuan (*objective*) yang akan dicapai harus dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi linier. Fungsi ini disebut fungsi tujuan (*objective function*).
2. Harus ada alternatif pemecahan. Pemecahan yang membuat nilai fungsi tujuan optimum (laba yang maksimum, biaya yang minimum, dan sebagainya) yang harus dipilih.
3. Sumber-sumber yang tersedia dalam jumlahnya terbatas (bahan mentah terbatas, modal terbatas, ruangan untuk menyimpan barang terbatas, dan sebagainya). Pembatasan-pembatasan harus dinyatakan di dalam pertidaksamaan yang linier (*linear inequality*).

Pada dasarnya, secara umum persoalan PL dapat dirumuskan sebagai berikut:

Cari  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ .

s.r.s. :  $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$  : optimum (maksimum atau minimum)

$$\begin{aligned}
 \text{d.p.} \quad & : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n \leq h_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n \leq h_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n \leq h_i \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n \leq h_m \\
 & x_j \geq 0, j = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

Keterangan:

Ada  $n$  macam barang yang akan diproduksi, masing-masing sebesar  $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n$ .

$x_j$  : banyaknya produksi barang yang ke- $j, j = 1, 2, \dots, n$

$c_j$  : harga per satuan barang ke- $j$ , disebut *price*

Ada  $m$  macam bahan mentah, masing-masing tersedia  $h_1, h_2, \dots, h_i, \dots, h_m$ .

$h_i$  : banyaknya bahan mentah ke- $i, i = 1, 2, \dots, m$

$a_{ij}$  : banyaknya bahan mentah ke- $i$  yang dipergunakan untuk memproduksi 1 satuan barang ke- $j$ .

$x_j$  unit memerlukan  $a_{ij}x_j$  unit bahan mentah  $i$ .

interpretasi mengenai  $a_{ij}$ ,  $c_j$ , dan  $h_i$  sangat bergantung kepada interpretasi terhadap  $x_j$ .

Persoalan PL dapat terjadi di kalangan pemerintahan, perusahaan, militer, dan sebagainya. Suatu keputusan adalah suatu pilihan terhadap beberapa alternatif. PL membantu pembuat keputusan (*decision maker*) untuk memilih suatu alternatif yang paling tepat dan merupakan pemecahan paling baik (*the best solution*). Churchman (1966), di dalam bukunya *Introduction to Operation Research*, menyebutkan bahwa selain untuk memecahkan persoalan transportasi,

PL juga berguna untuk memecahkan persoalan personal, *assignment*, *optimum crop rotation plan*, *allocating manufactured product*, *optimal bombing patterns*, *design of weapons system*, atau *optimal purchasing policy*.

Untuk memberikan contoh pemecahan persoalan PL dengan cara aljabar, perhatikan persoalan PL yang telah dirumuskan sebelumnya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{Cari } & x_1, x_2, \text{ sedemikian sehingga} \\ \text{s.r.s } & : Z = 8x_1 + 6x_2 : \text{ maksimum} \\ \text{d.p } & : 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 48 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Memecahkan persoalan PL di atas berarti memecahkan kedua pertidaksamaan, kemudian nilai  $x_1$  dan  $x_2$  sebagai pemecahan dimasukkan ke dalam  $Z$ . Untuk memecahkan pertidaksamaan tidak dapat secara langsung tetapi pertidaksamaan tersebut harus diubah dahulu menjadi persamaan dengan jalan memasukkan *slack variables*  $x_3$  dan  $x_4$ . *Slack variables* ialah suatu variabel yang ditambahkan di sebelah kiri tanda pertidaksamaan agar pertidaksamaan menjadi persamaan. Dengan memasukkan *slack variables*  $x_3$  dan  $x_4$  diperoleh 2 persamaan berikut:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48$$

Dalam praktiknya,  $x_3$  dan  $x_4$  merupakan bahan mentah sisa, yaitu yang tidak diproduksi. Maka dari itu,  $c_3$  dan  $c_4$  masing-masing nilainya sama dengan 0, sebab tidak dijual. Persoalan PL, dimana pertidaksamaan sudah diubah menjadi persamaan, disebut persoalan PL yang standar. Persoalan PL yang standar dari PL tersebut di atas adalah sebagai berikut:

Cari :  $x_1, x_2, x_3, x_4$

s.r.s :  $Z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$ : maksimum

d.p :  $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 48$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

Diperoleh dua persamaan:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 48$$

$x_1, x_2, x_3, x_4$  disebut pemecahan dari persamaan tersebut apabila nilai-nilai  $x_1, x_2, x_3$  dan  $x_4$  memenuhi persamaan tersebut.

Karena ada 4 variabel tetapi hanya tersedia 2 persamaan, maka hanya ada 2 variabel yang nilainya dapat diperoleh dari 2 persamaan tersebut, sisanya sebanyak  $2(4 - 2 = 2)$  nilainya harus 0. Pada umumnya, kalau ada  $n$  variabel  $= (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$  tetapi hanya ada  $m$  persamaan tersebut. Variabel yang diperoleh dari  $m$  persamaan tersebut dinamakan variabel dasar (*basic variables*), sedangkan pemecahannya disebut pemecahan dasar (*basic solution*). Pemecahan yang memenuhi semua syarat pembatasan disebut pemecahan fisibel (*feasible solution*). Kalau pemecahan fisibel merupakan pemecahan dasar, maka disebut pemecahan dasar fisibel (*feasible basic solution*), pemecahan yang menghasilkan paling sedikit satu variabel yang negatif berarti pemecahan tersebut tidak fisibel (*not feasible*).

Pada umumnya, kalau ada  $n$  variabel  $= (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$  tetapi hanya ada  $m$  persamaan, maka bisa diperoleh sebanyak  $K$  persamaan, dimana  $K$  merupakan kombinasi, yang dihitung berdasarkan rumus berikut:

$$K = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad n! = n(n-1)(n-2) \dots 2.1$$

$$0! = 1 \text{ dan } 1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Dalam contoh soal ini,  $n = 4, m = 2$

$$K = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Jadi, ada 6 persamaan dasar, dengan demikian ada 6 pemecahan dasar.

Dari 6 pemecahan dasar ini dipilih pemecahan dasar yang fisibel. Nilai variabel dasar sebagai pemecahan dasar yang fisibel ini dimasukkan ke dalam  $Z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$ . Kemudian dipilih pemecahan dasar fisibel yang membuat nilai  $Z$  menjadi maksimum. Pemecahan dasar fisibel inilah yang merupakan pemecahan optimal.

Enam persamaan dasar dengan pemecahan dasarnya adalah sebagai berikut:

1.  $x_1 = x_2 = 0$  (tidak ada produksi)

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \rightarrow x_3 = 60$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \rightarrow x_4 = 48$$

$$Z_1 = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$= 8(0) + 6(0) + 0(60) + 0(48) = 0 \quad (\text{tidak ada penjualan})$$

2.  $x_1 = x_3 = 0$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \rightarrow 2x_2 = 60 \rightarrow x_2 = 30$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \rightarrow 4x_2 + x_4 = 48$$

$$4x_2 + x_4 = 48$$

$$4(30) + x_4 = 48$$

$$x_4 = 48 - 10 = -72 \text{ (tidak fisibel).}$$

$Z_2$  tidak dihitung karena  $x_4$  negatif, jadi pemecahan tidak fisibel.

3.  $x_1 = x_4 = 0$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \rightarrow 2x_2 + x_3 = 60$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \rightarrow 4x_2 = 48 \rightarrow x_2 = 12$$

$$2x_2 + x_3 = 60$$

$$2(12) + x_3 = 60$$

$$x_3 = 60 - 24 = 36$$

$$Z_2 = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$= 8(0) + 6(12) + 0(36) + 0(0) = 72$$

4.  $x_2 = x_3 = 0$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \rightarrow 4x_1 = 60 \rightarrow x_1 = 15$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \rightarrow 2x_1 + x_4 = 48$$

$$2x_1 + x_4 = 48$$

$$2(15) + x_4 = 48$$

$$x_4 = 48 - 30 = 18$$

$$Z_3 = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$= 8(15) + 6(0) + 0(0) + 0(18) = 120$$

5.  $x_2 = x_4 = 0$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \rightarrow 4x_1 + x_3 = 60$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \rightarrow 2x_1 = 48 \rightarrow x_1 = 24$$

$$4x_1 + x_3 = 60$$

$$4(24) + x_3 = 60$$

$$x_3 = 60 - 96 = -36 \text{ (tidak fisibel)}$$

$Z_3$  tidak dihitung karena  $x_3$  negatif.

6.  $x_3 = x_4 = 0$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \rightarrow 4x_1 + 2x_2 = 60 \text{ (kalikan } \frac{1}{2})$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \rightarrow 2x_1 + 4x_2 = 48$$

$$2x_1 + x_2 = 30$$

$$2x_1 + 4x_2 = 48$$

$$2x_1 + 4x_2 = 48$$

$$2x_1 + 4(6) = 48$$

$$-3x_2 = -18$$

$$2x_1 = 24$$

$$x_2 = 6$$

$$x_1 = 12$$

$$Z_3 = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$= 8(12) + 6(6) + 0(0) + 0(0)$$

$$= 96 + 36 = 132 \text{ (terbesar = maksimum)}$$

Oleh karena  $Z_6$  yang memberikan nilai tujuan terbesar, maka  $Z_6 = Z$  maksimum =  $Z_{maks}$ . Jadi, pemecahan dasar ke-6 merupakan pemecahan yang optimal. Jumlah hasil penjualan maksimum sebesar Rp 132.000. Keputusan yang harus dibuat oleh pemilik perusahaan ialah bahwa barang A dan B masing-masing harus diproduksi sebesar 12 satuan dan 6 satuan. Contoh berikut ini mengenai persoalan minimum.

Cari :  $x_1, x_2$

s.r.s :  $Z = 5x_1 + 3x_2$  : maksimum

d.p. :  $2x_1 + x_2 \geq 3$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Harus diubah dahulu menjadi persamaan standar dengan memasukkan *surplus variables*  $x_3$  dan  $x_4$ , yaitu variabel yang harus dikurangkan di dalam suatu pertidaksamaan agar menjadi persamaan. Persoalan yang standar adalah sebagai berikut:

$$\text{Cari} \quad : x_1, x_2, x_3, x_4$$

$$\text{s.r.s} \quad : Z = 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 : \text{minimum}$$

$$\text{d.p.} \quad : 2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$1. \quad x_1 = x_2 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \rightarrow -x_3 = 3 \rightarrow x_3 = -3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 3 \rightarrow -x_4 = 3 \rightarrow x_4 = -3$$

$Z_1$  tidak perlu dihitung karena pemecahan ini tidak fisibel,  $x_3$  dan  $x_4$  tidak memenuhi syarat (nilainya negatif).

$$2. \quad x_1 = x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \rightarrow x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 3 \rightarrow -x_2 - x_4 = 2$$

$$x_2 - x_4 = 2$$

$$3 - x_4 = 2$$

$$-x_4 = 2 - 3 = -1$$

$$x_4 = 1$$

$$Z_2 = 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$= 5(0) + 3(3) + 0(0) + 0(1) = 9$$

$$3. \quad x_1 = x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \rightarrow x_2 - x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 2 \rightarrow x_2 = 2$$

$$x_2 - x_3 = 3$$

$$2 - x_3 = 3$$

$$-x_3 = 3 - 2 = 1$$

$$x_3 = -1 \text{ (tidak fisibel)}$$

$Z_3$  tidak perlu dihitung karena pemecahan ini tidak fisibel (tidak memenuhi syarat).

4.  $x_2 = x_3 = 0$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \rightarrow 2x_1 = 3 \rightarrow x_1 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 2 \rightarrow x_1 - x_4 = 2$$

$$\frac{3}{2} - x_4 = 2$$

$$\frac{3}{2} - x_4 = 2$$

$$x_4 = \frac{3}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{1}{2}$$

$Z_3$  tidak perlu dihitung.

5.  $x_2 = x_4 = 0$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \rightarrow 2x_1 - x_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 2 \rightarrow x_1 = 2$$

$$2x_1 - x_3 = 3$$

$$2(2) - x_3 = 3$$

$$4 - x_3 = 3$$

$$x_3 = 4 - 3 = 1$$

$$Z_3 = 5x_1 + 3x_2 + 0x_3$$

$$= 5(2) + 3(0) + 0(1) + 0(0) = 10$$

$$6. x_3 = x_4 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \rightarrow 2x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 - x_4 = 2 \rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

$$2x_1 - x_3 = 3x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 = 2x_2 = 2 - 1 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$Z_6 = 5x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$= 5(1) + 3(1) + 0(0) + 0(0) = 8$$

$Z_6 = Z_{\min}$  karena merupakan nilai tujuan yang terkecil apabila dibandingkan dengan nilai tujuan lainnya. Pemecahan optimal memberikan nilai  $Z = 8$  dengan  $x_1 = x_2 = 1$ .

### 2.1.2 Pemecahan Secara Geometris dengan Menggunakan Grafik

Persoalan PL yang mencakup dua variabel primer dipecahkan secara geometris dengan menggambarkan grafik kendala (persamaan) berupa pertidaksamaan yang diperlakukan sebagai persamaan, jadi menentukan poligon dari pemecahan fisibel. Suatu pemecahan disebut fisibel apabila pemecahan tersebut memenuhi semua kendala dari suatu persoalan PL. Begitu poligon pemecahan fisibel sudah diperoleh, langkah selanjutnya ialah menentukan pemecahan fisibel yang membuat fungsi obyektif optimum (maksimum atau minimum), jadi menjadi suatu pemecahan persoalan PL (Supranto, 2006).

Maksudnya, dari sekian banyak pemecahan dasar yang fisibel dipilih salah satu yang membuat fungsi obyektif maksimum ( $Z_{\max}$ ) atau minimum ( $Z_{\min}$ ). Dalil berikut dipergunakan untuk mengurangi banyaknya pemecahan fisibel yang harus dilakukan pengecekan.

Dalil (Supranto, 2006):

Apabila ada suatu pemecahan yang unik untuk memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi obyektif yang linier, maka pemecahan itu harus sesuai dengan titik ekstrim (*vertex*) dari poligon atau daerah pemecahan fisibel. Apabila ada lebih dari satu pemecahan, paling tidak dua dari pemecahan harus sesuai dengan titik atau sudut ekstrim yang berdekatan dari daerah pemecahan yang fisibel. Apabila ada lebih dari satu pemecahan, paling tidak dua dari pemecahan harus sesuai dengan titik atau sudut ekstrim yang berdekatan dari daerah pemecahan yang fisibel.

Jadi, nilai fungsi obyektif yang harus dihitung hanya untuk pemecahan yang sesuai dengan titik-titik ekstrim dari poligon atau daerah pemecahan fisibel agar dapat diperoleh pemecahan optimal. Di dalam beberapa hal tertentu sudah jelas bahwa suatu pemecahan tidak perlu dicari karena jauh dari pemecahan optimal.

Contoh (Supranto, 2006):

1. Seorang produsen memproduksi sepeda dan skuter, masing-masing harus diproses melalui dua pusat mesin produksi. Pusat mesin 1 dan 2 masing-masing hanya tersedia secara maksimal sebanyak 120 jam dan 180 jam. Untuk memproduksi sebuah sepeda memerlukan 6 jam dari pusat mesin 1 dan 10 jam dari pusat mesin 2. Apabila laba (*profit*) yang diperoleh dari menjual sebuah sepeda dan sebuah skuter masing-masing sebesar 45 smu dan 55 smu, tentukan banyaknya sepeda dan skuter yang harus diproduksi agar jumlah laba yang diperoleh maksimum dengan memperhatikan pembatasan/kendala tersedianya waktu yang dapat dipromosikan oleh pusat mesin 1 dan 2.

Apabila  $x_1$  adalah banyaknya sepeda yang diproduksi dan  $x_2$  adalah banyaknya skuter yang diproduksi, maka persoalan di atas dapat dirumuskan menjadi persoalan PL sebagai berikut:

$$\text{Maksimumkan } Z = 45x_1 + 55x_2$$

$$\text{d.p.: } 6x_1 + 4x_2 \leq 120$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 180$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Poligon pemecahan fisibel diperoleh dengan membuat grafik persamaan berikut:

$$6x_1 + 4x_2 = 120$$

$$3x_1 + 10x_2 = 180$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

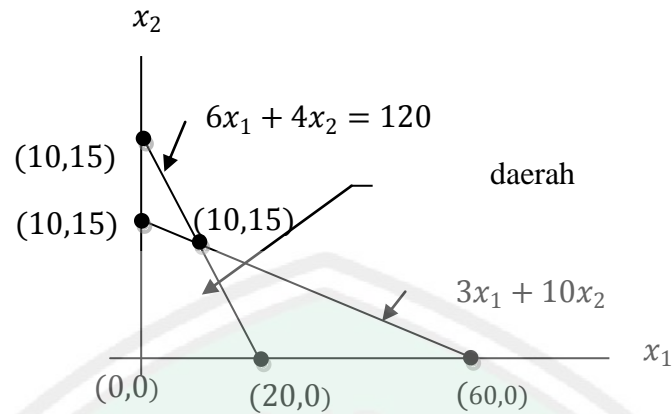
Setiap titik yang terletak di dalam atau pinggir poligon yang diarsir (Gambar 2.1) sesuai dengan pasangan nilai  $x_1$  dan  $x_2$  yang memenuhi kendala (pembatasan), jadi merupakan pemecahan fisibel. Pemecahan optimal sesuai dengan salah satu titik (sudut) ekstrim dari poligon; fungsi obyektif harus dievaluasi untuk titik-titik (0,0), (0,18), (10,15), dan (20,0).

Tabel 2.1. Pemecahan Optimal

Pemecahan	$Z = 45x_1 + 55x_2$
(0,18)	990 smu
(10,15)	1275 smu
dan (20,0)	900 smu

Pemecahan optimal ialah titik (10,15) yang memberikan hasil 1275 smu.

Jadi, perusahaan harus memproduksi 10 sepeda dan 15 skuter.



Gambar 2.1. Poligon diarsir Sebagai Daerah Pemecahan Fisibel

2. Seorang produsen ingin memproduksi dua macam produk, masing-masing sebesar  $x_1$  dan  $x_2$  unit dan ingin meminimumkan biaya  $(2x_1 + 10x_2)$  dengan kendala atau pembatasan berikut.

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$5x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Cari  $x_1$  dan  $x_2$  dan jumlah minimum yang harus diproduksi dengan menggunakan metode grafik!

Pemecahan: Poligon pemecahan fisibel diperoleh dengan menggambar grafik persamaan berikut:

$$2x_1 + x_2 = 6$$

$$5x_1 + 4x_2 = 20$$

$$x_1 = 0$$

$$x_1 = 0$$

Setiap titik yang tersedia di pinggir poligon yang diarsir dari Gambar 2.2 sesuai dengan suatu pemecahan fisibel. Pemecahan optimal salah satu dari titik ekstrim  $(0,5)$ ,  $(0,6)$ , dan  $(\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ .

Tabel 2.2. Pemecahan Optimal

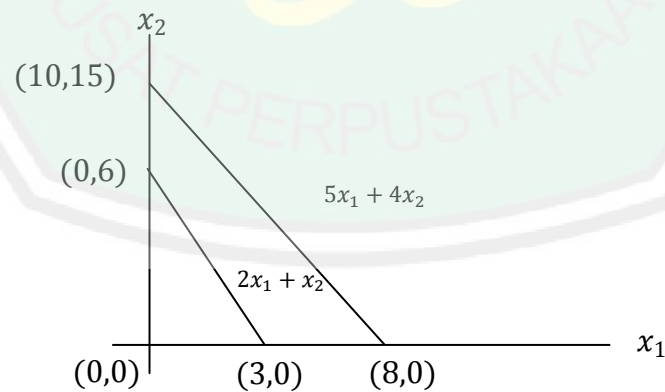
Pemecahan	$Z = 2x_1 + 10x_2$
(0,18)	50 smu
(0,6)	60 smu
$\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$	36 smu

Pemecahan optimal adalah titik  $\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$ , artinya produk 1 dan 2 masing-masing diproduksi  $\frac{4}{3}$  unit dan  $\frac{10}{3}$  unit. Jumlah biaya minimum sebesar 36 smu.

Perhatikan bahwa kendala atau pembatasan menentukan poligon atau daerah pemecahan fisibel. Fungsi obyektif dipergunakan untuk menentukan mana pemecahan fisibel yang optimum. Mungkin sekali untuk menulis set kendala dimana tidak ada pemecahan fisibel. Sebagai contoh, tidak ada set nilai untuk  $x_1$  dan  $x_2$  yang memenuhi kendala

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

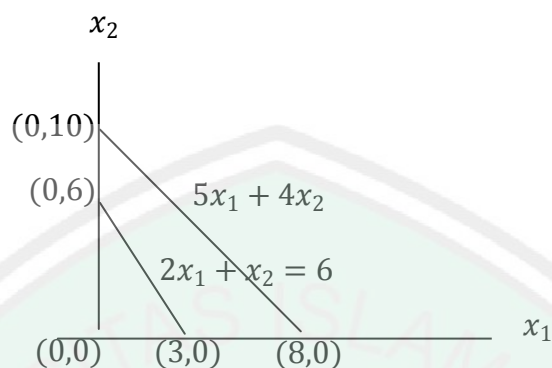
$$5x_1 + 4x_2 \geq 40 \text{ (lihat Gambar 2.2).}$$



Gambar 2.2. Poligon sebagai Daerah Pemecahan Fisibel

Banyak juga beberapa kendala untuk poligon pemecahan yang fisibel tak terbatas (*non bounded*). Sebagai contoh, kalau tanda pertidaksamaan yang

pertama dibalik dan yang kedua tetap, seperti  $2x_1 + x_2 \geq 6$ ;  $5x_1 + 4x_2 \geq 40$  (lihat Gambar 2.3). pemecahan hanya untuk persoalan minimisasi.



Gambar 2.3. Kurva dengan Pemecahan Tidak Terbatas

## 2.2 Metode Hongaria

Subagyo, dkk (1985) menyebutkan dalam bukunya bahwa metode Hongaria dikembangkan oleh seorang ahli matematika berkebangsaan Hongaria yang bernama D. Konig pada tahun 1916. Melalui metode Hongaria fungsi obyektif dari persoalan penugasan direduksi dengan cara mengurangi tiap elemen pada masing-masing baris dan kolom dengan elemen terkecil yang ada pada masing-masing baris dan kolom tersebut untuk mendapatkan solusi optimal pada persoalan penugasan.

Salah satu metode yang digunakan untuk penugasan adalah metode Hongaria. Pada metode Hongaria, jumlah sumber-sumber yang ditugaskan harus sama persis dengan jumlah tugas yang akan diselesaikan. Setiap sumber harus ditugaskan hanya untuk satu tugas. Jadi, masalah penugasan akan mencakup sejumlah  $n$  sumber yang mempunyai  $n$  tugas, sehingga ada  $n!$  kemungkinan (Sutondo, 2012).

Suyitno (1997) menyatakan bahwa langkah-langkah dalam menjalankan metode Hongaria adalah sebagai berikut:

1. Menyusun matriks biaya.
2. Mengurangkan elemen-elemen pada setiap baris dengan elemen terkecil pada baris yang sama.
3. Mengurangkan elemen-elemen pada setiap kolom dengan elemen terkecil pada kolom yang sama. Langkah ini akan menghasilkan biaya *opportunity* keseluruhan.
4. Tutup elemen-elemen bernilai nol pada TOC dengan garis-garis mendatar atau tegak. Misalkan  $n$  adalah banyaknya baris atau kolom dan banyaknya garis penutup elemen nol sekurang-kurangnya  $k$ , maka:  
  
Jika  $k = n$ , berarti sudah diperoleh program optimal. Proses dihentikan dan susun penugasan.  
  
Jika  $k < n$ , maka proses dilanjutkan dengan mengikuti langkah 5.
5. Cari bilangan terkecil dari bilangan-bilangan yang tak tertutup garis, misalkan  $e$ . Selanjutnya:
  - a. Semua elemen yang tak tertutup garis dikurangi  $e$ .
  - b. Semua elemen yang tertutup oleh satu garis tidak diubah.
  - c. Semua elemen yang tertutup oleh dua garis ditambah dengan  $e$ .
  - d. Setelah diperoleh tabel baru kembali ke langkah ke-4 (Suyitno,1997).

Langkah di atas adalah optimalisasi untuk masalah minimasi. Sedangkan untuk masalah maksimasi maka yang dilakukan adalah dengan mengurangi elemen pada baris dan kolom matriks dengan nilai terbesar pada setiap baris dan kolomnya.

Metode ini merupakan bentuk khusus dari *linear programming*. Dan juga merupakan metode yang digunakan untuk mengatur masalah-masalah yang berhubungan dengan penugasan optimal dari berbagai macam sumber produktif atau personalia yang mempunyai tingkat efisiensi berbeda-beda untuk tugas yang berbeda-beda pula. Untuk lebih jelasnya langkah optimalisasi metode Hongaria dapat dilihat pada Lampiran 1.

Perlu diingat, bahwasanya masalah penetapan dan matriks biaya yang bersangkutan yang dapat dipecahkan dengan metode Hongaria harus memenuhi tiga syarat berikut (Anton dan Rorres, 1988):

1. Matriks biaya harus merupakan matriks kuadratis. Pada contoh berikutnya akan dibahas sebuah prosedur untuk menangani masalah penetapan, untuk mana matriks biaya bukan merupakan matriks kuadratis.
2. *Entri-entri* matriks biaya harus merupakan bilangan bulat. Untuk perhitungan dengan tangan hal ini akan lebih praktis daripada bilangan lainnya. Tetapi untuk perhitungan mesin, hal ini memungkinkan untuk menggunakan ilmu hitung bilangan eksak dan untuk menghindarkan kesalahan pembulatan. Untuk soal praktis, *entri* yang tidak bulat selalu dapat diubah menjadi *entri* bulat dengan mengalikan matriks biaya dengan pangkat sepuluh.
3. Masalahnya haruslah merupakan soal minimisasi. Masalah pemaksimuman jumlah *entri* dari sebuah matriks biaya akan diubah menjadi masalah meminimumkan jumlah tersebut dengan mengalikan setiap *entri* dari matriks biaya dengan -1 (Anton dan Rorres, 1988).

Penyelesaian dengan metode ini mensyaratkan jumlah sumber yang ditugaskan harus sama persis dengan jumlah tugas yang harus diselesaikan.

Pertolongan yang mudah digunakan dengan bentuk matriks segi empat, dimana baris-barisnya menunjukkan sumber-sumber dan kolom-kolomnya menunjukkan tugas-tugas.

Jika jumlah pekerjaan tidak sama dengan jumlah karyawan, penyelesaian metode di atas tetap bisa diterapkan. Contoh jika jumlah pekerjaan lebih banyak dari jumlah karyawan, maka harus ditambahkan suatu karyawan semu/pura-pura (*dummy worker*). Sebaliknya jika jumlah karyawan lebih banyak dari jumlah pekerjaan, maka harus ditambahkan suatu pekerjaan semu/pura-pura (*dummy job*).

Keuntungan terbesar penggunaan algoritma Hongaria adalah kompleksitas algoritmanya yang polinomial. Metode yang digunakan dalam algoritma Hongaria dalam memecahkan masalah sangat sederhana dan mudah dipahami. Penerapannya bahwa setiap sumber daya harus ditugaskan hanya untuk satu pekerjaan. Untuk suatu masalah penugasan  $n \times n$ , jumlah penugasan yang mungkin dilakukan sama dengan  $n!$  karena berpasangan satu-satu (Anton dan Rorres, 1988).

### 2.3 Metode Simpleks

Metode Simpleks didefinisikan sebagai cara penyelesaian program linier yang memiliki variabel keputusan minimal dua dengan alat bantu tabel. Yang harus diperhatikan adalah bahwa solusi basis yang layak merupakan suatu solusi dan suatu set dari persamaan linier dimana kebanyakan persamaan pemrograman linier dengan fungsi kendalanya berbentuk ketidaksamaan (Kakiay, 2010).

Munculnya kendala ketidaksamaan ini merupakan hal penting dalam persoalan pemrograman linier, yang kemudian akan diubah menjadi kendala ketidaksamaan (Kakiay, 2010).

Metode Simpleks memecahkan persoalan *linear programming* dengan jalan memperoleh suatu pemecahan fisibel dan dengan suatu prosedur iteratif (diulang-ulang), menyempurnakan pemecahan sampai diperoleh suatu pemecahan optimal. Perhitungan secara rutin metode Simpleks didasarkan atas aljabar matriks dan terdiri dari usaha memperoleh suatu invers matriks agar dapat dipecahkan suatu set persamaan linier yang simultan (Supranto, 2006).

Seperti telah diketahui menentukan solusi dasar berarti memperoleh sejumlah variabel basis dan sekumpulan variabel bukan basis. Setiap hasil yang diperoleh selalu diuji apakah telah mencapai program yang optimal yaitu dengan memasukkan satu variabel basis yang ada dalam program yang sedang berlangsung. Apabila ternyata ada suatu perbaikan maka penggantian ini dilakukan. Setiap penggantian ini menghasilkan suatu kumpulan basis baru.

Ada beberapa istilah yang sangat sering digunakan dalam metode Simpleks, di antaranya:

1. Iterasi adalah tahapan perhitungan dimana nilai dalam perhitungan itu tergantung dari nilai tabel sebelumnya.
2. Variabel non basis adalah variabel yang nilainya diatur menjadi nol pada sembarang iterasi. Dalam terminologi umum, jumlah variabel non basis selalu sama dengan derajat bebas dalam sistem persamaan.
3. Variabel basis merupakan variabel yang nilainya bukan nol pada sembarang iterasi. Pada solusi awal, variabel basis merupakan variabel *slack* (jika fungsi kendala merupakan pertidaksamaan  $\leq$  ) atau variabel buatan (jika fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan  $\geq$  atau  $=$  ). Secara umum, jumlah

variabel basis selalu sama dengan jumlah fungsi pembatas (tanpa fungsi non negatif).

4. Solusi atau nilai kanan merupakan nilai sumber daya pembatas yang masih tersedia. Pada solusi awal, nilai kanan atau solusi sama dengan jumlah sumber daya pembatas awal yang ada, karena aktivitas belum dilaksanakan.
5. Variabel *slack* adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan  $\leq$  menjadi persamaan  $=$ . Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel *slack* akan berfungsi sebagai variabel basis.
6. Variabel *surplus* adalah variabel yang dikurangkan dari model matematik kendala untuk mengkonversikan pertidaksamaan  $\geq$  menjadi persamaan ( $=$ ). Penambahan ini terjadi pada tahap inisialisasi. Pada solusi awal, variabel *surplus* tidak dapat berfungsi sebagai variabel basis.
7. Variabel buatan (*artificial variable*) adalah variabel yang ditambahkan ke model matematik kendala dengan bentuk  $\geq$  atau  $=$  untuk difungsikan sebagai variabel basis awal. Penambahan variabel ini terjadi pada tahap inisialisasi. Variabel ini harus bernilai 0 pada solusi optimal, karena kenyataannya variabel ini tidak ada. Variabel hanya ada di atas kertas.
8. Kolom pivot (kolom kerja) adalah kolom yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).
9. Baris pivot (baris kerja) adalah salah satu baris dari antara variabel basis yang memuat variabel keluar.

10. Elemen pivot (elemen kerja) adalah elemen yang memuat variabel masuk. Koefisien pada kolom ini akan menjadi pembagi nilai kanan untuk menentukan baris pivot (baris kerja).
11. Variabel masuk adalah variabel yang terpilih untuk menjadi variabel basis pada iterasi berikutnya. Variabel masuk dipilih satu di antara variabel non basis pada setiap iterasi berikutnya akan bernilai positif.
12. Variabel keluar adalah variabel yang keluar dari variabel baris pada iterasi berikutnya dan digantikan oleh variabel masuk. Variabel keluar dipilih satu di antara variabel basis pada setiap iterasi. Variabel ini pada iterasi berikutnya akan bernilai nol.

Sebelum melakukan perhitungan iteratif untuk menentukan solusi optimal, pertama harus merubah bentuk umum pemrograman linier diubah ke dalam bentuk baku terlebih dahulu. Bentuk baku dalam metode Simpleks tidak hanya mengubah persamaan kendala ke dalam bentuk sama dengan, tetapi setiap fungsi kendala harus diwakili oleh satu variabel basis awal. Variabel basis awal menunjukkan status sumber daya pada kondisi sebelum ada aktivitas yang dilakukan. Dengan kata lain, variabel keputusan semuanya masih bernilai nol. Dengan demikian, fungsi-fungsi tersebut dapat diubah dengan cara:

1. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan  $\leq$  dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan (=) dengan menambahkan satu variabel *slack*.
2. Fungsi kendala dengan pertidaksamaan  $\geq$  dalam bentuk umum, diubah menjadi persamaan (=) dengan mengurangi satu variabel *surplus*.
3. Fungsi kendala dengan persamaan dalam bentuk umum, ditambahkan satu *artificial variable* (variabel buatan) (Kakiay, 2010).

Untuk menyelesaikan masalah maksimisasi maka programasi linier harus lebih dahulu ditulis dalam bentuk standar. Dengan bentuk standar ini dimaksudkan adalah programasi linier yang berwujud permasalahan maksimasi dengan batasan-batasan kendala yang bertanda kurang dari atau sama dengan ( $\leq$ ) yang menunjukkan keterbatasan sumber daya yang tersedia.

Apabila suatu batasan bertanda “sama dengan” berarti bahwa yang dinyatakan pada nilai kanan harus dipenuhi seluruhnya, tidak boleh lebih tidak boleh kurang. Apabila permasalahan itu mengandung dua variabel dan dipecahkan dengan metode grafik maka daerah fisibel akan terletak pada garis pembatas yang bertanda sama dengan tersebut. Apabila permasalahan mengandung variabel lebih dari dua maka akan digunakan metode Simpleks dan batas yang bertanda sama dengan belum dapat dimasukkan ke dalam tabel simpleks karena belum mengandung variabel yang dapat dijadikan dasar (basis) pada tabel permulaan karena itu terlebih dahulu ditambahkan variabel buatan (variabel tiruan) yang tidak negatif. Untuk masalah minimasi ( $\geq$ ) terlebih dahulu harus memasukkan variabel *slack surplus* dan variabel *slack* semu.

Ada perbedaan yang perlu diperhatikan bahwa dalam kasus mencari nilai maksimum maka nilai negatif dengan harga mutlak terbesar (nilai yang paling negatif) pada baris fungsi tujuan yang menentukan kolom kunci, tetapi dalam kasus mencari nilai minimum maka nilai positif yang paling besar yang menentukan kolom kunci.

Kendala pada bentuk umum pemrograman linier sudah dalam bentuk persamaan, fungsi kendala tersebut masih harus tetap berubah. Hal-hal yang harus diperhatikan dalam membuat bentuk baku, yaitu:

Misal model program linier

$$Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j, j = 1, 2, \dots, n$$

dengan kendala :  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\geq, =, \leq) b_i, i = 1, 2, \dots, m$

$$X_j \geq 0$$

dimana:

$Z$  : fungsi tujuan

$X_j$  : variabel keputusan  $j$

$C_j$  : koefisien fungsi obyektif

$a_{ij}$  : koefisien fungsi kendala

Kendala untuk persoalan program linier pada umumnya mencakup:

1. Hubungan di antara variabel-variabel keputusan itu sendiri.
2. Hubungan antara variabel keputusan dengan setiap sumber yang terbatas dan tersedia.
3. Hubungan di antara variabel keputusan dengan setiap sumber yang terbatas dan tersedia.
4. Hubungan dengan variabel keputusan dengan setiap performansi atau target tujuan (*goals*) (Kakiy, 2010).

Adapun langkah-langkah dalam metode Simpleks adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah ke dalam model simpleks yaitu dengan menambahkan variabel *slack* ke dalam fungsi tujuan  $Z$  dan megubah fungsi batasan. Fungsi batasan yang bertanda  $\leq$  (lebih kecil sama dengan) diubah menjadi tanda sama dengan ( $=$ ) dan menambahkan variabel *slack* ( $S$ ) pada setiap batasan. Penambahan jumlah variabel *slack* disesuaikan dengan jumlah batasan yang

dimulai dari  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .  $S_1$  menunjukkan tambahan *slack* untuk batasan kedua dan seterusnya. Contoh di bawah ini dapat dijelaskan terdapat tiga batasan 1, batasan 2, dan batasan 3.

Fungsi batasan:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + S_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + S_2 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3 \rightarrow a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n + S_3 = b_3$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \rightarrow a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + S_n = b_m$$

$$\text{Syarat: } a_{ij}x_j \geq 0$$

- Memasukkan koefisien fungsi tujuan, fungsi batasan, dan nilai kanan ke dalam tabel simpleks. Koefisien adalah angka/nilai yang menempel pada variabel baik variabel  $X, A$ , maupun  $S$ , sehingga dapat berupa semua angka yang menempel pada  $X_1, X_2, \dots, X_n, S_1, S_2, \dots, S_n, A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Tabel 2.3. Bentuk Dasar Tabel Simpleks

	Basis	Solusi	$C_1$ $X_1$	$C_2$ $X_2$	$C_3$ $X_3$	...	$C_n$ $X_n$	0 $S_1$	0 $S_2$	0 $S_3$	...	0 $S_n$
0	$S_1$	$b_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	...			0	0	...	0
0	$S_2$	$b_1$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	...		0		0	...	0
0	$S_3$	$b_1$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	...		0	0		...	0

.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
0	$S_n$	$b_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$a_{m3}$	...	$a_{mn}$	0	0	0	...	0
								0	0	0		0

Keterangan:

- $C_j$ : nilai kontribusi setiap variabel yang terdapat dalam fungsi tujuan.
  - $C_b$ : nilai kontribusi setiap variabel basis dalam proses iterasi.
  - Basis: variabel basis dalam proses iterasi (nilainya tidak sama dengan nol).
  - Solusi: nilai variabel basis dalam proses iterasi.
  - $Z_j$  (pada kolom solusi): total laba (atau total biaya dalam problema meminimalkan) dari solusi.
  - $Z_j$  (pada kolom variabel): jumlah laba yang hilang untuk setiap unit variabel akibat proses iterasi yang dilakukan.
  - $C_j - Z_j$ : nilai kontribusi laba bersih (atau biaya dalam problema meminimalkan) per unit dari setiap variabel dalam proses iterasi.
- Mengecek nilai optimal tabel simpleks dengan cara-cara sebagai berikut:  
Pengecekan apakah tabel simpleks yang telah disusun tersebut (tabel simpleks awal), telah atau belum optimal dilakukan dengan cara melihat nilai  $C_j - Z_j$  masing-masing variabel fungsi tujuan. Apabila nilai  $C_j - Z_j$  untuk semua variabel bernilai nol atau negatif, maka penyelesaian problema tersebut telah optimal. Apabila tidak maka dilakukan tahap proses selanjutnya.
  - Mengidentifikasi variabel yang akan masuk ke dalam tabel.

Untuk menentukan variabel mana yang akan masuk dalam pertimbangan untuk diproses pada iterasi berikutnya adalah variabel variabel keputusan (variabel non-basis) yang mempunyai nilai  $C_j - Z_j$  positif terbesar. Misalkan  $C_1 = p, C_2 = q$  dimana  $C_1 \geq C_2$  maka  $X_1$  merupakan variabel yang akan diproses, yang disebut kolom pivot.

5. Mengidentifikasi variabel yang akan keluar dari tabel

Dengan adanya variabel yang masuk ke dalam tabel simpleks, maka salah satu variabel basis harus keluar dari tabel simpleks tersebut. Dengan cara menghitung nilai indeksnya, indeksnya yang dipilih adalah indeks terkecil  $> 0$

$$\text{Indeks} = \frac{\text{Nilai solusi}}{\text{Nilai kolom pivot}}$$

Misalkan dari hasil perhitungan diperoleh indeks dari  $S_1 = a, S_2 = b, \dots, S_n = n$  dimana  $a, n > b$ , dengan demikian baris  $S_2$  merupakan baris pivot dan variabel yang akan dikeluarkan dari tabel simpleks berikutnya.

6. Menyusun tabel simpleks baru

Untuk menyusun tabel simpleks baru, harus mencari koefisien elemen pivot dari tabel simpleks sebelumnya. Koefisien elemen pivot dapat dicari dengan cara menghubungkan kolom pivot dengan baris pivot sedemikian rupa sehingga titik potong kedua pivot ini menunjukkan koefisien, yang disebut dengan elemen pivot, berdasarkan poin 4 dan 5 maka elemen pivotnya  $a_{21}$ . Koefisien-koefisien nilai baris pivot baru dicari dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\text{pivot baru} = \text{nilai baris pivot lama} : \text{elemen pivot}$$



Oleh karena itu hanya ada  $m$  persamaan, jadi hanya bisa memperoleh suatu pemecahan dasar dengan variabel sebanyak  $m$  yang merupakan variabel dasar;  $x_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, m$  dan  $x_j = 0; j = m + 1, \dots, n$ . Jika diambil  $m$  kolom dari matriks  $A$ , yang merupakan basis, kemudian dibentuk matriks  $B$  terdiri dari  $m$  vektor yang merupakan basis tersebut, maka diperoleh persamaan  $BX = H$ , yang memberikan pemecahan dasar fisibel.

Vektor-vektor kolom lainnya sebanyak  $(n - m)$  dari  $A$  bisa menggantikan salah satu vektor dari  $B$  (tentu saja dengan syarat tertentu) dan susunan vektor-vektor yang baru masih juga merupakan basis (menghasilkan pemecahan dasar yang fisibel juga).

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_r, \dots, B_m)$$

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, A_m)$$

Misalnya kalau kolom ke- $r$  dari  $B (= B_r)$  diganti dengan kolom ke- $j$  dari  $A (= A_j)$ , maka  $B_1, B_2, \dots, A_j, \dots, B_m$  juga merupakan basis. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.4. Proses Mengeluarkan Vektor

Proses mengeluarkan vektor dari basis (dari kolom-kolom  $B$ ) dan menggantikannya dengan salah satu vektor kolom dari  $A$  yang memenuhi syarat untuk mengganti salah satu vektor dari  $B$  dalam rangka pembentukan basis. Proses pengulangan (*repetitive*) ini terbatas jumlahnya. Oleh karena metode simpleks didasarkan atas proses, pengulangan yang berkali-kali dalam jumlah yang terbatas, maka dari itu sering disebut “*iterative procedure*”.

Metode Simpleks lebih efisien serta dilengkapi dengan suatu “*test criteria*” yang bisa memberitahukan kapan hitungan harus dihentikan dan kapan harus dilanjutkan sampai diperoleh suatu “*optimal solution*” (*maximum profit, maximum revenue, minimum cost*, dan sebagainya). Pada umumnya dipergunakan tabel-tabel, dari tabel pertama yang memberikan pemecahan dasar permulaan yang fisibel (*initial basic feasible solution*) sampai pada pemecahan terakhir yang memberikan *optimal solution*. Yang lebih menarik adalah bahwa semua informasi yang diperlukan (*test criteria*, nilai variabel-variabel, nilai fungsi tujuan) akan terdapat pada setiap tabel, selain dari pada itu nilai fungsi tujuan dari suatu tabel akan lebih besar/kecil atau sama dengan tabel sebelumnya. Pada umumnya suatu persoalan *linear programming* bisa diklasifikasikan menjadi 3 (tiga) kategori:

- a. Tidak ada pemecahan yang fisibel (*there is no feasible solution*).
- b. Ada pemecahan optimum (*maximum/minimum*).
- c. Fungsi obyektif tak ada batasnya (*unbounded*).

Metode Simpleks sesungguhnya merupakan suatu algoritma. Secara sederhana algoritma adalah proses dimana prosedur sistematis diulang-ulang (diiterasi) hingga diperoleh hasil yang diinginkan. Setiap kali prosedur sistematis digunakan disebut satu iterasi. Di dalam algoritma termasuk prosedur untuk memulai dan kriteria untuk menentukan kapan harus berhenti (Napitululu, 1998).

### 2.3.1 Bentuk Standar Model PL

Untuk mengawali metode Simpleks permasalahan PL harus diubah dalam bentuk standar. Bentuk standar model PL dengan  $m$  kendala dan  $n$  variabel dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\text{Maks/Min. } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

Dengan memperhatikan kendala:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Dengan  $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; \dots; x_n \geq 0$

$$b_1 \geq 0; b_2 \geq 0; \dots; b_m \geq 0$$

Atau dapat disajikan dalam notasi matriks vektor sebagai berikut:

Maks/Min.  $Z = cx$

Dengan memperhatikan kendala:

$$Ax = b$$

dengan

$$x \geq 0$$

$$b \geq 0$$

Dimana  $A$  adalah matriks  $(m \times n)$ ,  $x$  adalah vektor kolom  $(n \times 1)$ ,  $b$  adalah vektor kolom  $(m \times 1)$ , dan  $c$  adalah vektor baris  $(1 \times n)$ .

Berdasarkan kedua model PL mempunyai ciri sebagai berikut:

1. Fungsi tujuan berbentuk maksimasi atau minimasi.
2. Semua fungsi kendala dinyatakan sebagai persamaan.
3. Semua variabel keputusan tidak negatif (nol atau positif).
4. Konstanta ruas kanan tidak negatif (nol atau positif).

Fungsi kendala yang berbentuk ketidaksamaan, tanda ketidaksamaan  $\geq$  atau  $\leq$  harus diubah menjadi persamaan ( $=$ ). Untuk mengubahnya perlu ditambahkan variabel baru yang disebut dengan variabel tambahan. Variabel

tambahan untuk fungsi ketidaksamaan bertanda  $\leq$  akan ditambahkan variabel *slack* (kelonggaran), misal

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

fungsi ketidaksamaan tersebut akan diubah menjadi fungsi persamaan dengan menambahkan variabel *slack*,  $s_1$ , sehingga didapatkan fungsi

$$x_1 + x_2 + s_1 = 10, \text{ dimana } s_1 \geq 0$$

untuk fungsi ketidaksamaan bertanda  $\geq$ , akan ditambahkan dengan variabel yang disebut variabel *surplus* (kelebihan), misal

$$20x_1 + 12x_2 - s_1 = 180, \text{ dimana } s_1 \geq 0$$

Dalam permasalahan ini dikatakan variabel *slack* dan *surplus* merupakan bagian dari permasalahan asal, seperti halnya variabel keputusan dalam model PL. Variabel tambahan tersebut bernilai tidak negatif (nol atau positif).

### 2.3.2 Variabel Dasar dan Pemecahan Dasar serta Cara Memperbaiki Pemecahan Dasar Fisibel

Seperti telah disebutkan sebelumnya, matriks  $B$  dibentuk oleh vektor-vektor kolom dari  $A$  sebanyak  $m$  buah yang *linearly independent*. Kolom matriks  $B = (B_1, B_2, \dots, B_m)$ . Perlu diperhatikan, bahwa  $B_1$  yaitu kolom pertama dari  $B$  tidak berarti merupakan kolom pertama dari  $A$ , tetapi bisa setiap kolom dari  $A$ .

Misalnya:  $A = [A_1, A_2, A_3, A_4], n = 4$

$$B = [B_1, B_2], m = 2$$

Kolom  $A_1, A_2$  *linearly independent*

$$B = [A_1, A_2], \text{ jadi } B_1 = A_1, B_2 = A_2$$

Kalau  $A_3, A_4$  *linearly independent*

$$B = [A_3, A_4], \text{ jadi } B_1 = A_3, B_2 = A_4$$

Pemberian nomor untuk setiap kolom dari  $B$  tidak menunjukkan berasal dari kolom  $A$  yang mana, maka untuk mengetahui suatu kolom  $B$ , aslinya dari kolom  $A$  yang mana yang harus dipergunakan sumber keterangan yang lain. Oleh karena kolom-kolom  $B$  yang berasal dari  $A$  merupakan suatu basis maka kolom-kolom  $A$  lainnya yang tidak termasuk dalam kolom  $B$ , bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier (*linear combination*) dari kolom-kolom  $B$ , yaitu sebagai berikut:

$$1. \quad A_j = y_{1j}B_1 + y_{2j}B_2 + \dots + y_{mj}B_m = \sum_{i=1}^m y_{ij}B_i = BY_j \quad (2.1)$$

$$2. \quad \text{atau } Y_j = B^{-1}A_j, \text{ dimana } Y_j = [y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{mj}] \quad (2.2)$$

Komponen-komponen dari vektor  $Y_j$  merupakan koefisien-koefisien. Pengetahuan tentang komponen-komponen dari vektor  $Y_j$  sangat berguna sebab memungkinkan untuk menyatakan  $A_j$  sebagai kombinasi linier dari kolom-kolom  $B$ . Komponen ke- $i$  dari  $Y_j$  ialah  $Y_{ij}$ . Perhatikan, bahwa *subscript* atau index  $i$  &  $j$  dari  $Y_{ij}$ , masing-masing menunjukkan komponen tersebut merupakan komponen yang ke- $i$  dan sekaligus menunjukkan kolom  $B$  yang ke- $i$  yang dikalikan dengan  $Y_{ij}$  dan bahwa komponen tersebut adalah dari vektor  $A_j$ , vektor  $Y_j$  tentu saja akan berubah kalau kolom-kolom dari  $A$  yang membentuk matriks  $B$  juga berubah. Sekali lagi perlu ditekankan di sini, bahwa *subscript*  $i$  tidak menunjukkan vektor (kolom) mana dari  $A$  yang menjadi kolom ke- $i$  dari  $B$ . Setiap matriks basis  $B$  akan bisa menentukan suatu pemecahan dasar ini, yang merupakan  $m$  komponen dari vektor  $X_B$  adalah sebagai berikut:

$$X_B = B^{-1}H, \text{ dimana } X_B = (x_{B1}, x_{B2}, \dots, x_{Bm}) \quad (2.3)$$

Selalu harus dimengerti, bahwa semua variabel sebanyak  $(n - m)$  yang tidak berasosiasi dengan kolom-kolom  $A$  yang membentuk matriks  $B$ , mempunyai

nilai 0. Index  $i$  berarti, bahwa variabel  $x_{B_1}$  bersesuaian dengan kolom  $B_i$  dari  $B$  akan tetapi tidak menunjukkan variabel mana di antara variabel  $A_j$  dari persamaan  $AX = H$ , yang menjadi  $x_{B_2} = x_3$ , kalau  $A_4$  menempati kolom ke-1 dari  $B$ , maka  $m_{B_1} = X_4$  dan sebagainya. Dengan mengetahui vektor mana dari  $A$  yang menempati kolom tertentu dari  $B$ , maka bisa ditentukan variabel yang mana dari  $x$  yang menjadi  $x_{B_i}$ . Apabila  $x_{B_i} \geq 0$ , maka bisa dikatakan, bahwa  $B_i$  berada dalam basis dengan nilai yang positif (bukan nol) sedangkan kalau  $x_B = 0B_i$  akan berada dalam basis dengan nilai 0. Variabel-variabel  $x_{B_i}$  disebut variabel dasar (*basis variable*) sedangkan variabel lainnya (sisanya sebanyak  $n - m$ ) disebut bukan variabel dasar (*non basis variable*).

Suatu pemecahan dasar dikatakan “*DEGENERATE*” apabila ada satu atau lebih variabel-variabel dasar yang mempunyai nilai 0. Dengan setiap variabel  $x_B$  harus mempunyai vektor dari  $C_B$  dengan  $m$  komponen yang merupakan “*prices*” dari variabel dasar yaitu

$$C_B = (C_{B_1}, C_{B_2}, \dots, C_{B_m})$$

Komponen ke- $i$  dari vektor  $C_B$  adalah  $C_{B_i}$  dan index  $i$  berarti, bahwa  $c_{B_i}$  merupakan *price* dari  $X_{B_i}$ . Kalau  $A_3$  menjadi kolom kedua dari  $B$ , yang berarti  $B_2 = A_3$ , maka  $c_{B_2} = c_3$ , dan lain sebagainya.

Untuk setiap pemecahan dasar, nilai dari fungsi tujuan  $Z$  bisa dihitung sebagai berikut:

$$Z = C_B x_B \tag{2.4}$$

(Sebab variabel yang bukan dasar, *price*-nya mempunyai nilai 0). Selanjutnya perhatikan suatu variabel  $z_j$  definisikan sebagai berikut:

$$z_j = y_{1j}c_{B1} + y_{2j}c_{B2} + \dots + y_{mj}c_{Bm} = \sum_{i=1}^m y_{ij}c_{B_i} = C_B Y_j \tag{2.5}$$

(Bandingkan bentuk persamaan ini dengan persamaan (2.1) di atas)

Untuk setiap  $A_j$  dari  $A$  akan bisa diperoleh  $z_j$ ;  $z_j$  yang bersesuaian dengan kolom dari  $A$  yang berada pada matriks  $B$  berubah.

Contoh:

Definisi dan notasi yang sudah dibicarakan di atas akan diterapkan pada persoalan PL yang berikut:

$$\sum_{j=1}^5 x_j A_j = H,$$

$$x_j \geq 0 \text{ untuk semua } j$$

$$A_1 = [4,1]; A_2 = [2,2]; A_3 = [1,3]; A_4 = [0,1]$$

$$A_5 = [0,1]; H = [2,1]$$

$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$ : maksimum atau persoalan menjadi:

Cari  $x_1, x_2, x_3, x_4$  dan  $x_5$

s.r.s. :  $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5$ : maksimum

d.p. :  $4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2$ :

$$x_1 + 2x_2 + \quad + x_5 = 1:$$

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, \dots, 5$$

### 2.3.3 Cara Memperbaiki Pemecahan Dasar Fisibel

Misalkan suatu pemecahan dasar yang fisibel dari persoalan PL diberikan dengan rumus berikut:

$$x_B = B^{-1}H$$

Nilai fungsi tujuan bisa dicari dengan rumus berikut:

$$Z = c_B x_B$$

sebagai suatu tambahan bahwa untuk pemecahan dasar ini:  $Y_j = B^{-1}A_j$  dan  $z_j = c_B Y_j$  diketahui untuk setiap kolom  $A_j$  dari  $A$  yang tidak berada di matriks  $B$ .

Untuk menyelidiki kemungkinan memperoleh pemecahan dasar fisibel lainnya dengan sekaligus memperbaiki nilai fungsi tujuan  $Z$  yaitu membuat lebih kecil atau membuat lebih besar lagi sesuai dengan persoalannya. Untuk persoalan yang minimum harus berusaha memperkecil sedangkan untuk persoalan yang maksimum harus diperbesar. Perhatian ditujukan kepada pemecahan dasar yang fisibel dimana hanya satu kolom saja dari  $B$  yang berubah, yaitu dengan mengeluarkan atau menyingkirkan satu kolom  $B$  serta menggantinya dengan vektor lain dari  $A$ . Untuk hal ini, mudah sekali untuk menentukan apakah suatu set vektor-vektor yang baru membentuk suatu basis atau tidak. Dapat dilihat bahwa jika  $A_j = \sum_{i=1}^m y_{ij} B_i$ , maka  $A_j$  bisa mengganti setiap vektor  $B_r$  yang mana  $Y_{rj} \neq 0$ , kemudian vektor  $A_j$  dimasukkan ke dalam salah satu kolom dari  $B$ . Untuk keperluan tersebut, misalnya diputuskan untuk menyingkirkan atau mengeluarkan kolom ke- $r$  dari  $B$  yaitu vektor  $B_r$  ( $Y_{rj} > 0$ ) serta mengganti dengan vektor  $A_j$ , maka kemudian:

$$A_j = y_{1j}B_1 + y_{2j}B_2 + \dots + y_{rj}B_r + \dots + y_{mj}B_m$$

$$y_{rj}B_r = A_j - y_{1j}B_1 - y_{2j}B_2 - \dots - y_{mj}B_m \text{ atau}$$

$$B_r = \frac{1}{y_{rj}}A_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{y_{ij}}{y_{rj}}B_i \quad (2.6)$$

Pemecahan dasar fisibel yang asli bisa ditulis sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^m x_{B_i} B_i = H \quad (2.7)$$

Variabel  $x_4$  dan  $x_5$  masing-masing sebagai variabel *slack* dan *surplus*.

*Prices* dari variabel  $x_4$  dan  $x_5$ , masing-masing nilainya 0. Bisa dicek, bahwa

vektor  $A_1$  dan  $A_3$  *linierly independent* dan merupakan suatu basis untuk vektor-vektor berkomponen 2. Vektor-vektor tersebut bisa dipergunakan untuk membentuk suatu pemecahan dasar.

Suatu matriks basis  $B$  akan dibentuk dengan memasukkan  $A_3$  sebagai kolom pertama dari  $B$  dan  $A_1$  sebagai kolom kedua dari  $B$ , yaitu  $B_1 = A_3, B_2 = A_1$ . Jadi  $B = (B_1, B_2) = (A_3, A_1) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Pemecahan dasar dengan semua variabel bernilai 0 kecuali  $x_1$  dan  $x_2$  adalah fisibel dan bisa dengan mempergunakan rumus berikut:

$$X_B = B^{-1}H = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{bmatrix}$$

Jadi  $x_{B_1} = \frac{2}{11}, x_{B_2} = \frac{5}{11}$ , dengan  $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ .

Variabel yang berada di dalam basis ialah  $x_{B_1} = x_3$  dan  $x_{B_2} = x_1$ . *Prices* yang bersesuaian dengan variabel-variabel tersebut ialah  $c_{B_1} = c_3 = 3$  dan  $c_{B_2} = c_1 = 2$ , jadi untuk pemecahan dasar ini  $c_B = (c_{B_1}, c_{B_2}) = (3, 2)$ . Setiap vektor  $A_j$  lainnya dari matriks  $A$  bisa ditulis/dinyatakan sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di dalam basis. Untuk keperluan tersebut perlu dihitung  $Y_j$  untuk  $A_j$ . Perhatikan  $A_2$  dan menggunakan persamaan (2), maka

$$Y_2 = B^{-1}A_2 = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = y_{12}B_1 + y_{22}B_2 = y_{12}A_3 + y_{22}A_1 \quad (2.8)$$

Nilai dari  $z_2$  bisa dihitung dengan mempergunakan persamaan 5, yaitu sebagai berikut:

$$z_2 = c_B Y_2 + c_{B_1} y_{12} + c_{B_2} y_{22} = 3 \left( \frac{6}{11} \right) + 2 \left( \frac{4}{11} \right) = \frac{26}{11}$$

Untuk pemecahan dasar yang fisibel ini, nilai  $Z$  diperoleh dari rumus berikut:

$$Z = c_B x_B = 3 \left( \frac{2}{11} \right) + 2 \left( \frac{4}{11} \right) = \frac{16}{11}$$

Dengan jalan menghilangkan  $B_r$  dengan menggunakan (6), diperoleh pemecahan dasar yang baru yaitu (Supranto, 2006):

$$BX_B = H \rightarrow \sum x_{B_i} B_i = x_{B_1} B_1 + x_{B_2} B_2 + \dots + x_{B_r} B_r + \dots + x_{B_m} B_m = H$$

$$x_{B_1} B_1 + x_{B_2} B_2 + \dots + x_{B_r} \left[ \frac{1}{y_{rj}} A_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{y_{ij}}{y_{rj}} B_i \right] + \dots + x_{B_m} B_m = H$$

atau

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \left( x_{B_i} - x_{B_r} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) B_i + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} A_j = H \quad (2.9)$$

Pemecahan dasar yang baru ini juga harus fisibel. Hal ini memerlukan syarat-syarat berikut:

$$x_{B_i} - x_{B_r} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \geq 0, i \neq r \quad (2.10a)$$

$$\frac{x_{B_r}}{y_{rj}} \geq 0, i = r \quad (2.10b)$$

yang sangat menarik perhatian ialah, bahwa apabila  $A_j$  paling tidak mempunyai  $y_{ij} > 0$ , dan apabila kolom yang tepat dari  $B$  dipindahkan/dikeluarkan kemudian diganti dengan  $A_j$ , maka kemudian bisa ditunjukkan bahwa pemecahan dasar yang baru akan fisibel. Perhatikan kalau  $y_{rj} > 0$  dan  $y_{ij} \leq 0, (i \neq r)$ , maka kemudian (2.10a) dan (9b) akan otomatis berlaku untuk yang tidak sama dengan  $r$  ini. Jadi kalau demikian halnya yang dibicarakan mengenai  $y_{ij} > 0$  suatu vektor  $B_r$  yang akan disingkirkan atau dikeluarkan sedemikian rupa sehingga (2.10a) dan (2.10b) di atas dipenuhi. Selanjutnya apabila  $y_{ij} > 0$ , maka syarat-syarat dari (2.10a) dan (2.10b) setelah dilakukan pembagian dengan  $y_{ij}$  bisa dituliskan sebagai berikut (Supranto, 2006):

$$\frac{x_{B_i}}{y_{ij}} - \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} \geq 0$$

sekarang persoalannya menjadi jelas, yaitu apabila ditentukan kolom ke-  $r$  dari  $B$  diganti dengan memenuhi syarat berikut:

$$\frac{x_{B_r}}{y_{rj}} = \min \left\{ \frac{x_{B_i}}{y_{ij}}, y_{ij} > 0 \right\} = Q \quad (2.11)$$

maka kemudian pemecahan dasar yang baru akan fisibel. Ringkasan pembahasan di atas dan sekaligus menambah dengan beberapa notasi lagi. Dimulai dengan matriks  $\mathcal{B} = (B_1, B_2, \dots, B_m)$  dimana kolom-kolomnya sebanyak  $m$  berasal dari matriks  $A$  (Supranto, 2006).

Ambilkan  $m$  dari kolom  $A$  yang *linearly independent*, kolom-kolom dari  $A$  sendiri sebanyak  $n$  buah dan  $n \geq m$ ). Anggap  $x_B = B^{-1}H$  sebagai pemecahan dasar yang fisibel dari persoalan *linear programming* yang bersangkutan. Selanjutnya memilih vektor kolom  $A_j$  dari  $A$  yang tidak berada di  $B$ . Kalau  $A_j$  mempunyai satu atau lebih  $y_{ij} > 0$ , dimana  $Y_j = B^{-1}H$ , maka telah ditunjukkan, bahwa bisa mengeluarkan beberapa kolom dari  $B$  kemudian menggantikannya dengan  $A_j$  dan dengan demikian akan diperoleh satu pemecahan dasar baru yang fisibel (Supranto, 2006).

Pemilihan kolom  $B$  yang akan dikeluarkan tidak bisa dilakukan sembarangan akan tetapi harus memenuhi beberapa syarat tertentu agar pemecahan dasar yang diperoleh menjadi fisibel, syarat tersebut ialah seperti tertera pada persamaan (2.11). Dengan notasi baru  $B' = (B'_1, B'_2, \dots, B'_m)$ , yaitu matriks baru yang *non singular* diperoleh dari  $B$  dengan jalan mengeluarkan atau menyingkirkan  $B_r$  serta menggantinya dengan  $A_j$  (Supranto, 2006).

Kolom-kolom dari matriks yang baru adalah sebagai berikut:

$$B'_i = B_i \text{ untuk } i \neq r \text{ dan } B'_r = A_j, i = r \quad (2.12)$$

Apabila pemecahan dasar yang baru diberi simbol  $x'_B$ , maka kemudian:  $x'_B = B^{-1}H$ . Dari persamaan (8) diperoleh nilai-nilai dari variabel-variabel dasar yang baru dinyatakan di dalam variabel yang asli dan  $y_{ij}$ , yaitu:

$$x'_B = x_B - x_{B_r} - \frac{y_{ij}}{y_{rj}}; \text{ untuk } i \neq r \quad (2.13)$$

$$x'_B = \frac{x_{B_r}}{y_{rj}}, \text{ untuk } i = r \quad (2.14)$$

Sampai pada tahap ini seharusnya telah memperoleh pemecahan dasar baru yang feasible untuk suatu set pembatasan yang telah dituliskan seperti  $AX = H$  (*variable slack* dan *surplus* yang telah dimasukkan), dengan jalan mengubah salah satu variabel sebanyak  $(m - 1)$  yang bisa mengambil nilai berbeda dengan 0 di dalam pemecahan dasar yang baru. Akan tetapi pada umumnya nilai sesungguhnya dari variabel-variabel tersebut akan berubah dan nilai-nilai yang baru bisa diperoleh dengan menggunakan persamaan (12a) dan (12b) di atas. Selain dari pada itu variabel  $x_{B_r}$  yang menempati posisi yang ke- $r$  (kolom ke- $r$ ) akan berbeda dengan nilai-nilai pada pemecahan sebelumnya. Sebagai contoh misalnya kolom  $A_4$  sebagai  $B_r$  jadi berarti  $x_{B_r} = x_4$  dan  $A_6$  menggantikan  $B_r$  (yaitu  $A_4$ ), maka kemudian  $x_B = x_6$ . Variabel-variabel yang tidak muncul di dalam posisi ke- $r$  akan selalu berbeda-beda, akan tetapi pada posisi atau kolom-kolom lainnya variabel-variabel itu tidak berubah, akan sama saja hanya nilainya saja yang mungkin berubah. Variabel yang asli dari kolom ke- $r$  diberi nilai 0, dengan tujuan utama mencari pemecahan dasar baru yang feasible dengan sekaligus memperbaiki nilai fungsi tujuan  $z$ .

Nilai fungsi tujuan untuk pemecahan dasar asli yang feasible ialah:

$$Z = c_B x_B = \sum_{i=1}^m c_{B_i} x_{B_i}$$

Nilai yang baru dari fungsi tujuan ialah:

$$Z' = c'_B x'_B = \sum_{i=1}^m c'_{B_i} x'_{B_i}$$

Perhatikan, bahwa  $c'_B = 9_{B_i}$  untuk  $i \neq r$  dan  $c'_{B_r} = c_j$ , oleh karena hanya “price” dari variabel baru yang masuk ke dalam basis saja yang mengalami perubahan. Maka menggunakan persamaan (12a) dan (12b) diperoleh:

$$Z' = \sum_{i \neq r}^m c_{B_i} \left( x_{B_r} - x_{B_r} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} c_j \quad (2.15)$$

Di dalam penjumlahan tersebut tidak termasuk suku (*term*) yang ke- $i$  dimana  $i = r$ , akan tetapi jika ingin memasukkan suku di mana  $i = r$  yang sebetulnya nilainya = 0, sebagai berikut:

$$c_{B_r} \left( x_{B_r} - x_{B_r} \frac{y_{rj}}{y_{rj}} \right) = c_{B_r} (x_{B_r} - x_{B_r}) = 0$$

Oleh karena suku tersebut nilainya = 0, maka sebetulnya bisa ditambahkan tanpa merubah nilai:

$$Z' = \sum_{i=1}^m c_{B_i} \left( x_{B_i} - 9_{B_i} \frac{y_{ij}}{y_{rj}} \right) + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} c_j$$

atau

$$Z' = \sum_{i=1}^m c_{B_i} x_{B_i} - \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} \sum_{i=1}^m c_{B_i} y_{ij} + \frac{x_{B_r}}{y_{rj}} c_j \quad (2.16)$$

akan tetapi setelah diketahui bahwa

$$\sum_{i=1}^m c_{B_i} y_{ij} = z_j$$

maka dengan demikian persamaan di atas menjadi

$$Z' = z + \frac{x_{Br}}{y_{rj}}(c_j - z_j) = Z + Q(c_j - z_j)$$

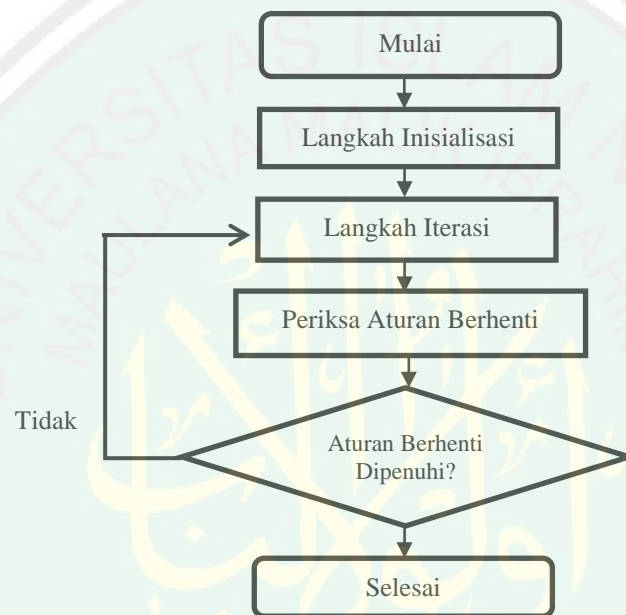
Di sini diperoleh suatu hasil yang menarik sekali ialah, bahwa nilai fungsi tujuan yang baru merupakan penjumlahan dari nilai fungsi obyektif yang asli ( $Z$ ) ditambah dengan  $Q(c_j - z_j)$ .

Seperti sudah diketahui  $z_j = c_B Y_j$  dan itu merupakan nilai yang diperoleh dari pemecahan dasar yang asli dan bukan yang baru, sedangkan  $c_j$  ialah *price* yang berasosiasi dengan variabel  $x_j$  yang baru saja disebutkan. Misal jika ingin membuat fungsi obyektif  $Z$  menjadi maksimum. Kalau  $Q(c_j - z_j) > 0$ , maka kemudian  $Z' > Z$  dan diperoleh suatu kenaikan untuk nilai  $Z$ . Oleh karena  $Q \geq 0$ , tidak akan diperoleh  $Z' > Z$  kecuali kalau  $c_j - z_j > 0$  atau  $(z_j - c_j) > 0$ .

Dengan suatu pemecahan dasar fisibel  $x_B = B^{-1}H$  untuk suatu set pembatasan  $AX = H$  dari suatu persoalan *linear programming* dengan nilai suatu fungsi tujuan untuk pemecahan ini adalah  $Z = c_B x_B$ . Apabila untuk setiap kolom  $A_j$  dalam suatu matriks tidak berada di  $B$ , syarat bahwa  $c_j > z_j$  atau  $z_j - c_j < 0$  dipenuhi dan apabila paling tidak  $y_{ij} > 0, i = 1, 2, \dots, m$ , kemudian mungkin sekali untuk memperoleh suatu pemecahan dasar baru yang fisibel dengan jalan mengganti salah satu kolom dari  $B$  dengan  $A_j$ , maka kemudian nilai fungsi obyektif yang baru  $Z'$  akan memenuhi  $Z' \geq Z$ . Lebih lanjut apabila pemecahan dasar tidak “*degenerate*” (yaitu semua nilai variabel dasar di dalam pemecahan tidak ada yang nilainya 0) maka berlaku hubungan  $Z' > Z$ . Juga demikian halnya apabila untuk beberapa  $A_j$  dalam  $A$ , yang tidak berada di  $B$ ,  $c_j < z_j$  atau  $z_j - c_j > 0$ , dan paling tidak satu  $y_{Dj} > 0$  kemungkinan dimungkinkan untuk memperoleh

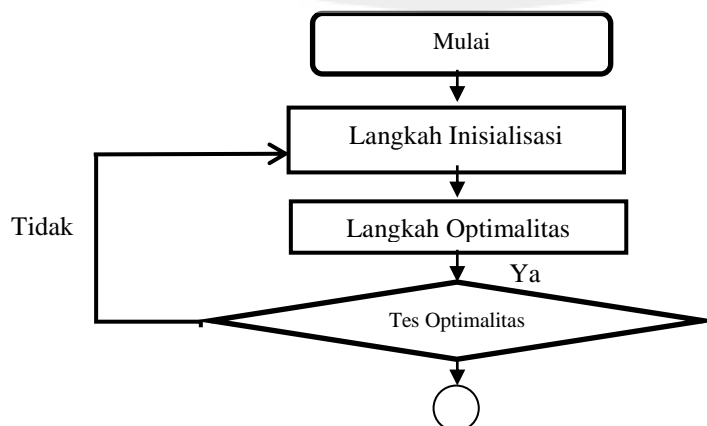
suatu pemecahan dasar baru yang fisibel, dengan jalan menggantikan salah satu kolom dari  $B$  dengan  $A_j$ , dan nilai baru dari fungsi obyektif  $Z$  akan memenuhi  $Z' \geq Z$ .

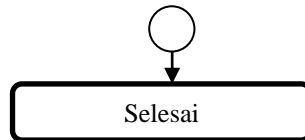
Juga kalau pemecahan dasar yang bersangkutan tidak “*degenerate*” akan berlaku hubungan  $Z' < Z$  (nilai yang baru lebih kecil dibanding dengan yang lama).



Gambar 2.5. Flowchart

Bagi kebanyakan algoritma dalam penelitian operasional, termasuk metode Simpleks, iterasi berhenti apabila hasil sudah optimal. Dalam hal ini, aturan untuk berhenti sesungguhnya adalah pengujian optimalitas, seperti ditunjukkan pada bagan berikut (Napitululu, 1998):





Gambar 2.6. *Flowchart* Metode Hongaria

## 2.4 Kajian al-Quran tentang Optimasi

Di dalam ayat yang mulia Surat al-Baqarah/2:286 terdapat pemberitaan dari Allah *Sw.* mengenai Rasul-Nya dan orang-orang yang beriman bahwa mereka itu telah beriman kepada semua wahyu yang diwahyukan kepada Rasul Muhammad Saw.. Mereka beriman kepada Allah *Sw.*, kitab-kitab, dan Rasul-rasul-Nya semua, tidak ada perbedaan di antara mereka, menjalankan semua perintah, mengamalkan, mendengar, patuh, meminta kepada Allah ampunan atas dosa-dosa mereka dan *khusyu'* serta tunduk kepada Allah *Sw.* di dalam memohon pertolongan-Nya dalam menjalankan kewajiban tersebut. Berikut adalah ayat al-Quran Surat al-Baqarah/2:286:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إِكْرَامًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

*"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'afilah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir" (QS. al-Baqarah/2:286).*

Di dalam ayat-ayat tersebut juga terdapat pemberitaan bahwa Allah *Sw.* tidak membebani para hamba-Nya melainkan sesuai dengan kemampuan mereka,

setiap jiwa akan mendapat pahala kebaikan yang dilakukannya dan dosa atas kejahatan yang dilakukannya, Allah Swt. mengampuni keterbatasan mereka dalam mengemban kewajiban-kewajiban dan hal-hal haram yang dilanggar, tidak memberikan sanksi atas kesalahan dan kelupaan mereka, Dia sangat memudahkan syari'at-Nya dan tidak membebani mereka hal-hal yang berat dan sulit sebagaimana yang dibebankan kepada orang-orang sebelum mereka serta tidak membebankan mereka sesuatu yang di luar batas kemampuan mereka. Dia telah mengampun, merahmati, dan menolong mereka atas orang-orang kafir.

Dalam Tafsir Ibnu Katsir juga disebutkan bahwa di dalam ayat-ayat tersebut juga terdapat pemberitaan bahwa Allah tidak membebani para hamba-Nya melainkan sesuai dengan kemampuan mereka, setiap jiwa akan mendapat pahala kebaikan yang dilakukannya dan dosa atas kejahatan yang dilakukannya, Allah Swt. mengampuni keterbatasan mereka dalam mengemban kewajiban-kewajiban dan hal-hal haram yang dilanggar, tidak memberikan sanksi atas kesalahan dan kelupaan mereka, Dia sangat memudahkan syari'at-Nya dan tidak membebani mereka hal-hal yang berat dan sulit sebagaimana yang dibebankan kepada orang-orang sebelum mereka serta tidak membebankan mereka sesuatu yang di luar batas kemampuan mereka.

Metode Hongaria melanjutkan pesan-pesan dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:286 untuk mencari solusi agar segala yang dibebankan oleh Allah kepada makhluk-Nya benar-benar baik karena Allah tidak akan memberikan beban di luar batas kemampuan hamba-Nya dan Dia juga tidak memberikan sanksi atas kelupaan, ketidaktahuan akan hukum atau kesalahan yang mereka

lakukan. Dalam ayat tersebut juga terdapat ayat yang mengindikasikan adanya kemudahan dan tidak mempersulit di dalam perkara agama.

Syaikh Muhammad bin Shalih al-Utsaimin *rahimahullah* menjelaskan dalam kitabnya Kitab Ushul Fit Tafsir: "'al-Khatha' (الخطأ), yaitu seseorang melakukan suatu perbuatan yang tidak ia sengaja. Adapun *an-Nis-yan* (النسيان), yaitu lalai dan luputnya hati dari sesuatu yang telah diketahui sebelumnya. Dan *al-Istikrah* (الاستكراه), yaitu seorang yang dipaksa oleh orang lain untuk mengerjakan perbuatan yang haram, sedangkan ia tidak mampu untuk melawannya, yakni pemaksaan dan penekanan".

Penjelasan dalam Tafsir Ibnu Katsir, Ibnu abu Hatim mengatakan, telah menceritakan kepada kami ayahku, telah menceritakan kepada kami Muslim ibnu Ibrahim, telah menceritakan kepada kami Abu Bakar al-Huzali, dari Syahr, dari Ummu Darda, dari Nabi *Saw.* yang telah bersabda bahwa sesungguhnya Allah memaafkan umatku terhadap tiga perkara, yaitu keliru, lupa, dan dipaksa. Sesungguhnya orang yang berdosa itu memerlukan tiga perkara, yaitu pemaafan dari Allah atas dosanya yang terjadi antara dia dengan Allah, dosanya ditutupi oleh Allah dari mata hamba-hamba-Nya hingga ia tidak dipermalukan di antara mereka, dan dipelihara oleh Allah hingga tidak lagi terjerumus ke dalam dosa yang serupa.

Abu Bakar dalam Tafsir Ibnu Katsir mengatakan bahwa lalu ia menuturkan hadits ini kepada Al-Hasan. Maka Al-Hasan menjawab, "Memang benar, apakah engkau tidak membaca hal tersebut di dalam al-Quran?", yaitu firman-Nya dalam al-Quran surat al-Baqarah/2:286 yang berbunyi:

رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِن دَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا

"Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah" (QS. al-Baqarah/2:286).

Adapun lanjutan firman Allah Swt. dalam al-Quran al-Baqarah/2:286:

رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إِصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِن قَبْلِنَا

"Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'aflah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir" (QS. al-Baqarah/2:286).

Ayat di atas mengandung arti bahwa janganlah Engkau membebani kami dengan amal-amal yang berat, sekalipun kami sanggup mengerjakannya; seperti yang telah Engkau syari'atkan kepada umat-umat terdahulu sebelum kami berupa belunggu-belunggu dan beban-beban yang dipikulkan di pundak mereka. Engkau telah mengutus Nabi-Mu yaitu Nabi Muhammad Saw. sebagai nabi pembawa rahmat yang di dalam syariatnya Engkau telah memerintahkannya untuk menghapus semua beban tersebut, sebagai agama yang *hanif*, mudah, lagi penuh dengan toleransi.

Telah disebutkan di dalam Hadits Shahih Muslim, dari Abu Hurairah, dari Rasulullah Saw., yang telah bersabda bahwa setelah ayat itu diturunkan, Allah berfirman, "Ya". Dalam Tafsir Ibnu Katsir disebutkan pula dari Ibnu Abbas, dari Rasulullah Saw., yang telah bersabda, "Setelah ayat ini diturunkan, Allah berfirman, 'Aku telah melakukannya'." Sehingga dari beban, musibah, dan cobaan, atau janganlah Engkau menguji (mencoba) kami dengan cobaan yang tidak kuat kami hadapi. Yaitu hidup melajang dan memperturutkan hawa nafsu; riwayat Ibnu Abu Hatim. Allah menjawab, "Ya".

Dalam penjelasan Tafsir Ibnu Katsir di atas telah dijelaskan dengan jelas bahwa Allah memberikan beban kepada hamba-Nya tidak melebihi dari kemampuannya. Dikuatkan pula dengan jawaban Allah, jika terdapat kesalahan, lupa atau keadaan terpaksa, Allah memberikan ampun atas segala khilaf dari keadaan tersebut dengan jawaban, *“Ya dan Aku telah melakukannya”*.



$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 72 & 9 \\ 70 & 70 & 9 & 9 \\ 0 & 14 & 33 & 0 \\ 19 & 33 & 28 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.6)$$

Langkah 6. Langkah selanjutnya adalah mencari bilangan terkecil dari bilangan-bilangan yang tidak tertutup garis, misalkan  $e$ .

Selanjutnya:

- a. Semua elemen yang tidak tertutup garis dikurangi  $e$ .
- b. Semua elemen yang tertutup oleh satu garis tidak diubah.
- c. Semua elemen yang tertutup oleh dua garis ditambah dengan  $e$ .
- d. Setelah diperoleh tabel baru kembali ke langkah 4 (Suyitno, 1997).

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 72 & 18 \\ 70 & 61 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 24 & 0 \\ 19 & 24 & 19 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.6)$$

Perhatikanlah semua nilai yang tidak terkena garis nilainya akan berkurang 9. Sementara nilai yang tertutup dua garis bertambah 9.

Dari hasil langkah di atas tersebut telah berhasil ditemukan nilai nol sejumlah atau sebanyak sumber daya (bisa karyawan, mesin, alat transportasi atau sumber daya lainnya) yang juga tercermin dalam jumlah nol setiap barisnya kecuali pada baris 3 mempunyai nilai nol sebanyak dua, sehingga penugasan terbaiknya adalah karyawan A mengerjakan pekerjaan B, karyawan B mengerjakan pekerjaan C, karyawan C mengerjakan pekerjaan A, dan karyawan D mengerjakan pekerjaan D. Dengan cara coba-coba, dapat dicari penetapan

optimal dari bilangan-bilangan nol berikut dalam matriks (3.5).

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 72 & 18 \\ 70 & 61 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 24 & 0 \\ 19 & 24 & 19 & 0 \end{bmatrix}$$

Penetapan (a) dari matriks di atas menghasilkan penugasan karyawan terhadap penyelesaian pembuatan seragam di bawah ini:

- Karyawan A menyelesaikan pembuatan celana panjang sebanyak 42 potong.
- Karyawan B menyelesaikan pembuatan rok panjang sebanyak 21 potong.
- Karyawan C menyelesaikan pembuatan kemeja putih lengan panjang sebanyak 82 potong.
- Karyawan D menyelesaikan pembuatan dasi sebanyak 28 potong.

Dengan rincian laba:

Dengan permisalan, kemeja putih lengan panjang ( $x_1$ ), celana panjang ( $x_2$ ), rok panjang ( $x_3$ ), dan dasi ( $x_4$ ).

$$\begin{aligned} \text{Maka } Z &= 3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \\ &= 3000(21) + 5000(28) + 4000(14) + 3000(70) \\ &= 63.000 + 140.000 + 56.000 + 210.000 \\ &= 469.000 \end{aligned}$$

Besarnya laba yang dihasilkan tiap minggunya sebesar Rp 469.000.

Penetapan (b) menghasilkan:

- Karyawan A menyelesaikan pembuatan kemeja putih lengan panjang sebanyak 28 potong.
- Karyawan B menyelesaikan pembuatan rok panjang sebanyak 28 potong.
- Karyawan C menyelesaikan pembuatan dasi sebanyak 82 potong.

- Karyawan D menyelesaikan pembuatan celana panjang sebanyak 28 potong.

Dengan rincian laba:

$$\begin{aligned} Z &= 3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \\ &= 3000(28) + 5000(28) + 4000(28) + 3000(82) \\ &= 84.000 + 140.000 + 112.000 + 84.000 \\ &= 420.000 \end{aligned}$$

Besarnya laba yang dihasilkan tiap minggunya sebesar Rp 420.000.

Penetapan (c) menghasilkan:

- Karyawan A menyelesaikan pembuatan dasi sebanyak 105 potong.
- Karyawan B menyelesaikan pembuatan celana panjang sebanyak 14 potong.
- Karyawan C menyelesaikan pembuatan rok panjang sebanyak 49 potong.
- Karyawan D menyelesaikan pembuatan kemeja putih lengan panjang sebanyak 14 potong.

Dengan rincian laba:

$$\begin{aligned} Z &= 3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \\ &= 3000(14) + 5000(14) + 4000(49) + 3000(105) \\ &= 42.000 + 70.000 + 196.000 + 315.000 \\ &= 623.000 \end{aligned}$$

Besarnya laba yang dihasilkan tiap minggunya adalah Rp 623.000.

Penetapan (d) menghasilkan:

- Karyawan A menyelesaikan pembuatan rok panjang sebanyak 42 potong.
- Karyawan B menyelesaikan pembuatan kemeja putih lengan panjang

sebanyak 21 potong.

- Karyawan C menyelesaikan pembuatan dasi sebanyak 82 potong.
- Karyawan D menyelesaikan pembuatan celana panjang sebanyak 28 potong.

Dengan rincian laba:

$$\begin{aligned}
 Z &= 3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \\
 &= 3000(70) + 5000(28) + 4000(42) + 3000(82) \\
 &= 210.000 + 140.000 + 168.000 + 246.000 \\
 &= 764.000
 \end{aligned}$$

Besarnya laba yang dihasilkan tiap minggunya adalah Rp 764.000.

Berdasarkan *trial* di atas, akhirnya diputuskan untuk memakai penetapan

(d) yakni setiap minggunya para karyawan dapat menghasilkan kemeja putih lengan panjang sebanyak 70 potong, celana panjang 28 potong, rok panjang 42 potong, dan dasi sebanyak 82 potong. Sehingga jika 400 potong yang dipesan toko, maka:

- a) Penyelesaian pembuatan kemeja putih lengan panjang 70 potong per minggu. Maka untuk menyelesaikan 400 potong, membutuhkan waktu 6 minggu.
- b) Penyelesaian pembuatan celana panjang 28 potong per minggu. Maka untuk menyelesaikan 400 potong, membutuhkan waktu 15 minggu.
- c) Penyelesaian pembuatan rok panjang 42 potong per minggu. Maka untuk menyelesaikan 400 potong, membutuhkan waktu 10 minggu.
- d) Penyelesaian pembuatan dasi 82 potong per minggu. Maka untuk menyelesaikan 400 potong, membutuhkan waktu 5 minggu.

Dengan penerapan di atas, maka akhirnya dapat diketahui kelebihan dan kekurangan dari metode Hongaria. Berikut kelebihan dan kekurangan dari metode Hongaria:

Tabel 4.2. Kelebihan dan Kekurangan Metode Hongaria

No.	Faktor	Keterangan
1.	<i>Input</i>	
	a. Jenis Data	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Jumlah barang dalam satuan potong yang mampu diselesaikan oleh para karyawan</li> <li>- Jumlah karyawan yang menyelesaikan pesanan seragam</li> <li>- Macam-macam barang yang dipesan oleh pelanggan (toko)</li> </ul>
	b. Volume Data	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Volume data yang diperlukan dalam metode ini cenderung luas dan banyak</li> </ul>
	c. Banyak Variabel	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Banyak variabel antara baris dan kolom jumlahnya sama. Namun, ada kondisi tertentu dimana baris dan kolom jumlahnya tidak sama, sering disebut dengan permasalahan tidak seimbang yang harus menambahkan elemen <i>dumping</i></li> </ul>
2.	<i>Proses</i>	
	a. Banyak Variabel	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Panjang iterasi untuk optimalisasi pada metode ini sebanyak tiga iterasi</li> </ul>
	b. Kompleksitas Operasi	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Operasi biner yang kerap digunakan dalam metode ini adalah penjumlahan dan pengurangan. Jika pada masalah maksimasi, maka langkah awal adalah mengurangi elemen-elemen baris dan kolom dengan elemen terbesar. Namun berbeda pada masalah minimasi, langkah awalnya dengan mengurangi elemen baris dan kolom dengan elemen terkecil.</li> </ul>
	c. Lama Proses	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Untuk menemukan solusi yang optimal, proses menggunakan metode ini cenderung lebih singkat dikarenakan operasi biner yang digunakan sangat sederhana, yakni penjumlahan dan pengurangan.</li> </ul>
	d. Satuan	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Satuan yang dipakai pada metode ini adalah potong/<i>person</i> untuk mengetahui kemampuan kinerja karyawan dalam</li> </ul>

		menyelesaikan pembuatan seragam guna memenuhi permintaan pelanggan
3.	<i>Output</i>	
	a. Ketelitian	- Dalam proses penentuan solusi optimal, ketelitian berhubungan erat dengan kompleksnya operasi biner yang dipakai. Metode ini hanya menggunakan operasi biner penjumlahan dan pengurangan. Sehingga dalam upaya optimalisasi, selain ketelitian juga harus cermat agar operasi yang cukup mudah, benar-benar menghasilkan solusi optimal.
	b. Akurasi	- Permasalahan yang akan dijadikan data dalam metode Hongaria dan metode Simpleks merupakan permasalahan linier, dalam arti problematika yang mempunyai dua solusi yang berkesinambungan. Permasalahan yang berbeda sama sekali, namun dalam satu paket masalah. Tingkat keakuratan penyelesaian dengan metode ini cenderung lebih lemah daripada simpleks karena hasil yang akan diperoleh bergantung pada permintaan pasar dan kinerja karyawan yang cenderung pasang surut.
	c. Kemudahan Interpretasi	- Hasil dari optimalisasi dengan metode ini sangat jelas dan mudah diinterpretasikan.

#### 4.1 Optimasi Menggunakan Metode Simpleks

Sebuah toko penyedia seragam sekolah berlangganan pada sebuah perusahaan konveksi. Adapun barang-barang yang dipasok antara lain: kemeja putih lengan panjang, celana panjang, rok panjang, dan dasi, dengan minimal pasokan tiap bulannya masing-masing sejumlah 100 potong. Alasan pihak toko memilih perusahaan konveksi ini adalah karena kualitas jahitannya yang bagus dan harga yang terjangkau. Sehingga dengan harga yang terjangkau, akan memperlaris pasaran, meningkatkan kuantitas penjualan, dan dapat mengambil keuntungan sebanyak-banyaknya.

Menurut pengamatan, dalam pembuatan seragam terdapat beberapa tahap. Tahap awal yakni pembuatan dan *cutting* pola, sedangkan tahap kedua yakni penjahitan dan *finishing*. Pada proses pembuatan dan *cutting* pola tersedia waktu 325 jam kerja atau  $\pm 14$  hari, sedangkan pada proses penjahitan dan *finishing* tersedia waktu 1150 atau  $\pm 47$  hari.

Untuk menghasilkan 1 dasi diperlukan  $\frac{1}{4}$  jam kerja proses pembuatan dan *cutting* pola, dan  $\frac{1}{2}$  jam kerja proses penjahitan dan *finishing*. Untuk menghasilkan 1 celana panjang diperlukan waktu 1 jam kerja proses pembuatan dan *cutting* pola, dan 4 jam kerja proses penjahitan dan *finishing*. Untuk menghasilkan 1 rok panjang diperlukan waktu 1 jam kerja proses pembuatan dan *cutting* pola, dan 3 jam kerja proses penjahitan dan *finishing*. Untuk menghasilkan 1 kemeja putih lengan panjang diperlukan waktu 1 jam kerja proses pembuatan dan *cutting* pola serta 4 jam kerja proses penjahitan dan *finishing*.

Laba masing-masing barang adalah Rp 3.000, Rp 5.000, Rp 4.000, dan dan Rp 3.000. Akan ditentukan jumlah dasi, celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang agar yang dihasilkan optimal. Persoalan ini dapat dilihat dalam tabel perumusan persoalan berikut:

Tabel 4.3. Waktu Proses Produksi Seragam

Proses	Waktu yang dibutuhkan (jam)				Total waktu tersedia (jam)
	Dasi	Celana Panjang	Rok Panjang	Kemeja Putih Lengan Panjang	
Pembuatan dan <i>cutting</i> pola	$\frac{1}{4}$	1	1	1	325
Penjahitan dan <i>finishing</i>	$\frac{1}{2}$	4	3	4	1150

Laba/unit	3.000	5.000	4.000	3.000
-----------	-------	-------	-------	-------

Sumber: Data Proses Produksi CV. Modes Arfam

Untuk mempermudah dalam hal perhitungan metode Simpleks, data yang telah diperoleh diubah ke dalam bentuk umum pemrograman linier. Berikut ini langkah-langkah awal perumusan persoalan Program Linier:

1. Mendefinisikan Variabel Keputusan (*Decision Variable*)

Keputusan yang akan diambil adalah berapakah jumlah dasi, celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang yang akan dihasilkan. Jika dasi disimbolkan  $x_1$ , celana panjang  $x_2$ , rok panjang  $x_3$ , dan kemeja putih lengan panjang  $x_4$ . Maka definisi variabel keputusan permasalahan ini adalah:

$x_1$  : jumlah dasi yang akan dihasilkan (dalam satuan potong)

$x_2$  : jumlah celana panjang yang akan dihasilkan (dalam satuan potong)

$x_3$  : jumlah rok panjang yang akan dihasilkan (dalam satuan potong)

$x_4$  : jumlah kemeja putih lengan panjang yang akan dihasilkan (dalam satuan potong)

2. Merumuskan Fungsi Tujuan

Laba yang diperoleh untuk setiap dasi, celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang adalah Rp 3.000, Rp 5.000, Rp 4.000, dan Rp 3.000. Tujuan perusahaan adalah memaksimumkan laba dari sejumlah dasi, celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang yang dihasilkan.

Dengan demikian, fungsi tujuan dapat ditulis;

$$\text{Maks: Laba} = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \quad (\text{dalam ribuan})$$

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \quad (\text{dalam ribuan})$$

dimana:

$Z$  : jumlah keuntungan/laba seluruh produk

$x_1$  : dasi

$x_2$  : celana panjang

$x_3$  : rok panjang

$x_4$  : kemeja putih lengan panjang

### 3. Merumuskan Fungsi Kendala

#### a. Kendala pada Proses Pembuatan dan *Cutting* Pola

Untuk menghasilkan 1 potong dasi diperlukan waktu  $\frac{1}{4}$  jam, untuk menghasilkan 1 potong celana panjang diperlukan waktu 1 jam, untuk menghasilkan 1 potong rok panjang diperlukan waktu 1 jam, dan untuk menghasilkan 1 potong kemeja putih lengan panjang pada proses pembuatan dan *cutting* pola. Waktu yang tersedia adalah 325 jam.

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 325$$

#### b. Kendala pada Proses Penjahitan dan *Finishing*

Untuk menghasilkan 1 potong dasi diperlukan waktu  $\frac{1}{2}$  jam, untuk menghasilkan 1 potong celana panjang diperlukan waktu 4 jam, untuk menghasilkan 1 potong rok panjang diperlukan waktu 3 jam, dan untuk menghasilkan 1 potong kemeja putih lengan panjang diperlukan waktu 4 jam pada proses penjahitan dan *finishing*. Waktu yang tersedia adalah 1150 jam.

$$\frac{1}{2}x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1150$$

### 4. Kendala non-positif

Dasi, celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang yang dihasilkan tidak memiliki nilai negatif.

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

Metode Simpleks adalah suatu metode yang secara matematis dimulai dari suatu pemecahan dasar yang fisibel (*basic feasible solution*) ke pemecahan dasar fisibel lainnya dan dilakukan secara berulang-ulang (*iterative*) sehingga akhirnya diperoleh suatu pemecahan dasar yang optimum. Berikut langkah-langkah penyelesaiannya:

**Langkah 1** : Mengubah model program linier ke dalam bentuk kanoniknya atau bentuk bakunya, semua fungsi kendala berupa persamaan, dengan cara menambahkan *slack* variabel. Dimana setiap fungsi kendala mempunyai *slack* variabel dan nilai sebelah kanan (*right hand side*) semua kendala tidak boleh negatif.

Pada perusahaan konveksi ini diperoleh:

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 325 \text{ atau } S1 = 325 - \frac{1}{4}x_1 - x_2 - x_3 - x_4$$

$$\frac{1}{2}x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1150 \text{ atau } S2 = 1150 - \frac{1}{2}x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

S1 adalah variabel *slack* (waktu tak terpakai) dalam pembuatan dan *cutting* pola, sedangkan S2 adalah variabel *slack* (waktu tak terpakai) dalam penjahitan dan *finishing*. Semua variabel yang tidak mempengaruhi kesamaan ditulis dengan koefisien nol. Perlu diketahui bahwasanya, variabel dibagi menjadi dua (2) yaitu *non-basic variables* dan *basic variable*. *Non-basic variables* adalah variabel yang

tidak keluar sebagai solusi pada setiap iterasi, nilainya sama dengan nol. Sedangkan *basic variable* adalah variabel yang keluar sebagai solusi pada setiap iterasi. Pada bentuk baku di atas *variable basic*nya adalah 325 dan 1150.

Dengan kata lain, bentuk baku PL adalah:

$$Z - 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 - S1 - S2 = 0 \rightarrow \text{persamaan tujuan}$$

persamaan kendala:

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + S1 = 325$$

$$\frac{1}{4}x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + S2 = 1150$$

## Langkah 2 : Membuat Tabel Simpleks Awal

Secara rinci, langkah-langkah perhitungan algoritma Simpleks, yang meliputi penentuan kolom kunci dan baris kunci adalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan bentuk baku, ditentukan solusi awal (*initial basic feasible solution*) dalam menetapkan  $m - n$  variabel non basis sama dengan nol.
2. Pilih sebuah *entering variable* di antara yang sedang menjadi variabel non-basis, yang jika dinaikkan di atas nol, dapat memperbaiki nilai fungsi tujuan. Jika tidak ada, berhenti, berarti solusi sudah optimal. Jika tidak, melangkah ke langkah 3.
3. Pilih sebuah *leaving variable* di antara yang sedang menjadi variabel basis yang harus menjadi non-basis (nilainya menjadi nol) ketika *entering variable* menjadi variabel basis.
4. Menentukan solusi yang baru dengan membuat *entering variable* dan *leaving variable* menjadi *variable non-basis*. Kembali ke langkah 2.

Melihat kembali langkah nomor 1 di atas, solusi awal ditentukan dari persamaan kendala dengan menetapkan 4 variabel sama dengan nol, yang akan memberikan solusi yang unik dan layak. Dengan menetapkan  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ , diperoleh  $S1 = 325$  dan  $S2 = 1150$ . Pada saat ini  $Z = 0$ , didapat merangkum informasi di atas ke dalam bentuk tabel simpleks awal seperti berikut.

Dari bentuk baku di atas, maka akan dibuat tabel simpleks awal sebagai berikut:

Tabel 4.4. Simpleks Awal

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	-3	-5	-4	-3	0	0	0
S1	0	$\frac{1}{4}$	1	1	1	1	0	325
S2	0	$\frac{1}{2}$	4	3	4	0	1	1150

Informasi pada tabel dibaca seperti berikut:

- ❖ Kolom basis menunjukkan variabel yang sedang menjadi basis yaitu S1 dan S2 yang nilainya diberikan pada kolom solusi (NK).
- ❖ Secara tidak langsung mengatakan variabel non basis  $x_1, x_2, x_3$  dan  $x_4$  (yang tidak ditunjukkan pada kolom basis) sama dengan nol.
- ❖ Nilai fungsi tujuan adalah  $Z - ((3 \times 0 + (5 \times 0) + (4 \times 0) + (3 \times 0) + (0 \times 325) + (0 \times 1150) = 0$  seperti terlihat pada kolom NK.

Solusi optimum yang akan diperoleh dapat diketahui dengan persamaan Z, terlihat bahwa variabel non-basis yaitu  $x_1, x_2, x_3$  dan  $x_4$ , semuanya mempunyai koefisien negatif, yang berarti mempunyai koefisien negatif pada fungsi tujuan yang asli. Karena tujuan maksimasi, maka nilai Z dapat diperbaiki dengan meningkatkan  $x_1, x_2, x_3$  dan  $x_4$  menjadi lebih besar dari nol. Yang diutamakan untuk dipilih adalah variabel yang memiliki nilai negatif terbesar. Ringkasnya,

*optimally condition* metode Simpleks menyatakan bahwa dalam kasus maksimasi, jika variabel non-basis memiliki koefisien non negatif pada persamaan  $Z$ , maka solusi optimum telah tercapai. Jika tidak, variabel non-basis dengan koefisien negatif terbesar dipilih sebagai *entering variable*.

Penerapan *optimally condition* pada tabel simpleks di atas adalah dengan memilih  $x_2$  sebagai *entering variable*. Kemudian *leaving variable* harus salah satu dari variabel yang menyatakan bahwa untuk masalah maksimasi maupun minimasi, *leaving variable* adalah basis yang memiliki rasio terkecil antara sisi kanan (NK) persamaan kendala dengan koefisien bersangkutan yang positif pada *entering variable*. Rasio dalam tabel simpleks dapat dicari dengan cara:

- Mencoret semua elemen pada persamaan kendala di bawah *entering variable*.
- Leaving variable* adalah variabel basis yang memiliki rasio terkecil.
- Kolom pada *entering variable* dinamakan *entering column* dan variabel basis yang berhubungan dengan *leaving variable* dinamakan *pivot equation*.
- Elemen pada perpotongan *entering column* dengan *pivot equation* dinamakan *pivot element*.

Tabel 4.5. Simpleks Awal dengan Rasio

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK	Rasio
Z	1	-3	-5	-4	-3	0	0	0	
S1	0	$\frac{1}{4}$	1	1	1	1	0	325	$325 \div 1 = 325$
S2	0	$\frac{1}{2}$	4	3	4	0	1	1150	$1150 \div 4 = 287,5$

**Langkah 3** : Penentuan baris dan kolom kunci sebagai dasar iterasi

- ❖ Kolom kunci ditentukan oleh nilai baris  $Z$  negatif terbesar, yaitu pada kolom  $x_2$ .
- ❖ Baris kunci ditentukan dari nilai rasio terkecil, dimana nilai rasio didapat dari  $NK \div$  kolom kunci.

Tabel 4.6. Simpleks Awal dengan kolom kunci dan baris kunci

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK	Rasio
Z	1	-3	-5	-4	-3	0	0	0	
S1	0	$\frac{1}{4}$	1	1	1	1	0	325	$325 \div 1 = 325$
S2	0	$\frac{1}{2}$	4	3	4	0	1	1150	$1150 \div 4 = 287,5$

#### Langkah 4 : Iterasi

Untuk melakukan iterasi terlebih dahulu harus ditentukan kolom kunci, baris kunci sehingga didapatkan elemen pivot dan persamaan pivot. Kolom  $x_2$  adalah entering column atau disebut kolom kunci, persamaan S2 adalah *pivot equation*, dan angka 4 adalah elemen pivot. Jika pada iterasi tertentu masih belum optimal, maka untuk melakukan iterasi selanjutnya harus ditentukan persamaan pivot baru. Persamaan pivot baru (*new pivot equation*) ditentukan dengan menerapkan metode Gauss Jordan melalui perhitungan berikut:

- a. Persamaan pivot baru = persamaan pivot lama  $\div$  elemen pivot.
- b. Untuk semua persamaan yang lain termasuk  $Z$ .

Persamaan baru = persamaan lama  $\div$  (koefisien *entering column*/kolom kunci  $\times$  persamaan pivot baru)

Persamaan pivot menghasilkan elemen pivot (*pivot element*) sama dengan 1 pada persamaan pivot yang baru, seperti ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 4.7. Persamaan Pivot Iterasi Pertama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
-------	---	-------	-------	-------	-------	----	----	----

Z	1	-3	-5	-4	-3	0	0	0
S1	0	$\frac{1}{4}$	1	1	1	1	0	325
S2	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	287,5

Perhatikan bahwa kolom solusi menghasilkan nilai baru,  $x_2 = 287,5$  yang sama dengan rasio minimum pada *feasibility condition*. Tabel solusi baru yang diperbaiki dapat dibuat dengan melakukan jenis kedua metode Gauss Jordan, kecuali baris  $x_2$  yang telah menjadi persamaan pivot baru (*new pivot equation*).

Untuk basis Z:

$$a. \quad 1 - \frac{(0 \times -5)}{1} = 1 - \frac{0}{1} = 1$$

$$b. \quad -3 - \frac{\left(\frac{1}{8} \times -5\right)}{1} = -3 - \frac{-\frac{5}{8}}{1} = -3 + \frac{5}{8} = -\frac{24}{8} + \frac{5}{8} = -\frac{19}{8}$$

$$c. \quad -5 - \frac{(1 \times -5)}{1} = -5 - (-5) = 0$$

$$d. \quad -4 - \frac{\left(\frac{3}{4} \times -5\right)}{1} = -4 - \left(\frac{-\frac{15}{4}}{1}\right) = -4 - \left(-\frac{15}{4}\right) = -4 + \frac{15}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$e. \quad -3 - \frac{(1 \times -5)}{1} = -3 - \frac{-5}{1} = -3 + 5 = 2$$

$$f. \quad 0 - \frac{(0 \times -5)}{1} = 0 - 0 = 0$$

$$g. \quad 0 - \frac{\left(\frac{1}{4} \times -5\right)}{1} = 0 - \frac{-\frac{5}{4}}{1} = 0 - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$h. \quad 0 - \frac{(287,5 \times -5)}{1} = 1437,5$$

Untuk basis S1:

$$a. \quad 0 - \frac{(0 - 1)}{1} = 0 - 0 = 0$$

$$b. \quad \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{8} \times 1\right)}{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$c. \quad 1 - \frac{(1 \times 1)}{1} = 1 - 1 = 0$$

$$d. \quad 1 - \frac{\left(\frac{3}{4} \times 1\right)}{1} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$e. \quad 1 - \frac{(1 \times 1)}{1} = 1 - 1 = 0$$

$$f. \quad 1 - \frac{(0 \times 1)}{1} = 1 - 0 = 1$$

$$g. \quad 0 - \frac{\left(\frac{1}{4} \times 1\right)}{1} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$h. \quad 325 - \frac{(287,5 \times 1)}{1} = 325 - 287,5 = 37,5$$

Tabel iterasi pertama dengan persamaan pivot lama adalah sebagai berikut:

Tabel 4.8. Simpleks Iterasi Pertama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	$-\frac{19}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	2	0	$\frac{5}{4}$	1437,5
S1	0	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	37,5
$x_1$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	287,5

Solusi yang baru memberikan nilai  $x_1 = 287,5$  dan  $x_2 = 0$ . Nilai Z naik dari 0 menjadi 1437,5.

Sebelum melanjutkan iterasi kedua, terlebih dahulu dibentuk tabel iterasi kedua dengan persamaan pivot baru.

Tabel 4.9. Simpleks Iterasi Pertama dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	$-\frac{19}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	2	0	$\frac{5}{4}$	1437,5
S1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	300

$x_1$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	287,5
-------	---	---------------	---	---------------	---	---	---------------	-------

Untuk basis  $x_2$ :

$$a. \quad 1 - \frac{(0 \times -\frac{19}{8})}{1} = 1$$

$$b. \quad -\frac{19}{8} - \frac{(1 \times -\frac{19}{8})}{1} = -\frac{19}{8} - \left(-\frac{19}{8}\right) = 0$$

$$c. \quad 0 - \frac{(0 \times -\frac{19}{8})}{1} = 0$$

$$d. \quad -\frac{1}{4} - \frac{(\frac{1}{2} \times -\frac{19}{8})}{1} = -\frac{1}{4} + \frac{(\frac{19}{16})}{1} = -\frac{4}{16} + \frac{19}{16} = \frac{15}{16}$$

$$e. \quad 2 - \frac{(0 \times -\frac{19}{8})}{1} = 2$$

$$f. \quad 0 - \frac{(\frac{1}{8} \times -\frac{19}{8})}{1} = -\frac{19}{64}$$

$$g. \quad \frac{5}{4} - \frac{(-\frac{1}{2} \times -\frac{19}{8})}{1} = \frac{5}{4} - \frac{19}{8} = \frac{20}{16} - \frac{19}{16} = \frac{1}{16}$$

$$h. \quad 1437,5 - \frac{(300 \times -\frac{19}{8})}{1} = 1437,5 - (-712,5) = 2150$$

Untuk basis  $x_1$ :

$$a. \quad 0 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 0$$

$$b. \quad \frac{1}{8} - \frac{(1 \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

$$c. \quad 1 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 1$$

$$d. \quad \frac{3}{4} - \frac{(\frac{1}{2} \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{12}{16} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

$$e. \quad 1 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 1$$

$$f. \quad 0 - \frac{(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8})}{1} = -\frac{1}{64}$$

$$g. \quad \frac{1}{4} - \frac{(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{1}{4} - (-16) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

$$h. \quad 287,5 - \frac{(300 \times \frac{1}{8})}{1} = 287,5 - 37,5 = 250$$

Sehingga diperoleh tabel simpleks iterasi 2 dengan persamaan pivot:

Tabel 4.10. Simpleks Iterasi ke-2 dengan Persamaan Pivot Lama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	0	$\frac{15}{16}$	2	$-\frac{19}{64}$	$\frac{1}{16}$	2150
S1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	300
$x_1$	0	0	1	$\frac{11}{16}$	1	$-\frac{1}{64}$	$\frac{5}{16}$	250

Berikut tabel simpleks iterasi dengan persamaan pivot baru:

Tabel 4.11. Simpleks Iterasi ke-2 dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	0	$\frac{15}{16}$	2	$-\frac{19}{64}$	$\frac{1}{16}$	2150
S1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	300
$x_1$	0	0	-64	-44	-64	1	-20	-16000

Untuk basis Z:

$$a. \quad 1 - \frac{(0 \times -\frac{19}{64})}{1} = 1$$

$$b. \quad 0 - \frac{(0 \times -\frac{19}{64})}{1} = 0$$

$$\text{c. } 0 - \frac{(-64 \times -\frac{19}{64})}{1} = -19$$

$$\text{d. } \frac{15}{16} - \frac{(-44 \times -\frac{19}{64})}{1} = \frac{15}{16} - \frac{836}{64} = \frac{60 - 836}{64} = -\frac{776}{64} = -\frac{194}{16}$$

$$\text{e. } 2 - \frac{(-64 \times -\frac{19}{64})}{1} = 2 - 19 = -17$$

$$\text{f. } -\frac{19}{64} - \frac{(1 \times -\frac{19}{64})}{1} = -\frac{19}{64} - \left(-\frac{19}{64}\right) = 0$$

$$\text{g. } \frac{1}{16} - \frac{(-20 - \frac{19}{64})}{1} = \frac{1}{16} - \left(\frac{380}{64}\right) = \frac{4}{64} - \frac{380}{64} = -\frac{376}{64} = -\frac{94}{16}$$

$$\text{h. } 2150 - \frac{(-16000 \times -\frac{19}{64})}{1} = 2150 - 4750 = -2600$$

Untuk basis S1:

$$\text{a. } 0 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 0$$

$$\text{b. } 1 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 1$$

$$\text{c. } 0 - \frac{(-64 \times \frac{1}{8})}{1} = 8$$

$$\text{d. } \frac{1}{2} - \frac{(-44 \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{11}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{e. } 0 - \frac{(-64 \times \frac{1}{8})}{1} = 8$$

$$\text{f. } \frac{1}{8} - \frac{(1 \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\text{g. } -\frac{1}{2} - \frac{-20 \times \frac{1}{8}}{1} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{h. } 300 - \frac{(-16000 \times \frac{1}{8})}{1} = 300 + 2000 = 2300$$

Sehingga diperoleh tabel simpleks iterasi 3 dengan persamaan pivot:

Tabel 4.12. Simpleks Iterasi ke-3 dengan Persaman Pivot Lama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	-19	$-\frac{194}{16}$	-17	0	$-\frac{94}{16}$	-2600
S1	0	1	8	6	8	0	2	2300
$x_1$	0	0	-64	-44	-64	1	-20	-16000

Berikut tabel simpleks iterasi 3 dengan persamaan pivot baru:

Tabel 4.13. Simpleks Iterasi ke-3 dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	-19	$-\frac{194}{16}$	-17	0	$-\frac{94}{16}$	-2600
S1	0	1	8	6	8	0	2	2300
$x_1$	0	0	$-\frac{16}{11}$	1	$-\frac{16}{11}$	$-\frac{1}{44}$	$-\frac{5}{11}$	363,63

Untuk basis Z:

$$a. \quad 1 - \frac{(0 \times -\frac{194}{16})}{1} = 1$$

$$b. \quad 0 - \frac{(0 \times -\frac{194}{16})}{1} = 0$$

$$c. \quad -19 - \frac{(-\frac{16}{11} \times -\frac{194}{16})}{1} = -19 - \frac{194}{11} = \frac{-209 - 194}{11} = -\frac{403}{11}$$

$$d. \quad -\frac{194}{16} - \frac{(1 \times -\frac{194}{16})}{1} = -\frac{194}{16} + \frac{194}{16} = 0$$

$$e. \quad -17 - \frac{(-\frac{16}{11} \times -\frac{194}{16})}{1} = -17 - \frac{194}{11} = \frac{-187 - 194}{11} = -\frac{381}{11}$$

$$f. \quad 0 - \frac{(-\frac{1}{44} \times -\frac{194}{16})}{1} = -\frac{194}{704} = -\frac{97}{352}$$

$$\begin{aligned} \text{g. } -\frac{194}{16} - \frac{-\frac{5}{11} \times -\frac{194}{16}}{1} &= -\frac{194}{16} - \frac{-\frac{5}{11} \times -\frac{97}{8}}{1} = -\frac{194}{16} - \frac{485}{88} = \frac{8272 - 7760}{1408} \\ &= \frac{512}{1408} = 128 = 352 = \frac{32}{88} = \frac{8}{22} = \frac{4}{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h. } -2600 - \frac{(363,63 \times -\frac{194}{16})}{1} &= -2600 - \frac{705444,22}{16} = -2600 - 4409,01 \\ &= -7009,01 \end{aligned}$$

Untuk basis S1:

$$\text{a. } 0 - \frac{(0 \times 6)}{1} = 0$$

$$\text{b. } 1 - \frac{(0 \times 6)}{1} = 1$$

$$\text{c. } 8 - \frac{(-\frac{16}{11} \times 6)}{1} = 8 - \left(-\frac{96}{11}\right) = \frac{88 + 96}{11} = \frac{184}{11}$$

$$\text{d. } 6 - \frac{(1 \times 6)}{1} = 0$$

$$\text{e. } 8 - \frac{(-\frac{16}{11} \times 6)}{1} = -\frac{184}{11}$$

$$\text{f. } 0 - \frac{(-\frac{1}{44} \times 6)}{1} = \frac{6}{44} = \frac{3}{22}$$

$$\text{g. } 2 - \frac{(-\frac{5}{11} \times 6)}{1} = 2 - \left(-\frac{30}{11}\right) = \frac{22 + 30}{11} = \frac{52}{11}$$

$$\text{h. } 2300 - \frac{(363,63 \times 6)}{1} = 2300 - 2181,78 = 118,22$$

Sehingga diperoleh tabel simpleks iterasi 4 dengan persamaan pivot:

Tabel 4.14. Simpleks Iterasi ke-4 dengan Persamaan Pivot Lama

Basis	Z	$x_1$	2	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	$-\frac{403}{11}$	0	$-\frac{381}{11}$	$-\frac{97}{352}$	$\frac{4}{11}$	-7009,01
S1	0	1	$\frac{184}{11}$	0	$-\frac{184}{11}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{52}{11}$	118,22

$x_1$	0	0	$-\frac{16}{11}$	1	$-\frac{16}{11}$	$-\frac{1}{44}$	$-\frac{5}{11}$	363,63
-------	---	---	------------------	---	------------------	-----------------	-----------------	--------

Berikut tabel simpleks iterasi 4 dengan persamaan pivot baru:

Tabel 4.15. Simpleks Iterasi ke-4 dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	$-\frac{403}{11}$	0	1	0	$\frac{381}{403}$	$\frac{97}{12896}$	$-\frac{4}{403}$	191,14
S1	0	1	$\frac{184}{11}$	0	$-\frac{184}{11}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{52}{11}$	118,22
$x_1$	0	0	$-\frac{16}{11}$	1	$-\frac{16}{11}$	$-\frac{1}{44}$	$-\frac{5}{11}$	363,63

Untuk basis S1:

$$a. \quad 0 - \frac{\left(-\frac{403}{11} \times \frac{184}{11}\right)}{1} = -\left(-\frac{74152}{121}\right) = \frac{74152}{121}$$

$$b. \quad 1 - \frac{\left(0 \times \frac{184}{11}\right)}{1} = 1$$

$$c. \quad \frac{184}{11} - \frac{\left(-\frac{403}{11} \times \frac{184}{11}\right)}{1} = \frac{184}{11} - \left(-\frac{74152}{121}\right) = \frac{2024}{121} - \left(-\frac{74152}{121}\right) = \frac{76176}{121}$$

$$d. \quad 0 - \frac{\left(0 \times \frac{184}{11}\right)}{1} = 0$$

$$e. \quad \frac{-184}{11} - \frac{\left(-\frac{381}{403} \times \frac{184}{11}\right)}{1} = \frac{-184}{11} - \left(\frac{70104}{4433}\right) = \frac{-74152 - 70104}{4433} = \frac{-144256}{4433}$$

$$f. \quad \frac{3}{22} - \frac{\left(-\frac{97}{352} \times \frac{184}{11}\right)}{1} = \frac{3}{22} - \frac{-\frac{97}{88} \times \frac{46}{11}}{1} = \frac{3}{22} - \left(-\frac{97}{44} \times \frac{23}{11}\right) = \frac{3}{22} - \left(-\frac{2231}{484}\right) \\ = \frac{3}{22} + \frac{2231}{484} = \frac{66 + 2231}{484} = \frac{2297}{484}$$

$$g. \quad \frac{52}{11} - \frac{-\frac{4}{403} \times \frac{184}{11}}{1} = \frac{52}{11} - \left(-\frac{736}{4433}\right) = \frac{52}{11} + \frac{736}{4433} = \frac{20956}{4433} + \frac{736}{4433} = \frac{21692}{4433} \\ = \frac{1972}{403}$$

$$h. \quad 118,22 - \frac{191,14 \times \frac{184}{11}}{1} = 118,22 - (3197,25) = -3079,03$$

Untuk basis  $x_1$ :

$$a. \quad 0 - \frac{\left(-\frac{403}{11} \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = -\left(\frac{6448}{121}\right)$$

$$b. \quad 0 - \frac{\left(0 \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = 0$$

$$c. \quad -\frac{6}{11} - \frac{\left(1 \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = -\frac{6}{11} + \frac{6}{11} = 0$$

$$d. \quad 1 - \frac{\left(0 \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = 1$$

$$e. \quad -\frac{6}{11} - \frac{\left(\frac{381}{403} \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = -\frac{6}{11} - \left(-\frac{696}{4433}\right) = \frac{-6448 + 6096}{4433} = -\frac{352}{4433} = -\frac{32}{403}$$

$$f. \quad -\frac{1}{44} - \frac{\left(\frac{97}{12896} \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = -\frac{1}{44} - \left(-\frac{1552}{141856}\right) = -\frac{3224}{141856} + \frac{1552}{141856} = -\frac{1672}{141856}$$

$$= -\frac{209}{17732} = \frac{19}{1612}$$

$$g. \quad -\frac{5}{11} - \frac{\left(-\frac{4}{403} \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = -\frac{5}{11} - \left(\frac{64}{4433}\right) = \frac{-2015 - 64}{4433} = -\frac{2079}{4433} = \frac{189}{403}$$

$$h. \quad 363,63 - \frac{\left(191,14 \times -\frac{16}{11}\right)}{1} = 363,63 + 278,02 = 641,65$$

Sehingga diperoleh tabel simpleks iterasi 5 dengan persamaan pivot:

Tabel 4.16. Simpleks Iterasi ke-5 dengan Persamaan Pivot Lama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	$-\frac{403}{11}$	0	1	0	$\frac{381}{403}$	$\frac{97}{12896}$	$-\frac{4}{403}$	191,14

S1	$\frac{74152}{121}$	1	$\frac{76176}{121}$	0	$-\frac{144256}{4433}$	$\frac{2297}{484}$	$\frac{1972}{403}$	-3079,03
$x_1$	$-\frac{6448}{121}$	0	0	1	$-\frac{32}{403}$	$\frac{19}{1612}$	$\frac{189}{403}$	641,65

Berikut tabel simpleks iterasi 5 dengan persamaan pivot baru:

Tabel 4.17. Simpleks Iterasi ke-5 dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	$-\frac{403}{11}$	0	1	0	$\frac{381}{403}$	$\frac{97}{12896}$	$-\frac{4}{403}$	191,14
S1	1	$\frac{121}{74152}$	$\frac{9522}{9269}$	0	$-\frac{198352}{3735407}$	$\frac{25267}{3262688}$	$\frac{238612}{2988}$	-5,02
$x_1$	$-\frac{6448}{121}$	0	0	1	$-\frac{32}{403}$	$\frac{19}{1612}$	$\frac{189}{403}$	641,65

Proses ini berlanjut hingga pada basis Z tidak ada yang bernilai negatif. Perlu diketahui bahwa terdapat beberapa kasus yang dijumpai pada penerapan metode simpleks, yaitu: degenerasi, optimal alternatif, solusi tanpa batas, dan tak ada solusi.

Degenerasi terjadi apabila pada tabel simpleks terdapat satu atau lebih *basic variable* yang bernilai nol. Hal ini mengakibatkan iterasi yang dilakukan selanjutnya dapat menjadi suatu *loop* yang akan kembali pada bentuk sebelumnya. Kejadian ini dinamakan *cycling/circling*. Namun yang menjadi pertanyaan dari kasus ini selanjutnya adalah mengapa tidak berhenti melakukan perhitungan pada saat iterasi simpleks menghasilkan suatu solusi yang *degenerate*? Jawabannya ialah karena tidak semua persoalan menghasilkan solusi *degenerate* yang tetap. Artinya, ada persoalan yang pada suatu saat bersifat *degenerate*, tetapi pada iterasi berikutnya *degenerate* ini menghilang. Hal ini biasanya dinamakan *degenerate temporer*.

Apabila fungsi tujuan diasumsikan mencapai nilai yang sama untuk lebih dari satu titik solusi maka kasus ini disebut optimal alternatif karena dihadapkan

pada pilihan lebih dari satu pasangan peubah yang memberi nilai optimal yang sama. Pada sejumlah model PL nilai peubah dapat saja meningkat tak terbatas tanpa mengganggu suatu pembatas linier. Hal ini berarti ruang solusi terbuka atau tak terbatas. Akibatnya nilai fungsi tujuannya juga dapat terus meningkat (maksimisasi) atau terus menurun (minimisasi). Di kondisi lain, juga didapatkan suatu permasalahan tidak ditemukan adanya solusi.

Hal ini menunjukkan bahwa, dalam suatu upaya tidak selamanya berhasil. Ada kalanya suatu upaya yang dilakukan manusia itu membuahkan hasil, ada kalanya juga membuahkan hasil tetapi dengan proses yang sangat rumit, lama dan berkali-kali mengalami kegagalan. Terkadang pada kondisi tertentu justru mengalami kegagalan, ibarat masalah tanpa solusi sama sekali. Namun, terkadang juga terdapat solusi yang banyak sekali, sehingga di sinilah manusia dituntut untuk mempergunakan akalannya agar dapat memilih solusi paling tepat untuk permasalahan yang tengah dihadapinya. Sebagaimana termaktub dalam al-Quran surat al-Ghasyiyah/88:17-20:

أَفَلَا يَنْظُرُونَ إِلَى الْإِبِلِ كَيْفَ خُلِقَتْ ﴿٤﴾ وَإِلَى السَّمَاءِ كَيْفَ رُفِعَتْ ﴿٥﴾ وَإِلَى الْجِبَالِ كَيْفَ نُصِبَتْ ﴿٦﴾ وَإِلَى الْأَرْضِ كَيْفَ سُطِحَتْ ﴿٧﴾

*“Maka apakah mereka tidak memperhatikan unta bagaimana dia diciptakan, dan langit, bagaimana ia ditinggikan? Dan gunung-gunung bagaimana ia ditegakkan? Dan bumi bagaimana ia dihamparkan?” (QS. al-Ghasyiyah/88:17-20).*

Dalam ayat tersebut tersirat makna bahwa Allah mengutus manusia untuk mempergunakan akalannya agar setiap problematika kehidupan di dunia ini dapat diatasi dengan baik dan dengan solusi yang bagus. Dengan kompleksnya problematika kehidupan yang tentunya telah disesuaikan dengan kadar kemampuan hamba-Nya, Allah telah menyertakan kemudahan dalam kesulitan

dalam setiap upaya hamba-Nya dalam mencari solusi dan meraih ridho-Nya. Secara lugas, Allah menjelaskannya dalam surat al-Insyiroh/94:5-6 sebagai berikut:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“*Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan*” (QS. al-Insyiroh/94:5-6).

Penyebutan kalimat sesudah kesulitan itu ada kemudahan diulanginya dua kali, sebagai pertanda bahwa rahmat Allah bagi seluruh alam atas segala problematika kehidupan yang telah dibentangkan di bumi ini adalah sebagai fasilitas agar manusia menjadi lebih dekat dengan Tuhannya. Allah telah menjelaskan bahwasanya setiap permasalahan tentu ada solusi. Jika pun tanpa solusi, pasti Allah telah menyelipkan hikmah di setiap kejadian yang dialami oleh manusia. Sehingga dengan rahmat itulah, Allah memberikan kesempatan kepada manusia untuk menggunakan akalinya guna mencari solusi yang tepat atas segala problematika kehidupan yang tengah dialaminya agar dapat lebih mendekatkan diri kepada Allah dan meraih ridho-Nya.

Sehingga dengan upaya optimasi di atas, maka dapat diketahui pula kelebihan dan kekurangan dari metode Simpleks, sebagai berikut:

Tabel 4.18. Kelebihan dan Kekurangan Metode Simpleks

No.	Faktor	Keterangan
1.	<i>Input</i>	
	a. Jenis Data	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Jumlah barang yang akan diselesaikan oleh para karyawan.</li> <li>- Waktu penyelesaian pembuatan seragam tiap potong.</li> </ul>

		<ul style="list-style-type: none"> <li>- Tahapan penyelesaian pembuatan seragam.</li> <li>- Laba penjualan setiap barang.</li> <li>- Total waktu yang tersedia untuk menyelesaikan seluruh pesanan seragam.</li> </ul>
	b. Volume Data	- Volume data yang digunakan cenderung lebih sedikit
	c. Banyak Variabel	- Banyaknya variabel dalam metode ini berjumlah mulai dari dua hingga banyak variabel.
2.	Proses	
	a. Panjang Iterasi	- Panjang iterasi pada metode ini sebanyak 2 iterasi.
	b. Kompleksitas Operasi	- Pada metode ini, operasi biner yang digunakan meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Sehingga penggunaan operasi yang cukup kompleks adalah pada metode ini.
	c. Lama Proses	- Solusi optimal yang diproses menggunakan metode ini lebih lama. Namun, lama dan singkatnya proses adalah bergantung pada data itu sendiri dan kompleksnya operasi yang dipakai dalam metode.
	d. Satuan	- Data pada metode ini menggunakan satuan potong/day untuk mengetahui kemampuan produksi seragam oleh karyawan dengan tujuan untuk menghasilkan hasil produksi yang berkualitas dan tepat waktu ( <i>on time</i> ).
3.	<i>Output</i>	
	a. Ketelitian	- Dalam optimalisasi dengan metode ini, diperlukan ketelitian yang cukup baik dikarenakan operasi biner yang dipakai meliputi pengurangan, perkalian, dan pembagian serta rumitnya kriteria di setiap putaran iterasi.
	b. Akurasi	- Untuk segi akurasi, metode ini lebih unggul dikarenakan optimalisasi dilakukan pada data proses perencanaan, dengan harapan perencanaan dan pelaksanaan produksi berjalan optimal dan seimbang.
	c. Kemudahan Interpretasi	- Pada metode ini, karena prosesnya yang rumit dan banyaknya variabel yang dipakai, sehingga rumit pula dalam penginterpretasiannya dibanding dengan

		metode Hongaria.
--	--	------------------





## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Pendekatan Penelitian**

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kuantitatif, yaitu suatu pendekatan penelitian yang menggunakan data numerik, jenis penelitiannya adalah penelitian deskriptif, yaitu penelitian yang memberikan gambaran atau uraian atas suatu keadaan tanpa ada perlakuan obyek yang diteliti.

#### **3.2 Jenis dan Sumber Data**

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data primer, yang bersumber dari CV. Modes Arfam dan pada Kepanitiaan  *Holding Bazar Unit Hunian Pusat Ma'had al-Jami'ah Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang*. Data yang berasal dari CV. Modes Arfam diambil mulai dari tanggal 15 Agustus 2013 sampai 17 Agustus 2014 dan diamati dalam periode harian. Data yang diambil berupa kemampuan proses produksi para karyawan setiap minggunya.

#### **3.3 Metode Pengumpulan Data**

Pengumpulan data primer, yakni dengan mencari informasi secara langsung pada CV. Modes Arfam yang beralamatkan di Jalan Ismail nomor 33 RT 05 RW 02 Dusun Wates Kecamatan Poncokusumo dan pada Kepanitiaan  *Holding Bazar Unit Hunian Pusat Ma'had al-Jami'ah Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang*, yang meliputi informasi tentang kemampuan produksi karyawan dan data proses produksi harian seragam.

### 3.4 Cara Pengolahan Data

Pengolahan data menggunakan dua metode, yakni dengan cara menerapkan prosedur metode Hongaria dan metode Simpleks. Langkah-langkah pengolahan data menggunakan metode Hongaria adalah:

- a. Mencari elemen tiap baris dalam matriks (data) dengan nilai maksimum/minimum (elemen terbesar untuk persoalan maksimasi, elemen terkecil untuk persoalan minimasi), serta baris yang belum terdapat angka nol. Kurangkan semua elemen dalam baris tersebut dengan elemen baris bernilai maksimum/minimum tersebut.
- b. Mencari elemen tiap kolom dalam matriks dengan nilai maksimum/minimum (elemen terbesar untuk persoalan maksimasi, elemen terkecil untuk persoalan minimasi), serta kolom yang belum terdapat angka nol. Kurangkan semua elemen dalam kolom tersebut dengan elemen baris bernilai maksimum/minimum tersebut.
- c. Membuat garis yang melingkupi semua elemen bernilai nol.

Melakukan pengecekan:

1. Jika jumlah garis =  $n$ , maka selanjutnya memilih kombinasi dari elemen-elemen matriks, dimana jumlah kombinasi tersebut = 0.
2. Jika jumlah garis <  $n$ , maka dilanjutkan ke langkah selanjutnya.
3. Mencari elemen dengan nilai minimum yang tidak terlingkupi oleh garis. Kurangkan elemen yang tidak terlingkupi garis dan tambahkan elemen dengan nilai minimum untuk elemen yang terlingkupi garis dua kali. Apabila hasil pengurangan memberikan hasil negatif, maka elemen dengan nilai minimum tidak perlu dikurangkan. Kembali ke langkah a.

Catatan: Apabila persoalan yang dihadapi adalah persoalan memaksimalkan, kalikan matriks dengan skalar  $-1$ .

Berikut langkah-langkah pengolahan data menggunakan metode Simpleks adalah:

- a. Data yang telah diperoleh dari metode Hongaria harus diubah ke dalam bentuk umum pemrograman linier. Berikut ini langkah-langkah awal perumusan persoalan Program Linier:
  1. Mendefinisikan Variabel Keputusan (*Decision Variable*)
  2. Merumuskan Fungsi Tujuan
  3. Merumuskan Fungsi Kendala
- b. Membuat Tabel Simpleks
- c. Penentuan baris dan kolom kunci sebagai dasar iterasi
- d. Iterasi

### 3.5 Penyajian Data

Penyajian data untuk metode Hongaria berupa matriks, dan penyajian data untuk metode Simpleks berupa tabel.

### 3.6 Analisis Data

Analisis data pada penelitian ini dilakukan dengan cara:

- a. Menerapkan data menggunakan metode Hongaria dan metode Simpleks.
- b. Setelah mengaplikasikan kedua metode tersebut maka akan diperoleh kelebihan dan kekurangan kedua metode tersebut.





## BAB IV PEMBAHASAN

### 4.1 Optimasi Menggunakan Metode Hongaria

Berikut akan dijelaskan bagaimana optimalisasi menggunakan metode Hongaria. Tabel biaya berikut adalah data metode Hongaria tentang kemampuan karyawan dalam pembuatan seragam sekolah:

Tabel 4.1. Kemampuan Produksi Karyawan dalam Pembuatan Seragam

Jumlah Jahitan Karyawan	Kemeja Putih Lengan Panjang	Celana Panjang	Rok Panjang	Dasi
A (Sya'roni)	28	21	42	105
B (May)	21	14	28	28
C (Yus)	14	21	49	82
D (Illa)	21	28	42	70

Sumber: Data Kemampuan Produksi CV. Modes Arfam

Terkait penerimaan mahasiswa baru Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang setiap tahunnya melaksanakan Orientasi Pengenalan Akademik Kampus (OPAK) dan kerap membutuhkan perlengkapan, di antaranya adalah seragam orientasi, panitia holding telah bersiap-siap di tahun sebelumnya untuk bekerjasama dengan sebuah toko yang berlangganan pada sebuah perusahaan konveksi guna pengadaan barang-barang perlengkapan OPAK, di antaranya adalah kemeja putih lengan panjang, celana panjang, rok panjang, dan dasi.

Pihak toko memilih perusahaan konveksi "Modes Arfam" dikarenakan kualitas bagus dan harga yang terjangkau. Dengan rencana pengambilan laba

setiap barangnya adalah kemeja Rp 3.000, celana Rp 5.000, rok Rp 4.000, dan dasi Rp 3.000. Jika pada tahun lalu sekitar 500 – 600 dari 3310 mahasiswa baru memesan perlengkapan orientasi, lain dengan tahun ini panitia menyiapkan pesanan seragam dengan jumlah yang relatif lebih sedikit dikarenakan jumlah mahasiswa baru yang diterima pada tahun ini lebih sedikit yakni 2575 orang. Panitia memesan sejumlah 400 potong, 7 bulan sebelum Agustus 2014.

Pada perusahaan konveksi, manajer telah membagi tugas kepada setiap karyawannya. Setiap karyawan akan mempunyai tugas menyelesaikan tugas yang sama rata, masing-masing mengerjakan 100 potong. Dengan tugas yang sama yakni menyelesaikan pesanan, namun berbeda pada tingkat kecepatan dan ketelitian yang berbeda dalam penyelesaian. Sehingga waktu penyelesaian jahitan juga berbeda pula.

Metode Hongaria kerap digunakan dalam pemecahan masalah penugasan, yang mana masalah penugasan ini muncul pada kasus membuat keputusan siapa dari  $n$  karyawan yang harus menyelesaikan pekerjaan masing-masing dari  $n$  pekerjaan, sehingga mendapatkan hasil total biaya masalah penugasan yang optimum.

Langkah-langkah metode Hongaria adalah sebagai berikut:

Langkah 1. Menyusun matriks biaya, yakni dengan membentuk data menjadi matriks berbentuk persegi.

$$\begin{bmatrix} 28 & 21 & 42 & 105 \\ 21 & 14 & 28 & 28 \\ 14 & 21 & 49 & 82 \\ 21 & 28 & 42 & 70 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.1)$$

Langkah 2. Seluruh elemen baris dikurangi dengan elemen terbesar pada setiap baris. Sehingga pada baris pertama dikurangi dengan 105,

baris kedua dikurangi 28, baris ketiga dikurangi 82, dan baris keempat dikurangi 70

$$\begin{bmatrix} 77 & 84 & 63 & 0 \\ 7 & 14 & 0 & 0 \\ 68 & 61 & 33 & 0 \\ 49 & 42 & 28 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.2)$$

Langkah 3. Mengurangi semua elemen kolom dengan elemen terbesar setiap kolomnya. Sehingga yang perlu dikurangi dengan elemen terkecil adalah kolom 1 dan kolom 2 karena masih belum memiliki nilai nol. Kolom pertama dikurangi 77 dan kolom kedua dikurangi 84.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 63 & 0 \\ 70 & 70 & 0 & 0 \\ 9 & 23 & 33 & 0 \\ 28 & 42 & 28 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.3)$$

Langkah 4. Uji optimalisasi, dengan menarik garis minimum vertikal dan horizontal yang mencakup elemen yang bernilai nol.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 63 & 0 \\ 70 & 70 & 0 & 0 \\ 9 & 23 & 33 & 0 \\ 28 & 42 & 28 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.4)$$

Langkah 5. Langkah selanjutnya adalah mencari bilangan terkecil dari bilangan-bilangan yang tidak tertutup garis, misalkan  $e$ .

Selanjutnya:

- Semua elemen yang tidak tertutup garis dikurangi  $e$ .
- Semua elemen yang tertutup oleh satu garis tidak diubah.
- Semua elemen yang tertutup oleh dua garis ditambah dengan  $e$ .
- Setelah diperoleh tabel baru kembali ke langkah 4 (Suyitno, 1997).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 72 & 9 \\ 70 & 70 & 9 & 9 \\ 0 & 14 & 33 & 0 \\ 19 & 33 & 28 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.5)$$

Langkah 6. Matriks di atas belum optimal karena masih terdapat baris yang tidak mempunyai *input* yang bernilai nol sama sekali, maka langkah selanjutnya adalah menarik garis yang menghubungkan minimal dua buah nilai nol dalam tabel penugasan tersebut, seperti terlihat pada tabel atau matriks berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 72 & 9 \\ 70 & 70 & 9 & 9 \\ 0 & 14 & 33 & 0 \\ 19 & 33 & 28 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.6)$$

Langkah 6. Langkah selanjutnya adalah mencari bilangan terkecil dari bilangan-bilangan yang tidak tertutup garis, misalkan  $e$ .

Selanjutnya:

- Semua elemen yang tidak tertutup garis dikurangi  $e$ .
- Semua elemen yang tertutup oleh satu garis tidak diubah.
- Semua elemen yang tertutup oleh dua garis ditambah dengan  $e$ .
- Setelah diperoleh tabel baru kembali ke langkah 4 (Suyitno, 1997).

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 72 & 18 \\ 70 & 61 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 24 & 0 \\ 19 & 24 & 19 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (3.6)$$

Perhatikanlah semua nilai yang tidak terkena garis nilainya akan berkurang 9. Sementara nilai yang tertutup dua garis bertambah 9.

Dari hasil langkah di atas tersebut telah berhasil ditemukan nilai nol sejumlah atau sebanyak sumber daya (bisa karyawan, mesin, alat transportasi

atau sumber daya lainnya) yang juga tercermin dalam jumlah nol setiap barisnya kecuali pada baris 3 mempunyai nilai nol sebanyak dua, sehingga penugasan terbaiknya adalah karyawan A mengerjakan pekerjaan B, karyawan B mengerjakan pekerjaan C, karyawan C mengerjakan pekerjaan A, dan karyawan D mengerjakan pekerjaan D. Dengan cara coba-coba, dapat dicari penetapan optimal dari bilangan-bilangan nol berikut dalam matriks (3.5).

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 72 & 18 \\ 70 & 61 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 24 & 0 \\ 19 & 24 & 19 & 0 \end{bmatrix}$$

Penetapan (a) dari matriks di atas menghasilkan penugasan karyawan terhadap penyelesaian pembuatan seragam di bawah ini:

- Karyawan A menyelesaikan pembuatan celana panjang sebanyak 42 potong.
- Karyawan B menyelesaikan pembuatan rok panjang sebanyak 21 potong.
- Karyawan C menyelesaikan pembuatan kemeja putih lengan panjang sebanyak 82 potong.
- Karyawan D menyelesaikan pembuatan dasi sebanyak 28 potong.

Dengan rincian laba:

Dengan permisalan, kemeja putih lengan panjang ( $x_1$ ), celana panjang ( $x_2$ ), rok panjang ( $x_3$ ), dan dasi ( $x_4$ ).

$$\begin{aligned} \text{Maka } Z &= 3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \\ &= 3000(21) + 5000(28) + 4000(14) + 3000(70) \\ &= 63.000 + 140.000 + 56.000 + 210.000 \\ &= 469.000 \end{aligned}$$

Besarnya laba yang dihasilkan tiap minggunya sebesar Rp 469.000.

Penetapan (b) menghasilkan:

- Karyawan A menyelesaikan pembuatan kemeja putih lengan panjang sebanyak 28 potong.
- Karyawan B menyelesaikan pembuatan rok panjang sebanyak 28 potong.
- Karyawan C menyelesaikan pembuatan dasi sebanyak 82 potong.
- Karyawan D menyelesaikan pembuatan celana panjang sebanyak 28 potong.

Dengan rincian laba:

$$\begin{aligned}
 Z &= 3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \\
 &= 3000(28) + 5000(28) + 4000(28) + 3000(82) \\
 &= 84.000 + 140.000 + 112.000 + 84.000 \\
 &= 420.000
 \end{aligned}$$

Besarnya laba yang dihasilkan tiap minggunya sebesar Rp 420.000.

Penetapan (c) menghasilkan:

- Karyawan A menyelesaikan pembuatan dasi sebanyak 105 potong.
- Karyawan B menyelesaikan pembuatan celana panjang sebanyak 14 potong.
- Karyawan C menyelesaikan pembuatan rok panjang sebanyak 49 potong.
- Karyawan D menyelesaikan pembuatan kemeja putih lengan panjang sebanyak 14 potong.

Dengan rincian laba:

$$\begin{aligned}
 Z &= 3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \\
 &= 3000(14) + 5000(14) + 4000(49) + 3000(105) \\
 &= 42.000 + 70.000 + 196.000 + 315.000
 \end{aligned}$$

$$= 623.000$$

Besarnya laba yang dihasilkan tiap minggunya adalah Rp 623.000.

Penetapan (d) menghasilkan:

- Karyawan A menyelesaikan pembuatan rok panjang sebanyak 42 potong.
- Karyawan B menyelesaikan pembuatan kemeja putih lengan panjang sebanyak 21 potong.
- Karyawan C menyelesaikan pembuatan dasi sebanyak 82 potong.
- Karyawan D menyelesaikan pembuatan celana panjang sebanyak 28 potong.

Dengan rincian laba:

$$\begin{aligned} Z &= 3000x_1 + 5000x_2 + 4000x_3 + 3000x_4 \\ &= 3000(70) + 5000(28) + 4000(42) + 3000(82) \\ &= 210.000 + 140.000 + 168.000 + 246.000 \\ &= 764.000 \end{aligned}$$

Besarnya laba yang dihasilkan tiap minggunya adalah Rp 764.000.

Berdasarkan *trial* di atas, akhirnya diputuskan untuk memakai penetapan (d) yakni setiap minggunya para karyawan dapat menghasilkan kemeja putih lengan panjang sebanyak 70 potong, celana panjang 28 potong, rok panjang 42 potong, dan dasi sebanyak 82 potong. Sehingga jika 400 potong yang dipesan toko, maka:

- a) Penyelesaian pembuatan kemeja putih lengan panjang 70 potong per minggu. Maka untuk menyelesaikan 400 potong, membutuhkan waktu 6 minggu.
- b) Penyelesaian pembuatan celana panjang 28 potong per minggu. Maka untuk menyelesaikan 400 potong, membutuhkan waktu 15 minggu.

- c) Penyelesaian pembuatan rok panjang 42 potong per minggu. Maka untuk menyelesaikan 400 potong, membutuhkan waktu 10 minggu.
- d) Penyelesaian pembuatan dasi 82 potong per minggu. Maka untuk menyelesaikan 400 potong, membutuhkan waktu 5 minggu.

Dengan penerapan di atas, maka akhirnya dapat diketahui kelebihan dan kekurangan dari metode Hongaria. Berikut kelebihan dan kekurangan dari metode Hongaria:

Tabel 4.2. Kelebihan dan Kekurangan Metode Hongaria

No.	Faktor	Keterangan
1.	<i>Input</i>	
	a. Jenis Data	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Jumlah barang dalam satuan potong yang mampu diselesaikan oleh para karyawan</li> <li>- Jumlah karyawan yang menyelesaikan pesanan seragam</li> <li>- Macam-macam barang yang dipesan oleh pelanggan (toko)</li> </ul>
	b. Volume Data	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Volume data yang diperlukan dalam metode ini cenderung luas dan banyak</li> </ul>
	c. Banyak Variabel	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Banyak variabel antara baris dan kolom jumlahnya sama. Namun, ada kondisi tertentu dimana baris dan kolom jumlahnya tidak sama, sering disebut dengan permasalahan tidak seimbang yang harus menambahkan elemen <i>dumping</i></li> </ul>
2.	<i>Proses</i>	
	a. Banyak Variabel	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Panjang iterasi untuk optimalisasi pada metode ini sebanyak tiga iterasi</li> </ul>
	b. Kompleksitas Operasi	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Operasi biner yang kerap digunakan dalam metode ini adalah penjumlahan dan pengurangan. Jika pada masalah maksimasi, maka langkah awal adalah mengurangi elemen-elemen baris dan kolom dengan elemen terbesar. Namun berbeda pada masalah minimasi, langkah awalnya dengan mengurangi elemen baris dan kolom dengan elemen terkecil.</li> </ul>
	c. Lama Proses	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Untuk menemukan solusi yang optimal,</li> </ul>

		proses menggunakan metode ini cenderung lebih singkat dikarenakan operasi biner yang digunakan sangat sederhana, yakni penjumlahan dan pengurangan.
	d. Satuan	- Satuan yang dipakai pada metode ini adalah potong/ <i>person</i> untuk mengetahui kemampuan kinerja karyawan dalam menyelesaikan pembuatan seragam guna memenuhi permintaan pelanggan
3.	<i>Output</i>	
	a. Ketelitian	- Dalam proses penentuan solusi optimal, ketelitian berhubungan erat dengan kompleksnya operasi biner yang dipakai. Metode ini hanya menggunakan operasi biner penjumlahan dan pengurangan. Sehingga dalam upaya optimalisasi, selain ketelitian juga harus cermat agar operasi yang cukup mudah, benar-benar menghasilkan solusi optimal.
	b. Akurasi	- Permasalahan yang akan dijadikan data dalam metode Hongaria dan metode Simpleks merupakan permasalahan linier, dalam arti problematika yang mempunyai dua solusi yang berkesinambungan. Permasalahan yang berbeda sama sekali, namun dalam satu paket masalah. Tingkat keakuratan penyelesaian dengan metode ini cenderung lebih lemah daripada simpleks karena hasil yang akan diperoleh bergantung pada permintaan pasar dan kinerja karyawan yang cenderung pasang surut.
	c. Kemudahan Interpretasi	- Hasil dari optimalisasi dengan metode ini sangat jelas dan mudah diinterpretasikan.

#### 4.2 Optimasi Menggunakan Metode Simpleks

Sebuah toko penyedia seragam sekolah berlangganan pada sebuah perusahaan konveksi. Adapun barang-barang yang dipasok antara lain: kemeja putih lengan panjang, celana panjang, rok panjang, dan dasi, dengan minimal pasokan tiap bulannya masing-masing sejumlah 100 potong. Alasan pihak toko

memilih perusahaan konveksi ini adalah karena kualitas jahitannya yang bagus dan harga yang terjangkau. Sehingga dengan harga yang terjangkau, akan memperlaris pasaran, meningkatkan kuantitas penjualan, dan dapat mengambil keuntungan sebanyak-banyaknya.

Menurut pengamatan, dalam pembuatan seragam terdapat beberapa tahap. Tahap awal yakni pembuatan dan *cutting* pola, sedangkan tahap kedua yakni penjahitan dan *finishing*. Pada proses pembuatan dan *cutting* pola tersedia waktu 325 jam kerja atau  $\pm 14$  hari, sedangkan pada proses penjahitan dan *finishing* tersedia waktu 1150 atau  $\pm 47$  hari.

Untuk menghasilkan 1 dasi diperlukan  $\frac{1}{4}$  jam kerja proses pembuatan dan *cutting* pola, dan  $\frac{1}{2}$  jam kerja proses penjahitan dan *finishing*. Untuk menghasilkan 1 celana panjang diperlukan waktu 1 jam kerja proses pembuatan dan *cutting* pola, dan 4 jam kerja proses penjahitan dan *finishing*. Untuk menghasilkan 1 rok panjang diperlukan waktu 1 jam kerja proses pembuatan dan *cutting* pola, dan 3 jam kerja proses penjahitan dan *finishing*. Untuk menghasilkan 1 kemeja putih lengan panjang diperlukan waktu 1 jam kerja proses pembuatan dan *cutting* pola serta 4 jam kerja proses penjahitan dan *finishing*.

Laba masing-masing barang adalah Rp 3.000, Rp 5.000, Rp 4.000, dan dan Rp 3.000. Akan ditentukan jumlah dasi, celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang agar yang dihasilkan optimal. Persoalan ini dapat dilihat dalam tabel perumusan persoalan berikut:

Tabel 4.3. Waktu Proses Produksi Seragam

Proses	Waktu yang dibutuhkan (jam)				Total waktu tersedia (jam)
	Dasi	Celana Panjang	Rok Panjang	Kemeja Putih Lengan Panjang	
Pembuatan dan <i>cutting</i> pola	¼	1	1	1	325
Penjahitan dan <i>finishing</i>	½	4	3	4	1150
Laba/unit	3.000	5.000	4.000	3.000	

Sumber: Data Proses Produksi CV. Modes Arfam

Untuk mempermudah dalam hal perhitungan metode Simpleks, data yang telah diperoleh diubah ke dalam bentuk umum pemrograman linier. Berikut ini langkah-langkah awal perumusan persoalan Program Linier:

#### 1. Mendefinisikan Variabel Keputusan (*Decision Variable*)

Keputusan yang akan diambil adalah berapakah jumlah dasi, celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang yang akan dihasilkan. Jika dasi disimbolkan  $x_1$ , celana panjang  $x_2$ , rok panjang  $x_3$ , dan kemeja putih lengan panjang  $x_4$ . Maka definisi variabel keputusan permasalahan ini adalah:

$x_1$  : jumlah dasi yang akan dihasilkan (dalam satuan potong)

$x_2$  : jumlah celana panjang yang akan dihasilkan (dalam satuan potong)

$x_3$  : jumlah rok panjang yang akan dihasilkan (dalam satuan potong)

$x_4$  : jumlah kemeja putih lengan panjang yang akan dihasilkan (dalam satuan potong)

#### 2. Merumuskan Fungsi Tujuan

Laba yang diperoleh untuk setiap dasi, celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang adalah Rp 3.000, Rp 5.000, Rp 4.000, dan Rp 3.000. Tujuan perusahaan adalah memaksimalkan laba dari sejumlah dasi,

celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang yang dihasilkan.

Dengan demikian, fungsi tujuan dapat ditulis;

$$\text{Maks: Laba} = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \quad (\text{dalam ribuan})$$

$$Z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \quad (\text{dalam ribuan})$$

dimana:

$Z$  : jumlah keuntungan/laba seluruh produk

$x_1$  : dasi

$x_2$  : celana panjang

$x_3$  : rok panjang

$x_4$  : kemeja putih lengan panjang

### 3. Merumuskan Fungsi Kendala

#### a. Kendala pada Proses Pembuatan dan *Cutting* Pola

Untuk menghasilkan 1 potong dasi diperlukan waktu  $\frac{1}{4}$  jam, untuk menghasilkan 1 potong celana panjang diperlukan waktu 1 jam, untuk menghasilkan 1 potong rok panjang diperlukan waktu 1 jam, dan untuk menghasilkan 1 potong kemeja putih lengan panjang pada proses pembuatan dan *cutting* pola. Waktu yang tersedia adalah 325 jam.

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 325$$

#### b. Kendala pada Proses Penjahitan dan *Finishing*

Untuk menghasilkan 1 potong dasi diperlukan waktu  $\frac{1}{2}$  jam, untuk menghasilkan 1 potong celana panjang diperlukan waktu 4 jam, untuk menghasilkan 1 potong rok panjang diperlukan waktu 3 jam, dan untuk menghasilkan 1 potong kemeja putih lengan panjang diperlukan waktu 4

jam pada proses penjahitan dan *finishing*. Waktu yang tersedia adalah 1150 jam.

$$\frac{1}{2}x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 1150$$

#### 4. Kendala non-positif

Dasi, celana panjang, rok panjang, dan kemeja putih lengan panjang yang dihasilkan tidak memiliki nilai negatif.

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

Metode Simpleks adalah suatu metode yang secara matematis dimulai dari suatu pemecahan dasar yang fisibel (*basic feasible solution*) ke pemecahan dasar fisibel lainnya dan dilakukan secara berulang-ulang (*iterative*) sehingga akhirnya diperoleh suatu pemecahan dasar yang optimum. Berikut langkah-langkah penyelesaiannya:

**Langkah 1** : Mengubah model program linier ke dalam bentuk kanoniknya atau bentuk bakunya, semua fungsi kendala berupa persamaan, dengan cara menambahkan *slack* variabel. Dimana setiap fungsi kendala mempunyai *slack* variabel dan nilai sebelah kanan (*right hand side*) semua kendala tidak boleh negatif.

Pada perusahaan konveksi ini diperoleh:

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 325 \text{ atau } S1 = 325 - \frac{1}{4}x_1 - x_2 - x_3 - x_4$$

$$\frac{1}{2}x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1150 \text{ atau } S2 = 1150 - \frac{1}{2}x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 4x_4$$

S1 adalah variabel *slack* (waktu tak terpakai) dalam pembuatan dan *cutting* pola, sedangkan S2 adalah variabel *slack* (waktu tak terpakai) dalam penjahitan dan *finishing*. Semua variabel yang tidak mempengaruhi kesamaan ditulis dengan koefisien nol. Perlu diketahui bahwasanya, variabel dibagi menjadi dua (2) yaitu *non-basic variables* dan *basic variable*. *Non-basic variables* adalah variabel yang tidak keluar sebagai solusi pada setiap iterasi, nilainya sama dengan nol. Sedangkan *basic variable* adalah variabel yang keluar sebagai solusi pada setiap iterasi. Pada bentuk baku di atas *variable basic*nya adalah 325 dan 1150.

Dengan kata lain, bentuk baku PL adalah:

$$Z - 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 - S1 - S2 = 0 \rightarrow \text{persamaan tujuan}$$

persamaan kendala:

$$\frac{1}{4}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + S1 = 325$$

$$\frac{1}{4}x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + S2 = 1150$$

## Langkah 2 : Membuat Tabel Simpleks Awal

Secara rinci, langkah-langkah perhitungan algoritma Simpleks, yang meliputi penentuan kolom kunci dan baris kunci adalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan bentuk baku, ditentukan solusi awal (*initial basic feasible solution*) dalam menetapkan  $m - n$  variabel non basis sama dengan nol.
2. Pilih sebuah *entering variable* di antara yang sedang menjadi variabel non-basis, yang jika dinaikkan di atas nol, dapat memperbaiki nilai fungsi tujuan. Jika tidak ada, berhenti, berarti solusi sudah optimal. Jika tidak, melangkah ke langkah 3.

3. Pilih sebuah *leaving variable* di antara yang sedang menjadi variabel basis yang harus menjadi non-basis (nilainya menjadi nol) ketika *entering variable* menjadi variabel basis.
4. Menentukan solusi yang baru dengan membuat *entering variable* dan *leaving variable* menjadi *variable non-basis*. Kembali ke langkah 2.

Melihat kembali langkah nomor 1 di atas, solusi awal ditentukan dari persamaan kendala dengan menetapkan 4 variabel sama dengan nol, yang akan memberikan solusi yang unik dan layak. Dengan menetapkan  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ , diperoleh  $S1 = 325$  dan  $S2 = 1150$ . Pada saat ini  $Z = 0$ , didapat merangkum informasi di atas ke dalam bentuk tabel simpleks awal seperti berikut.

Dari bentuk baku di atas, maka akan dibuat tabel simpleks awal sebagai berikut:

Tabel 4.4. Simpleks Awal

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	-3	-5	-4	-3	0	0	0
S1	0	$\frac{1}{4}$	1	1	1	1	0	325
S2	0	$\frac{1}{2}$	4	3	4	0	1	1150

Informasi pada tabel dibaca seperti berikut:

- ❖ Kolom basis menunjukkan variabel yang sedang menjadi basis yaitu S1 dan S2 yang nilainya diberikan pada kolom solusi (NK).
- ❖ Secara tidak langsung mengatakan variabel non basis  $x_1, x_2, x_3$  dan  $x_4$  (yang tidak ditunjukkan pada kolom basis) sama dengan nol.
- ❖ Nilai fungsi tujuan adalah  $Z - ((3 \times 0) + (5 \times 0) + (4 \times 0) + (3 \times 0) + (0 \times 325) + (0 \times 1150)) = 0$  seperti terlihat pada kolom NK.

Solusi optimum yang akan diperoleh dapat diketahui dengan persamaan  $Z$ , terlihat bahwa variabel non-basis yaitu  $x_1, x_2, x_3$  dan  $x_4$ , semuanya mempunyai koefisien negatif, yang berarti mempunyai koefisien negatif pada fungsi tujuan yang asli. Karena tujuan maksimasi, maka nilai  $Z$  dapat diperbaiki dengan meningkatkan  $x_1, x_2, x_3$  dan  $x_4$  menjadi lebih besar dari nol. Yang diutamakan untuk dipilih adalah variabel yang memiliki nilai negatif terbesar. Ringkasnya, *optimally condition* metode Simpleks menyatakan bahwa dalam kasus maksimasi, jika variabel non-basis memiliki koefisien non negatif pada persamaan  $Z$ , maka solusi optimum telah tercapai. Jika tidak, variabel non-basis dengan koefisien negatif terbesar dipilih sebagai *entering variable*.

Penerapan *optimally condition* pada tabel simpleks di atas adalah dengan memilih  $x_2$  sebagai *entering variable*. Kemudian *leaving variable* harus salah satu dari variabel yang menyatakan bahwa untuk masalah maksimasi maupun minimasi, *leaving variable* adalah basis yang memiliki rasio terkecil antara sisi kanan (NK) persamaan kendala dengan koefisien bersangkutan yang positif pada *entering variable*. Rasio dalam tabel simpleks dapat dicari dengan cara:

- a. Mencoret semua elemen pada persamaan kendala di bawah *entering variable*.
- b. *Leaving variable* adalah variabel basis yang memiliki rasio terkecil.
- c. Kolom pada *entering variable* dinamakan *entering column* dan variabel basis yang berhubungan dengan *leaving variable* dinamakan *pivot equation*.
- d. Elemen pada perpotongan *entering column* dengan *pivot equation* dinamakan *pivot element*.

Tabel 4.5. Simpleks Awal dengan Rasio

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK	Rasio
Z	1	-3	-5	-4	-3	0	0	0	
S1	0	$\frac{1}{4}$	1	1	1	1	0	325	$325 \div 1 = 325$
S2	0	$\frac{1}{2}$	4	3	4	0	1	1150	$1150 \div 4 = 287,5$

**Langkah 3** : Penentuan baris dan kolom kunci sebagai dasar iterasi

- ❖ Kolom kunci ditentukan oleh nilai baris Z negatif terbesar, yaitu pada kolom  $x_2$ .
- ❖ Baris kunci ditentukan dari nilai rasio terkecil, dimana nilai rasio didapat dari  $NK \div$  kolom kunci.

Tabel 4.6. Simpleks Awal dengan kolom kunci dan baris kunci

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK	Rasio
Z	1	-3	-5	-4	-3	0	0	0	
S1	0	$\frac{1}{4}$	1	1	1	1	0	325	$325 \div 1 = 325$
S2	0	$\frac{1}{2}$	4	3	4	0	1	1150	$1150 \div 4 = 287,5$

**Langkah 4** : Iterasi

Untuk melakukan iterasi terlebih dahulu harus ditentukan kolom kunci, baris kunci sehingga didapatkan elemen pivot dan persamaan pivot. Kolom  $x_2$  adalah entering column atau disebut kolom kunci, persamaan S2 adalah *pivot equation*, dan angka 4 adalah elemen pivot. Jika pada iterasi tertentu masih belum optimal, maka untuk melakukan iterasi selanjutnya harus ditentukan persamaan pivot baru. Persamaan pivot baru (*new pivot equation*) ditentukan dengan menerapkan metode Gauss Jordan melalui perhitungan berikut:

- a. Persamaan pivot baru = persamaan pivot lama  $\div$  elemen pivot.
- b. Untuk semua persamaan yang lain termasuk Z.

Persamaan baru = persamaan lama  $\div$  (koefisien *entering column*/kolom kunci  $\times$  persamaan pivot baru)

Persamaan pivot menghasilkan elemen pivot (*pivot element*) sama dengan 1 pada persamaan pivot yang baru, seperti ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 4.7. Persamaan Pivot Iterasi Pertama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	-3	-5	-4	-3	0	0	0
S1	0	$\frac{1}{4}$	1	1	1	1	0	325
S2	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	287,5

Perhatikan bahwa kolom solusi menghasilkan nilai baru,  $x_2 = 287,5$  yang sama dengan rasio minimum pada *feasibility condition*. Tabel solusi baru yang diperbaiki dapat dibuat dengan melakukan jenis kedua metode Gauss Jordan, kecuali baris  $x_2$  yang telah menjadi persamaan pivot baru (*new pivot equation*).

Untuk basis Z:

- $1 - \frac{(0 \times -5)}{1} = 1 - \frac{0}{1} = 1$
- $-3 - \frac{(\frac{1}{8} \times -5)}{1} = 13 - \frac{-5}{1} = 13 + \frac{5}{8} = -\frac{24}{8} + \frac{5}{8} = -\frac{19}{8}$
- $-5 - \frac{(1 \times -5)}{1} = -5 - (-5) = 0$
- $-4 - \frac{(\frac{3}{4} \times -5)}{1} = -4 - \left(\frac{-15}{1}\right) = -4 - \left(-\frac{15}{4}\right) = -4 + \frac{15}{4} = -\frac{1}{4}$
- $-3 - \frac{(1 \times -5)}{1} = -3 - \frac{-5}{1} = -3 + 5 = 2$
- $0 - \frac{(0 \times -5)}{1} = 0 - 0 = 0$

$$g. \quad 0 - \frac{\left(\frac{1}{4} \times -5\right)}{1} = 0 - \frac{-\frac{5}{4}}{1} = 0 - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$h. \quad 0 - \frac{(287,5 \times -5)}{1} = 1437,5$$

Untuk basis S1:

$$a. \quad 0 - \frac{(0 - 1)}{1} = 0 - 0 = 0$$

$$b. \quad \frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{1}{8} \times 1\right)}{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$c. \quad 1 - \frac{(1 \times 1)}{1} = 1 - 1 = 0$$

$$d. \quad 1 - \frac{\left(\frac{3}{4} \times 1\right)}{1} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$e. \quad 1 - \frac{(1 \times 1)}{1} = 1 - 1 = 0$$

$$f. \quad 1 - \frac{(0 \times 1)}{1} = 1 - 0 = 1$$

$$g. \quad 0 - \frac{\left(\frac{1}{4} \times 1\right)}{1} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$h. \quad 325 - \frac{(287,5 \times 1)}{1} = 325 - 287,5 = 37,5$$

Tabel iterasi pertama dengan persamaan pivot lama adalah sebagai berikut:

Tabel 4.8. Simpleks Iterasi Pertama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	$-\frac{19}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	2	0	$\frac{5}{4}$	1437,5
S1	0	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	37,5
$x_1$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	287,5

Solusi yang baru memberikan nilai  $x_1 = 287,5$  dan  $x_2 = 0$ . Nilai Z naik dari 0 menjadi 1437,5.

Sebelum melanjutkan iterasi kedua, terlebih dahulu dibentuk tabel iterasi kedua dengan persamaan pivot baru.

Tabel 4.9. Simpleks Iterasi Pertama dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	$-\frac{19}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$	2	0	$\frac{5}{4}$	1437,5
S1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	300
$x_1$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	287,5

Untuk basis  $Z$ :

$$a. \quad 1 - \frac{(0 \times -\frac{19}{8})}{1} = 1$$

$$b. \quad -\frac{19}{8} - \frac{(1 \times -\frac{19}{8})}{1} = -\frac{19}{8} - \left(-\frac{19}{8}\right) = 0$$

$$c. \quad 0 - \frac{(0 \times -\frac{19}{8})}{1} = 0$$

$$d. \quad -\frac{1}{4} - \frac{(\frac{1}{2} \times -\frac{19}{8})}{1} = -\frac{1}{4} + \frac{(\frac{19}{16})}{1} = -\frac{4}{16} + \frac{19}{16} = \frac{15}{16}$$

$$e. \quad 2 - \frac{(0 \times -\frac{19}{8})}{1} = 2$$

$$f. \quad 0 - \frac{(\frac{1}{8} \times -\frac{19}{8})}{1} = -\frac{19}{64}$$

$$g. \quad \frac{5}{4} - \frac{(-\frac{1}{2} \times -\frac{19}{8})}{1} = \frac{5}{4} - \frac{19}{6} = \frac{20}{16} - \frac{19}{16} = \frac{1}{16}$$

$$h. \quad 1437,5 - \frac{(300 \times -\frac{19}{8})}{1} = 1437,5 - (-712,5) = 2150$$

Untuk basis  $x_1$ :

$$a. \quad 0 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 0$$

$$b. \frac{1}{8} - \frac{(1 \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

$$c. 1 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 1$$

$$d. \frac{3}{4} - \frac{(\frac{1}{2} \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{16} = \frac{12}{16} - \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$$

$$e. 1 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 1$$

$$f. 0 - \frac{(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8})}{1} = -\frac{1}{64}$$

$$g. \frac{1}{4} - \frac{(-\frac{1}{2} \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{1}{4} - (-16) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

$$h. 287,5 - \frac{(300 \times \frac{1}{8})}{1} = 287,5 - 37,5 = 250$$

Sehingga diperoleh tabel simpleks iterasi 2 dengan persamaan pivot:

Tabel 4.10. Simpleks Iterasi ke-2 dengan Persamaan Pivot Lama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	0	$\frac{15}{16}$	2	$-\frac{19}{64}$	$\frac{1}{16}$	2150
S1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	300
$x_1$	0	0	1	$\frac{11}{16}$	1	$-\frac{1}{64}$	$\frac{5}{16}$	250

Berikut tabel simpleks iterasi dengan persamaan pivot baru:

Tabel 4.11. Simpleks Iterasi ke-2 dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	0	$\frac{15}{16}$	2	$-\frac{19}{64}$	$\frac{1}{16}$	2150
S1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	300
$x_1$	0	0	-64	-44	-64	1	-20	-16000

Untuk basis Z:

$$\text{a. } 1 - \frac{(0 \times -\frac{19}{64})}{1} = 1$$

$$\text{b. } 0 - \frac{(0 \times -\frac{19}{64})}{1} = 0$$

$$\text{c. } 0 - \frac{(-64 \times -\frac{19}{64})}{1} = -19$$

$$\text{d. } \frac{15}{16} - \frac{(-44 \times -\frac{19}{64})}{1} = \frac{15}{16} - \frac{836}{64} = \frac{60 - 836}{64} = -\frac{776}{64} = -\frac{194}{16}$$

$$\text{e. } 2 - \frac{(-64 \times -\frac{19}{64})}{1} = 2 - 19 = -17$$

$$\text{f. } -\frac{19}{64} - \frac{(1 \times -\frac{19}{64})}{1} = -\frac{19}{64} - \left(-\frac{19}{64}\right) = 0$$

$$\text{g. } \frac{1}{16} - \frac{(-20 - \frac{19}{64})}{1} = \frac{1}{16} - \left(\frac{380}{64}\right) = \frac{4}{64} - \frac{380}{64} = -\frac{376}{64} = -\frac{94}{16}$$

$$\text{h. } 2150 - \frac{(-16000 \times -\frac{19}{64})}{1} = 2150 - 4750 = -2600$$

Untuk basis S1:

$$\text{a. } 0 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 0$$

$$\text{b. } 1 - \frac{(0 \times \frac{1}{8})}{1} = 1$$

$$\text{c. } 0 - \frac{(-64 \times \frac{1}{8})}{1} = 8$$

$$\text{d. } \frac{1}{2} - \frac{(-44 \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{11}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\text{e. } 0 - \frac{(-64 \times \frac{1}{8})}{1} = 8$$

$$\text{f. } \frac{1}{8} - \frac{(1 \times \frac{1}{8})}{1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\text{g. } -\frac{1}{2} - \frac{-20 \times \frac{1}{8}}{1} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{h. } 300 - \frac{(-16000 \times \frac{1}{8})}{1} = 300 + 2000 = 2300$$

Sehingga diperoleh tabel simpleks iterasi 3 dengan persamaan pivot:

Tabel 4.12. Simpleks Iterasi ke-3 dengan Persamaan Pivot Lama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	-19	$-\frac{194}{16}$	-17	0	$-\frac{94}{16}$	-2600
S1	0	1	8	6	8	0	2	2300
$x_1$	0	0	-64	-44	-64	1	-20	-16000

Berikut tabel simpleks iterasi 3 dengan persamaan pivot baru:

Tabel 4.13. Simpleks Iterasi ke-3 dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	-19	$-\frac{194}{16}$	-17	0	$-\frac{94}{16}$	-2600
S1	0	1	8	6	8	0	2	2300
$x_1$	0	0	$-\frac{16}{11}$	1	$-\frac{16}{11}$	$-\frac{1}{44}$	$-\frac{5}{11}$	363,63

Untuk basis Z:

$$\text{a. } 1 - \frac{(0 \times -\frac{194}{16})}{1} = 1$$

$$\text{b. } 0 - \frac{(0 \times -\frac{194}{16})}{1} = 0$$

$$\text{c. } -19 - \frac{(-\frac{16}{11} \times -\frac{194}{16})}{1} = -19 - \frac{194}{11} = \frac{-209 - 194}{11} = -\frac{403}{11}$$

$$d. -\frac{194}{16} - \frac{\left(1 \times -\frac{194}{16}\right)}{1} = -\frac{194}{16} + \frac{194}{16} = 0$$

$$e. -17 - \frac{\left(-\frac{16}{11} \times -\frac{194}{16}\right)}{1} = -17 - \frac{194}{16} = \frac{-187 - 194}{11} = -\frac{381}{11}$$

$$f. 0 - \frac{\left(-\frac{1}{44} \times -\frac{194}{16}\right)}{1} = -\frac{194}{704} = -\frac{97}{352}$$

$$g. -\frac{194}{16} - \frac{-\frac{5}{11} \times -\frac{194}{16}}{1} = -\frac{194}{16} - \frac{-\frac{5}{11} \times -\frac{97}{8}}{1} = -\frac{194}{16} - \frac{485}{88} = \frac{8272 - 7760}{1408}$$

$$= \frac{512}{1408} = 128 = 352 = \frac{32}{88} = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$$

$$h. -2600 - \frac{\left(363,63 \times -\frac{194}{16}\right)}{1} = -2600 - \frac{705444,22}{16} = -2600 - 4409,01$$

$$= -7009,01$$

Untuk basis S1:

$$a. 0 - \frac{(0 \times 6)}{1} = 0$$

$$b. 1 - \frac{(0 \times 6)}{1} = 1$$

$$c. 8 - \frac{\left(-\frac{16}{11} \times 6\right)}{1} = 8 - \left(-\frac{96}{11}\right) = \frac{88 + 96}{11} = \frac{184}{11}$$

$$d. 6 - \frac{(1 \times 6)}{1} = 0$$

$$e. 8 - \frac{\left(-\frac{16}{11} \times 6\right)}{1} = -\frac{184}{11}$$

$$f. 0 - \frac{\left(-\frac{1}{44} \times 6\right)}{1} = \frac{6}{44} = \frac{3}{22}$$

$$g. 2 - \frac{\left(-\frac{5}{11} \times 6\right)}{1} = 2 - \left(-\frac{30}{11}\right) = \frac{22 + 30}{11} = \frac{52}{11}$$

$$h. 2300 - \frac{(363,63 \times 6)}{1} = 2300 - 2181,78 = 118,22$$

Sehingga diperoleh tabel simpleks iterasi 4 dengan persamaan pivot:

Tabel 4.14. Simpleks Iterasi ke-4 dengan Persamaan Pivot Lama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	1	0	$-\frac{403}{11}$	0	$-\frac{381}{11}$	$-\frac{97}{352}$	$\frac{4}{11}$	-7009,01
S1	0	1	$\frac{184}{11}$	0	$-\frac{184}{11}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{52}{11}$	118,22
$x_1$	0	0	$-\frac{16}{11}$	1	$-\frac{16}{11}$	$-\frac{1}{44}$	$-\frac{5}{11}$	363,63

Berikut tabel simpleks iterasi 4 dengan persamaan pivot baru:

Tabel 4.15. Simpleks Iterasi ke-4 dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	$-\frac{403}{11}$	0	1	0	$\frac{381}{403}$	$\frac{97}{12896}$	$-\frac{4}{403}$	191,14
S1	0	1	$\frac{184}{11}$	0	$-\frac{184}{11}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{52}{11}$	118,22
$x_1$	0	0	$-\frac{16}{11}$	1	$-\frac{16}{11}$	$-\frac{1}{44}$	$-\frac{5}{11}$	363,63

Untuk basis S1:

$$a. \quad 0 - \frac{\left(-\frac{403}{11} \times \frac{184}{11}\right)}{1} = -\left(-\frac{74152}{121}\right) = \frac{74152}{121}$$

$$b. \quad 1 - \frac{\left(0 \times \frac{184}{11}\right)}{1} = 1$$

$$c. \quad \frac{184}{11} - \frac{\left(-\frac{403}{11} \times \frac{184}{11}\right)}{1} = \frac{184}{11} - \left(-\frac{74152}{121}\right) = \frac{2024}{121} - \left(-\frac{74152}{121}\right) = \frac{76176}{121}$$

$$d. \quad 0 - \frac{\left(0 \times \frac{184}{11}\right)}{1} = 0$$

$$e. \quad \frac{-184}{11} - \frac{\left(-\frac{381}{403} \times \frac{184}{11}\right)}{1} = \frac{-184}{11} - \left(\frac{70104}{4433}\right) = \frac{-74152 - 70104}{4433} = \frac{-144256}{4433}$$

$$f. \quad \frac{3}{22} - \frac{\left(-\frac{97}{352} \times \frac{184}{11}\right)}{1} = \frac{3}{22} - \frac{-\frac{97}{88} \times \frac{46}{11}}{1} = \frac{3}{22} - \left(-\frac{97}{44} \times \frac{23}{11}\right) = \frac{3}{22} - \left(-\frac{2231}{484}\right)$$

$$= \frac{3}{22} + \frac{2231}{484} = \frac{66 + 2231}{484} = \frac{2297}{484}$$

$$\begin{aligned} \text{g. } \frac{52}{11} - \frac{-\frac{4}{403} \times \frac{184}{11}}{1} &= \frac{52}{11} - \left(-\frac{736}{4433}\right) = \frac{52}{11} + \frac{736}{4433} = \frac{20956}{4433} + \frac{736}{4433} = \frac{21692}{4433} \\ &= \frac{1972}{403} \end{aligned}$$

$$\text{h. } 118,22 - \frac{191,14 \times \frac{184}{11}}{1} = 118,22 - (3197,25) = -3079,03$$

Untuk basis  $x_1$ :

$$\text{a. } 0 - \frac{\left(-\frac{403}{11} \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = -\left(\frac{6448}{121}\right)$$

$$\text{b. } 0 - \frac{\left(0 \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = 0$$

$$\text{c. } -\frac{6}{11} - \frac{\left(1 \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = -\frac{6}{11} + \frac{6}{11} = 0$$

$$\text{d. } 1 - \frac{\left(0 \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = 1$$

$$\text{e. } -\frac{6}{11} - \frac{\left(\frac{381}{403} \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = -\frac{6}{11} - \left(-\frac{696}{4433}\right) = \frac{-6448 + 6096}{4433} = -\frac{352}{4433} = -\frac{32}{403}$$

$$\begin{aligned} \text{f. } -\frac{1}{44} - \frac{\left(\frac{97}{12896} \times -\frac{6}{11}\right)}{1} &= -\frac{1}{44} - \left(-\frac{1552}{141856}\right) = -\frac{3224}{141856} + \frac{1552}{141856} = -\frac{1672}{141856} \\ &= -\frac{209}{17732} = \frac{19}{1612} \end{aligned}$$

$$\text{g. } -\frac{5}{11} - \frac{\left(-\frac{4}{403} \times -\frac{6}{11}\right)}{1} = -\frac{5}{11} - \left(\frac{64}{4433}\right) = \frac{-2015 - 64}{4433} = -\frac{2079}{4433} = \frac{189}{403}$$

$$\text{h. } 363,63 - \frac{\left(191,14 \times -\frac{16}{11}\right)}{1} = 363,63 + 278,02 = 641,65$$

Sehingga diperoleh tabel simpleks iterasi 5 dengan persamaan pivot:

Tabel 4.16. Simpleks Iterasi ke-5 dengan Persamaan Pivot Lama

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	$-\frac{403}{11}$	0	1	0	$\frac{381}{403}$	$\frac{97}{12896}$	$-\frac{4}{403}$	191,14
S1	$\frac{74152}{121}$	1	$\frac{76176}{121}$	0	$-\frac{144256}{4433}$	$\frac{2297}{484}$	$\frac{1972}{403}$	-3079,03
$x_1$	$-\frac{6448}{121}$	0	0	1	$-\frac{32}{403}$	$\frac{19}{1612}$	$\frac{189}{403}$	641,65

Berikut tabel simpleks iterasi 5 dengan persamaan pivot baru:

Tabel 4.17. Simpleks Iterasi ke-5 dengan Persamaan Pivot Baru

Basis	Z	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	S1	S2	NK
Z	$-\frac{403}{11}$	0	1	0	$\frac{381}{403}$	$\frac{97}{12896}$	$-\frac{4}{403}$	191,14
S1	1	$\frac{121}{74152}$	$\frac{9522}{9269}$	0	$-\frac{198352}{3735407}$	$\frac{25267}{3262688}$	$\frac{238612}{2988}$	-5,02
$x_1$	$-\frac{6448}{121}$	0	0	1	$-\frac{32}{403}$	$\frac{19}{1612}$	$\frac{189}{403}$	641,65

Proses ini berlanjut hingga pada basis Z tidak ada yang bernilai negatif. Perlu diketahui bahwa terdapat beberapa kasus yang dijumpai pada penerapan metode simpleks, yaitu: degenerasi, optimal alternatif, solusi tanpa batas, dan tak ada solusi.

Degenerasi terjadi apabila pada tabel simpleks terdapat satu atau lebih *basic variable* yang bernilai nol. Hal ini mengakibatkan iterasi yang dilakukan selanjutnya dapat menjadi suatu *loop* yang akan kembali pada bentuk sebelumnya. Kejadian ini dinamakan *cycling/circling*. Namun yang menjadi pertanyaan dari kasus ini selanjutnya adalah mengapa tidak berhenti melakukan perhitungan pada saat iterasi simpleks menghasilkan suatu solusi yang *degenerate*? Jawabannya ialah karena tidak semua persoalan menghasilkan solusi *degenerate* yang tetap. Artinya, ada persoalan yang pada suatu saat bersifat *degenerate*, tetapi pada iterasi

berikutnya *degenerate* ini menghilang. Hal ini biasanya dinamakan *degenerate temporer*.

Apabila fungsi tujuan diasumsikan mencapai nilai yang sama untuk lebih dari satu titik solusi maka kasus ini disebut optimal alternatif karena dihadapkan pada pilihan lebih dari satu pasangan peubah yang memberi nilai optimal yang sama. Pada sejumlah model PL nilai peubah dapat saja meningkat tak terbatas tanpa mengganggu suatu pembatas linier. Hal ini berarti ruang solusi terbuka atau tak terbatas. Akibatnya nilai fungsi tujuannya juga dapat terus meningkat (maksimisasi) atau terus menurun (minimisasi). Di kondisi lain, juga didapati suatu permasalahan tidak ditemukan adanya solusi.

Hal ini menunjukkan bahwa, dalam suatu upaya tidak selamanya berhasil. Ada kalanya suatu upaya yang dilakukan manusia itu membuahkan hasil, ada kalanya juga membuahkan hasil tetapi dengan proses yang sangat rumit, lama dan berkali-kali mengalami kegagalan. Terkadang pada kondisi tertentu justru mengalami kegagalan, ibarat masalah tanpa solusi sama sekali. Namun, terkadang juga terdapat solusi yang banyak sekali, sehingga di sinilah manusia dituntut untuk mempergunakan akalanya agar dapat memilih solusi paling tepat untuk permasalahan yang tengah dihadapinya. Sebagaimana termaktub dalam al-Quran surat al-Ghasyiyah/88:17-20:

أَفَلَا يَنْظُرُونَ إِلَى الْإِنبِلِ كَيْفَ خُلِقَتْ ﴿٧﴾ وَإِلَى السَّمَاءِ كَيْفَ رُفِعَتْ ﴿٨﴾ وَإِلَى الْجِبَالِ كَيْفَ نُصِبَتْ ﴿٩﴾ وَإِلَى الْأَرْضِ كَيْفَ سُطِحَتْ ﴿١٠﴾

“Maka apakah mereka tidak memperhatikan unta bagaimana dia diciptakan, dan langit, bagaimana ia ditinggikan? Dan gunung-gunung bagaimana ia ditegakkan? Dan bumi bagaimana ia dihamparkan?” (QS. al-Ghasyiyah/88:17-20).

Dalam ayat tersebut tersirat makna bahwa Allah mengutus manusia untuk mempergunakan akalNya agar setiap problematika kehidupan di dunia ini dapat diatasi dengan baik dan dengan solusi yang bagus. Dengan kompleksnya problematika kehidupan yang tentunya telah disesuaikan dengan kadar kemampuan hamba-Nya, Allah telah menyertakan kemudahan dalam kesulitan dalam setiap upaya hamba-Nya dalam mencari solusi dan meraih ridho-Nya. Secara lugas, Allah menjelaskannya dalam surat al-Insyiroh/94:5-6 sebagai berikut:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

*“Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. al-Insyiroh/94:5-6).*

Penyebutan kalimat sesudah kesulitan itu ada kemudahan diulangiNya dua kali, sebagai pertanda bahwa rahmat Allah bagi seluruh alam atas segala problematika kehidupan yang telah dibentangkan di bumi ini adalah sebagai fasilitas agar manusia menjadi lebih dekat dengan Tuhannya. Allah telah menjelaskan bahwasanya setiap permasalahan tentu ada solusi. Jika pun tanpa solusi, pasti Allah telah menyelipkan hikmah di setiap kejadian yang dialami oleh manusia. Sehingga dengan rahmat itulah, Allah memberikan kesempatan kepada manusia untuk menggunakan akalNya guna mencari solusi yang tepat atas segala problematika kehidupan yang tengah dialaminya agar dapat lebih mendekatkan diri kepada Allah dan meraih ridho-Nya.

Sehingga dengan upaya optimasi di atas, maka dapat diketahui pula kelebihan dan kekurangan dari metode Simpleks, sebagai berikut:

Tabel 4.18. Kelebihan dan Kekurangan Metode Simpleks

No.	Faktor	Keterangan
1.	<i>Input</i>	
	a. Jenis Data	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Jumlah barang yang akan diselesaikan oleh para karyawan.</li> <li>- Waktu penyelesaian pembuatan seragam tiap potong.</li> <li>- Tahapan penyelesaian pembuatan seragam.</li> <li>- Laba penjualan setiap barang.</li> <li>- Total waktu yang tersedia untuk menyelesaikan seluruh pesanan seragam.</li> </ul>
	b. Volume Data	- Volume data yang digunakan cenderung lebih sedikit
	c. Banyak Variabel	- Banyaknya variabel dalam metode ini berjumlah mulai dari dua hingga banyak variabel.
2.	<i>Proses</i>	
	a. Panjang Iterasi	- Panjang iterasi pada metode ini sebanyak 2 iterasi.
	b. Kompleksitas Operasi	- Pada metode ini, operasi biner yang digunakan meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Sehingga penggunaan operasi yang cukup kompleks adalah pada metode ini.
	c. Lama Proses	- Solusi optimal yang diproses menggunakan metode ini lebih lama. Namun, lama dan singkatnya proses adalah bergantung pada data itu sendiri dan kompleksnya operasi yang dipakai dalam metode.
	d. Satuan	- Data pada metode ini menggunakan satuan potong/day untuk mengetahui kemampuan produksi seragam oleh karyawan dengan tujuan untuk menghasilkan hasil produksi yang berkualitas dan tepat waktu ( <i>on time</i> ).
3.	<i>Output</i>	
	a. Ketelitian	- Dalam optimalisasi dengan metode ini, diperlukan ketelitian yang cukup baik dikarenakan operasi biner yang dipakai meliputi pengurangan, perkalian, dan pembagian serta rumitnya kriteria di setiap putaran iterasi.
	b. Akurasi	- Untuk segi akurasi, metode ini lebih

		unggul dikarenakan optimalisasi dilakukan pada data proses perencanaan, dengan harapan perencanaan dan pelaksanaan produksi berjalan optimal dan seimbang.
	c. Kemudahan Interpretasi	- Pada metode ini, karena prosesnya yang rumit dan banyaknya variabel yang dipakai, sehingga rumit pula dalam penginterpretasiannya dibanding dengan metode Hongaria.





## **BAB V**

### **PENUTUP**

#### **5.1 Kesimpulan**

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya yakni tentang penerapan metode Hongaria dan metode Simpleks, akhirnya dapat disimpulkan bahwasanya, letak perbedaan kedua metode ini meliputi banyak hal, mulai dari *input*, proses hingga *outputnya*. Pada metode Hongaria, penerapan metodenya cenderung lebih sederhana sedangkan pada metode Simpleks lebih rumit.

Sehingga dengan upaya ini manusia dituntut untuk mempergunakan akalunya guna mengetahui solusi yang bagus untuk mengoptimalkan tujuan yang ingin dicapai. Sebagaimana termaktub dalam al-Quran Surat al-Baqarah/2:286 dan al-Ghasiyah/88:17-20.

#### **5.2 Saran**

Rumusan masalah dalam skripsi ini sangatlah sederhana. Penulis menyarankan, jika di kemudian hari terdapat penulis lain yang juga ingin menerapkan dua metode ini, carilah ide kreatif untuk mendapatkan solusi penggabungan atau modifikasi guna mendapatkan solusi alternatif untuk hasil optimal yang lebih akurat dan cepat.



**DAFTAR PUSTAKA**

- Alpha, C. 1995. *Dasar-dasar Matematika Ekonomi*. Jakarta: Erlangga.
- Alwi, H. 2007. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. Jakarta: Balai Pustaka.
- Aminuddin. 2005. *Prinsip-prinsip Riset Operasi*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H dan Rorres, C. 1988a. *Penerapan Aljabar Linier*. Jakarta: Erlangga.
- Anton, H dan Rorres, C. 1988b. *Aljabar Linier Elementer Edisi 8*. Jakarta: Erlangga.
- Arifin, Z. 1994. *Matematika Ekonomi 2*. Malang: Penerbit IKIP Malang.
- Bernadeta, T.N. 2011. *Analisis Penempatan Tenaga Kerja pada Raja Bantal dengan Metode Hungaria*. Universitas Gunadarma.
- Bungin, B. 2001. *Metodologi Penelitian Kualitatif*. Jakarta: PT. Grafindo Persada.
- Clark, F.J. 1991. *Matematika untuk Pemrosesan Data Edisi Kedua*. Jakarta: Erlangga.
- Churchman, C.W. 1966. *Introduction to Operation Research*. New York: John Wiley and Sons.
- Dimiyati, T.T. dan Dimiyati A. 1994. *Operartion Research, Model-model Pengambilan Keputusan*. Bandung: Sinar Baru Algesindo.
- Kakiay. 2010. *Dasar Teori Antrian untuk Kehidupan Nyata*. Yogyakarta: Andi.
- Kountur, R. 2004. *Metode Penelitian untuk Penulisan Skripsi dan Tesis*. Jakarta: PPM.
- Kusumastanto, T. 2002. *Metode Kuantitatif Untuk Bisnis. Diktat Kuliah*. Bogor: Fakultas Perikanan dan Ilmu Kelautan, Institut Pertanian Bogor.

- Muzakki, M. 2012. *Optimalisasi Keuntungan pada Perusahaan Keripik Balado Mahkota dengan Metode Simpleks*. Padang: Universitas Andalas Padang.
- Napitululu, J. 1998. *Operation Research*. Malang: ITN Malang.
- Noer, B.A. 2010. *Belajar Mudah Riset Operasional*. Yogyakarta: Andi Offset.
- Nurmatias. 2006. *Metode Penugasan*. Jakarta: Universitas Mercu Buana.
- Siagian, P. 1987. *Penelitian Operasional Teori dan Praktek*. Jakarta: UI. Press.
- Siringoringo, H. 2005. *Seri Teknik Riset Operasional. Pemrograman Linear*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Subagyo, dkk. 2000. *Dasar-dasar Operation Research*. Yogyakarta: PT. BPFE.
- Subagyo, P. 1986. *Forecasting Konsep dan Aplikasi*. Yogyakarta: BPFE UGM.
- Sungkowo, T. dan Andi W. 2005. Skripsi Jurusan Matematika “*Metode Hongaria dan Aplikasinya pada Kasus Minimasi*”. Semarang: Universitas Negeri Semarang.
- Supranto. 1987. *Matematika untuk Ekonomi & Bisnis Edisi Pertama*. Bogor: Ghalia Indonesia.
- Supranto. 2006. *Matematika untuk Ekonomi & Bisnis Edisi Kedua*. Bogor: Ghalia Indonesia.
- Susanto, A. 2006. *Penggunaan Algoritma Hongaria dalam Menyelesaikan Persoalan Matriks Berbobot*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Sutondo, N. 2012. *Riset Operasi Metode Penugasan Hungarian*. Surakarta: Sekolah Tinggi Manajemen Informatika dan Komputer.
- Suyitno, H. 1997. *Langkah-langkah Penyelesaian Metode Hongaria*. Semarang: Unnes Sekaran Gunungpati Semarang.

Syaripuddin. 2012. *Penyelesaian Masalah Penugasan Menggunakan Metode Hungaria*. Samarinda: Universitas Mulawarman.

Taha, H.A. 2007. *Riset Operasi, Suatu Pengantar Edisi Kelima: Jilid I*. Terj. Dari *Operation Research, an introduction*, 5<sup>th</sup>Ed, oleh Wirajaya. Jakarta: Binarupa Aksara.





Lampiran 1: Tabel Perbandingan Metode Hongaria dan Metode Simpleks

No.	Keterangan	Hongaria	Simpleks
1.	<i>Input</i>		
	a. Jenis Data	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Jumlah barang dalam satuan potong yang mampu diselesaikan oleh para karyawan.</li> <li>- Jumlah karyawan yang menyelesaikan pesanan seragam</li> <li>- Macam-macam barang yang dipesan oleh pelanggan (toko)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Jumlah barang yang akan diselesaikan oleh para karyawan.</li> <li>- Waktu penyelesaian pembuatan seragam tiap potong.</li> <li>- Tahapan penyelesaian pembuatan seragam.</li> <li>- Laba penjualan setiap barang.</li> <li>- Total waktu yang tersedia untuk menyelesaikan seluruh pesanan seragam.</li> </ul>
	b. Volume Data	Volume data yang diperlukan dalam metode ini cenderung luas dan banyak.	Volume data yang digunakan pada metode ini cenderung lebih sedikit.
	c. Banyak Variabel	Banyaknya variabel antara baris dan kolom jumlahnya sama. Namun, ada kondisi tertentu dimana baris dan kolom jumlahnya tidak sama, sering disebut dengan permasalahan tidak seimbang yang harus menambahkan elemen <i>dumping</i> .	Banyaknya variabel dalam metode ini berjumlah mulai dari dua (2) hingga banyak variabel.
2.	<i>Proses</i>		
	a. Panjang Iterasi	Panjang iterasi untuk optimalisasi pada metode ini sebanyak 3 iterasi.	Sedangkan pada metode ini sebanyak 2 iterasi.

	b. Kompleksitas Operasi	Operasi biner yang kerap digunakan dalam metode ini adalah penjumlahan dan pengurangan. Jika pada masalah maksimasi, maka langkah awa adalah mengurangi elemen-elemen baris dan kolom dengan elemen terbesar. Namun berbeda pada masalah minimasi, langkah awalnya dengan mengurangi elemen baris dan kolom dengan elemen terkecil.	Pada metode ini, operasi biner yang digunakan meliputi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Sehingga penggunaan operasi yang cukup kompleks adalah pada metode ini.
	c. Lama Proses	Untuk menemukan solusi yang optimal, proses menggunakan metode ini cenderung lebih singkat dikarenakan operasi biner yang digunakan sangat sederhana, yakni penjumlahan dan pengurangan.	Solusi optimal yang diproses menggunakan metode ini lebih lama. Namun, lama dan singkatnya proses optimalisasi adalah bergantung pada data itu sendiri dan kompleksnya operasi yang dipakai dalam metode.
	d. Satuan	Satuan yang dipakai pada metode ini adalah potong/person untuk mengetahui kemampuan kinerja karyawan dalam menyelesaikan pembuatan seragam guna memenuhi permintaan pelanggan.	Data pada metode ini menggunakan satuan potong/day untuk mengetahui kemampuan produksi seragam oleh karyawan dengan tujuan untuk menghasilkan hasil produksi yang berkualitas dan tepat waktu ( <i>on time</i> ).
3.	<i>Output</i>		

	<p>a. Ketelitian</p>	<p>Dalam proses penentuan solusi optimal, ketelitian berhubungan erat dengan kompleksnya operasi biner yang dipakai. Metode ini hanya menggunakan operasi biner penjumlahan dan pengurangan. Sehingga dalam upaya optimalisasi, selain ketelitian juga harus cermat agar operasi yang cukup mudah, benar-benar menghasilkan solusi optimal.</p>	<p>Dalam optimalisasi dengan metode ini, diperlukan ketelitian yang cukup baik dikarenakan operasi biner yang dipakai meliputi pengurangan, perkalian, dan pembagian serta rumitnya kriteria di setiap putaran iterasi.</p>
	<p>b. Akurasi</p>	<p>Permasalahan yang akan dijadikan data dalam metode Hongaria dan metode Simpleks merupakan permasalahan linier, dalam arti problematika yang mempunyai dua solusi yang berkesinambungan. Permasalahan yang berbeda sama sekali, namun dalam satu paket masalah. Tingkat keakuratan penyelesaian dengan metode ini cenderung lebih lemah daripada simpleks karena hasil yang akan diperoleh bergantung pada permintaan pasar dan kinerja karyawan yang cenderung pasang surut.</p>	<p>Untuk segi akurasi, metode ini lebih unggul dikarenakan optimalisasi dilakukan pada data proses perencanaan produksi, dengan harapan perencanaan dan pelaksanaan produksi berjalan optimal dan seimbang.</p>

	c. Kemudahan Interpretasi	Hasil dari optimalisasi dengan metode ini sangat jelas dan mudah diinterpretasikan,	Lain halnya dengan metode ini, karena prosesnya yang rumit dan banyaknya variabel yang dipakai, sehingga rumit pula dalam penginterpretasiannya dibanding dengan metode Hongaria.
--	---------------------------	---	---



Lampiran 2 (Anton dan Rorres, 1988): Tabel Optimalisasi Metode Hongaria

Metode Hongaria		
No.	Langkah	Keterangan
1.	Kurangkan <i>entri</i> terkecil dalam setiap baris dari semua <i>entri</i> barisnya	1. Setelah langkah ini, setiap baris mempunyai sedikit-dikitnya satu <i>entri</i> nol dan semua <i>entri</i> lainnya tidak negatif.
2.	Kurangkan <i>entri</i> terkecil dalam setiap kolom dari semua <i>entri</i> kolomnya	2. Setelah langkah ini, setiap baris dan kolom mempunyai sedikit-dikitnya satu <i>entri</i> nol dan semua <i>entri</i> lainnya adalah tidak negatif.
3.	Tarik garis-garis melalui baris dan kolom yang sesuai sehingga semua <i>entri</i> nol dari matriks biaya itu telah terlibat dan jumlah <i>minimum</i> dari garis-garis seperti itu telah digunakan	3. Ada beberapa cara untuk melakukan ini. Yang penting adalah bahwa jumlah <i>minimum</i> dari garis-garis tersebut harus digunakan. Algoritma yang sesuai untuk pengkodean computer tersedia untuk ini; akan tetapi untuk nilai-nilai $n$ yang kecil sudah cukup bila hal ini dilakukan dengan cara coba-coba ( <i>trial and error</i> )
4.	Uji Optimalitas (i) Jika jumlah <i>minimum</i> dari garis liputan $a$ adalah $n$ , maka sebuah penetapan optimal akan mungkin dan tugas sudah selesai. (ii) Jika jumlah <i>minimum</i> dari garis liputan lebih sedikit daripada $n$ , maka sebuah penetapan optimal dari bilangan-bilangan nol belum mungkin. Lanjutkan ke langkah 5.	
5.	Tentukan <i>entri</i> terkecil yang tidak terdapat oleh garis manapun. Kurangkan <i>entri</i> ini dari semua <i>entri</i> yang terdapat dan kemudian tambahkan <i>entri</i> itu kepada semua <i>entri</i> yang terdapat oleh sebuah garis horizontal dan sebuah garis vertikal. Kembali ke Langkah 3.	4. Langkah ini ekuivalen dengan pemakaian Teorema 1 dengan mengurangi <i>entri</i> terkecil yang tak terdapat dari setiap baris yang tak terdapat dan kemudian dengan menambahkan <i>entri</i> terkecil tersebut kepada setiap kolom yang terliput