STUDI PERBANDINGAN ESTIMASI PARAMETER DISPERSI BINOMIAL NEGATIF DENGAN *METHOD OF MOMENT ESTIMATE* (MME), *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE* (MLE) DAN *BOOTSTRAP MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE* (BMLE)

SKRIPSI

Oleh
RAHADI EKO SAMPURNO
NIM. 08610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

STUDI PERBANDINGAN ESTIMASI PARAMETER DISPERSI BINOMIAL NEGATIF DENGAN *METHOD OF MOMENT ESTIMATE* (MME), *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE* (MLE) DAN *BOOTSTRAP MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE* (BMLE)

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Rahadi Eko Sampurno
NIM. 08610071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

STUDI PERBANDINGAN ESTIMASI PARAMETER DISPERSI BINOMIAL NEGATIF DENGAN *METHOD OF MOMENT ESTIMATE* (MME), *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE* (MLE) DAN *BOOTSTRAP MAXIMUM LIKELIHOOD* ESTIMATE (BMLE)

SKRIPSI

Oleh
Rahadi Eko Sampurno
NIM. 08610071

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 31 Oktober 2014

Pembimbing I	Pembimbing II
Fachrur Rozi, M.Si	Ach. Nashichuddin, MA
NIP. 19800527 200801 1 012	NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

STUDI PERBANDINGAN ESTIMASI PARAMETER DISPERSI BINOMIAL NEGATIF DENGAN *METHOD OF MOMENT ESTIMATE* (MME), *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE* (MLE) DAN *BOOTSTRAP MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATE* (BMLE)

SKRIPSI

Oleh
Rahadi Eko Sampurno
NIM. 08610071

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 07 Januari 2015

Penguji Utama	: Dr. Sri Harini, M.Si	....
Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si	....
Sekretaris Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si	....
Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, MA	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Rahadi Eko Sampurno

NIM : 08610071

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Perbandingan Estimasi Parameter Dispersi Binomial Negatif Dengan *Method Of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Eetimate (MLE)* dan *Bootstrap Maximum Likelihood Eetimate* (BMLE)

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 31 Oktober 2014
Yang membuat pernyataan,

Rahadi Eko Sampurno
NIM. 08610071

MOTO

"Jangan Pernah Menyerah Teruslah Berusaha dan Berdo'a dan Buatlah Dirimu Menjadi Manusia Yang Bermanfaat Bagi Orang Lain"

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Harto dan ibu Sumini, ayahanda Purnomo dan ibu Ginah Rahayu yang selalu memberikan motivasi, do'a dan restunya kepada penulis dalam menimba ilmu.

KATA PENGANTAR

Assalâmu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul M, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan dan berbagai ilmunya kepada penulis .

6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menimba ilmu.
8. Anita Mirawati Saputri, yang selalu memberikan semangat kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat penulis di Jurusan Matematika dan di luar Jurusan Matematika.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini, baik berupa materiil maupun moril.

Semoga skripsi ini memberikan manfaat kepada para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi. *Âmîn Yâ Rabbal 'Âlamîn*.

Wassalâmu'alaikum. Wr. Wb.

Malang, Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

$\eta_x\ (t)$	: Fungsi pembangkit momen faktorial
L (μ, k)	: Fungsi Likelihood
E(X)	: Ekspektasi
β	: Koefisien regresi
μ	: Rata-rata
a'_k	: Momen sampel
ε	: Residual terstandarkan
ρ	: Koefisien korelasi
σ^2	: Varian
$\sum$	: Untuk penjumlahan
K	: Parameter dispersi
X	: Variabel
$\bar{X}$	: Rata-rata sampel X

ABSTRAK

Eko, Sampurno, Rahadi. 2014. ***Studi Perbandingan Estimasi Parameter Dispersi Binomial Negatif dengan Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Metode Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE).** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si (II) Ach. Nashichudin. M.A.

Kata Kunci: Binomial Negatif, *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Metode Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE).

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengetahui hasil estimasi parameter dispersi pada *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Metode Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE).

Tujuan dari *Method of Moment Estimate* (MME) adalah untuk memperoleh penaksiran yang baik ($\hat{\theta}$), distribusi yang mendasari $\hat{\theta}$ harus serupa dengan distribusi dari θ, dimana kesamaan tersebut dibandingkan dengan kesetaraan moment.

Metode *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) digunakan untuk menentukan penaksiran bagi θ, dimana nilai taksiran tersebut adalah nilai yang membuat data pengamatan paling mungkin (*the most likely*) terjadi.

Metode Bootstrap adalah sebuah metode resampling yaitu suatu teknik pengambilan data sampel berulang secara acak dari data asli. Misalkan $x = (x_1, \dots, x_n)$ adalah sampel acak dari suatu populasi dengan parameter θ sebagai karakteristik populasinya.

Pada distribusi Binomial Negatif sangat mempengaruhi parameter dispersi, terutama jika dikombinasikan dengan ukuran sampel yang kecil. *Method of Moments Estimate* (MME) dan *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) memiliki kesulitan dalam mengestimasi parameter dispersi ketika μ kecil dan k besar, karena hasil estimasi dari MME dan MLE cenderung *overestimate* dan tidak stabil. Oleh karena itu maka diperlukan suatu perbandingan antara metode *Method of Moments Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE) pada hasil estimasi parameter dispersi Binomial Negatifnya.

Hasil dari estimasi parameter dispersi dengan MME adalah $\hat{k} = \frac{S^2 - \bar{X}}{\bar{X}^2}$, sedangkan hasil estimasi parameter dispersi dengan MLE adalah $\frac{\partial l}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} - \frac{1}{k\,(1+kv)}\right) + \frac{x_i}{k} + \frac{\ln(1+k\mu)}{k^2} - \frac{\mu\,(x_i\,k+1)}{k\,(1+k\mu)}\right] = 0$ sedangkan dengan BMLE adalah berbentuk algoritma.

ABSTRACT

Eko, Rahadi, Sampurno. 2015. ***Comparative Study of Negative Binomial Dispersion Parameter Estimation Using the Method of Moment Estimate (ME), Maximum Likelihood Estimate (MLE), and Bootstrap Methods Maximum Likelihood Estimate (BMLE***). Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (1) Facrur Rozi, M.Si (II) Achmad Nasichuddin, MA.

Keywords: Negative Binomial, Method of Moment Estimate (MME), Maximum Likelihood Estimate (MLE), Bootstrap Maximum Likelihood Estimate (BMLE).

This thesis aims to determine the dispersion parameter estimation results on the method of MME, MLE, and BMLE. The purpose of MME is to determine reliable estimation $(\hat{\theta})$, the underlying $\hat{\theta}$ distribution should be similar to the distribution of θ in which the similarity is compared by the moment equality.

MLE is used to determine the estimation of θ where the estimated value is the value that makes the observations data most likely to occur.

Bootstrap is a resampling method that is a repeated sample retrieval technique from the original data. For instance $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ is random sample of a population with θ parameter as the population characteristics.

In the negative binomial distribution, it greatly affects the dispersion parameter, especially if it is combined with a small sample size. MME and MLE have difficulty estimating the dispersion parameter when μ is small and k is large, since the MME and MLE estimation results tend to overestimate and unstable. Therefore, we need a comparison between the MME, MLE, and BMLE on its negative binomial dispersion parameter estimation results.

The results of the dispersion parameter estimation using MME is $\hat{k} = \frac{s^2 - \bar{x}}{\bar{x}^2}$, while the dispersion parameter estimation results using MLE is

$$\frac{\partial l}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} - \frac{1}{k(1+kv)} \right) + \frac{x_i}{k} + \frac{\ln(1+k\mu)}{k^2} - \frac{\mu(x_i k + 1)}{k(1+k\mu)} \right] = 0$$ and the result using BMLE is in the form of an algorithm.

ملخص

ايكو، رهردي، سامبورنو. ٢٠١٥. دراسة مقارنة تقدير المعلمة التشتت لذات الحدين السلبية باستخدام طريقة *Method of Moment Estimate* (*MME*)، *Maximum Likelihood Estimate* (*MLE*)، و *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (*BMLE*). بحث جامعي. الشعبة الرياضية كلية العلوم والتكنولوجيا الجامعة الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: ١.فخر الرازي الماجستير ٢.أحمد ناصح الدين الماجستير

الكلمة الرئيسية: ذات الحدين السلبي، *Method of Moment Estimate* (*MME*), *Maximum Likelihood Estimate* (*MLE*), *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (*BMLE*).

وتهدف هذا البحث لتحديد نتائج تقدير المعلمة التشتت على طريقة MME، MLE، وBMLE. والغرض من MME هو تحديد تقدير موثوق (θ̂)، وينبغي أن يكون توزيع θ̂ الكامنة مماثلة لتوزيع θ حيث يتم مقارنة التشابه من المساواة لحظة.
يستخدم MLE لتحديد تقدير θ حيث القيمة المقدرة هي القيمة التي تجعل البيانات الملاحظات على الأرجح أن يحدث.
Bootstrap هي طريقة اختزال التي هي تقنية استرجاع عينة المتكررة من البيانات الأصلية. على سبيل المثال $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ هو عينة عشوائية من السكان مع المعلمة θ كالخصائص السكانية.
في توزيع ذي الحدين السلبي، فإنه يؤثر بشكل كبير على المعلمة التشتت، وخاصة إذا اقترن بصغر الحجم من العينة. MME وMLE لديهما صعوبة في تقدير المعلمة تشتت عندما μ صغيرة وكانت k كبيرة، لأن نتائج تقدير MME وMLE تميل إلى المبالغة في تقدير وغير مستقرة. ولذلك، فإننا في حاجة إلى المقارنة بين MME، MLE، وBMLE على نتائج تقدير المعلمة تشتت ذي الحدين السلبية.

نتائج تقدير المعلمة التشتت باستخدام MME هي $\widehat{\hat{k}} = \frac{s^2-\bar{x}}{\bar{x}^2}$ و نتائج تقدير المعلمة التشتت باستخدام MLE هي $\frac{\partial l}{\partial u} = \Sigma_{i=1}^{n}\left[\left(\Sigma_{i=1}^{n} - \frac{1}{k(1+kv)}\right) + \frac{x_i}{k} + \frac{\ln(1+k\mu)}{k^2} - \frac{\mu(x_i k+1)}{k(1+k\mu)}\right] = 0$ و نتائج تقدير المعلمة التشتت باستخدام BMLE كانت الخوارزمية.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran adalah sebuah mukjizat yang sungguh sangat agung dikarenakan dalam al-Quran telah banyak memuat konsep yang ada dalam kehidupan sehari-hari, salah satu konsep tersebut adalah tentang penaksiran. Penaksiran adalah perkiraan terhadap sebuah masalah yang belum diketahui hasilnya secara pasti. Dalam al-Quran surat Ash-Shaffat ayat 147, secara tersirat telah dijelaskan tentang estimasi yaitu tentang kisah nabi Yunus yang diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih.

وَأَرْسَلْنَٰهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

" Dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih"

Arti dari surat Ash-Shaffat ayat 147 menjelaskan tentang perkiraan jumlah kaum nabi Yunus yang berjumlah sekitar 100.000 orang atau lebih, hal ini menunjukkan adanya perkiraan bahwa jumlah umat nabi Yunus berjumlah kurang lebih 100.000 dan hal ini juga menandakan bahwa Allah memberikan gambaran atau estimasi bahwa nantinya nabi Yunus akan diberi tugas untuk menyampaikan agama Allah kepada kaumnya yang berjumlah sekitar 100.000 orang.

Dalam kaitannya berbicara tentang estimasi, statistik sudah banyak membahas tentang bagaimana metode untuk mengestimasi suatu permasalahan.

Estimasi parameter dispersi yang baik dapat menyebabkan keakuratan dan mendapatkan nilai yang stabil.

Overdispersi adalah suatu fenomena yang kadang terjadi pada data yang dimodelkan menggunakan distribusi Binomial atau Poisson. Overdispersi pada model Poisson terjadi ketika varian lebih besar dari pada rata-rata. Overdispersi disebabkan oleh varian yang berlebih dari data. Selain itu overdispersi juga dapat terjadi jika terdapat pelanggaran atau pemaksaan dalam asumsi-asumsi distribusi pada data. Fenomena ini merupakan masalah dalam statistik, karena overdispersi dapat menyebabkan estimasi parameter tidak akurat dan tidak stabil. Terdapat berbagai cara untuk menangani masalah overdispersi dapat dilihat dari penyebab overdispersi itu sendiri. Salah satu cara untuk menangani masalah overdispersi pada data yang dimodelkan dengan distribusi Poisson yaitu dengan menggunakan distribusi Binomial Negatif (Hilbe, 2011:35).

Distribusi Binomial Negatif, yang juga dikenal sebagai distribusi Poisson-Gamma dapat menangani masalah overdispersi lebih baik dari pada distribusi yang lain dikarenakan pada distribusi Binomial Negatif memiliki dua parameter yaitu parameter rata-rata μ dan parameter dispersi k. Distribusi Binomial Negatif dapat diperoleh dari distribusi Poisson dan distribusi Gamma.

Dalam hal ini akan dibahas tentang nilai estimasi parameter dispersi pada distribusi Binomial Negatif.

Distribusi Binomial Negatif sangat dipengaruhi oleh parameter dispersi, terutama jika dikombinasikan dengan ukuran sampel yang kecil. Dalam salah satu penelitian, Wilson dan Young (1984:65), mengatakan bahwa *Method of Moments Estimate* (MME) dan *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) memiliki kesulitan dalam mengestimasi parameter dispersi ketika μ kecil dan k besar, karena hasil estimasi dari MME dan MLE cenderung *overestimate* dan tidak stabil. Bootstrap adalah suatu metode resampling, yaitu teknik pengambilan teknik berulang secara acak dari data asli. Metode Bootstrap akan menjadi dasar dalam memperkirakan karakteristik dari data asli. Oleh karena itu maka diperlukan suatu perbandingan antara metode *Method of Moments Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE) pada hasil estimasi parameter dispersi Binomial Negatifnya.

Pada skripsi ini akan dibahas tentang estimasi parameter dispersi distribusi Binomial Negatif dengan metode *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE). Dari pemaparan yang telah dijelaskan di atas maka penulis memberikan judul dari penelitian ini adalah *"Studi Perbandingan Estimasi Parameter Dispersi Binomial Negatif dengan Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Metode Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE)*".*

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana hasil estimasi parameter dispersi Binomial Negatif menggunakan *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE)?

2. Bagaimana hasil perbandingan simulasi estimasi parameter dispersi Binomial Negatif menggunakan *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE)?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui hasil estimasi parameter dispersi Binomial Negatif menggunakan *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE)
2. Mengetahui hasil perbandingan simulasi estimasi parameter dispersi Binomial Negatif menggunakan *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE)

1.4 Batasan Masalah

Sesuai rumusan masalah dan tujuan penelitian, pembatasan masalah yang diberikan adalah menetapkan parameter nilai untuk μ, k, n dan r yang berbeda untuk simulasi.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan ini adalah dapat memahami penerapan dari ilmu statistika, dimana pada dasarnya statistika dapat diaplikasikan untuk menangani masalah kehidupan. Khususnya distribusi Binomial Negatif, *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE), dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE).

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Pendekatan Penelitian

Penelitian dilakukan dengan menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*) dan deskriptif kuantitatif. Dimana untuk mencari hasil estimasi parameter dispersi Binomial Negatif menggunakan metode *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE) diperlukan langkah sebagai berikut:

1. Mencari hasil dari estimasi parameter dispersi Binomial Negatif pada *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE).
2. Membuat algoritma dari *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE).
3. Menentukan algoritma data simulasi *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE).

1.6.2 Data dan Variabel

Data yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan data simulasi.

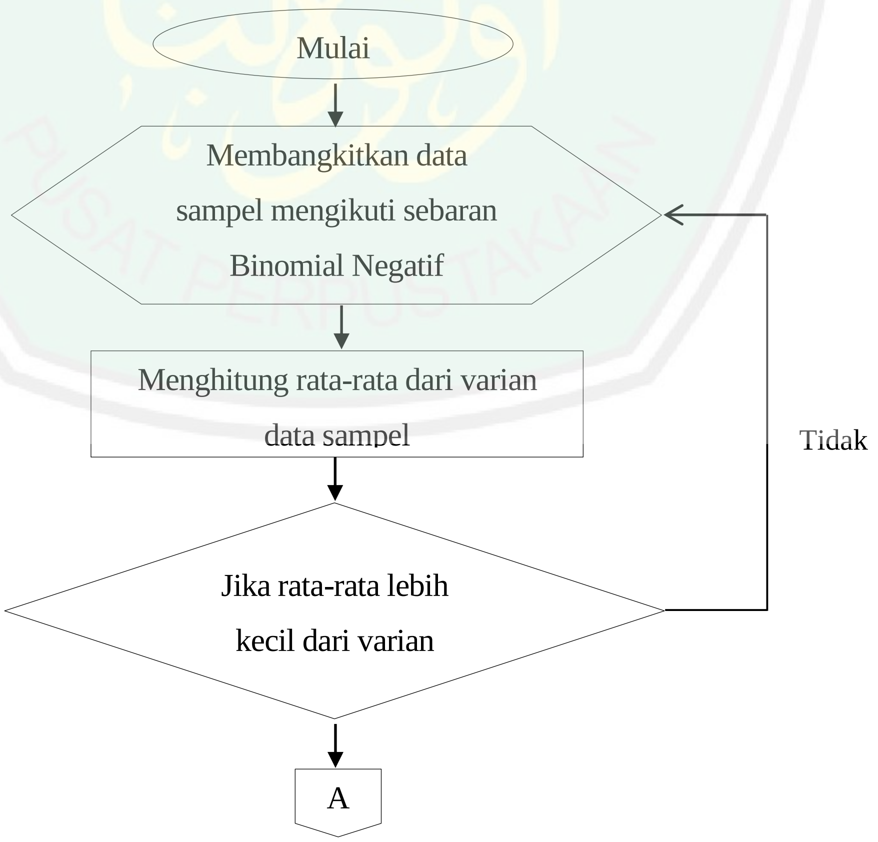
1.6.3 Metode Analisis

a. Studi literatur

Studi literatur yang akan dilakukan adalah mengenai teori distribusi *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE).

b. Analisis

Analisis terhadap studi literatur sesuai dengan permasalahan yang dirumuskan untuk mengetahui hasil dari estimasi parameter dispersi Binomial Negatif dengan metode *Bootsrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE). Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis metode tersebut adalah sebagai berikut:



1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Tinjauan Pustaka

Bab ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan.

Bab III Pembahasan

Bab ini dijelaskan bagaimana hasil estimasi parameter dispersi Binomial Negatif dengan *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE). dan algoritma *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE) dan perbandingan estimasi *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE).

Bab IV Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian yang dilakukan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Massa Peluang

Menurut Walpole dan Myers (1995:25), suatu variabel acak disebut variabel acak diskrit bila himpunan kemungkinan hasilnya terhingga atau terhitung. Fungsi massa peluang pada dasarnya digunakan untuk menganalisis data agar data yang dianalisis tidak menjadi data yang bias. Fungsi massa peluang dibedakan menjadi dua jenis yakni untuk data diskrit dan untuk data kontinu. Untuk fungsi massa peluang data diskrit sering disebut sebagai fungsi sebaran peluang atau *probability mass function* (*p.m.f*), sedangkan untuk fungsi data kontinu sering disebut sebagai fungsi massa peluang $(f.k.p)$ atau *probability density function* $(p.d.f)$.

Definisi 2.1

Himpunan pasangan terurut (x,f(x)) merupakan suatu fungsi massa peluang variabel acak diskrit X jika untuk setiap kemungkinan hasil x:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. P (X = x) = f(x)

Definisi 2.2

Fungsi f(x) adalah fungsi massa peluang variabel acak kontinu X yang didefiniskan pada himpunan semua bilangan real, jika

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in r$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

3. P (a < X < b) = $\int_a^b f(x)dx$

2.2 Momen

Momen ke-k dari suatu variabel acak adalah nilai harapan (rata-rata) dari pangkat ke-k variabel acak tersebut.

$$\mu'_k = \mathrm{E}\,(\mathrm{X}^k) \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx \text{ jika X variabel kontinu} \\ \\ \sum_j x_i^k\ p\,(x_j) \text{ jika X variabel diskrit} \end{cases} \tag{2.1}$$

(Klugman dkk, 2004:3)

Momen ke-k dinotasikan dengan E (X^k) atau μ'_k, sedangkan momen pertama disebut rata-rata dan disimbolkan dengan μ. Dan E (X) = μ disebut juga ekspektasi dari X.

2.2.1 Momen Sampel

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah barisan n sampel acak, maka momen sampel ke-k adalah:

$$a'_k = \frac{X_1^k + X_2^k + \ldots + X_n^k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_1^k \text{ (Mishra dan Dudewiez, 1988:87)} \tag{2.2}$$

dengan k adalah bilangan bulat positif

2.3 Fungsi Pembangkit Momen Faktorial

Fungsi pembangkit moment faktorial dari suatu variabel acak didefinisikan sebagai berikut:

$$\eta_x(\mathrm{t}) = \mathrm{E}\,(t^x) \tag{2.3}$$

Momen-momen faktorial dari variabel acak X dapat diperoleh dengan menurunkan $\eta_x(t)$ terhadap t dan memasukan t = 1.

Momen faktorial pertama adalah sebagai berikut:

$$\eta'_x\,(t) = \frac{d}{dt}\,E\,[t^X]|_{t=1}$$

$$= E\,[X\,t^{X-1}]|_{t=1}$$

$$= E[X]$$

Momen faktorial kedua diperoleh dari turunan kedua η_x(t) dan memasukan t= 1

$$\eta''_x\,(t) = \frac{d}{dt}\,\eta'_x\,[t^X]|_{t=1}$$

$$= \frac{d}{dt}\,E\,[Xt^{X-1}]|_{t=1}$$

$$= E\,[X\,(X-1)\,t^{X-2}\,]|_{t=1}$$

$$= E\,[X(X-1)]$$

Untuk momen faktorial ke-n adalah:

$$\eta_X^n\,(t) = \frac{d}{dt}\,\eta_X^{n-1}(t)|_{t=1}$$

$$= E\,[X\,(X-1)\,(X-2)\,\ldots\,(X-(n-1)\,t^{X-n}]|_{t=1}$$

$$= E\,[X\,(X-1)(X-2)\,...\,(X-(n-1))\,]$$

2.4 Distribusi Binomial Negatif

Distribusi Binomial Negatif merupakan ekstensi alamiah dari distribusi Poisson, yang memperhitungkan varian berlebih yang kadang ditemukan dalam model prediksi kecelakaan. Distribusi ini mulai diminati untuk digunakan dalam penelitian transportasi yang digunakan untuk membantu mengatasi masalah yang terjadi pada pemodelan Poisson, khususnya varian dimungkinkan untuk berbeda dari rata-rata dalam regresi Binomial Negatif.

Kedua distribusi tersebut berkaitan dengan urutan percobaan Bernoulli. Model Binomial Negatif dapat dianggap sebagai distribusi yang lebih umum untuk data hitung dibandingkan dengan model Poisson disebabkan karena faktor pengganggu (*disturbance term*) yang membantu menangani masalah overdispersi yang terjadi pada model Poisson (Willson, 1984:14). Koefisien beta pada model ditaksir dengan metode *quasi-likelihood*. Estimasi *Maximum Likelihood* juga merupakan cara yang efisien untuk menaksir parameter dalam regresi Binomial Negatif.

Misalkan terdapat suatu urutan percobaan Bernoulli yang saling terpisah satu sama lain. Setiap percobaan memiliki dua kemungkinan yaitu sukses dan gagal. Dalam setiap percobaan peluang terjadi peluang sukses adalah p dan peluang gagal adalah q = 1- p. Dimana urutan ini sampai terjadi r kegagalan. Maka variabel acak keberhasilan X akan memiliki distribusi Binomial Negatif *X - NB* (*r*,*p*).

Fungsi massa peluang dari distribusi Binomial Negatif adalah:

$$f(x) = \Pr(X = x) = \binom{r+x-1}{x} p^x (1-p)^r \qquad (2.4)$$

untuk x = 0, 1, 2, sedangkan $\binom{r+x-1}{x}$ disebut koefisien Binomial dengan penjabarannya sebagai berikut:

$$\binom{r+x-1}{x} = \frac{(r+x-1)!}{x!(r-1)!} = \frac{(r+x-1)\,(r+x-2)\ldots(r)}{x!}$$ (Lutfi, 2008:23).

Persamaan koefisien Binomial dapat ditulis dengan cara sebagai berikut:

$$\frac{(r+x-1)\ldots(r)}{x!} = (-1)^x \frac{(-r)\,(-r-1)\ldots(-r-x+1)}{x!} = (-1)^x \binom{-r}{x} \qquad (2.5)$$

Peluang untuk setiap urutan dari x sukses dan r gagal adalah $p^x\,(1-p)^r$, karena (r + x) percobaan tersebut bersifat bebas atau saling terpisah satu sama lain. Karena kegagalan ke-r berada pada urutan terakhir, maka banyaknya percobaan yaitu (r + x – 1), dimana x adalah banyaknya sukses. Koefisien Binomial pada persamaan (2.4) memberikan tepatnya jumlah semua rangkaian sepanjang urutan (r + x – 1) karena koefisien tersebut merupakan interpretasi dari kombinatorial.

Koefisien Binomial juga dapat ditulis sebagai fungsi Gamma sebagai berikut:

$\binom{r+x-1}{x} = \frac{(r+x-1)\,(r+x-2)\ldots(r)}{x!} = \frac{\Gamma\,(r+x)}{x!\,\Gamma\,(r)}$, karena Γ (x) = (x - 1)!

Berdasarkan deret Binomial dan persamaan (2.5) untuk setiap $0 \leq p \leq 1$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}(1-p)^{-r} &= \sum_{x=0}^{\infty}\binom{-r}{x}(-p)^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\binom{-r}{x}((-1)p)^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\binom{-r}{x}(-1)^x(-p)^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\binom{r+x-1}{x}(p)^x \text{(Kasmiantini, 2007:7} \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Distribusi Binomial Negatif dapat diperoleh dari gabungan antara distribusi Poisson dan distribusi Gamma. Dengan mengasumsikan bahwa variabel respon X merupakan variabel acak yang saling bebas dan identik (*independent and identically distribution*) yang dinotasikan sebagai iid, yaitu $X|\lambda^{iid}$ ~ Poisson (λ) dengan fungsi massa peluang $f\,(X|\lambda)$), x = 0, 1, 2, ... dan $\lambda > 0$. Kemudian diasumsikan λ ~ Gamma (α, β) dengan rata-rata α β, varian $\alpha\beta^2$ dan fungsi kepadatan peluangnya, maka diperoleh fungsi massa sebagai berikut:

$$f\,(x,\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\beta}}{x!\beta^{\alpha}\,\Gamma\,(\alpha)} \quad x = 0, 1, 2, \ldots ; \lambda > 0 \qquad (2.7)$$

sehingga fungsi massa peluang tidak bersyarat dari X yaitu:

$f(x) = \int_0^\infty f\ (x,\lambda)d\lambda$

$$= \int_0^\infty \frac{\lambda^x e^{-\lambda} \lambda^{\alpha-1} e^{-\lambda/\beta}}{x!\beta^\alpha\,\Gamma\,(\alpha)}\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{x!\beta^\alpha\,\Gamma\,(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\lambda(1+\frac{1}{\beta})} \lambda^{x+\alpha-1}\ d\lambda$$

misal

$$u = \lambda\left(1\ +\ \frac{1}{\beta}\right),\ \lambda = \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right) u$$

$$= \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\lambda,\ \lambda = \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)\ u$$

$$du = \left(\frac{\beta+1}{1}\right)\lambda = \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)d\lambda\ ,\ d\lambda = \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right) \tag{2.8}$$

maka

$$f\,(\mathrm{x}) = \frac{1}{x!\ \beta^\alpha\Gamma\,(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u\beta}{\beta+1}\right)^{x+\alpha-1} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right) du$$

$$= \frac{1}{x!\ \beta^\alpha\Gamma\,(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u}\ u^{x+\alpha-1} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha+x}\ du$$

$$= \frac{1}{x!\ \beta^\alpha\Gamma\,(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha+x} \int_0^\infty e^{-u}\ u^{x+\alpha-1}\ du$$

$$= \frac{1}{x!\ \beta^\alpha\Gamma\,(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^{\alpha+x}\ \Gamma\,(\alpha+x)$$

$$= \frac{\Gamma\,(\alpha+x)}{\Gamma\,(\alpha)x!} \frac{\beta^{\alpha+x}}{\beta^\alpha} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{\alpha+x}$$

$$= \frac{\Gamma\,(\alpha+x)}{\Gamma\,(\alpha)x!} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^x \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^\alpha \tag{2.9}$$

Distribusi Binomial Negatif dengan fungsi massa peluang (2.9) ini mempunyai rata-rata

$$\mathrm{E}\ (\mathrm{X}) = \mathrm{E}\ [\mathrm{E}\ (\mathrm{X}|\lambda)] = \mathrm{E}\ (\lambda) = \alpha\beta \tag{2.10}$$

dan varian

$$\mathrm{Var}\ (\mathrm{X}) = \mathrm{E}[\mathrm{Var}\ (\mathrm{X}|\lambda)] + \mathrm{Var}\ [\mathrm{E}\ (\mathrm{X}|\lambda)]$$

$$= \mathrm{Var}\ (\lambda) + \mathrm{E}\ (\lambda)$$

$$= \alpha\beta + \alpha\beta^2 \tag{2.11}$$

Selanjutnya diasumsikan bahwa $\mu = \alpha\beta$ dan $k = \frac{1}{\alpha}$, sehingga E (X) = μ dan Var (X) = $\mu + k\mu^2$, varian ini merupakan fungsi kuadratik yang mengakomodasi parameter overdispersi $k > 0$ sehingga fungsi massa peluang dari X pada persamaan (2.9) adalah sebagai berikut:

$$f(X) = \frac{\Gamma(\alpha + x)}{\Gamma \alpha\, x!} \left(\frac{\frac{1}{\alpha}.\alpha.\beta}{1 + \frac{1}{\alpha}.\alpha.\beta} \right)^x \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}.\alpha.\beta} \right)^\alpha$$

$$f(X) = \frac{\Gamma(k^{-1} + x)}{\Gamma(k^{-1})\, x!} \left(\frac{k\mu}{1 + k\mu} \right)^x \left(\frac{1}{1 + k\mu} \right)^{k-1} \quad \text{(Kasmiantini, 2007:9)} \tag{2.12}$$

2.5 Estimasi Parameter

Estimasi merupakan proses yang menggunakan sampel statistik untuk mengestimasi atau menaksir parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel, dalam hal ini sampel acak, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan estimasi ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui.

Penaksir (estimator) adalah anggota variabel acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan estimasi terhadap data dari suatu sampel disebut nilai estimasi.

Parameter merupakan karakteristik dari suatu populasi dari fungsi distribusi peluang. Nilai parameter secara eksak dapat diketahui pada penelitian yang mengamati keseluruhan anggota populasi, kegiatan ini dinamakan sensus. Pada kenyataanya sensus jarang dilakukan karena banyaknya faktor yang dapat mempersulit diantaranya adalah biaya, waktu dan tenaga.

Penaksir parameter menggunakan hasil overdispersi yang merupakan sampel acak dari populasi. Misalkan X = (x_1,..., x_n) merupakan sampel acak bebas identik dari suatu populasi yang mempunyai distribusi yang tidak diketahui yang dinamakan fungsi distribusi F, maka dari hasil overdispersi tersebut dapat dibuat suatu penaksir parameter θ. Penaksir parameter tidak terlepas dari kesalahan penduga taksiran (*error of estimation*) dan bias. Kesalahan penaksiran adalah jarak antara penaksir dan target parameter $\varepsilon = |\hat{\theta} - \theta|$. Bias adalah selisih antara nilai harapan (*expected value*) penaksir dengan parameter yang diduga, sehingga bias = E ($\hat{\theta}$) - θ.

Jika memilih $\hat{\theta}$ sebagai penaksir maka timbul suatu pertanyaan, seberapa akuratkah penaksir parameter tersebut. Timbul persoalan yaitu bagaimana cara menyatakan bahwa $\hat{\theta}$ merupakan penaksir yang tepat bagi θ. Untuk itu diperlukan suatu ukuran keakuratan penaksiran yang disebut *standard error*.

2.6 Estimasi Parameter Titik Menggunakan *Method of Moment Estimate*

Tujuan dari metode momen adalah untuk memperoleh penaksiran yang baik ($\hat{\theta}$), distribusi yang mendasari $\hat{\theta}$ harus serupa dengan distribusi dari θ, dimana kesamaan tersebut dibandingkan dengan kesetaraan momen. Namun momen-momen dari distribusi yang berkoresponden dengan θ tidak diketahui karena nilai θ juga tidak diketahui. Untuk alasan ini nilai θ akan diperkirakan dengan momen sampel. Momen dihitung dengan menggunakan sampel yang sudah diberikan.

Jika θ adalah vektor dengan k komponen, maka dibutuhkan lebih dari satu persamaan. Lebih jelasnya jika terdapat k parameter yang tidak diketahui, maka digunakan k persamaan untuk menyelesaikannya. Oleh karena itu diperlukan persamaan k momen.

Estimasi parameter menggunakan metode momen diperoleh dengan menyamakan momen sampel (2.2) dengan momen teoritis (2.3) yaitu sebagai berikut:

$$a_k' = \mathrm{E}\,[X^k] \tag{2.13}$$

dengan X merupakan variabel acak dari suatu fungsi massa peluang tertentu. Adapun persamaan-persamaan yang harus diselesaikan yaitu:

$$\mathrm{E}\,(\mathrm{X}) = a_k' = \hat{\alpha}\,\hat{\beta} = \bar{X} \tag{2.14}$$

dan

$$\mathrm{E}\,(X^2) = \hat{\alpha}\,\hat{\beta}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{2.15}$$

Dari persamaan (2.14) diperoleh $\hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\hat{\alpha}}$ dan disubtitusikan ke persamaan (2.15), maka diperoleh

$$\widehat{\alpha} = \frac{\bar{X}^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \bar{X}^2} \text{ dan } \hat{\beta} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \bar{X}^2}{\bar{X}} \quad \text{(Hall, 1996:34)} \tag{2.16}$$

2.7 Estimasi Parameter Titik Menggunakan *Maximum Likelihood Estimate*

Metode ini digunakan untuk menentukan penaksiran bagi θ, dimana nilai taksiran tersebut adalah nilai yang membuat data pengamatan paling mungkin (*the most likely*) terjadi. Berdasarkan prinsip ini, apabila data teramati lebih mungkin (*more likely*) mempunyai nilai $\theta = \theta_1$ daripada mempunyai $\theta = \theta_2$, maka θ_1 maka akan dipilih sebagai penaksir θ.

Definisi 2.3 (*Fungsi Likelihood*)

Jika x_1, x_2, ..., x_n adalah sampel acak berukuran n dari sebuah fungsi kepadatan peluang diskrit atau kontinu, $f_x(x_i|\,\theta)$, dimana θ merupakan parameter yang tidak diketahui, maka fungsi *likelihood* dinotasikan dengan

$$\mathrm{L}\ (\theta) = f_x(x_i|\,\theta) \ldots f(x_n|\,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_x(x_i|\,\theta) \quad \text{(Hall, 1996:36)} \qquad (2.17)$$

Definisi 2.4 (*Maximum Likelihood Estimate*)

Diberikan $\mathrm{L}\ (\theta) = f\ (x_1,., x_n|\,\theta)$, $\theta \in \Omega$ dan Ω merupakan himpunan seluruh nilai parameter yang mungkin. Maka *Maximum Likelihood Estimate* adalah nilai $\hat{\theta} \in \Omega$ yang memaksimumkan $\mathrm{L}\ (\theta)$. Sehingga $\hat{\theta}$ adalah nilai yang memenuhi

$$f\,(x_1, \ldots, x_n|\hat{\theta}) = \max_{\theta\, \in\, \Omega} f\,(x_1, \ldots, x_n|\hat{\theta}) \qquad (2.18)$$

Berdasarkan definisi tersebut $\hat{\theta}$ adalah penyelesaian dari turunan pertama fungsi *Likelihood* terhadap θ, yang disamadengankan dengan nol

$$\frac{d}{d\theta}\,\mathrm{L}\ (\theta) = \frac{d}{d\theta} \prod_{i=1}^{n} f\ (x_i|\,\theta) = 0 \qquad (2.19)$$

Untuk memudahkan perhitungan secara matematis, umumnya digunakan log *likelihood*

$$l\ (\theta) = \ln \mathrm{L}\ (\theta) = \sum_{1=i}^{n} \ln f\ (x_i|\,\theta) \qquad (2.20)$$

yang juga diturunkan terhadap θ dan disamadengankan nol, untuk memperoleh

$$\hat{\theta}.\ \frac{d}{d\theta}\, l\ (\theta) = \frac{d}{d\theta} \prod_{i=1}^{n} f\ (x_i|\,\theta) = 0 \quad \text{(Hall, 1996:41)} \qquad (2.21)$$

2.8 Overdispersi

Overdispersi adalah suatu fenomena yang kadang kala terjadi pada data yang dimodelkan menggunakan distribusi Binomial atau distribusi Poisson. Overdispersi pada model Poisson terjadi ketika variansi lebih besar dari pada rata-rata.

Overdispersi disebabkan oleh variansi yang berlebih dari data. Selain itu overdispersi juga dapat terjadi jika terdapat pelanggaran atau pemaksaan dalam asumsi-asumsi distribusi pada data.

Fenomena ini merupakan suatu masalah dalam statistik, karena overdispersi dapat menyebabkan estimasi parameter menjadi tidak akurat dan tidak stabil.

Terdapat berbagai cara untuk menangani masalah overdispersi dilihat dari penyebab overdispersi itu sendiri. Salah satu cara untuk menangani overdispersi pada data yang dimodelkan dengan distribusi Poisson yaitu dengan menggunakan distribusi Binomial Negatif.

2.9 Metode *Bootstrap*

Metode Bootstrap adalah sebuah metode resampling yaitu suatu teknik pengambilan data sampel berulang secara acak dari data asli. Misalkan $x = (x_1, \ldots, x_n)$ adalah sampel acak dari suatu populasi dengan parameter θ sebagai karakteristik populasinya, maka algoritma dari metode Bootstrap adalah:

1. Diambil sampel Bootstrap yang saling bebas sebanyak B, sehingga didapat B sampel Bootstrap $x^* = (x_1^*, \ldots, x_B^*)$, masing-masing terdiri dari n data yang diambil secara berulang dari data asli x. Misalkan $x_1^* = (x_{11,} x_{12,} \ldots, x_{1n})$, karena

dilakukan pengambilan sampel dengan pengembalian, maka dimungkinkan data pengamatan terambil lebih dari satu kali atau tidak terambil.

2. Dihitung nilai penaksir dari masing-masing sampel Bootstrap $\hat{\theta}^*(b)$ dengan b = 1,2,3, …, B, sehingga didapat data baru yakni data Bootstrap x^*_{Boot} = $\left(\hat{\theta}^*(1), \hat{\theta}^*(2), \dots, \hat{\theta}^*(b)\right)$.
3. Maka nilai $\hat{\theta}$ dapat didekati oleh rata-rata $\hat{\theta}^*$ dari sampel hasil pengambilan berulang sebanyak B tersebut.

Dengan melihat prosedur di atas maka penyelesaian dari metode ini membutuhkan bantuan komputer untuk dapat menyelesaikan. (Efron, 1993:62)

2.10 Sifat-Sifat Penaksir

Keakuratan suatu penaksir parameter tergantung pada ukuran sampel dan metode yang digunakan untuk menaksir parameter tersebut. Sifat-sifat dari penaksir di antaranya adalah tidak bias dan efisien.

2.10.1 Tidak Bias

Suatu hal yang menjadi tujuan dalam penaksir adalah, penaksir haruslah "mendekati" nilai sebenarnya dari parameter yang ditaksir tersebut. Misalkan parameter β (digunakan parameter β agar tidak terikat pada parameter μ dan σ^2).

Sifat ketidakbiasan penaksiran adalah ukuran keakuratan sebagai penaksiran yang akan dijelaskan pada definisi-definisi berikut:

Definisi 2.5

Sebuah penaksir $\hat{\theta}$ dikatakan penaksir yang tidak bias bagi θ apabila E($\hat{\theta}$) = θ, untuk semua $\theta \in \Omega$. Selainnya dapat dikatakan bahwa $\hat{\theta}$ penaksir yang bias bagi θ.

Definisi 2.6

Jika $\hat{\theta}$ adalah penaksir yang bias bagi θ, bias bagi penaksir tersebut adalah selisih antara nilai harapannya dengan nilai θ yang sebenarnya, ditulis:

$$\text{bias} = E(\hat{\theta}) - \theta \tag{2.22}$$

2.10.2 *Mean Squared Error*

Di dalam mengevaluasi suatu penaksir, selain ketidakbiasan, satu hal lagi yang perlu diperhatikan adalah beberapa jauh penyebaran nilai penaksir tersebut dari nilai parameter sebenarnya (θ). Nilai penaksir yang sangat menyebar dari $\hat{\theta}$ berarti bahwa nilai $\hat{\theta}$ yang dihasilkan sangat bervariasi dan tidak efisien. Hal ini tentunya tidak diinginkan, harapannya suatu penaksir memiliki varian yang sekecil mungkin, yaitu Var $(\hat{\theta})$ minimum. Jika diberikan dua penaksir yang tidak bias bagi parameter θ, penaksir yang dipakai adalah penaksir yang memiliki varian terkecil.

Apabila suatu penaksir mempunyai bias tertentu, untuk mengevaluasi penaksir tersebut digunakan nilai harapan bagi $(\hat{\theta} - \theta)^2$, yang didefinisikan sebagai rata-rata galat kuadrat (*Mean Squared Error*), dinotasikan MSE.

Definisi 2.7

$\hat{\theta}$ sebagai penaksir bagi θ mempunyai rata-rata galat kuadrat:

$$\begin{aligned} MSE(\hat{\theta}) &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 \\ &= E\left(\hat{\theta}^2 - 2\,\hat{\theta}\theta + \theta^2\right) \\ &= E\left(\hat{\theta}^2\right) - 2\,E\left(\theta\hat{\theta}\right) + E(\theta^2) \\ &= E\left(\hat{\theta}\right)^2 - \left(E\left(\hat{\theta}\right)\right)^2 + \left(\mathrm{E}\left(\hat{\theta}\right)\right)^2 - 2\,\theta E(\hat{\theta}) + \theta^2 \end{aligned}$$

$$= Var(\hat{\theta}) + (E\,(\hat{\theta}^2) - \theta^2)$$

$$= Var\ (\hat{\theta})\ +\ Bias^2 \tag{2.23}$$

Yang merupakan fungsi dari varian bias bagi $\hat{\theta}$. Dari definisi tersebut dapat dibuktikan bahwa apabila suatu penaksir tidak bias, maka MSE $(\hat{\theta})$ akan tereduksi menjadi Var $(\hat{\theta})$ dan bersama ini dapat digunakan sebagai indikator koefisien suatu penaksir.

2.11 Simulasi Monte Carlo

Monte Carlo adalah algoritma komputasi menggunakan sampling acak yang berulang untuk menghitung hasilnya. Aplikasi dari metode ini sangat luas, dalam bidang matematika, Monte Carlo biasanya dipakai untuk meresampling data. Menurut Fishman (1995:64) simulasi Monte Carlo terbagi menjadi 5 tahapan:

1. Membuat distribusi peluang untuk variabel penting.

   Gagasan dasar dari simulasi Monte Carlo adalah membuat nilai dari variabel yang merupakan bagian dari model yang dipelajari.

2. Membangun distribusi peluang komulatif untuk tiap-tiap variabel ditahap pertama.
3. Menentukan interval angka acak untuk tiap variabel.
4. Membangkitkan bilangan acak.
5. Membuat simulasi dari rangkaian percobaan.

2.12 Kajian tentang Estimasi dalam al-Quran

Dalam al-Quran yang menjelaskan tentang estimasi adalah surat Ash-Shaffat ayat 147.

وَأَرْسَلْنَهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

"Dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih"

Ayat di atas merupakan sebuah gambaran tentang bagaimana sebuah konsep matematika bisa ditemukan dalam kandungan ayat suci al-Quran.

Ibnu Katsir berpendapat bahwa sangat mungkin umat yang ia diutus kepada mereka, umat itu pula yang diperintahkan untuk kembali kepada mereka setelah keluar dari perut ikan, sehingga mereka semua membenarkan dan mempercayainya. Al-Baghawi mengisahkan bahwa Yunus diutus kepada umat lain setelah keluar dari ikan besar, yang berjumlah 100.000 orang atau lebih. Firman Allah: au yaziiduun ("atau lebih") Ibnu 'Abbas mengatakan dalam sebuah riwayat lain darinya, bahwa jumlah mereka lebih dari itu, dimana mereka berjumlah 130 ribu orang. Dan darinya pula, yakni berjumlah sekitar 133-139 ribu orang. Dan masih darinya juga, yaitu berjumlah sekitar 143-149 ribu orang. Sa'id bin Jubair mengatakan bahwa jumlah mereka lebih dari 70.000 orang. Sedangkan Mak-hul mengatakan bahwa mereka berjumlah 110 ribu orang. Demikian yang diriwayatkan oleh Ibnu Abi Hatim. Dan Ibnu Jarir menceritakan dari orang yang mendengar Abul 'Aliyah mengatakan, telah bercerita kepadaku Ubay bin Ka'ab bahwasannya dia pernah bertanya kepada Rasulullah Saw. mengenai firman Allah: *wa arsalnaaHu ilaa mi-ati alfin au yaziiduun* ("dan Kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih.") dia mengatakan: "Mereka lebih dari 20 ribu orang.” (dlaif, diriwayatkan oleh at-Tirmidzi dalam Jaami’nya di kitab at-Tafsiir [3229]. Didlaifkan oleh Syaikh al-Albani dalam kitab Dlaif at-Tirmidzi [633]. Hal ini juga diriwayatkan oleh at-Tirmidzi. Juga diriwayatkan oleh Ibnu Abi Hatim. Sebagian bangsa Arab dari penduduk Bashrah berpendapat mengenai hal itu. Artinya 100 ribu orang atau lebih.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Estimasi Parameter Binomial Negatif Menggunakan *Method of Moment Estimate* (MME)

Estimasi parameter metode momen diperoleh dengan menyatakan momen sampel dengan momen teoritis. Dikarenakan distribusi Binomial Negatif mempunyai dua parameter, maka diperlukan momen pertama dan momen kedua dari fungsi massa peluangnya.

Fungsi massa peluang untuk distribusi Binomial Negatif berdasarkan persamaan (2.12) adalah:

$$f(x) = \frac{\Gamma(k^{-1}+x)}{\Gamma(k^{-1})x!}\left(\frac{k\mu}{1+k\mu}\right)^{x}\left(\frac{1}{1+k\mu}\right)^{k^{-1}}$$

dan persamaan di atas dapat ditulis

$$f(x) = \binom{k^{-1}+x-1}{x} p^{x}(1-p)^{k^{-1}} \tag{3.1}$$

dengan $p = \left(\frac{k\mu}{1+k\mu}\right)$.

fungsi pembangkit momen faktorial diperoleh dari persamaan (2.3), yaitu:

$$\eta_x(t) = E(t^X)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty}(t^x)\binom{k^{-1}+x-1}{x}p^x(1-p)^{k^{-1}}$$

$$= (1-p)^{k^{-1}}\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k^{-1}+x-1}{x}(t^x)p^x$$

$$= (1-p)^{k^{-1}}\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k^{-1}+x-1}{x}(tp)^x \tag{3.2}$$

Penjabaran dari $\binom{k^{-1}+x-1}{x}$ adalah sebagai berikut

$$\binom{k^{-1}+x-1}{x} = \frac{(k^{-1}+x-1)!}{(k^{-1}+x-1-x)!x!}$$

$$= \frac{(k^{-1}+x-1)(k^{-1}+x-2)\dots(k^{-1})(k^{-1}-1)!}{(k^{-1}-1)!x!}$$

$$= \frac{(k^{-1}+x-1)(k^{-1}+x-2)\dots(k^{-1})}{x!}$$

$$= \frac{k^{-1}(k^{-1}+1)(k^{-1}+2)\dots(k^{-1}+x-2)(k^{-1}+x-1)}{x!}$$

sedangkan penjabaran dari $\binom{-k^{-1}}{x}$ adalah

$$\binom{-k^{-1}}{x} = \frac{-k^{-1}!}{(-k^{-1}-x)!x!}$$

$$= \frac{-k^{-1}(-k^{-1}-1)\dots(-k^{-1}-x+1)(-k^{-1}-x)!}{(-k^{-1}-x)!x!}$$

$$= \frac{(-1)^x\{k^{-1}(k^{-1}+1)\dots(k^{-1}+x-1)\}}{x!}$$

$$= (-1)^x\binom{k^{-1}+x-1}{x}$$

Hubungan antara $\binom{k^{-1}+x-1}{x}$ dengan $\binom{-k^{-1}}{x}$ adalah:

$$\binom{k^{-1}+x-1}{x} = (-1)^x\binom{-k^{-1}}{x}$$

Persamaan (3.2) menjadi

$$\eta_x(t) = (1-p)^{k^{-1}}\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k^{-1}}{x}(tp)^x(-1)^x$$

$$\eta_x(t) = (1-p)^{k^{-1}}\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k^{-1}}{x}(-tp)^x$$

Mengingat bahwa $(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n 1^{p-n}$, dan mengacu pada persamaan (2.5), maka bentuk $\sum_{x=0}^{\infty}\binom{k^{-1}}{x}(-tp)^x$ akan sama dengan $(1-tp)^{k^{-1}}$.

Oleh karena itu fungsi pembangkit momen faktorial distribusi Binomial Negatif adalah

$$\eta_x(t) = (1 - tp)^{k^{-1}}(1 - p)^{-k^{-1}} \tag{3.3}$$

Momen distribusi Binomial Negatif dapat dihitung dengan cara turunan ke-n dari fungsi pembangkit momen faktorial terhadap t = 1. Momen pertama dan momen kedua dari distribusi Binomial Negatif adalah sebagai berikut:

Momen pertama:

$\eta'(t) = (1-p)^{k^{-1}} \; (-k^{-1})\,(1-tp)^{-k^{-1}-1}\,(-p)$

$\quad = (1-p)^{k^{-1}} \; k^{-1}\,p(1-tp)^{-k^{-1}-1}$

Untuk nilai t = 1

$$\eta'(1) = (1-p)^{k^{-1}} \; k^{-1}\,p(1-tp)^{-k^{-1}-1} = \frac{k^{-1}p}{(1-p)}$$

$$\eta'(1) = E(X) = \frac{k^{-1}p}{(1-p)} \tag{3.4}$$

Momen kedua:

$\eta''(t) = (1-p)^{k^{-1}} \; k^{-1}\,p(-k^{-1} - 1)(-p)(1-tp)^{-k^{-1}-2}$

$\eta''(t) = (1-p)^{k^{-1}} \; k^{-1}p\,(k^{-1}\,p + p)\,(1-tp)^{-k^{-1}-2}$

Untuk t = 1

$$\eta''(1) = (1-p)^{k^{-1}}\,k^{-1}\,p\,(k^{-1}\,p + p)\,(1-p)^{-k^{-1}-2}$$

$$\eta''(1) = \mathrm{E}\,(X(X-1))$$

$$= (1-p)^{k^{-1}}\,k^{-1}\,p\,(k^{-1}\,p + p)\,(1-p)^{-k^{-1}-2}$$

$$\mathrm{E}\,(X^2) - \mathrm{E}\,(X) = \frac{k^{-1}\,p\,(k^{-1}\,p+p)}{(1-p)^2}$$

$$\mathrm{E}\,(X^2) = \frac{k^{-1}\,p\,(k^{-1}\,p+p)}{(1-p)^2} + \mathrm{E}(X)$$

$$\mathrm{E}\,(X^2) = \frac{k^{-1}\,p\,(k^{-1}\,p+p)}{(1-p)^2} + \frac{k^{-1}\,p}{(1-p)}$$

$$\mathrm{E}\,(X^2) = \frac{k^{-1}\,p\,(k^{-1}\,p+p) + k^{-1}\,p\,(1-p)}{(1-p)^2}$$

$$\mathrm{E}\,(X^2) = \frac{(k^{-1}\,p)^2 + k^{-1}\,p^2 - k^{-1}p - k^{-1}\,p^2}{(1-p)^2}$$

$$\mathrm{E}\,(X^2) = \frac{k^{-1}\,p\,(k^{-1}\,p+1)}{(1-p)^2} \tag{3.5}$$

Varian distribusi Binomial Negatif adalah

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,(\mathrm{X}) &= E\,(X^2) - (\mathrm{E}X)^2 \\ &= \frac{k^{-1}\,p\,(k^{-1}\,p+1)}{(1-p)^2} - \left(\frac{k^{-1}\,p}{1-p}\right)^2 \\ &= \frac{(k^{-1}\,p)^2 + k^{-1}\,p - (k^{-1}\,p)^2}{(1-p)^2} \\ &= \frac{k^{-1}\,p}{(1-p)^2} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.13), (3.4) dan (3.5) diperoleh:

$$\mathrm{E(X)} = \frac{\hat{k}^{-1}\,\hat{p}}{(1-\hat{p})} = \bar{X} \tag{3.7}$$

dan

$$\mathrm{E}(X^2) = \frac{\hat{k}^{-1}\,\hat{p}\,(\hat{k}^{-1}\,\hat{p}+1)}{(1-\hat{p})^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{3.8}$$

Sehingga dari persamaan (3.7) diperoleh

$$\hat{k}^{-1} = \frac{\bar{X}(1-\hat{p})}{\hat{p}} \tag{3.9}$$

Kemudian persamaan (3.9) disubtitusikan ke persamaan (3.8), diperoleh

$$\frac{\frac{\bar{X}(1-\hat{p})}{\hat{p}}\,\hat{p}\left(\left(\frac{\bar{X}(1-\hat{p})}{\hat{p}}\,\hat{p}\right)+1\right)}{(1-p)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\frac{\bar{X}(\bar{X}\,(1-\hat{p})+1)}{(1-\hat{p})} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\bar{X}^2 + \frac{\bar{X}}{(1-\hat{p})} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$\frac{1}{(1-\hat{p})} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2}{\bar{X}}$$

$$(1-\hat{p}) = \frac{\bar{X}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2}$$

$$(1-\hat{p}) = \frac{\bar{X}}{S^2}$$

$$\hat{p} = 1 - \frac{\bar{X}}{S^2} \tag{3.10}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.10) pada persamaan (3.9) maka dapat diperoleh:

$$\hat{k}^{-1} = \frac{(1-\hat{p})\bar{X}}{\hat{p}}$$

$$\hat{k}^{-1} = \frac{\bar{X}\left(\frac{\bar{X}}{S^2}\right)}{\left(1-\frac{\bar{X}}{S^2}\right)}$$

$$\hat{k}^{-1} = \frac{\bar{X}^2}{S^2-\bar{X}}$$

$$\hat{k} = \frac{S^2-\bar{X}}{\bar{X}^2} \tag{3.11}$$

3.2 Estimasi Parameter Binomial Negatif Menggunakan *Maximum Likelihood Estimate* (MLE)

Metode lain yang digunakan untuk mengestimasi parameter dari distribusi Binomial Negatif yaitu metode *Maximum Likelihood Estimate*. Fungsi *Likelihood* dari distribusi Binomial Negatif adalah sebagai berikut:

$$L(\mu, k) = \prod_{i=0}^{k} f(x_i|\mu, k)$$

$$= \prod_{i=0}^{k} \binom{k^{-1}+x_i-1}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{k^{-1}}$$

$$= \prod_{i=0}^{k} \frac{\Gamma(k^{-1}+x_i)}{\Gamma(k^{-1})x_i!} \left(\frac{k\mu}{1+k\mu}\right)^{x_i} \left(\frac{1}{1+k\mu}\right)^{k^{-1}} \tag{3.12}$$

Fungsi *log-likelihood* dari persamaan (3.12)

$$l(\mu,k) = \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{\Gamma\,(k^{-1}+ x_i)}{\Gamma(k^{-1})x_i!}\right) + x_i \ln\left(\frac{1}{1+k\mu}\right) + k^{-1}\ln\left(\frac{1}{1+k\mu}\right)\right] \qquad (3.13)$$

misal A = $\ln\left(\frac{\Gamma\,(k^{-1}+ x_i)}{\Gamma(k^{-1})x_i!}\right)$ maka persamaan (3.13) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} l\,(\mu,k) &= \sum_{i=1}^{n}\left[A + x_i \ln\left(\frac{k\mu}{1+k\mu}\right) + k^{-1}\ln\left(\frac{1}{1+k\mu}\right)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[A + x_i\,(\ln k\mu - \ln(1+k\mu)) + k^{-1}\,(\ln 1 - \ln(1+k\mu))] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[A + x_i\,\ln k\mu - x_i \ln(1+k\mu) - k^{-1}\ln(1+k\mu)] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[A + x_i\,\ln k\mu - (x_i + k^{-1})\ln(1+k\mu)] \qquad (3.14) \end{aligned}$$

Dengan mensubtitusikan kembali nilai A, maka persamaan (3.14) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} l\,(\mu,k) &= \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{\Gamma\,(k^{-1}+ x_i)}{\Gamma(k^{-1})x_i!}\right) + x_i \ln(k\mu) - (x_i + k^{-1})\ln(1+k\mu)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{\Gamma\,(k^{-1}+ x_i)}{\Gamma(k^{-1})}\right) - \ln(x_i\,!) + x_i \ln k\mu - (x_i + k^{-1})\ln(1+k\mu)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\ln\left(\frac{\Gamma\,(k^{-1}+ x_i)}{\Gamma(k^{-1})}\right) - \ln(x_i\,!) + x_i \ln k + x_i \ln\mu - (x_i + k^{-1})\ln(1+k\mu)\right] \qquad (3.15) \end{aligned}$$

bentuk $\frac{\Gamma\,(k^{-1}+ x_i)}{\Gamma(k^{-1})}$ dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{\Gamma\,(k^{-1}+ x_i)}{\Gamma(k^{-1})} = (k^{-1} + x_i - 1)\,(k^{-1} + x_i - 2)\ldots(k^{-1} + 1)\,(k^{-1})$$

sehingga:

$$ln\left\{\frac{\Gamma\,(k^{-1}+x_i)}{\Gamma(k^{-1})}\right\} = \sum_{v=0}^{x_i-1}(k^{-1}+v) \tag{3.16}$$

dengan mensubtitusikan persamaan (3.16) ke persamaan (3.15) maka diperoleh

$$l(\mu,k)\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{v=0}^{x_i-1}\ln(k^{-1}+\mathrm{v})\right)-\ln(\mathrm{x}_i!)+\mathrm{x}_i\ln k+\mathrm{x}_i\ln\mu-(\mathrm{x}_i+k^{-1})\ln(1k\mu)\right] \tag{3.17}$$

Estimasi untuk μ dan k menggunakan *Maximum Likelihood Estimate*. MLE $(\hat{\mu},\hat{k})$ adalah solusi turunan pertama persamaan (3.17) terhadap tiap parameter yang diestimasi

$$\frac{\partial l}{\partial \mu}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}-\frac{k\,(x_i+k^{-1})}{1+k\mu}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\mu}-\frac{kx_i+1}{1+k\mu}\right) \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial l}{\partial k}=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{v=0}^{x_i-1}-\frac{1}{k\,(1+kv)}\right)+\frac{x_i}{k}-\left(-\frac{\ln(1+k\mu)}{k^2}+\frac{x_ik+1}{k}\,\frac{\mu}{1+k\mu}\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{v=0}^{x_i-1}-\frac{1}{k\,(1+kv)}\right)+\frac{x_i}{k}+\left(\frac{\ln(1+k\mu)}{k^2}-\frac{\mu(x_ik+1)}{k(1+k\mu)}\right)\right] \tag{3.19}$$

Untuk memperoleh hasil maksimum dari tiap-tiap parameter, maka persamaan (3.18) dan (3.19) disamadengankan nol.

$$\frac{\partial l}{\partial \mu}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\hat{\mu}}-\frac{kx_i+1}{1+k\hat{\mu}}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\hat{\mu}}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{kx_i+1}{1+k\hat{\mu}}\right)=0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\hat{\mu}}-\frac{k\,(\sum_{i=1}^{n}x_i\,)+n}{1+k\,\hat{\mu}}=0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\hat{\mu}}-\frac{k\,\sum_{i=1}^{n}x_i}{1+k\,\hat{\mu}}-\frac{n}{1+k\,\hat{\mu}}=0$$

$$\frac{(1+k\hat{\mu})\sum_{i=1}^{n} x_i - k\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu}}{\hat{\mu}(1+k\hat{\mu})} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + k\hat{\mu}\ \sum_{i=1}^{n} x_i - k\hat{\mu}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu}}{\hat{\mu}(1+k\hat{\mu})} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu}}{\hat{\mu}(1+k\hat{\mu})} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu} = 0$$

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$\hat{\mu} = \bar{X} \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial l}{\partial k} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\sum_{v=0}^{x_i} - \frac{1}{k\,(1+\hat{k}v)}\right) + \frac{x_i}{\hat{k}} + \frac{\ln(1+\hat{k}\bar{X})}{\hat{k}^2} - \frac{\bar{X}\,(x_i\ \hat{k}+1)}{\hat{k}\,(1+\hat{k}\bar{X})}\right] = 0 \tag{3.21}$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.21) metode yang dapat digunakan adalah Newton-Raphson. Solusi dari persamaan (3.21) tersebut merupakan *Maximum Likelihood Estimate* dari $\hat{k}$.

3.3 Metode *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE) sebagai Estimator *k*

Low Mean Problem dapat diselesaikan dengan meningkatkan ukuran sampel. Tetapi tidak semua data dapat diselesaikan dengan meningkatkan ukuran sampelnya, hal tersebut karena dipengaruhi berbagai faktor diantaranya adalah faktor biaya, faktor waktu dan faktor tenaga.

Metode *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE) diusulkan untuk mengestimasi nilai *k* yang telah ditetapkan sebelumnya dari distribusi Binomial Negatif di bawah kondisi rata-rata sampel yang rendah dan ukuran sampel yang kecil. Adapun algoritma dari metode *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE) adalah sebagai berikut:

1. Mengoleksi data pada $\chi = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, kemudian menempatkan probabilitas sebesar $\frac{1}{n}$ untuk setiap observasi $X_1 = x_1$, $X_2 = x_2$, …, $X_n = x_n$.
2. Mengambil sampel acak berukuran n dengan pengambilan dari χ : $\chi^* = \{X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*\}$ kemudian menghitung varian dan rata-rata dari χ^*. Jika nilai varian kurang dari atau sama dengan rata-rata, maka ulangi langkah ke-2.
3. Menghitung estimasi Bootstrap k^* dari χ^* menggunakan metode *Maximum Likelihood Estimate*.
4. Mengulangi langkah 2 dan 3 sebanyak B kali untuk memperoleh *b* estimasi dari k^*: $k_{1,b}^*, k_{2,b}^*, \dots, k_{b,b}^*$.
5. Mengurutkan *b* estimasi dari k^*, maka nilai *k* dapat didekati dengan nilai median dari $k_{1,b}^*, k_{2,b}^*, \dots, k_{b,b}^*$.

Adapun untuk lebih memperjelas alur dari estimasi parameter dispersi dengan menggunakan metode *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* dapat dilihat pada lampiran 1.

3.4 Simulasi Perbandingan *Method of Moment Esimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) Dan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE)

3.4.1 Simulasi Monte Carlo

3.4.1.1 Simulasi Monte Carlo *Method of Moment Estimate* (MME)

Method of Moment Estimate (MME) adalah sebuah penaksir yang bertujuan memperoleh hasil penaksiran yang baik. Namun pada *Method of Moment Estimate*

(MME) kesulitan dalam mengestimasi parameter dispersi oleh sebab itu nilai dari $\hat{k}$ sudah diketahui dengan persamaan yang sudah dikerjakan pada bagian (3.11). Adapun algoritma dari *Method of Moment Estimate* (MME) adalah sebagai berikut:

1. Membangkitkan sebuah sampel $\chi = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, yang berukuran n dari distribusi Binomial Negatif $X \backsim NB\ (\mu, k)$, kemudian menghitung varian dan rata-rata dari sampel tersebut, jika nilai varian lebih kecil atau sama dengan rata-rata, maka dibangkitkan kembali χ.
2. Menghitung estimasi dari $\hat{k}$ menggunakan *Method of Moment Estimate* (MME).
3. Menghitung Bias serta *Mean Squared Error* dari rata-rata estimasi k.

3.4.1.3 Simulasi Monte Carlo *Maximum Likelihood Estimate* (MLE)

Maximum Likelihood Estimate (MLE) merupakan sebuah metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter dispersi pada distribusi Binomial Negatif. Adapun hasil estimasi parameter dispersi distribusi Binomial Negatif dengan metode *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dapat dilihat pada persamaan (3.21) namun untuk menyelesaikan persamaan tersebut menggunakan metode Newton-Raphson. Untuk algoritma dari simulasi dengan *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) adalah sebagai berikut:

1. Membangkitkan sebuah sampel $\chi = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, yang berukuran n dari distribusi Binomial Negatif $X \backsim NB\ (\mu, k)$, kemudian menghitung varian dan rata-rata dari sampel tersebut, jika nilai varian lebih kecil atau sama dengan rata-rata, maka dibangkitkan kembali χ.
2. Menghitung varian dan rata-rata dari sampel tersebut, jika nilai varian lebih kecil atau sama dengan rata-rata maka dibangkitkan kembali nilai χ.

3. Menghitung estimasi dari $\hat{k}$ menggunakan *Maximum Likelihood Estimate* (MLE).
4. Menghitung Bias serta *Mean Squared Error* dari rata-rata estimasi *k*.

3.4.2.3 Simulasi Monte Carlo *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE)

Simulasi Monte Carlo digunakan untuk menunjukkan kinerja dan kegunaan dari *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* dalam keadaan rata-rata sampel yang rendah dan ukuran sampel yang kecil. Adapun algoritma dari simulasi tersebut adalah sebagai berikut:

1. Membangkitkan sebuah sampel $\chi = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, yang berukuran n dari distribusi Binomial Negatif $X \backsim NB\,(\mu, k)$.
2. Menghitung varian dan rata-rata dari sampel tersebut, jika nilai varian lebih kecil atau sama dengan rata-rata maka dibangkitkan kembali nilai χ.
3. Menghitung estimasi dari $\hat{k}$ menggunakan Bootstrap *Maximum Likelihood Estimate*.
4. Mengulangi langkah 1 dan 2 sampai diperoleh nilai *r* estimasi dari *k*.
5. Menghitung rata-rata *r* banyaknya estimasi dari *k* tersebut.
6. Menghitung Bias serta *Mean Squared Error* dari rata-rata estimasi *k*.

Untuk mengetahui perbedaan kinerja dari masing-masing estimator, maka pada simulasi ini diambil nilai-nilai parameter sebagai berikut:

μ = 0.50, 0.75, 1, 1.50, 1.75 dan 2

k = 1, 2, 3, dan 4 untuk setiap μ

n = 50, 100, 200 dan 500

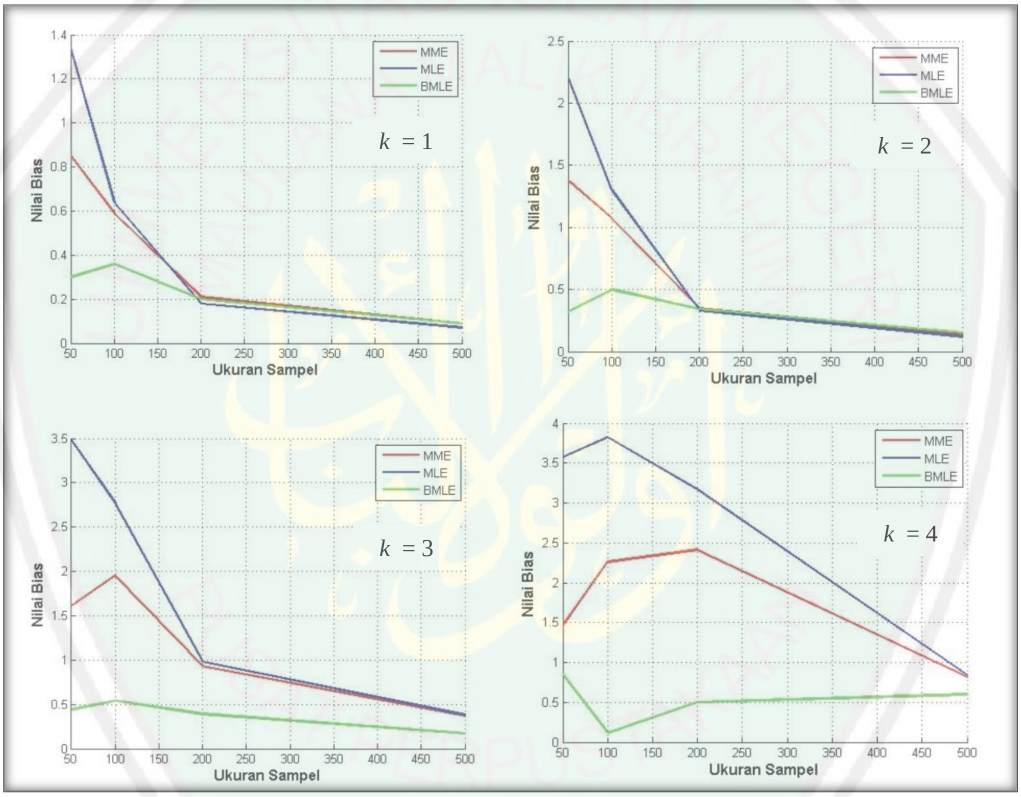
r = 500

Dengan μ adalah rata-rata dengan ukuran sampel n adalah nukuran sampel, k adalah parameter dispersi dan r adalah banyaknya estimasi. Menurut Willson (1984:45), selama simulasi sebuah sampel tidak digunakan jika estimasi pada sampel tersebut tidak konvergen.

Simulasi ini dijalankan melalui program Matlab dengan membandingkan Bias, varian dan *Mean Squared Error* dari sebanyak r simulasi yang dijalankan. Bias merupakan selisih antara nilai sebenarnya dengan nilai rata-rata dan varian adalah ukuran penyebaran dari estimasi disekitar rata-rata untuk setiap estimasi. Agar lebih jelas dapat dilihat dari diagram alir untuk simulasi estimasi parameter dispersi k pada lampiran 2.

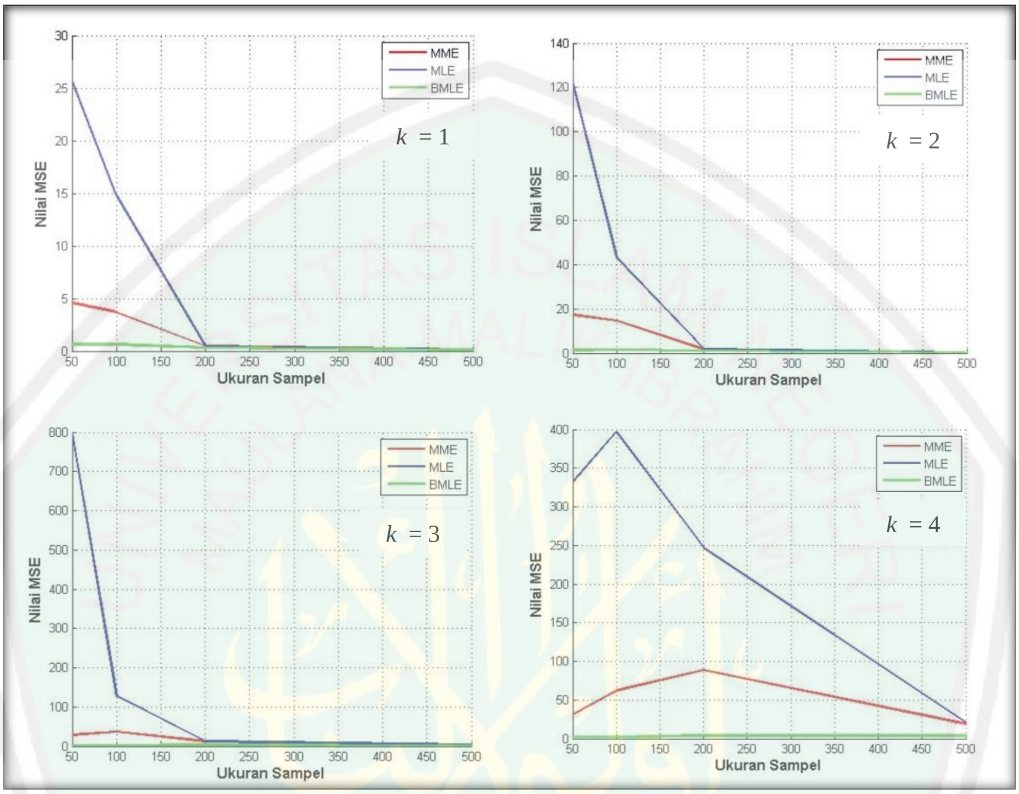
3.4.2 Hasil Analisis Data Simulasi

Berdasarkan hasil simulasi sesuai dengan langkah-langkah simulasi yang telah dijelaskan pada simulasi Monte Carlo maka didapatkan grafik perbandingan antara metode MME, MME dan BMLE sebagai berikut:



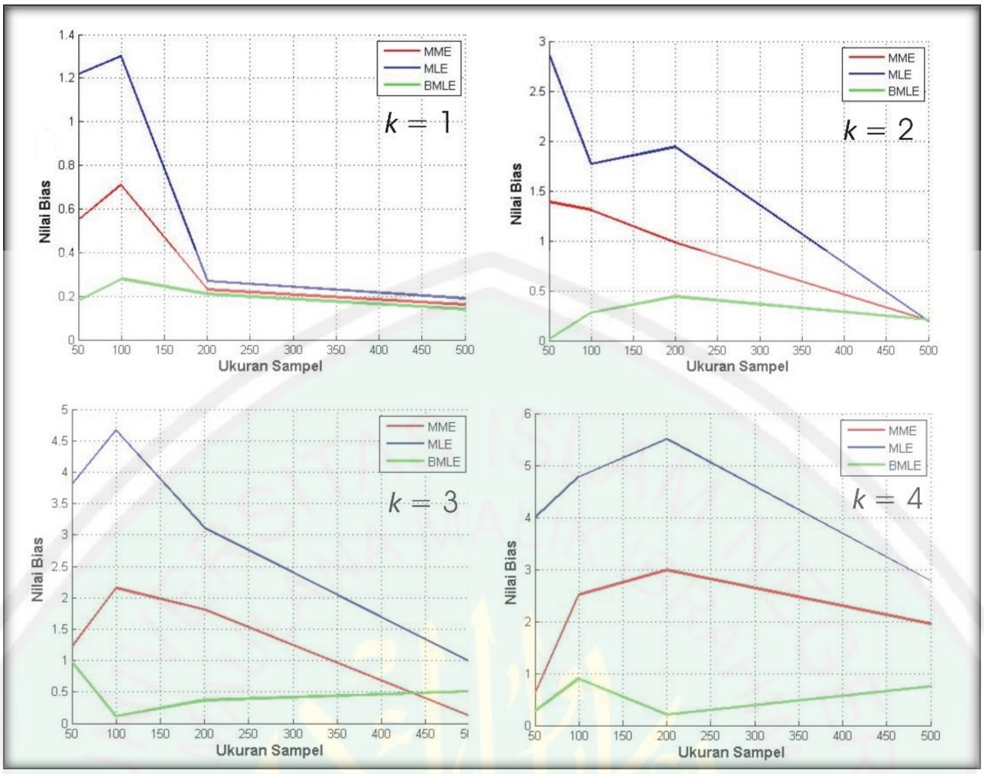
Gambar 3.1. Grafik Perbandingan Bias untuk μ =1 dan k = 1, 2, 3 dan 4

Pada gambar 3.1 menunjukan bahwa nila bias pada metode BMLE secara umum lebih kecil dari pada nilai bias dari metode MME dan metode MLE, hal ini menunjukkan bahwa metode BMLE lebih baik dari pada metode MME dan metode MLE. Keunggulan metode BMLE semakin terlihat pada saat nilai k dan nilai sampel semakin besar, di saat nilai bias pada MME dan MLE masih cukup besar namun nilai bias pada BMLE jauh lebih kecil. Untuk lebih jelasnya bisa dilihat pada lampiran 3 tabel 5.



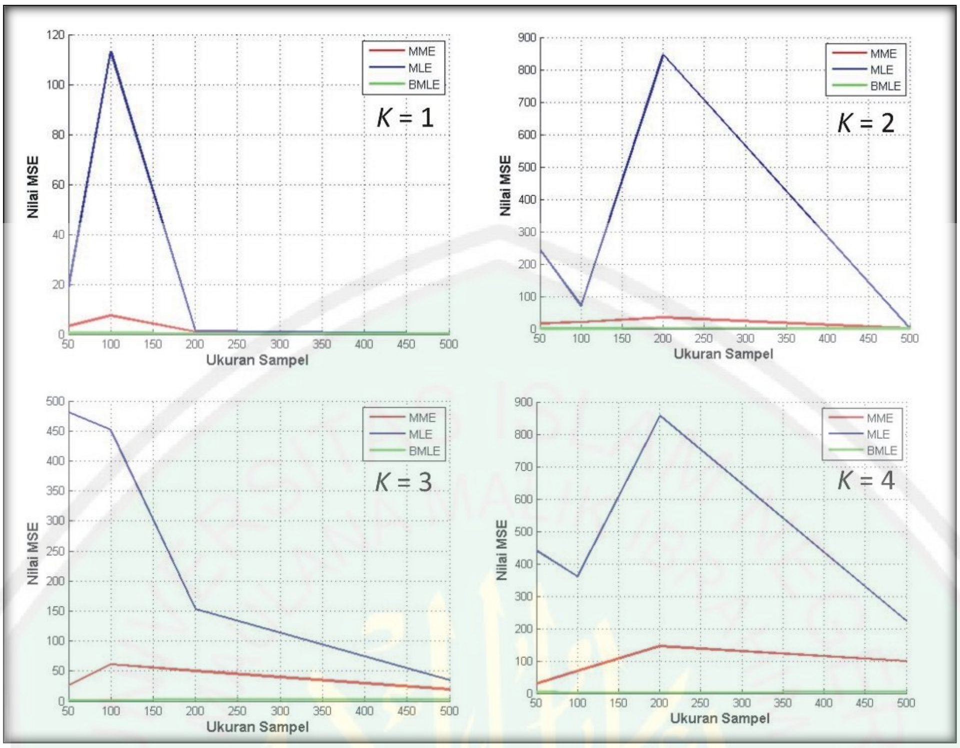
Gambar 3.2. Grafik Perbandingan MSE untuk μ =1 dan k = 1, 2, 3 dan 4

Pada gambar 3.2 menunjukan bahwa bahwa nila MSE pada metode BMLE secara umum lebih kecil dari pada nilai MSE dari metode MME dan metode MLE, hal ini menunjukkan bahwa metode BMLE lebih baik dari pada metode MME dan metode MLE. Keunggulan metode BMLE semakin terlihat pada saat nilai k dan nilai sampel semakin besar, di saat nilai MSE pada MME dan MLE masih cukup besar namun nilai MSE pada BMLE jauh lebih kecil dan stabil. Untuk lebih jelasnya bisa dilihat pada lampiran 3 tabel 6.



Gambar 3.3. Grafik Perbandingan Bias untuk μ =0.5 k = 1, 2, 3 dan 4

Pada gambar 3.3 menunjukan menunjukan bahwa bahwa nila bias pada metode BMLE secara umum lebih kecil dari pada nilai biasE dari metode MME dan metode MLE, hal ini menunjukkan bahwa metode BMLE lebih baik dari pada metode MME dan metode MLE. Keunggulan metode BMLE semakin terlihat pada saat nilai μ kecil nilai k dan nilai sampel semakin besar, di saat nilai μ kecil nilai bias MME dan MLE masih cukup besar namun nilai bias saat nilai μ kecil pada BMLE jauh lebih kecil dan stabil



Gambar 3.4. Grafik Perbandingan MSE untuk μ =0.5 k = 1, 2, 3 dan 4

Pada gambar 3.4 menunjukan bahwa bahwa nila MSE pada metode BMLE secara umum lebih kecil dari pada nilai MSE dari metode MME dan metode MLE, hal ini menunjukkan bahwa metode BMLE lebih baik dari pada metode MME dan metode MLE. Keunggulan metode BMLE semakin terlihat pada saat nilai k dan nilai sampel semakin besar, di saat nilai μ kecil nilai MSE MME dan MLE masih cukup besar namun nilai MSE pada BMLE jauh lebih kecil.

Pada gambar 3.1 sampai dengan gambar 3.5 menunjukkan bahwa metode BMLE lebih baik dari pada metode MME dan metode MLE,hal ini dapat dilihat dari gambar di atas bahwasanya nilai BMLE lebih baik di saat nilai k dan nilai sampel besar dan juga di saat nilai μ kecil. Berbeda dengan metode MME dan metode MLE pada saat nilai k dan nilai sampel besar metode MME dan metode MLE menunjukkan nilai yang besar pula namun di saat nila μ kecil metode MME dan metode MME munjukkan nilai bias dan MSE yang besar

3.5 Penjelasan Estimasi dalam al-Quran

Statistika adalah cabang matematika yang berkaitan dengan pengumpulan data, pengolahan data, panyajian data, analisis data, dan penarikan kesimpulan. Suatu kegiatan utama dalam statistik adalah pengumpulan data. Dalam masalah mengumpulkan data yaitu mencatat atau membukukan data, al-Quran juga membicarakannya. Perhatikan al-Quran surat Al-Kahfi ayat 49.

وَيَوْمَ نُسَيِّرُ الْجِبَالَ وَتَرَى الْأَرْضَ بَارِزَةً وَ حَشَرْنَهُمْ فَلَمْ نُغَادِرْ مِنْهُمْ أَحَدًا ﴿٤٧﴾

“ *Dan (Ingatlah) akan hari (yang ketika itu) kami perjalankan gunung-gunung dan kamu akan dapat melihat bumi itu datar dan kami kumpulkan seluruh manusia, dan tidak kami tinggalkan seorangpun dari mereka “.*

Al-Quran sendiri telah memberikan bukti konkrit tentang statistika. Dalam al-Quran terdapat keajaiban statistik (*statistical miracle*) dalam penyebutan kata. Terdapat ketelitian dan keseimbangan dalam jumlah penyebutan suatu kata dikaitkan dengan sinonim, antonim, akibat, penyebab, atau bahkan dengan realitas kehidupan sehari-hari.

Pada statistik juga terdapat suatu metode yaitu estimasi. Dimana dalam statistik yang dimaksud dengan estimasi adalah perkiraan terhadap sebuah masalah yang belum diketahui hasilnya secara pasti. Adapun ayat pada al-Quran yang menjelaskan tentang estimasi adalah pada QS Ash-Shaffat ayat 147.

وَأَرْسَلْنَهُ إِلَى مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيْدُوْنَ ﴿١٤٧﴾

“Dan kami utus dia kepada seratus ribu orang atau lebih”.

Pada ayat tersebut dijelaskan bahwa nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih. Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya. Bukankah Allah SWT maha mengetahui yang gaib dan yang nyata. Bukankah Allah SWT Maha mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah umat nabi Yunus. Jawaban terhadap pertanyaan tersebut adalah " inilah contoh estimasi (taksiran)".

Dalam kaitannya tentang estimasi dengan *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Metode Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE) pada QS Ash-Shaffat ayat 147 menjelaskan jumlah kaum nabi Yunus berjumlah sekitar 100.000 orang atau lebih. Adapun tafsiran para ulama tentang kepastian jumlah kaum nabi Yunus adalah sebagai berikut:

1. Menurut tafsiran Ibnu Katsir berpendapat bahwa memang benar jumlahnya adalah 100.000 orang atau lebih.
2. Menurut tafsiran Al-Baghawi mengisahkan bahwa Yunus diutus kepada umat lain setelah keluar dari ikan besar, yang berjumlah 100.000 orang atau lebih. Firman Allah. Swt: *au yaziiduun* ("atau lebih") Ibnu 'Abbas mengatakan dalam sebuah riwayat lain darinya, bahwa jumlah mereka lebih dari itu, dimana mereka berjumlah 130 ribu orang. Dan darinya pula, yakni berjumlah sekitar 133-139 ribu orang. Dan masih darinya juga, yaitu berjumlah sekitar 143-149 ribu orang.
3. Menurut tafsiran Sa'id bin Jubair mengatakan bahwa jumlah mereka lebih dari 70.000 orang.

4. Menurut tafsiran Sedangkan Mak-hul mengatakan bahwa mereka berjumlah 110 ribu orang.
5. Menurut tafsiran at-Tirmidzi Mengatakan Mereka lebih dari 20 ribu orang.

Dari berbagai tafsiran tentang jumlah kaum nabi Yunus bisa dikaitkan dengan metode estimasi dengan menggunakan *Method of Moment Estimate* (MME), *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) dan *Metode Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* (BMLE), dimana tafsiran tersebut bisa diasumsikan sebagai sebuah sampel χ dimana nantinya semua sampel-sampel tersebut akan diuji dengan ketiga metode tersebut dan nantinya akan didapatkan hasil yang lebih baik.

BAB IV

KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan kesimpulan dari skripsi ini dapat diambil kesimpulan sebagai brikut:

1. Nilai estimasi parameter dispersi Binomial Negatif dengan *Method of Moment Estimate* (MME) adalah $\hat{k} = \frac{S^2 - \bar{X}}{\bar{X}^2}$. Sedangkan Nilai estimasi pameter dispersi Binomial Negatif dengan *Maximum Likelihood Estimate* (MLE) adalah solusi numerik dari persamaan

$$\frac{\partial l}{\partial k} = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{v=0}^{x_i} - \frac{1}{k\,(1+\hat{k}v)} \right) + \frac{x_i}{\hat{k}} + \frac{\ln(1+\hat{k}\bar{X})}{\hat{k}^2} - \frac{\bar{X}\ (x_i\ \hat{k}+1)}{\hat{k}\ (1+\hat{k}\bar{X})} \right] = 0$$

   dengan menggunakan metode Newton-Raphson, dan nilai estimasi parameter dispersi Binomial Negatif dengan *Bootstrap Maximum Likelihood Estimate* adalah berbentuk algoritma resampling untuk mengestimasi parameter dispersi *k* dengan metode MLE yang dilakukan perulangan sebanyak *r* kali.
2. Berdasarkan hasil analisis data simulasi dapat dilihat bahwa nilai bias, varian dan MSE meningkat seiring dengan meningkatnya nilai *k*. Nilai bias, varian dan MSE berbanding terbalik dengan nilai rata-rata dan ukuran sampel, maka nilai bias, varian dan MSE semakin besar terutama untuk metode MLE dan metode MME. Sedangkan untuk metode BMLE nilai rata-rata dan ukuran sampel yang berbeda tidak memberikan perbedaan yang signifikan hal ini ditunjukkan dari nilai bias dan MSE relatif kecil dengan hal ini menunjukan

bahwasanya metode BMLE lebih akurat daripada metode MME dan metode MLE dalam mengestimasi parameter dispersi dari distribusi Binomial Negatif..

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan pada pembahasan yang lebih mendalam lagi dan dapat digunakan metode resampling lain seperti *Jack Knife* resampling.

DAFTAR PUSTAKA

Efron dan Tibshirani, R. J. 1993. *An Introduction to the Bootstrap*.

Fishman. 1995. The Bootstrap and Other Methods. *Biometrics*, 6: 589-599.

Hall, Wilson, P.S.R. 1996. Two Guidelines for Bootstrap Hypothesis Testing. *Biometrics*,47: 757-762.

Hilbe, J. M. 2011. *Negative Binomial Regression*, *Second Edition*, Cambridge University Press, New York.

Klugman, S.A., Panjer, H.H dan Wiltmot, G.E. 2004. *Loss Model: From Data to Decisions*.

Kismiantini. 2007. *Pendugaan Statistik Area Kecil Berbasis Model Poisson Gamma*. Tesis tidak dipublikasikan. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

Lutfi. 2008. *Estimasi Distribusi Binomial Negatif dengan Metode Bootstrap Maximum Likelihood*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Brawijaya.

Mishra, S.H dan Dudewiez, E. J. 1988. *Modern Mathematical Statistics*. New York: Wiley.

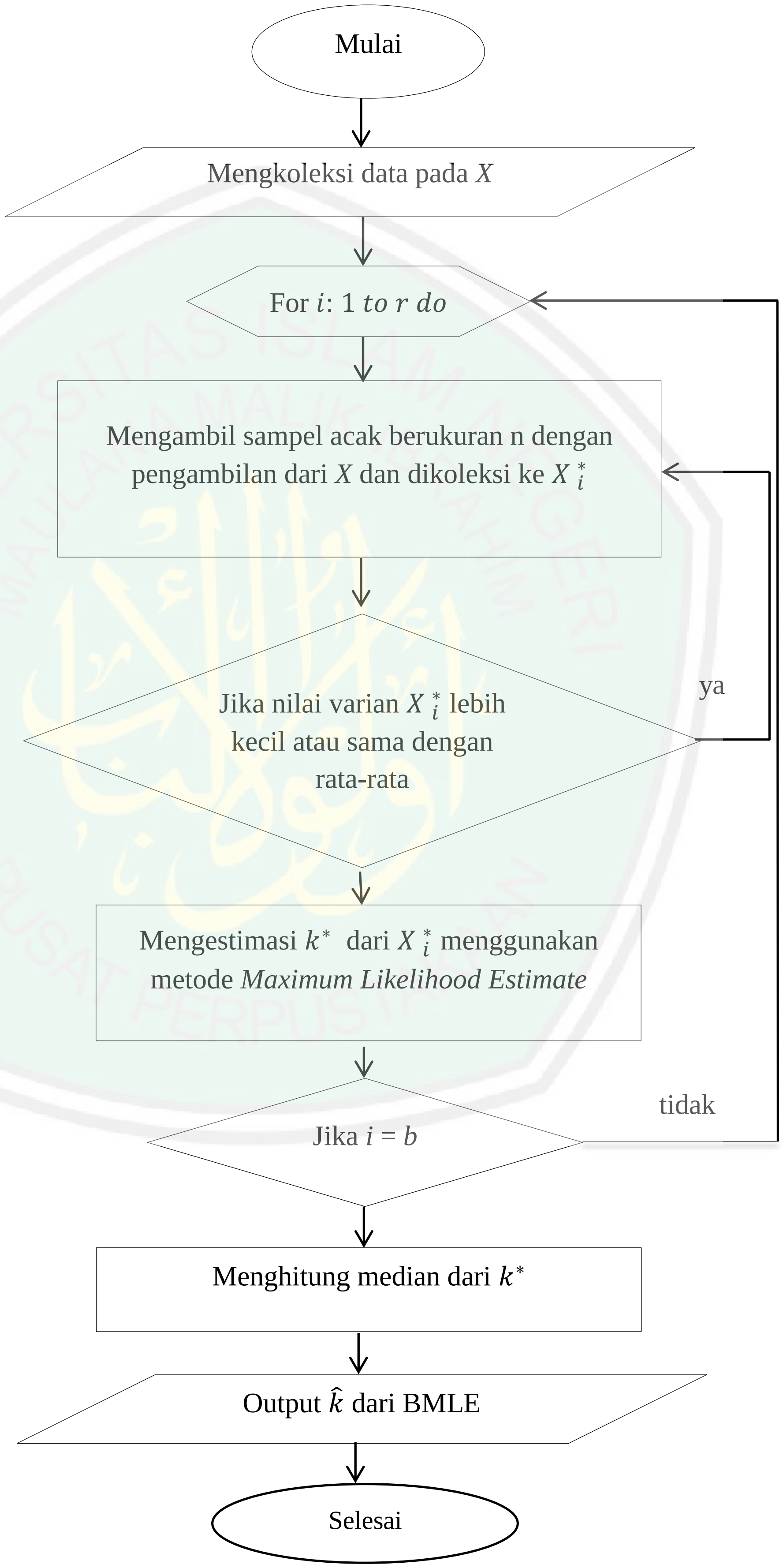
Hidayat, D. 2008. Terjemahan Tafsir Jalalain versi 20, (Online) (http:// Myface online.blogspot. com), diakses tanggal 22 Desember 2013

Walpole, R. E dan Myers, H. R. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung: ITB.

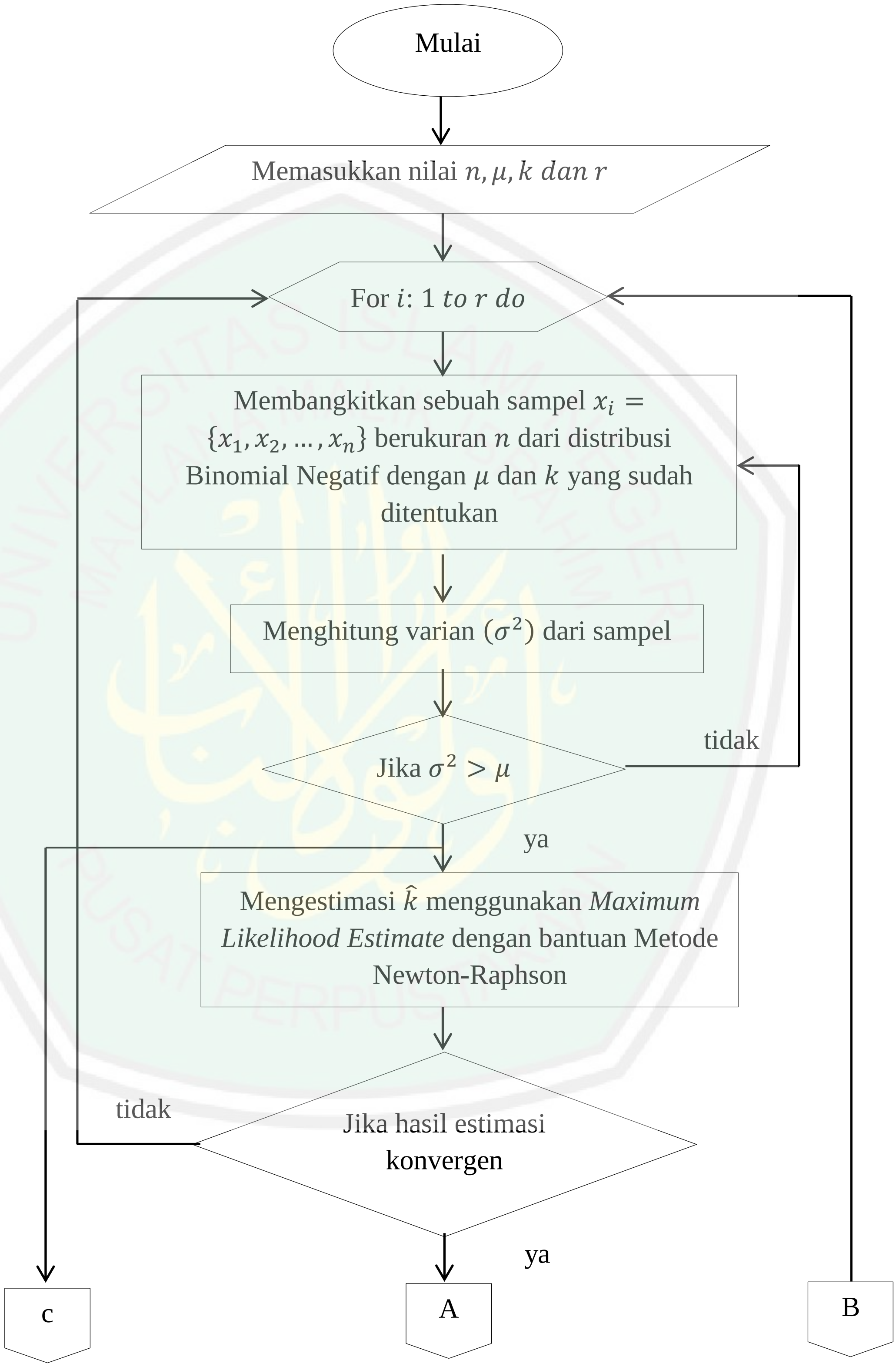
Wilson, L.J., Folks, J.L., dan Young J.H. 1984. Multisgate Compared with Fixed-Sample-Zize Estimation of the Negative Binomial Parameter *k*. *Biometrics*, 109: 17.

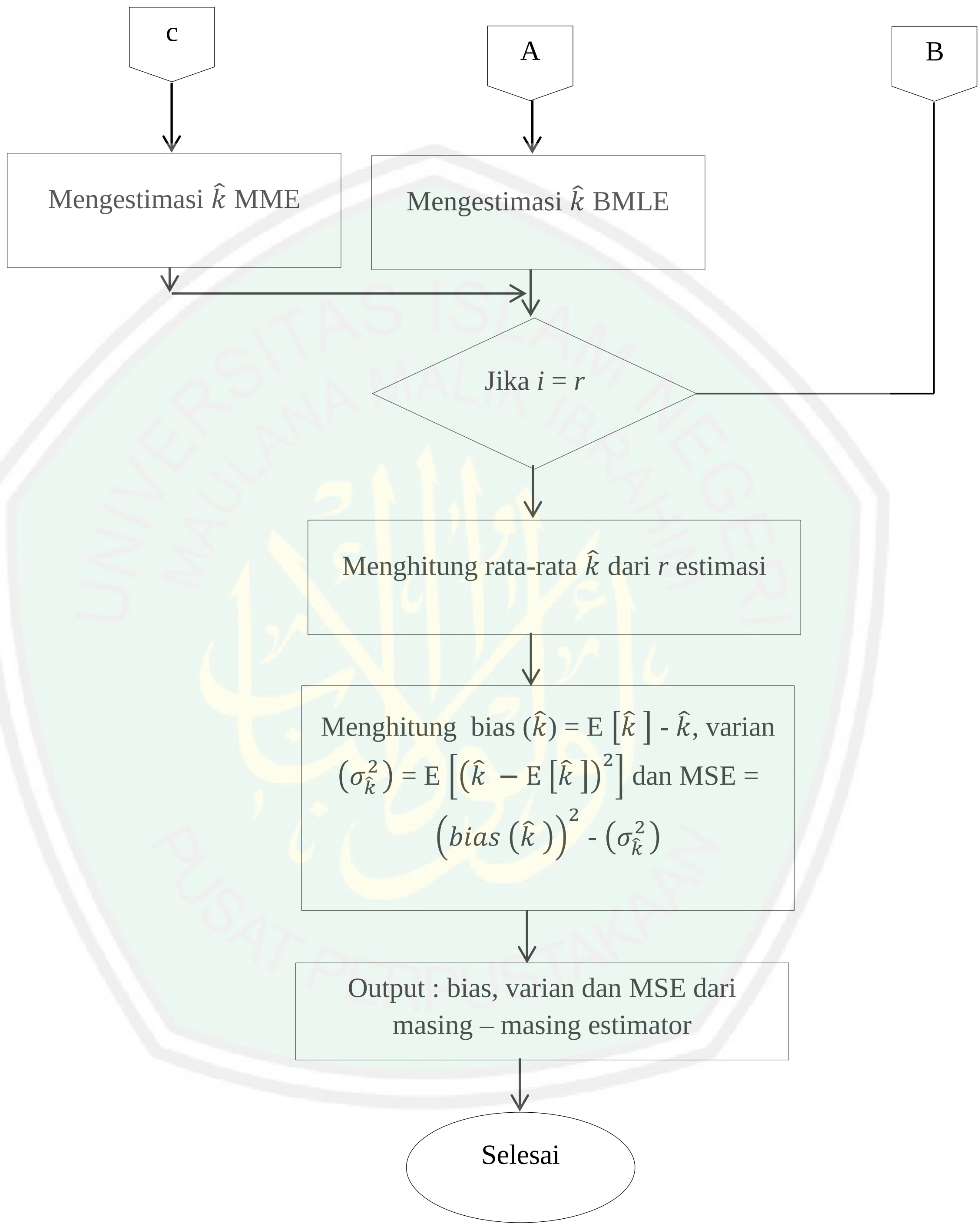
Zhang, Yunlong. 2006. *Estimating the Dispersion Parameter of the Negative Binomial Distribution for Analyzing Crash Data Using a Bootstrapped Maximum Likelihood Method*. Assistant Professor Zachry Department of Civil Engineering: Texas

Lampiran 1: Diagram alir Metode *Bootstrap Maximum Likelihood*



Lampiran 2 : Diagram alir simulasi estimasi parameter dispersi *k*




c
A
B
Mengestimasi $\hat{k}$ MME
Mengestimasi $\hat{k}$ BMLE
Jika $i = r$
Menghitung rata-rata $\hat{k}$ dari r estimasi
Menghitung bias $(\hat{k})$ = E $[\hat{k}]$ - $\hat{k}$, varian $(\sigma_{\hat{k}}^2)$ = E $\left[\left(\hat{k} - E[\hat{k}]\right)^2\right]$ dan MSE = $\left(bias\ (\hat{k})\right)^2$ - $(\sigma_{\hat{k}}^2)$
Output : bias, varian dan MSE dari masing – masing estimator
Selesai

Lampiran 3: Tabel hasil analisis data simulasi

Tabel 1 Hasil analisis data simulasi k = 1

Mean	Ukuran Sampel	MME			MLE			BMLE		
		Bias	Var	MSE	Bias	Var	MSE	Bias	Var	MSE
0.5	50	0.55	2.76	3.21	1.22	19.23	18.23	0.18	0.42	0.42
	100	0.71	6.51	7.47	1.3	111.43	113.2	0.28	0.47	0.44
	200	0.23	0.84	0.92	0.27	0.95	1.32	0.21	0.31	0.34
	500	0.16	0.23	0.29	0.19	0.22	0.21	0.14	0.19	0.2
0.75	50	0.69	2.60	3.09	1.11	17.78	19.01	0.14	0.39	0.41
	100	0.88	7.70	8.47	1.55	110.69	113.1	0.28	0.46	0.54
	200	0.26	0.82	0.89	0.23	0.97	1.02	0.21	0.30	0.34
	500	0.14	0.21	0.23	0.11	0.18	0.19	0.13	0.18	0.2
1	50	0.85	3.86	4.58	1.34	23.91	25.7	0.3	0.56	0.65
	100	0.59	3.36	3.71	0.64	14.33	14.74	0.36	0.51	0.63
	200	0.21	0.43	0.48	0.18	0.39	0.42	0.2	0.26	0.31
	500	0.09	0.12	0.13	0.07	0.09	0.1	0.09	0.10	0.11
1.5	50	0.76	3.53	4.11	1.05	27.81	28.91	0.43	0.68	0.86
	100	0.35	2.35	2.48	0.43	31.99	32.17	0.28	0.43	0.51
	200	0.14	0.16	0.18	0.11	0.13	0.14	0.14	0.14	0.16
	500	0.06	0.07	0.07	0.05	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06
1.75	50	0.71	3.34	3.71	7.82	7.88	8.41	0.67	0.62	1.3
	100	0.24	0.51	0.56	0.36	0.41	0.42	0.25	0.29	0.46
	200	0.16	0.15	0.14	0.11	0.11	0.12	0.19	0.21	0.19
	500	0.06	0.06	0.06	0.04	0.05	0.04	0.05	0.05	0.05
2	50	0.69	3.22	3.69	7.81	7.81	8.39	0.52	0.52	1.21
	100	0.22	0.41	0.46	0.34	0.34	0.37	0.22	0.22	0.38
	200	0.12	0.11	0.13	0.09	0.09	0.09	0.11	0.11	0.11
	500	0.05	0.05	0.05	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

Tabel 2 Hasil analisis data simulasi k = 2

Mean	Ukuran Sampel	MME			MLE			BMLE		
		Bias	Var	MSE	Bias	Var	MSE	Bias	Var	MSE
0.5	50	1.39	14.77	16.69	2.87	235.55	243.78	0.01	0.74	0.74
	100	1.31	19.77	21	1.77	66.72	69.87	0.28	1.07	1.14
	200	0.98	33.36	34.31	1.94	841.80	845.57	0.44	1.21	1.41
	500	0.2	0.82	0.86	0.19	0.78	0.82	0.21	0.56	0.61
0.75	50	1.38	15.34	17.33	2.59	122.45	156.23	0.45	1.21	1.42
	100	1.21	13.51	14.67	1.42	52.61	54.22	0.52	1.33	1.45
	200	0.62	1.63	1.93	0.35	2.45	1.23	0.47	1.21	1.19
	500	0.15	0.52	0.46	0.15	0.46	0.45	0.17	0.31	0.41
1	50	1.38	15.32	17.23	2.21	117.46	122.34	0.32	1.12	1.23
	100	1.07	13.40	14.54	1.3	41.69	43.39	0.5	1.33	1.58
	200	0.35	1.62	1.74	0.33	1.57	1.68	0.34	1.04	1.15
	500	0.14	0.31	0.33	0.12	0.28	0.3	0.15	0.30	0.32
1.5	50	1.21	17.90	19.37	1.91	161.23	164.87	0.55	1.45	1.75
	100	0.44	2.07	2.27	0.43	2.23	2.42	0.43	1.17	1.35
	200	0.17	0.48	0.51	0.15	0.43	0.46	0.2	0.46	0.5
	500	0.1	0.18	0.19	0.08	0.15	0.16	0.1	0.16	0.17
1.75	50	1.11	12.89	15.31	1.45	165.11	166.89	0.62	1.98	2.24
	100	0.35	1.44	1.11	0.35	1.56	1.42	0.41	0.99	1.11
	200	0.16	0.39	0.45	0.14	0.35	0.37	0.22	0.32	0.35
	500	0.07	0.15	0.14	0.07	0.11	0.11	0.07	0.12	0.7
2	50	0.83	11.33	12.02	1.19	165.29	166.71	0.61	1.77	2.14
	100	0.31	1.10	1.2	0.3	1.12	1.21	0.36	0.95	1.08
	200	0.16	0.33	0.36	0.14	0.28	0.3	0.18	0.29	0.33
	500	0.06	0.11	0.11	0.05	0.09	0.09	0.06	0.09	0.1

Tabel 3 Hasil analisis data simulasi k = 3

Mean	Ukuran Sampel	MME			MLE			BMLE		
		Bias	Var	MSE	Bias	Var	MSE	Bias	Var	MSE
0.5	50	1.22	23.56	25.76	3.8	511.21	480.87	0.98	0.91	1.42
	100	2.15	60.12	61.11	4.67	401.76	451.21	0.11	1.52	1.35
	200	1.81	50.22	50.19	3.11	156.15	152.87	0.37	1.96	2.21
	500	0.11	19.29	19.36	0.98	45.76	35.11	0.51	2.26	2.37
0.75	50	1.3	22.25	23.95	3.69	434.12	447.72	0.68	0.86	1.32
	100	2.24	51.12	56.12	4.16	387.81	405.11	0.07	1.34	1.35
	200	1.82	44.85	48.15	2.33	106.92	112.34	0.35	1.89	2.01
	500	0.06	16.94	17.37	0.72	30.20	30.72	0.45	2.05	2.26
1	50	1.61	26.19	28.79	3.48	797.57	797.57	0.44	1.23	1.26
	100	1.95	33.32	37.14	2.77	127.68	127.68	0.54	2.08	2.27
	200	0.93	11.23	12.09	0.98	12.86	12.86	0.39	2.27	2.55
	500	0.37	2.24	2.38	0.38	2.34	2.34	0.17	1.61	1.76
1.5	50	2.12	37.55	42.03	3.77	343.90	343.9	0.56	2.63	2.94
	100	1.29	23.20	24.86	1.54	51.16	51.16	0.74	2.97	3.51
	200	0.49	3.27	3.52	0.5	3.32	3.32	0.51	2.20	2.47
	500	0.19	0.64	0.67	0.18	0.60	0.6	0.22	0.61	0.67
1.75	50	2.11	47.21	55.01	3.45	275.88	298.7	0.99	3.77	4.67
	100	0.82	8.99	8.77	0.8	11.03	13.21	0.82	2.89	3.45
	200	0.39	2.54	1.56	0.47	2.45	1.52	0.45	1.78	1.67
	500	0.15	0.55	0.56	0.15	0.58	0.41	0.23	0.43	0.43
2	50	2.06	46.27	50.5	3.35	275.58	286.8	0.92	3.62	4.47
	100	0.8	7.84	8.47	0.8	10.03	10.68	0.71	2.77	3.28
	200	0.31	1.27	1.37	0.31	1.22	1.31	0.38	1.28	1.43
	500	0.11	0.36	0.38	0.1	0.34	0.35	0.17	0.34	0.36

Tabel 4 Hasil analisis data simulasi k = 4

Mean	Ukuran Sampel	MME			MLE			BMLE		
		Bias	Var	MSE	Bias	Var	MSE	Bias	Var	MSE
0.5	50	0.62	23.45	29.45	3.99	450.21	441.23	0.28	0.98	3.59
	100	2.51	69.71	69.01	4.78	412.01	359.71	0.9	1.54	1.97
	200	2.99	1133.82	145.21	5.51	890.34	856.43	0.21	2.64	2.36
	500	1.95	99.21	98.71	2.78	266.22	222.32	0.75	3.92	4.23
0.75	50	0.8	23.04	23.69	3.45	407.23	419.14	1.55	0.85	3.25
	100	2.29	58.`11	63.37	4.37	334.45	353.48	0.7	1.40	1.89
	200	2.98	120.02	128.89	5.18	829.51	856.37	0	2.25	2.25
	500	1.94	91.61	95.37	2.31	213.92	219.25	0.62	3.63	4.01
1	50	1.46	28.49	30.62	3.58	319.03	331.84	0.85	1.46	2.18
	100	2.26	57.34	62.46	3.82	382.18	396.76	0.12	2.25	2.26
	200	2.41	82.98	88.77	3.17	236.82	246.88	0.5	3.30	3.55
	500	0.82	18.14	18.8	0.84	20.00	20.71	0.6	3.46	3.82
1.5	50	2.4	61.00	66.76	7.4	2828.00	2882.76	0.1	2.70	2.71
	100	2.46	71.07	77.13	3.64	264.57	277.79	0.73	4.06	4.59
	200	1.31	55.42	57.23	1.8	425.10	428.36	0.78	4.48	5.08
	500	0.28	1.73	1.81	0.28	1.64	1.71	0.34	1.68	1.8
1.75	50	2.77	55.98	62.81	4.55	666.72	721.89	0.82	4.21	4.99
	100	1.99	67.91	67.21	3.27	333.87	4.21	0.99	5.01	5.92
	200	0.91	9.21	9.01	0.96	9.21	1.56	0.93	4.56	5.22
	500	0.34	1.34	1.34	0.34	2.34	1.56	0.31	1.23	1.23
2	50	2.6	52.54	59.3	4.33	617.93	636.68	0.74	4.17	4.71
	100	1.91	61.97	65.62	2.64	307.03	314	0.93	4.96	5.83
	200	0.83	8.16	8.85	0.85	8.66	9.38	0.81	4.06	4.71
	500	0.21	1.11	1.16	0.22	1.08	1.12	0.27	1.12	1.19

Tabel 5 Hasil analisis data simulasi μ = 1 dan k = 1, 2, 3, 4

BIAS u = 1 k = 1	MME	MLE	BMLE	BIAS u = 1 k = 2	MME	MLE	BMLE	BIAS u = 1 k = 3	MME	MLE	BMLE	BIAS u = 1 k = 4	MME	MLE	BMLE
50	0.85	1.34	0.3	50	1.38	2.21	0.32	50	1.61	3.48	0.44	50	1.46	3.58	0.85
100	0.59	0.64	0.36	100	1.07	1.3	0.5	100	1.95	2.77	0.54	100	2.26	3.82	0.12
200	0.21	0.18	0.2	200	0.35	0.33	0.34	200	0.93	0.98	0.39	200	2.41	3.17	0.50
500	0.09	0.07	0.05	500	0.14	0.12	0.15	500	0.37	0.38	0.17	500	0.82	0.84	0.60
MSE u = 1 k = 1	MME	MLE	BMLE	MSE u = 1 k = 2	MME	MLE	BMLE	MSE u = 1 k = 3	MME	MLE	BMLE	MSE u = 1 k = 4	MLE	MLE	BMLE
50	4.58	25.7	0.65	50	17.23	122.34	1.23	50	28.79	797.57	1.26	50	30.62	331.84	2.18
100	3.71	14.74	0.63	100	14.54	43.39	1.58	100	37.14	127.68	2.27	100	62.46	396.76	2.26
200	0.48	0.42	0.31	200	1.74	1.68	1.15	200	12.09	12.86	2.55	200	88.77	246.88	3.55
500	0.13	0.1	0.11	500	0.33	0.3	0.32	500	2.38	2.34	1.76	500	18.8	20.71	3.82

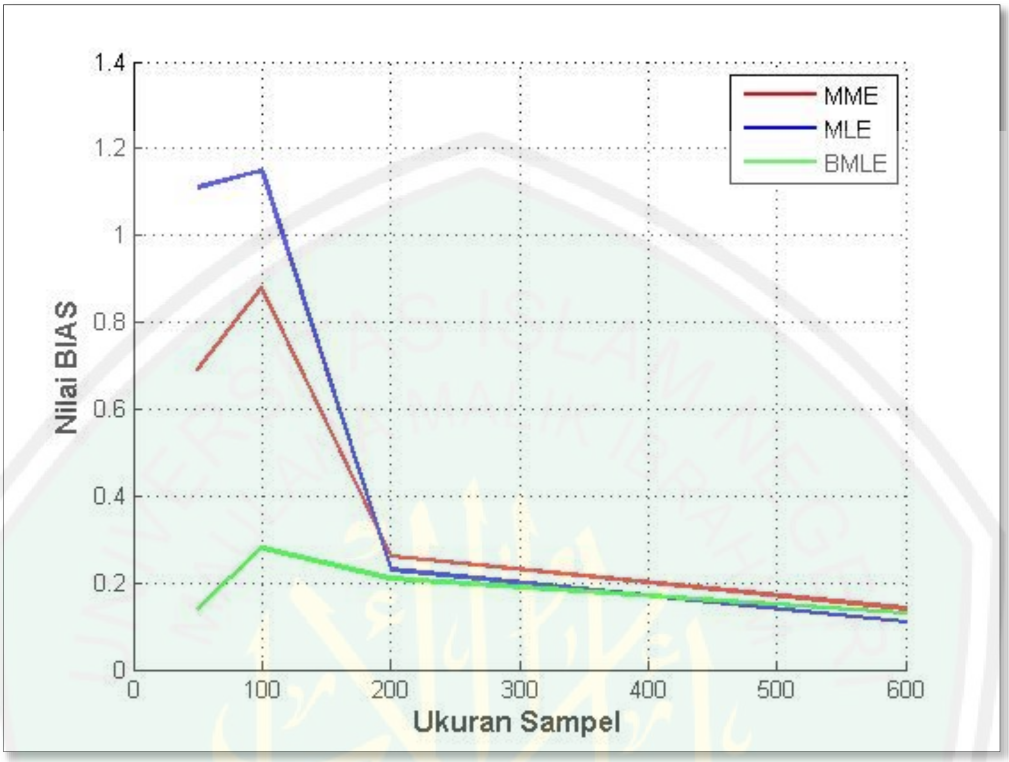
Tabel 6 Hasil analisis data simulasi Bias dan MSE μ = 0.5, 1 dan k = 1, 2, 3, 4

Bias μ 0.5	MME				MSE μ 0.5				
50	0.55	1.39	1.22	0.62	50	3.21	16.69	25.76	29.45
100	0.71	1.31	2.15	2.51	100	7.47	21	61.11	69.01
200	0.23	0.98	1.81	2.99	200	0.92	34.31	50.19	145.21
500	0.16	0.20	0.11	1.95	500	0.29	0.86	19.36	98.71
	1.65	3.88	5.29	8.07		11.89	72.86	156.42	342.38
	0.4125	0.97	1.3225	2.0175		2.9725	18.215	39.105	85.595
Bias μ 0.5	MLE				MSE μ 0.5				
50	1.22	2.87	3.8	3.99	50	18.23	243.78	480.87	441.23
100	1.3	1.77	4.67	4.78	100	113.2	69.87	451.21	359.71
200	0.27	1.94	3.11	5.51	200	1.32	845.57	152.87	856.43
500	0.19	0.19	0.98	2.78	500	0.21	0.82	35.11	222.32
	2.98	6.77	12.56	17.06		132.96	1160.04	1120.06	1879.69
	0.745	1.6925	3.14	4.265		33.24	290.01	280.015	469.9225
Bias μ 0.5	BMLE				MSE μ 0.5				
50	0.18	0.01	0.98	0.28	50	0.42	0.74	1.42	3.59
100	0.28	0.28	0.11	0.90	100	0.44	1.14	1.35	1.97
200	0.21	0.44	0.37	0.21	200	0.34	1.41	2.21	2.36
500	0.14	0.21	0.51	0.75	500	0.2	0.61	2.37	4.23
	0.81	0.94	1.97	2.14		1.4	3.9	7.35	12.15
	0.2025	0.235	0.4925	0.535		0.35	0.975	1.8375	3.0375

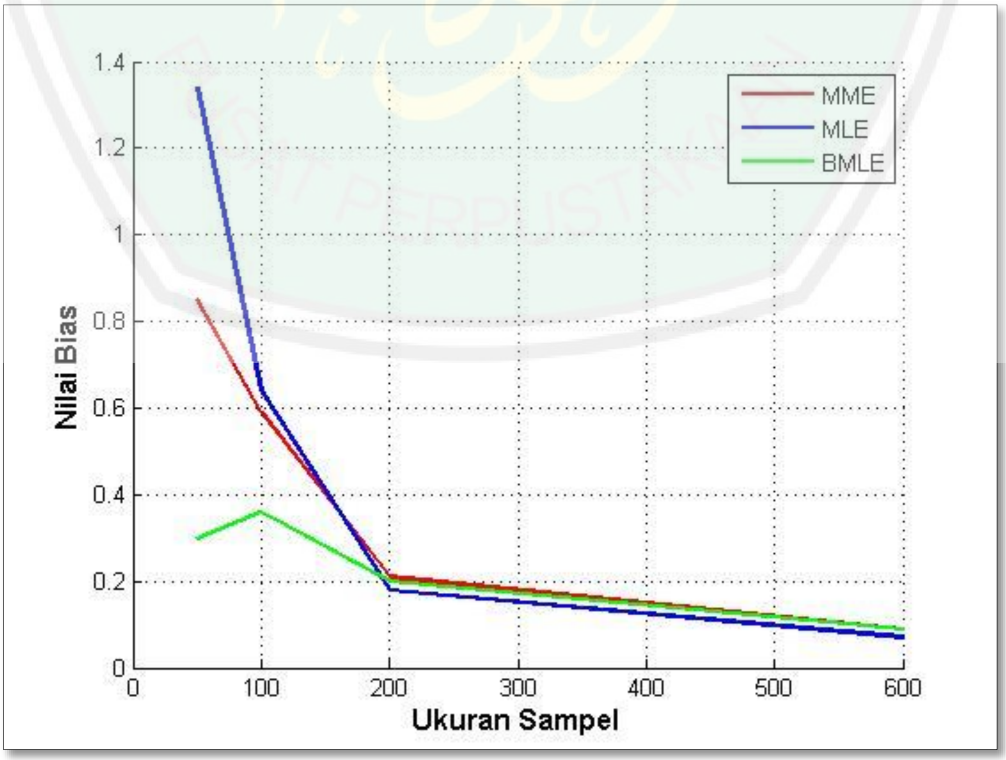
Bias μ 1	MME				MSE μ 1	mme			
50	0.85	1.38	1.61	1.46	50	4.58	17.23	28.79	30.62
100	0.59	1.07	1.95	2.26	100	3.71	14.54	37.14	62.46
200	0.21	0.35	0.93	2.41	200	0.48	1.74	12.09	88.77
500	0.09	0.14	0.37	0.82	500	0.13	0.33	2.38	18.8
	1.74	2.94	4.86	6.95		8.9	33.84	80.4	200.65
	0.435	0.735	1.215	1.7375		2.225	8.46	20.1	50.1625
Bias μ 1	MLE				MSE μ 1	MLE			
50	1.34	2.21	3.48	3.58	50	25.7	122.34	797.57	2.18
100	0.64	1.3	2.77	3.82	100	14.74	43.39	127.68	2.26
200	0.18	0.33	0.98	3.17	200	0.42	1.68	12.86	3.55
500	0.07	0.12	0.38	0.84	500	0.1	0.3	2.34	3.82
	2.23	3.96	7.61	11.41		40.96	167.71	940.45	11.81
	0.5575	0.99	1.9025	2.8525		10.24	41.9275	235.1125	2.9525
Bias μ 1	BMLE				MSE μ 1	BMLE			
50	0.3	0.32	0.44	0.85	50	0.65	1.23	1.26	2.18
100	0.36	0.5	0.54	0.12	100	0.63	1.58	2.27	2.26
200	0.2	0.34	0.39	0.50	200	0.31	1.15	2.55	3.55
500	0.09	0.15	0.17	0.60	500	0.11	0.32	1.76	3.82
	0.95	1.31	1.54	2.07		1.7	4.28	7.84	11.81
	0.2375	0.3275	0.385	0.5175		0.425	1.07	1.96	2.9525

Lampiran 4: Grafik perbandingan bias dan MSE

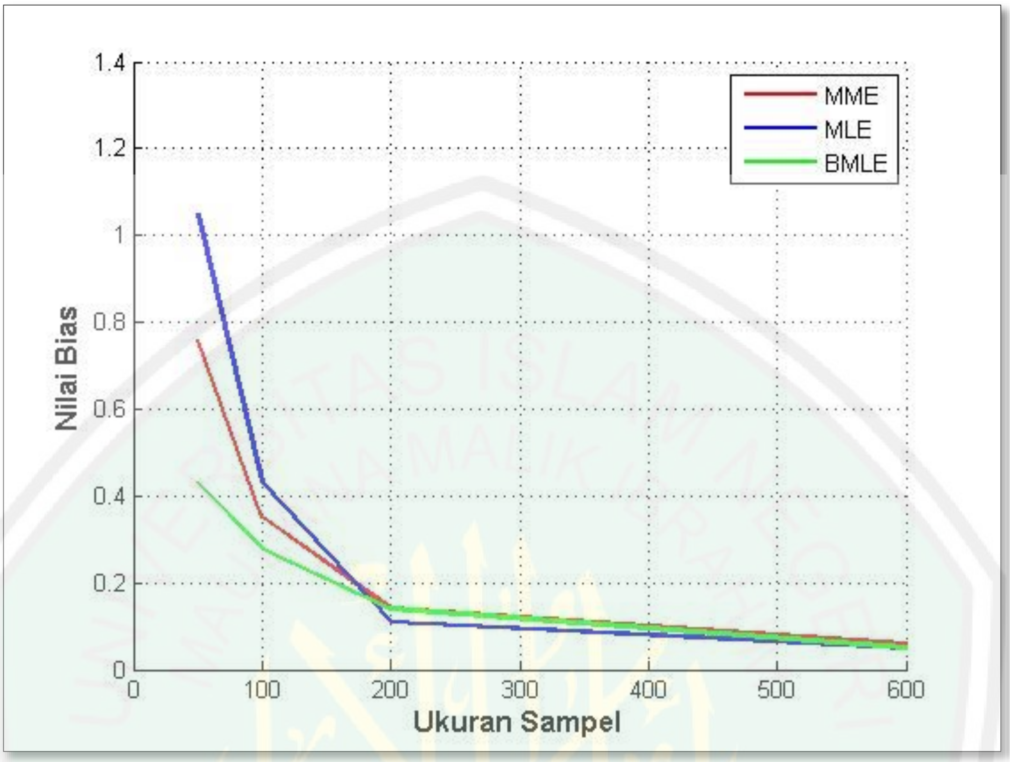
Grafik perbandingan bias untuk $k = 1$ dan $\mu = 0.75$



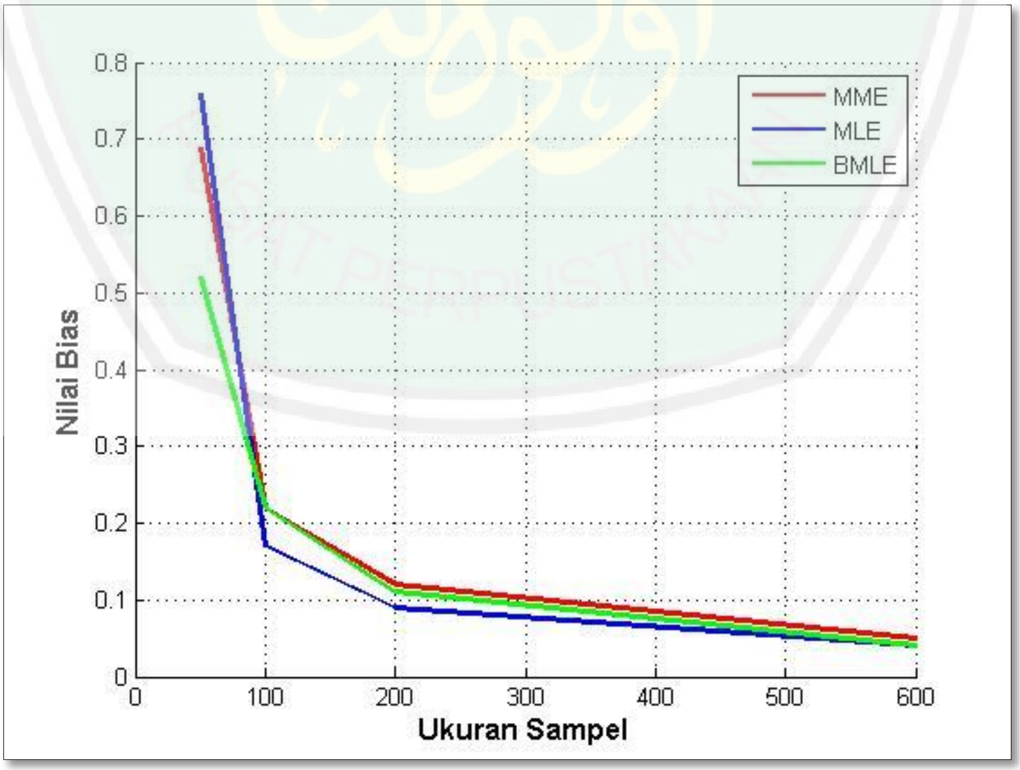
Grafik perbandingan bias untuk $k = 1$ dan $\mu = 1$



Grafik perbandingan bias untuk k = 1 dan μ = 1.5



Grafik perbandingan bias untuk k = 1 dan μ = 2



Lampiran 5 . Listing Program

```
clc,clear all
format long
mu=[0.5 0.75 1 1.5 1.75 2];
n=[50 100 200 500];
ulangan=500;
p2=0.5; sumF=0; sumG=0; sumF1=0; sumG1=0;

for k=1:4
    fprintf('\n tabel perbandingan\n k= %d\n',k);
    fprintf('=================================\n');
    fprintf('mean     n     MSE    MLE     BMLE\n');
    fprintf('              bias     var     MSE    bias      var     MSE
bias     var    MSE\n');
    for i=1:4
        for j=1:4
            fprintf('%2.2f\n',mu(i));
            r=1; itNR=1; itM=1;
            P1=[];
            P2=[];
            KK2=[];
            KK3=[];
            while r<=500;
                x=random('nbin',1/k,mu(i)*k/(1/mu(i)*k),1,n(j));
                varX=var(x);
                meanX=mean(x);
                while varX<=meanX
x=random('nbin',1/k,mu(i)*k/(1/mu(i)*k),1,n(j));
                    varX=var(x);
                    meanX=mean(x);
                end
                p1=(varX-meanX)/meanX^2;
                P1=[P1 p1];
                while itNR<=15
                    for a=1:n(j);
f=log(gamma(1/p2+x(a))/gamma(1/p2))+(x(a)/p2+log(1+p2*mu(i))/p2^2-
...
                            mu(i)*(x(a)*p2+1)/(p2*(1+p2*mu(i))));
                        g1=-x(a)/p2^2+mu(i)/(p2^2*(1+p2*mu(i)))-
2*log(1+p2*mu(i))/p2^3-...
                            mu(i)*x(a)/(p2*(1+p2*mu(i)))+...
(1+p2*x(a))*mu(i)^2/(p2*(1+p2*mu(i))^2)+...
                            (1+p2*x(a))*mu(i)/(p2*(1+p2*mu(i)));
                        g=g1+(Psi(1/p2)-Psi(1/p2+x(a)))/p2^2;
                        sumF=sumF+f;
                        sumG=sumG+g;
                    end
                    p2=p2-sumF/sumG;
                    itNR=itNR+1;
                    P2=[P2 p2];
                end
                for kw=1:ulangan;
                    for ii=1:n(j);
                        m=randint(1,1,[1 n(j)]);
```

```
            yy(ii)=x(m);
        end
        varY=var(yy);
        meanY=mean(yy);
        while varY<=meanY
            for ii=1:n(j)
                m=randint(1,1,[1 n(j)]);
                yy(ii)=x(m);
            end
            varY=var(yy);
            meanY=mean(yy);
        end
        for ii=1:n(j);
            y(kw,ii)=yy(ii);
        end
    end
    kk2(j)=0.5;
    while itM<=15
        for kw=1:ulangan
            for a=1:n(j)

f1=log(gamma(1/kk2(j)+y(kw,a))/gamma(1/kk2(j)))+y(kw,a)/kk2(j)+log
(1+kk2(j)*mu(i))/kk2(j)^2-...

mu(i)*(y(kw,a)*kk2(j)+1)/(kk2(j)*(1+kk2(j)*mu(i)));
                g11=-
y(kw,a)/kk2(j)^2+mu(i)/(kk2(j)^2*(1+kk2(j)*mu(i)))-...
                    2*log(1+kk2(j)*mu(i))/kk2(j)^3-
mu(i)*y(kw,a)/(kk2(j)*(1+kk2(j)*mu(i)))+...

(1+kk2(j)*y(kw,a))*mu(i)^2/(kk2(j)*(1+kk2(j)*mu(i))^2)+...

(1+kk2(j)*y(kw,a))*mu(i)/(kk2(j)^2*(1+kk2(j)*mu(i)));
                g1=g11+(Psi(1/kk2(j))-
Psi(1/kk2(j)+y(kw,a)))/kk2(j)^2;
                sumF1=sumF1+f1;
                sumG1=sumG1+g1;
            end
        end
        kk2(j)=kk2(j)-sumF1/sumG1;
        itM=itM+1;
    end
    KK2=[KK2 kk2];
    kk3=median(KK2);
    KK3=[KK3 kk3];
    r=r+1;
end
bias1=mean(P1)-k;
varian1=var(P1);
MSE1=bias1^2+varian1;
bias2=mean(P2)-k;
varian2=var(P2);
MSE2=bias2^2+varian2;
bias_ky=mean(KK3)-k;
varian_ky=var(KK3);
MSE_ky=bias_ky^2+varian_ky;
```

```
            fprintf(' %11.0f %8.2f %7.27 %7.2f %8.2f %7.2f %7.2f
%9.2f %8.2f %8.2f n',n(j),bias1,varian1, MSE1,bias2,varian2,
MSE2,bias_ky,varian_ky,MSE_ky);
        end
    end
end
varX
meanX
varY
meanY
save bias_save.mat n(j) bias1 varian1  MSE1 bias2 varian2 MSE2
bias_ky varian_ky MSE_ky varX meanX varY meanY
```

Listing Program Grafik

```
clc,clear
clf
uk_sam=[50 100 200 600];

MME=[...];
MLE=[...];
BMLE=[...];

figure (1)
%axis([0 600 0 700])
hold on
plot(uk_sam,MME,'-r','LineWidth',2);
plot(uk_sam,MLE,'-b','LineWidth',2);
plot(uk_sam,BCML,'-g','LineWidth',2);
grid on
legend('MME','MLE','BCML');

xlabel('Ukuran Sampel','fontsize',12,'fontweight','bold');
ylabel('MSE','fontsize',12,'fontweight','bold');
```