MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF KINCIR

SKRIPSI

OLEH
R. BAGUS DWI NOVA NUR ARBAIN
NIM. 09610013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF KINCIR

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
R. Bagus Dwi Nova Nur Arbain
NIM. 09610013

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF KINCIR

SKRIPSI

Oleh
R. Bagus Dwi Nova Nur Arbain
NIM. 09610013

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal 15 Januari 2015

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Abdussakir, M. Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19571006 200312 1 001	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF KINCIR

SKRIPSI

Oleh
R. BAGUS DWI NOVA NUR ARBAIN
NIM. 09610013

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 13 Februari 2015

Penguji Utama	: H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	……………….
Penguji Utama	: Evawati Alisah, M.pd	……………….
Sekretaris Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd	……………….
Anggota Penguji	: Abdul Aziz M.Si	……………….

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: R. Bagus Dwi Nova Nur Arbain
NIM	: 09610013
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Kincir

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Januari 2015
Yang membuat pernyataan,

R. Bagus Dwi Nova Nur Arbain
NIM. 09610013

MOTO

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡ

"Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan sesuatu kaum, sebelum kaum itu mengubah apa yang ada pada diri mereka sendiri" (QS. Ar-Ra'd/13:11)

.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda, Alm. Drs. H. R. Hidayat Isdito, ibunda Siti Nurkhasanah, nenek Jasminah, kakak R. Bagus Mohammad Eko Prasetyo serta kakak Al Imroatus Sholihah, terima kasih atas dukungan yang telah diberikan.

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Tiada ucapan yang lebih utama selain syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Sempurna, Allah Swt, yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, karunia serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring doa dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu penulis terutama dalam penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus sebagai dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, motivasi, dan berbagi pengalaman yang berharga kepada penulis.

4. Abdul Aziz, M.Si sebagai dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan dan berbagi ilmunya kepada penulis.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terimakasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Ayahanda Alm. Drs. H. R. Hidayat Isdito yang telah memberikan pengarahan serta menjadi teladan baik atas seorang ayah yang berhasil dalam mendidik putra-putranya.
7. Ibunda Siti Nurkhasanah, do'a dan restu beliau adalah kelancaran bagi seorang anak di dalam menapaki jejak kehidupannya.
8. Seluruh teman-teman seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika khususnya angkatan 2009. Terima kasih atas doa, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.
9. Semua pihak yang telah memberi dukungan serta do'a kepada penulis sampai terselesaikannya skripsi ini, penulis ucapkan banyak terimakasih.

Akhirnya semoga skripsi ini menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Aamiin Yaa Rabbal'Alamiin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Arbain, R. Bagus Dwi Nova Nur. 2015. **Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Kincir.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing (I) Dr. Abdussakir, M.Pd & (II) Abdul Aziz, M.Si

Kata kunci: Graf, Multiplisitas Sikel, Graf Total, Graf Kincir

Graf total dari graf G yang dinotasikan dengan $T(G)$, didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik di $T(G)$ adalah $\left(V(G) \cup E(G)\right)$ dan dua titik x, y di $T(G)$ adalah terhubung langsung jika memenuhi salah satu kasus yaitu: i) x, y di $V(G)$ dan x terhubung langsung dengan y dalam G, ii) x, y di $E(G)$ dan x, y terhubung langsung dalam G, iii) x dalam $V(G)$, dan y dalam $E(G)$, dan x, y terkait langsung dalam G. $CM(G)$ merupakan notasi dari multiplisitas sikel yang didefinisikan sebagai banyaknya sikel dengan sisi yang saling lepas di graf G. Hasil penelitian ini adalah:

$$CM\left[T\left(K_1 + K_s\right)\right] = \frac{s^3+3\cdot s^2+2\cdot s}{6}; \qquad CM\left[T\left(K_1 + 2K_s\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{4s^3+15s^2+2s+3}{12} \mid \text{untuk } s \text{ ganjil} \\ \dfrac{4s^3+15s^2+8s}{12} \mid \text{untuk } s \text{ genap} \end{cases}$$

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari $CM\left[T\left(K_1 + mK_s\right)\right]$, $CM\left[T\left(K_2 + mK_s\right)\right]$, $CM\left[T\left(K_3 + mK_s\right)\right]$ sampai dengan $CM\left[T\left(K_r + mK_s\right)\right]$.

ABSTRACT

Arbain, R. Bagus Dwi Nova Nur. 2015. **Cycle Multiplicity of Total Graph of Windmill Graph.** Thesis, Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology of State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors (I) Dr. Abdussakir, M.Pd & (II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: Graph, Cycle Multiplicity, Total Graph, Windmill Graph

A Total Graph of graf G denoted by $T(G)$ defined as the graph with the set of its vertices is $(V(G) \cup E(G))$ and two vertices x, y in $T(G)$ are adjacent if satisfy one of the following: i) x, y in $V(G)$ and x is adjacent to y in G, ii) x, y in $E(G)$ and x, y are *adjacent* in G, iii) x in $V(G)$, and y in $E(G)$, and x, y are incident in G. $CM(G)$ denotes a Cycle Multiplicity which is defined as the number of edge disjoint cycle in G. The result of the research is as follow:

$$CM\left[T\left(K_1 + 1K_s\right)\right] = \frac{s^3 + 3 \cdot s^2 + 2 \cdot s}{6}; \qquad CM\left[T\left(K_1 + 2K_s\right)\right] = \begin{cases} \dfrac{4s^3 + 15s^2 + 2s + 3}{12} \mid \text{for } s \text{ odd} \\ \dfrac{4s^3 + 15s^2 + 8s}{12} \mid \text{for } s \text{ even} \end{cases}$$

This research can be continued by searching for $CM\left[T\left(K_1 + mK_s\right)\right]$, $CM\left[T\left(K_2 + mK_s\right)\right]$, $CM\left[T\left(K_3 + mK_s\right)\right]$ until $CM\left[T\left(K_r + mK_s\right)\right]$.

مُلَخَّصُ

أَرْبَعِيْن، ر. بَاغُوْس دُوِيْ نُوْفَا نُوْر. ٢٠١٥. **تعددية الدورة مِنْ المخطط المجموع عِنْدَ المخطط الدولاب**. البَحْثُ الج ام عِيِّ. شُعْبَةُ الرِّيَاضِيَّاتِ بِكُلِّيَّةِ العُلُوْمِ وَ التِّكْنُوْلُوْجِيَا. الجَامِعَةُ الإِسْلاَمِيَّةُ الحُكُوْمِيَّةُ مَوْلاَنَا مَالِك إِبْرَاهِيْم مَالاَنْج. المشْرِفُ ١) الدُكْتُوْر عَبْدُ الشّ الكِر الماجِسْتِيْر وَ ٢) عَبْدُ العَزِيْز الماجِسْتِيْر

كَلِمَاتُ البَحْثِ : المخطط، تعددية الدورة، المخطط المجموع ، المخطط الدولاب

الرَّمْزُ مِنَ المخَطَّطِ المجْمُوْعِ المأْخُوْذُ مِنَ المخَطَّطِ G هُوَ $T(G)$ بِمَعْنَى المجْمُوْعُ بِجَمْعِ نُقَطٍ فِيْ $T(G)$ هُوَ $(V(G)\cup E(G))$ وَ نُقْطَتَانِ x,y فِيْ $T(G)$ هِيَ مجُاوِرَانِ إِذَا اشْتَمَلَ مِنْ أَحَدِ الموَاقِعِ الآتِيْ هُوَ : (١) x,y فِيْ $V(G)$ وَ x مجُاوِرَانِ بِ y فِيْ G. (٢) x,y فِيْ $E(G)$ وَ x,y مجُاوِرَانِ فِيْ G. **(٣)** x فِيْ $V(G)$ وَ y فِيْ $E(G)$ وَ x,y مُتَسَاقَطَانِ فِيْ G. $CM(G)$ هُوَ الرَّمْزُ مِنْ تَعَدُّدِيَّةِ الدَّوْرَةِ يُفْهَمُ بِعَدَدِ الدَّوْرَةِ الَّتِيْ كَانَتْ أَضْلاَعُ مُفَكَّكَةً فِيْ مُخَطَّطٍ G. وَ النَّتِيْجَةُ مِنْ هَذَا البَحْثِ هِيَ :

$$CM\left[T\left(K_1+1K_s\right)\right]=\frac{s^3+3\cdot s^2+2\cdot s}{6} \qquad ; CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right]=\begin{cases}\frac{4s^3+15s^2+2s+3}{12} \mid \text{ل} & s \text{ ـ} \\ \frac{4s^3+15s^2+8s}{12} \mid \text{ل} & s \text{ تام} \end{cases}$$

سَنُوَاصِلُ هَذَا البَحْثَ إِلِيَ البَحْثِ عَنْ $CM\left[T\left(K_1+mK_s\right)\right]$ ، $CM\left[T\left(K_2+mK_s\right)\right]$ ، $CM\left[T\left(K_3+mK_s\right)\right]$ حَتَّي $CM\left[T\left(K_r+mK_s\right)\right]$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang mengalami perkembangan secara terus-menerus dari masa ke masa. Semakin berkembangnya ilmu pengetahuan maka akan mempermudah dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Sujono (1988:5) menyatakan bahwa "Matematika adalah cabang ilmu pengetahuan yang eksak dan terorganisasi secara sistematik. Selain itu, matematika merupakan ilmu pengetahuan tentang penalaran yang logis dan masalah yang berhubungan dengan bilangan. Bahkan matematika merupakan ilmu bantu dalam menginterpretasikan berbagai ide dan kesimpulan".

Allah berfirman dalam al-Quran surat al-Jin/72:28, yaitu:

لِّيَعْلَمَ أَن قَدْ أَبْلَغُواْ رِسَٰلَٰتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَىْءٍ عَدَدًۢا ﴿٢٨﴾

"Supaya dia mengetahui, bahwa sesungguhnya rasul-rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu" (QS. al-Jin/72:28).

Allah telah menjadikan alam semesta dan semua yang ada di dalamnya dengan perhitungan yang rumit dan teliti sebagaimana yang disebutkan juga dalam al-Quran surat al-Qamar/54:49, yaitu:

إِنَّا كُلَّ شَىْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (QS. al- Qamar/54: 49).

Dalam al-Quran telah disebutkan beberapa surat yang menjelaskan tentang perhitungan, di antaranya adalah surat al-Jin dan al-Qamar. Surat al-Jin dan al-Qamar tidak lepas dari kata perhitungan dan ukuran, hal ini menunjukkan bahwa Allah menggunakan perhitungan matematis. Maka tidaklah salah jika dikatakan bahwa Allah adalah Maha Matematis (Abdussakir, 2007:79-80). Matematika menyimpan atau mengandung semua ukuran-ukuran, dan perhitungan-perhitungan. Para matematikawan tidaklah menciptakan suatu rumus, tetapi mereka hanya menemukannya.

Matematika terus berkembang hingga terbentuk beberapa bidang, di antaranya adalah teori graf. Graf G adalah pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan yang tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tidak berurutan dari titik berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik di graf G dilambangkan dengan *V(G)* dan himpunan sisi di graf G dilambangkan dengan *E(G)* (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Teori graf terus berkembang selaras dengan pemikiran-pemikiran para ahli yang mengembangkannya. Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang multiplisitas sikel, di antaranya adalah Ali dan Panayappan (2010) yang dalam jurnalnya membahas multiplisitas sikel dari graf total pada C_n, P_n, dan $K_{1,n}$, Navis Nur Ilmiyah (2011) dalam skripsinya membahas multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n, graf *star* S_n dan *double star* $S_{n,n+1}$, sedangkan Muslihatin (2011) membahas tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf kipas F_n dan graf roda W_n. Multiplisitas sikel merupakan maksimum banyak sikel yang saling lepas (*disjoint* sisi) di G dan dinotasikan dengan

$CM(G)$ (Ali dan Panayappan, 2010). Sehubungan dengan banyaknya jenis graf, peneliti berniat melanjutkan penelitian dengan graf yang berbeda dan peneliti memilih graf kincir dalam penelitian ini. Graf kincir dalam penelitian ini adalah graf kincir yang telah dikembangkan oleh Hindayani (2011) yang mengulas tentang dimensi metrik yaitu graf kincir $K_r + mK_s$.

Melihat rumitnya pola yang terbentuk dari graf kincir $K_r + mK_s$, penulis berniat mengambil graf $K_r + mK_s$ ini sebagai bahan penelitian dengan maksud untuk mempermudah dalam pencarian jumlah sikel yang saling lepas sisi yang terbentuk pada graf total dari graf kincir $K_r + mK_s$ dengan cara mencari $CM\left[T\left(K_r + mK_s\right)\right], r, m, s \in N$. Berdasarkan uraian di atas maka penulis mengambil judul skripsi ”***Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Kincir***”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas, maka rumusan masalahnya adalah bagaimanakah cara mencari multiplisitas sikel dari graf total pada graf kincir?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah mengetahui multiplisitas sikel dari graf total pada graf kincir.

1.4 Batasan Masalah

Sesuai rumusan masalah dan tujuan penelitian, serta agar pembahasan lebih fokus maka pembahasan masalah yang diberikan hanya dengan mencari multiplisitas sikel pada $K_1 + mK_s$, $m = 1, 2$.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi peneliti, sebagai sarana memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari, lebih lanjut untuk mengkaji permasalahan multiplisitas sikel pada graf total dari graf kincir $K_r + mK_s$.
2. Bagi mahasiswa, sebagai tambahan pengetahuan mengenai matematika, khususnya pada bidang teori graf.
3. Bagi lembaga Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini ialah menggunakan studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam material pustaka seperti buku-buku, artikel, jurnal dan lain-lain. Pemaparan graf pada penelitian ini mengacu kepada buku karangan dari G. Chartrand dan L. Lesniak (1986). Adapun langkah-langkah analisisnya adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf total kincir $K_1 + K_s, 1 \le s \le 5$ untuk menentukan rumus umum multiplisitas sikel pada graf total $K_1 + K_s$.
2. Menggambar graf total kincir $K_1 + 2K_s, 1 \le s \le 6$ untuk menentukan rumus umum multiplisitas sikel pada graf total $K_1 + 2K_s$.
3. Melakukan pembuktian pada setiap rumus umum multiplisitas sikel dari graf total yang ditemukan.
4. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulis membagi skripsi ini dalam empat bab agar pembaca dapat memahami isi skripsi ini dengan jelas dan sistematis. Rinciannya adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Memaparkan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, mustliplisitas sikel, graf kincir $K_r + mK_s$, serta teori yang berkaitan.

Bab III Pembahasan

Bab ini membahas tentang bagaimana mendapatkan rumus umum dari multiplisitas sikel dari graf kincir $K_r + mK_s$, serta membuktikan rumus umum yang telah diperoleh.

Bab IV Penutup

Penutup berisi kesimpulan dan saran yang diberikan sebagai pertimbangan bagi peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

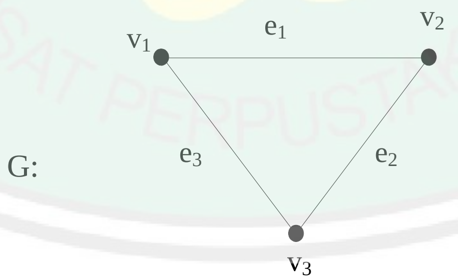
2.1 Definisi Graf

Graf berkembang sangat pesat mengingat banyaknya peneliti yang melakukan penelitian seputar graf maupun dalam pengaplikasian graf pada kehidupan nyata. Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1

Graf G adalah pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan yang tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tidak berurutan dari titik berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik di graf G dilambangkan dengan *V(G)* dan himpunan sisi di graf G dilambangkan dengan *E(G)* (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



Gambar 2.1 Graf G dengan Banyak Titik 3

Gambar 2.1 menunjukkan graf G yang mempunyai 3 titik dan mempunyai 3 sisi sehingga dan dapat dinotasikan dengan:

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

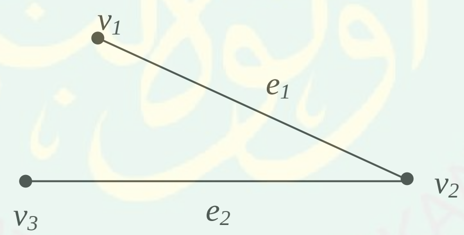
$$E(G)=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_1)\}$$
$$=\{e_1,e_2,e_3\}$$

2.2 Terhubung Langsung dan Terkait Langsung

Definisi 2

Sisi $e=(u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e=(u,v)$ adalah sisi pada graf G, maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung (*adjacent*), sementara itu u dan e, sama halnya dengan v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Lebih jauh, jika e_1 dan e_2 sisi berbeda di G terkait langsung dengan sebuah titik bersama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi terhubung langsung (Chatrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



Gambar 2.2 Graf *G* yang mempunyai 3 titik dan 2 sisi

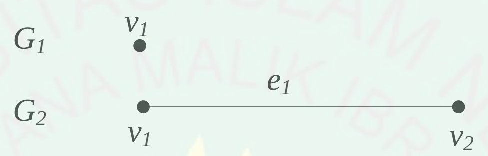
Berdasarkan graf *G* tersebut, maka titik v_1 dengan v_2 terhubung langsung, demikian juga v_2 dengan v_3. Titik v_1 dan v_3 tidak terhubung langsung, namun v_1 terkait langsung dengan e_1, demikian juga v_2 dengan e_1, v_2 dengan e_2, dan v_3 dengan e_2. Perlu diperhatikan bahwa satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik yang berbeda. Hal ini terjadi karena satu sisi hanya menghubungkan dua titik yang berbeda (Abdussakir, dkk, 2009:7).

2.3 Graf Trivial

Definisi 3

Graf *trivial* adalah graf yang hanya mempunyai satu titik dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang mempunyai titik lebih dari satu (Chartrand dan Lesniak, 1986:6).

Contoh:



Gambar 2.3 G_1 Graf *Trivial* dan G_2 Graf *Non Trivial*

G_1 hanya memuat satu titik $|v_1|$ dengan himpunan sisi yang kosong maka disebut dengan graf *trivial*, G_2 memuat dua titik v_1 dan v_2 dan mempunyai himpunan sisi $\{e_1\}$ maka graf G_2 disebut graf *non trivial*.

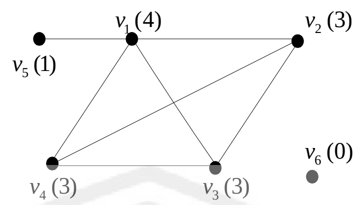
2.4 Derajat Titik

Definisi 4

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Tulisan $\deg_G(v)$ dapat disingkat menjadi $\deg(v)$, jika hanya terdapat satu graf G. Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vertices*) dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*). Titik yang berderajat genap disebut titik genap dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh:

G:



Gambar 2.4 Graf G dengan Titik Berderajat 4, 3, 3, 3, 1, dan 0

Berdasarkan Gambar 2.4 diperoleh bahwa:

$$\deg(v_1) = 4$$

$$\deg(v_2) = 3$$

$$\deg(v_3) = 3$$

$$\deg(v_4) = 3$$

$$\deg(v_5) = 1$$

$$\deg(v_6) = 0$$

Derajat titik pada v_5 diperoleh 1, maka v_5 disebut titik ujung dan untuk v_6 disebut titik terisolasi. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyaknya sisi yaitu q, adalah:

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$

Maka $\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap sisi terkait langsung dengan 2 titik. Bila derajat tiap titik tersebut dijumlahkan maka sisi tersebut dihitung 2 kali.

Akibat Teorema 1

Pada sebarang graf, banyaknya titik yang berderajat ganjil adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Misalkan graf G dengan sisi sebanyak q, maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil di G serta U yang memuat himpunan titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in v(G)} \deg v = \sum_{v \in W} \deg v + \sum_{v \in U} \deg v = 2q$$

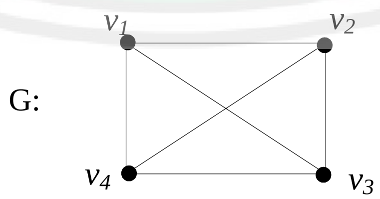
Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg v$ juga genap. Karena $\deg v$ ganjil, maka $|W|$ adalah genap.

2.5 Graf Beraturan

Definisi 5

Graf beraturan-r adalah graf yang semua titiknya berderajat r dengan r adalah bilangan asli, atau $\deg(v) = r, \forall v \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh:



Gambar 2.5 Graf Beraturan 3

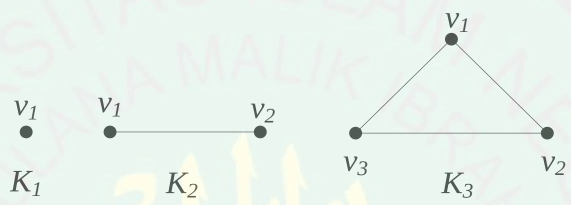
Graf pada Gambar 2.5 adalah graf beraturan 3, karena derajat tiap titiknya adalah sama yaitu 3.

2.6 Graf Komplit

Definisi 6

Graf komplit adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan langsung oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Abdussakir, dkk, 2009:21).

Contoh:



Gambar 2.6 Graf Komplit K_1, K_2, dan K_3

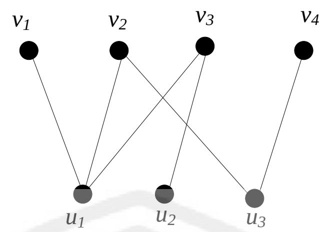
Tiga graf pada Gambar 2.6 merupakan contoh dari graf komplit, karena tiap titik dalam graf tersebut selalu terhubung langsung dengan semua titik yang lain.

2.7 Graf Bipartisi

Definisi 7

Graf G disebut graf bipartisi (*bipartite graph*) jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2 (Abdussakir, dkk, 2009:21).

Contoh:



Gambar 2.7 Graf Bipartisi

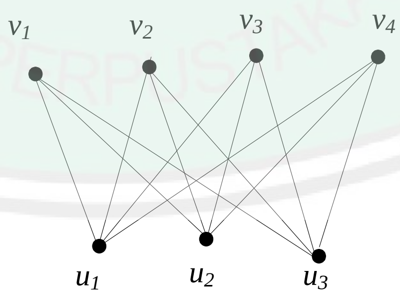
Graf G pada Gambar 2.7 adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $V_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$.

2.8 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 8

Graf bipartisi komplit adalah graf bipartisi yang masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$ (Abdussakir, dkk, 2009:22).

Contoh:



Gambar 2.8 Graf Bipartisi Komplit $K_{3,4}$

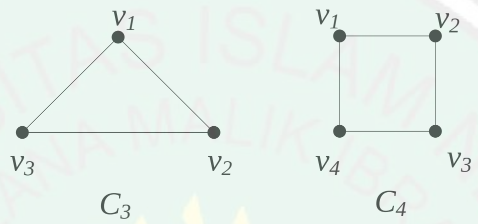
Graf G pada Gambar 2.8 menunjukkan semua titik pada partisi $V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ terhubung langsung dengan semua partisi $V_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$.

2.9 Graf Sikel

Definisi 9

Graf sikel adalah graf terhubung beraturan dua dengan n titik dan n sisi, $n \geq 3$ dan dinotasikan dengan C_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.9 Graf Sikel C_3 dan C_4

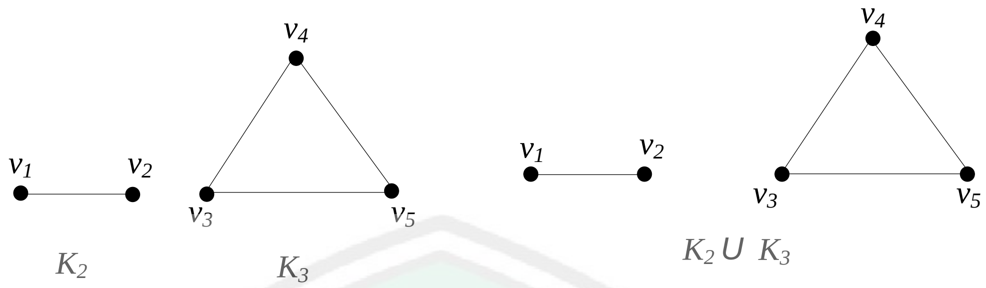
Graf sikel digambarkan sebagai sirkuit yang berawal dari titik awal dan berakhir di titik awal pula.

2.10 Operasi pada Graf

Definisi 10

Graf gabungan (*Union Graph*) dari G_1 dan G_2 ditulis $G = G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G merupakan gabungan dari sebanyak n graf H, $n \geq 2$ maka ditulis $G = nH$ (Abdussakir, dkk, 2009:33).

Contoh:



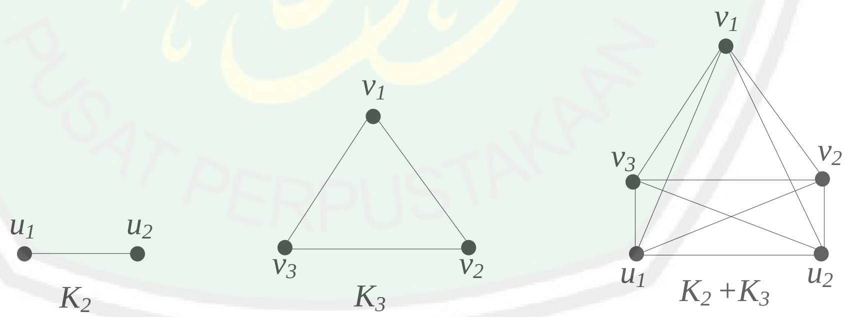
Gambar 2.10 Graf $K_2 \cup K_3$

Gambar 2.10 di atas merupakan contoh gabungan antara graf K_2 dengan graf K_3.

Definisi 11

Penjumlahan graf dari G_1 dan G_2 ditulis dengan $G_1 + G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$ (Abdusssakir, dkk, 2009:33).

Contoh:



Gambar 2.11 $K_2 + K_3$

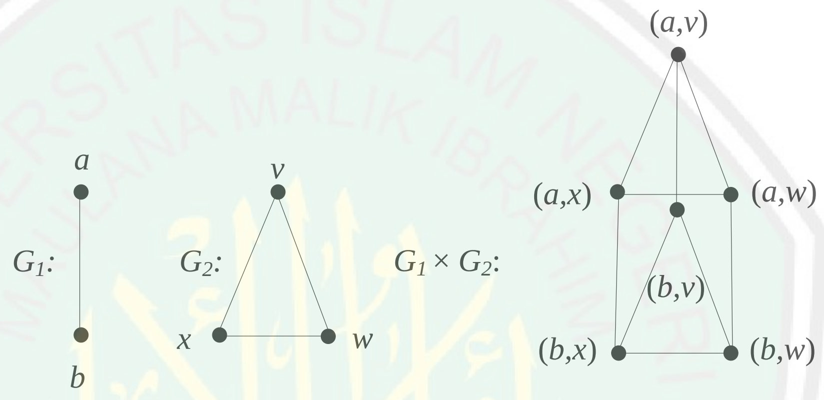
Penjumlahan graf $K_2 + K_3$ pada Gambar 2.11 menghasilkan

$$V(K_2 + K_3) = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3\}; E\{(u_1, u_2)\} \cup \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\} \cup$$
$$\{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_2, v_3)\}$$

Definisi 12

Perkalian dari G_1 dan G_2 ditulis dengan $G_1 \times G_2$ adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$ (Abdussakir, dkk, 2009:34).

Contoh:



Gambar 2.12 $K_2 \times K_3$

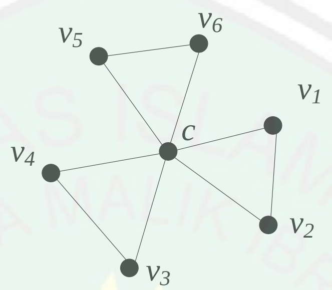
Gambar 2.12 menunjukkan masing-masing G_1 dan G_2 mempunyai dua titik dan tiga titik, dan karena dikenai operasi perkalian maka titik dari graf $K_2 \times K_3$ adalah 6 dan dapat ditulis $V(K_2 \times K_3) = \{(a,v),(a,w),(a,x),(b,v),(b,w),(b,x)\}$ dan sisi $E(K_2 \times K_3) = \{((a,v),(b,v)),((a,w),(b,w)),((a,x),(b,x))\}$.

2.11 Graf Kincir

Definisi 13

Graf kincir dinotasikan dengan W_2^m adalah graf yang dibangun dengan menghubungkan semua titik $mK_2 = \underbrace{K_2 \cup K_2 ... \cup K_2}_{m}$ dengan suatu titik yang disebut titik pusat *c*. Secara matematis graf kincir dituliskan dengan $W_2^m = K_1 + mK_2$. Titik pusat dalam graf kincir diberi nama *c* (Wahyudi dan Sumarno, 2010:736).

Contoh:



Gambar 2.13 Graf Kincir W_2^3

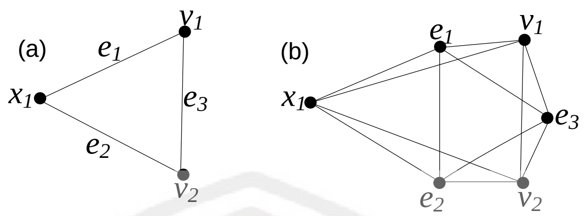
Graf pada Gambar 2.13 di atas merupakan graf kincir W_2^3 yang bisa diartikan sebagai $K_1 + 3K_2$ dengan *c* sebagai titik pusat.

2.12 Graf Total

Definisi 14

Misal *G* adalah graf, $V(G)$ dan $E(G)$ adalah himpunan titik dan sisi dari graf *G*. Graf total dari *G* yang dinotasikan dengan $T(G)$ didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik di $T(G)$ adalah $(V(G) \cup E(G))$ dan dua titik x, y di $T(G)$ adalah terhubung langsung di $T(G)$ jika memenuhi salah satu kasus berikut: (i) x, y di $V(G)$ dan x terhubung langsung dengan y dalam *G*, (ii) x, y di $E(G)$ dan x, y terhubung langsung dalam *G*, dan (iii) x dalam $V(G)$, dan y dalam $E(G)$, dan x, y terkait langsung dalam *G* (Ali dan Panayappan, 2010:1).

Contoh:



Gambar 2.14 (a) Graf Kincir $K_1 + K_2$ dan (b) Graf Total dari Graf Kincir $K_1 + K_2$

Contoh Gambar 2.14 di atas menggambarkan graf total dari graf $K_1 + K_2$, sesuai definisi graf total maka pada graf total $K_1 + K_2$ telah terbentuk titik baru dan sisi baru yang saling berhubungan.

2.13 Multiplisitas Sikel

Definisi 15

Multiplisitas sikel adalah maksimum banyak sikel yang saling lepas sisi di graf *G* (Chartrand, dkk, 1971:43).

Mencari multiplisitas sikel pada Gambar 2.14 , sesuai definisi multiplisitas sikel, maka perhitungan multiplitas sikel haruslah dimulai dari jumlah titik yang terkecil yaitu 3. Multiplisitas sikel dari graf $K_1 + K_2$ di atas adalah 1 yaitu $\{x_1\, v_1\, v_2\}$, dan pada graf total $K_1 + K_2$ ditemukan 4 atau ditulis dengan $CM[T(K_1 + K_2)] = 4$ dan anggotanya adalah $\{x_1\, e_1\, v_1, x_1\, e_2\, v_2, v_1\, e_3\, v_2, e_1\, e_2\, e_3\}$ atau $\{e_1\, v_1\, e_3,\ e_2\, v_2\, e_3,\ x_1\, e_1\, e_2, x_1\, v_1\, v_2\}$.

2.14 Kajian Multiplisitas Sikel dalam Al-Quran

Multiplisitas sikel pada graf total dari graf kincir diartikan sebagai banyaknya sisi yang saling lepas dan setiap subgraf membentuk sebuah sikel dari graf total pada graf kincir, itu berarti untuk setiap graf total dari graf kincir akan diuraikan bagian demi bagian yang membentuk sikel untuk menghitung multiplisitas sikel yang terbentuk di dalamnya. Terkadang sesuatu hal yang terlihat seperti sebuah kesatuan ternyata terdapat beberapa bagian di dalamnya, Allah Swt. telah mencontohkan di dalam al-Quran pada surat al-Furqaan/25:53 sebagai berikut:

۞ وَهُوَ ٱلَّذِى مَرَجَ ٱلۡبَحۡرَيۡنِ هَٰذَا عَذۡبٞ فُرَاتٞ وَهَٰذَا مِلۡحٌ أُجَاجٞ وَجَعَلَ بَيۡنَهُمَا بَرۡزَخٗا وَحِجۡرٗا مَّحۡجُورٗا ٥٣

"Dan Dialah yang membiarkan dua laut yang mengalir (berdampingan); yang ini tawar lagi segar dan yang lain asin lagi pahit; dan dia jadikan antara keduanya dinding dan batas yang menghalangi" (QS. al-Furqaan 53).

Laut merupakan sebuah perairan asin yang terbentang sangat luas, namun di dalam surat di atas menjelaskan bahwasanya di dasar laut telah mengalir sungai air tawar tanpa tercampurnya dengan air laut yang asin. Ini merupakan salah satu contoh dari peristiwa dimana Allah Swt. telah memisahkan sesuatu yang terlihat sebagai satu kesatuan dan ternyata ada bagian lain di dalamnya.

Memahami segala sesuatu tidaklah dapat hanya dengan melihat sekilas, namun harus mengetahui secara keseluruhan sesuatu tersebut. Contoh di atas menjelaskan setiap multiplisitas sikel pada suatu graf dapat ditemukan apabila suatu graf tersebut diuraikan bagian demi bagian yang membentuk sikel. Penguraian ini harus dilandasi dengan pemahaman tentang titik (V) dan sisi (E) pada graf tersebut. Sebagaimana firman dari Allah Swt. tentang bagaimana cara memahami Islam pada surat al-Baqarah/2:208:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱدۡخُلُواْ فِي ٱلسِّلۡمِ كَآفَّةٗ وَلَا تَتَّبِعُواْ خُطُوَٰتِ
ٱلشَّيۡطَٰنِۚ إِنَّهُۥ لَكُمۡ عَدُوّٞ مُّبِينٞ ٢٠٨

"Hai orang-orang yang beriman, masuklah kamu ke dalam Islam keseluruhan, dan janganlah kamu turut langkah-langkah syaitan. Sesungguhnya syaitan itu musuh yang nyata bagimu" (QS. al-Baqarah/2: 208).

Ayat di atas dapat dimaknai sebagai perintah Allah Swt. yang menyatakan bahwa untuk menjadi muslim yang mampu mengenali kesempurnaan *dien*-Nya, dibutuhkan pemahaman serta aplikasi secara mendalam, serius dan menyeluruh terhadap semua hukum yang diwahyukan oleh Allah Swt. kepada rasul-Nya; Muhammad Saw. Dengan memahami atau mengaplikasikan ayat-ayat Allah Swt. secara parsial, apalagi dengan pembelajaran terhadap agama tersebut secara sekilas, dipastikan seorang muslim tak akan pernah mampu mengenal kesempurnaan agamanya.

BAB III

PEMBAHASAN

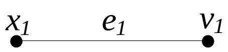
3.1 Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Kincir $K_r + mK_s,\ r, m, s \in N$

Multiplisitas sikel dapat diartikan sebagai maksimum banyak sikel yang saling lepas. Saling lepas diartikan bahwa suatu sikel yang dapat dibentuk dengan mengulang titik, namun tidak dapat mengulang sisi. Maksimum banyak sikel yang saling lepas dapat diperoleh dengan menghitung sikel yang terbentuk dari sisi yang paling sedikit yaitu tiga sisi. Ada beberapa cara untuk mendaftar maksimum sikel yang terbentuk dari graf total, misalkan saja (titik, sisi, titik), (sisi, titik, sisi), (sisi, sisi, sisi), dan (titik, titik, titik). Namun pada penelitian ini penulis hanya mendaftar sikel menggunakan cara (titik, sisi, titik) dan (sisi, sisi, sisi) sebagai perwakilan untuk menentukan maksimum banyak sikel yang saling lepas.

3.2 Graf Kincir $K_1 + K_s$

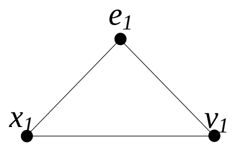
3.2.1 Graf Kincir $K_1 + K_1$

Graf kincir $K_1 + K_1$ merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dan K_1, yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf Kincir $K_1 + K_1$

Setelah graf $K_1 + K_1$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + K_1$ adalah:



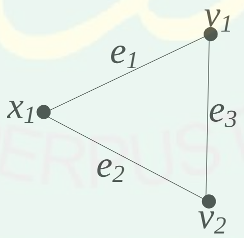
Gambar 3.2 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + K_1$

Sesuai dengan definisi graf total, sisi dari $K_1 + K_1$ atau $\{e_1\}$ akan menjadi titik sehingga menghasilkan dua sisi yang saling terhubung langsung dan membentuk satu sikel yaitu $\{x_1 e_1 v_1\}$. Multiplisitas sikel pada graf total $K_1 + K_1$ adalah:

$$CM\left[T\left(K_1 + K_1\right)\right] = 1$$

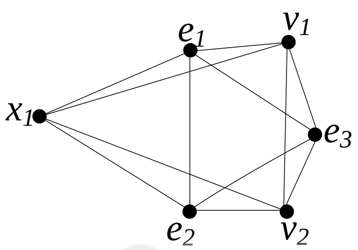
3.2.2 Graf Kincir $K_1 + K_2$

Graf kincir $K_1 + K_2$ merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dan K_2, yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf Kincir $K_1 + K_2$

Setelah graf $K_1 + K_2$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + K_2$ adalah:



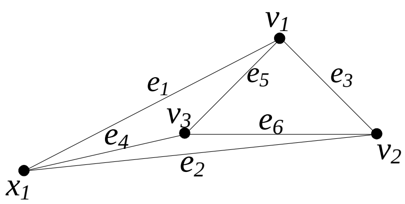
Gambar 3.4 Graf Total pada Graf Kincir K_1+K_2

Sesuai definisi graf total maka sisi pada graf K_1+K_2 atau $\{e_1, e_2, e_3\}$ dapat digambarkan sebagai titik baru, dan masing-masing membentuk satu sikel pada graf total K_1+K_2 yaitu $\{x_1\, e_1\, v_1, x_1\, e_2\, v_2, v_1\, e_3\, v_2\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sisi pada graf K_1+K_2. Titik-titik baru antara K_1 dengan K_2 yang saling berhubungan menghasilkan satu sikel yaitu $\{e_3\, e_2\, e_1\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sisi pada graf K_2. Sehingga multiplisitas sikel pada graf total K_1+K_2 adalah:

$$CM\left[T\left(K_1+K_2\right)\right]=3+1=4$$

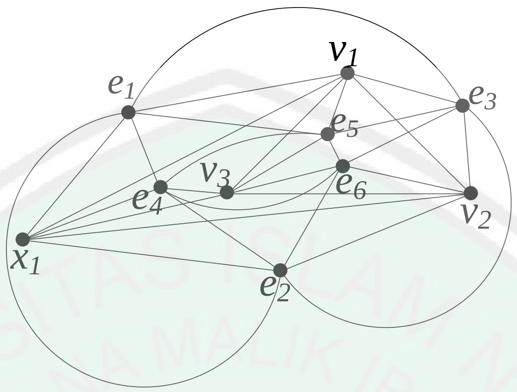
3.2.3 Graf Kincir K_1+K_3

Graf kincir K_1+K_3 merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dan K_3, yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf Kincir K_1+K_3

Setelah graf $K_1 + K_3$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + K_3$ adalah:



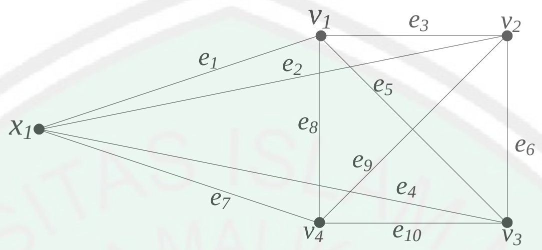
Gambar 3.6 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + K_3$

Sesuai definisi graf total maka sisi pada graf $K_1 + K_3$ atau $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ dapat digambarkan sebagai titik baru dan masing-masing membentuk satu sikel yaitu $\{x_1\, e_1\, v_1, x_1\, e_2\, v_2, x_1\, e_4\, v_3, v_1\, e_3\, v_2, v_2\, e_6\, v_3, v_1\, e_5\, v_3\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sisi pada graf $K_1 + K_3$. Titik-titik baru yang saling berhubungan antara K_1 dengan K_3 menghasilkan tiga sikel yaitu $\{e_3\, e_2\, e_1, e_5\, e_4\, e_1, e_6\, e_4\, e_2\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sisi pada graf K_3. Selanjutnya titik baru pada graf total K_3 terbentuk satu sikel yaitu $\{e_3\, e_5\, e_6\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sikel-3 yang dapat dibentuk dari graf K_3. Sehingga multiplisitas sikel pada graf total $K_1 + K_3$ adalah:

$$CM\left[T\left(K_1 + K_3\right)\right] = 6 + 3 + 1 = 10$$

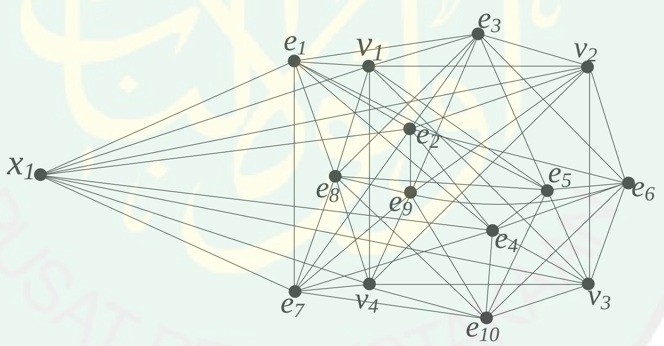
3.2.4 Graf Kincir $K_1 + K_4$

Graf kincir $K_1 + 1K_4$ merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dan K_4, yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf Kincir $K_1 + K_4$

Setelah graf $K_1 + K_4$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + K_4$ adalah:



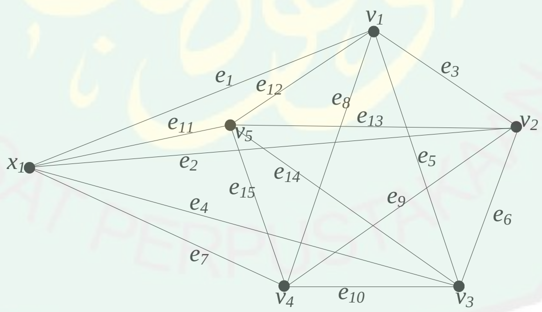
Gambar 3.8 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + K_4$

Sesuai definisi graf total maka sisi pada graf $K_1 + K_4$ atau $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$ dapat digambarkan sebagai titik baru dan masing-masing membentuk satu sikel yaitu $\{x_1 e_1 v_1, x_1 e_2 v_2, x_1 e_4 v_3, x_1 e_7 v_4, v_1 e_3 v_2,$ $v_2 e_6 v_3, v_3 e_{10} v_4, v_1 e_5 v_3, v_1 e_8 v_4, v_2 e_9 v_4\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sisi pada graf $K_1 + K_4$. Titik-titik baru yang saling berhubungan antara K_1 dengan K_4 menghasilkan enam sikel yaitu $\{e_3\,e_2\,e_1, e_5\,e_4\,e_1, e_8\,e_7\,e_1, e_6\,e_4\,e_2, e_9\,e_7\,e_2, e_{10}\,e_7\,e_4\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sisi pada graf K_4. Selanjutnya titik baru pada graf K_4 terbentuk empat sikel yaitu $\{e_3\,e_5\,e_6, e_3\,e_8\,e_9, e_5\,e_8\,e_{10}, e_6\,e_9\,e_{10}\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sikel-3 yang dapat dibentuk dari graf K_4. Sehingga multiplisitas sikel pada graf total K_1+K_4 adalah:

$$CM\left[T\left(K_1+K_4\right)\right]=10+6+4=20$$

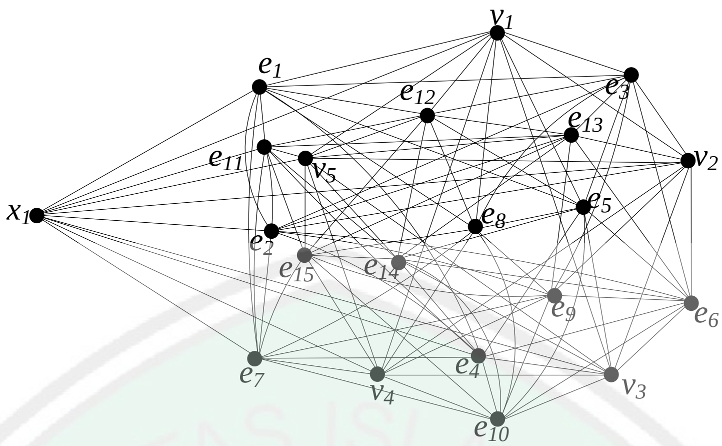
3.2.5 Graf Kincir K_1+K_5

Graf kincir K_1+K_5 merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dan K_5, yang dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf Kincir K_1+K_5

Setelah graf K_1+K_5 dijadikan graf total, maka gambar dari graf total K_1+K_5 adalah:



Gambar 3.10 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + K_5$

Sesuai definisi graf total maka sisi pada graf $K_1 + K_5$ atau $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{15}\}$ dapat digambarkan sebagai titik baru dan masing-masing membentuk satu sikel yaitu $\{x_1 e_1 v_1, x_1 e_2 v_2, x_1 e_4 v_3,$ $x_1 e_7 v_4, x_1 e_{11} v_5, v_1 e_3 v_2, v_2 e_6 v_3, v_3 e_{10} v_4, v_4 e_{15} v_5, v_1 e_5 v_3, v_1 e_8 v_4, v_2 e_9 v_4, v_1 e_{12} v_5,$ $v_2 e_{13} v_5, v_3 e_{14} v_5\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sisi pada graf $K_1 + K_5$. Titik-titik baru yang saling berhubungan antara K_1 dengan K_5 menghasilkan sepuluh sikel yaitu $\{e_3 e_2 e_1, e_5 e_4 e_1, e_8 e_7 e_1, e_{12} e_{11} e_1, e_6 e_4 e_2,$ $e_9 e_7 e_2, e_{10} e_7 e_4, e_{13} e_{11} e_2, e_{14} e_{11} e_4, e_{15} e_{11} e_7\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sisi pada graf K_4. Selanjutnya titik baru pada graf K_5 terbentuk sepuluh sikel yaitu $\{e_3 e_5 e_6, e_3 e_8 e_9, e_5 e_8 e_{10}, e_6 e_9 e_{10}, e_3 e_{12} e_{13}, e_5 e_{12} e_{14},$ $e_6 e_{13} e_{14}, e_8 e_{12} e_{15}, e_9 e_{13} e_{15}, e_{10} e_{14} e_{15}\}$, di mana banyak sikel yang diperoleh sama dengan banyak sikel-3 yang dapat dibentuk dari graf K_5. Sehingga multiplisitas sikel pada graf total $K_1 + K_5$ adalah:

$$CM\left[T\left(K_1+K_5\right)\right]=15+10+10=35$$

Hasil dari perhitungan multiplisitas sikel di atas dapat digambarkan dalam tabel seperti di bawah ini:

Tabel 3.1 Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Kincir K_1+K_s

No	Graf Kincir	Banyak Sisi pada Graf K_1+K_s	Banyak Sisi pada Graf K_s	Sikel-3 di K_s	$CM\left[T\left(K_1+K_s\right)\right]$
1	K_1+K_1	1	0	0	1
2	K_1+K_2	3	1	0	4
3	K_1+K_3	6	3	1	10
4	K_1+K_4	10	6	4	20
5	K_1+K_5	15	10	10	35
…	…	…	…	…	…
s	K_1+K_s	$\frac{s^2+s}{2}$	$\frac{s(s-1)}{2}$	$\frac{s(s-1)(s-2)}{6}$	$\frac{s^3+3s^2+2s}{6}$

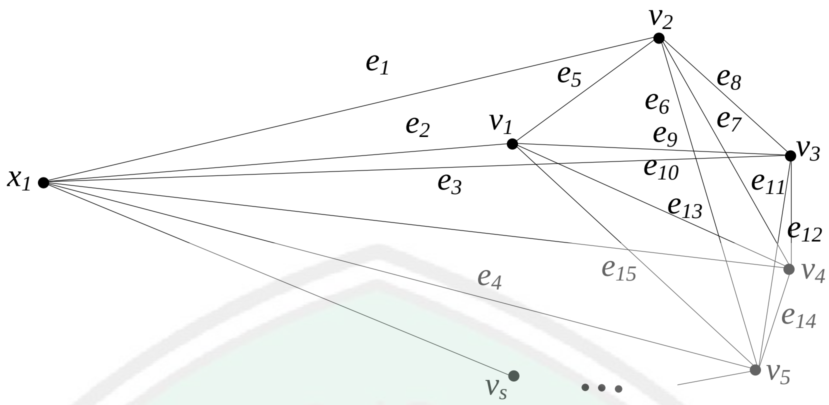
Teorema:

Multiplisitas sikel graf K_1+K_s adalah:

$$CM\left[T\left(K_1+K_s\right)\right]=\frac{s^3+3s^2+2s}{6}$$

Bukti:

Graf K_1+K_s dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf Kincir $K_1 + K_s$

Diketahui bahwa $K_1 = \{x_1\}$ sedangkan $K_s = \{v_i\} | 1 \le i \le s$, dan untuk menghitung maksimum banyak sikel yang saling lepas pada graf total $K_1 + K_s$ dapat melalui tiga langkah di bawah ini:

1. Langkah pertama adalah menghitung banyak sikel pada graf total $K_1 + K_s$ berdasarkan jumlah sisi pada graf $K_1 + K_s$, karena setiap sisi pada graf $K_1 + K_s$ membentuk satu sikel pada graf total $K_1 + K_s$. Graf K_s memiliki $\frac{s(s-1)}{2}$ sisi, ditambah sebanyak s sisi dari $(x_1 v_i)$, $i = 1, 2, 3, ..., s$, jadi total sisi dari graf $K_1 + K_s$ adalah:

$$\frac{s(s-1)}{2} + s = \frac{s^2 - s + 2s}{2}$$
$$= \frac{s^2 + s}{2}$$

2. Langkah kedua yaitu menghitung sikel yang terbentuk dari sisi di antara graf K_1 dengan K_s, karena setiap sikel memuat satu sisi pada graf K_s, sehingga totalnya sama dengan banyak sisi pada graf K_s yaitu: $\frac{s(s-1)}{2}$.

3. Langkah ketiga adalah menghitung banyak sikel yang terbentuk dari graf K_s. Sikel-3 yang terbentuk di dalam graf total K_s, dapat dibentuk dari titik-titik baru yang ketiganya dari graf total K_s. Samahalnya jika pada graf K_s, sikel-3 tersebut dapat dihitung dengan cara menghitung banyak sikel yang dapat dibentuk dari ketiga sisi pada graf K_s, sehingga banyaknya pengambilan 3 sisi dari s sisi dirumuskan sebagai berikut:

$$C_3^s = \frac{s!}{3!\cdot(s-3)!}$$

$$= \frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

Apabila banyak sikel-3 yang diperoleh dari banyaknya sisi pada graf $K_1 + K_s$ dijumlahkan dengan sikel-3 yang terbentuk dari banyaknya sisi pada K_s serta sikel-3 yang diperoleh dari K_s, maka akan menghasilkan maksimum banyak sikel dengan sisi yang saling lepas pada graf total $K_1 + K_s$, dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$CM\left[T\left(K_1 + K_s\right)\right] = \frac{s^2+s}{2} + \frac{s(s-1)}{2} + \frac{s(s-1)(s-2)}{6}$$

$$= \frac{2s^2}{2} + \frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{6}$$

$$= \frac{s^3 + 6s^2 - 3s^2 + 2s}{6}$$

$$= \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{6}$$

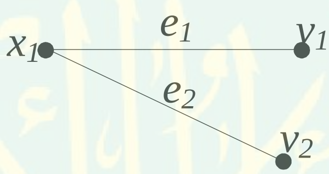
Sehingga terbukti bahwa $CM\left[T\left(K_1 + K_s\right)\right] = \dfrac{s^3 + 3s^2 + 2s}{6}$

3.3 Graf kincir $K_1 + 2K_s$

Graf kincir $K_1 + 2K_s$ merupakan graf komplit satu (K_1) dijumlah dengan dua graf komplit *s* $(2K_s)$.

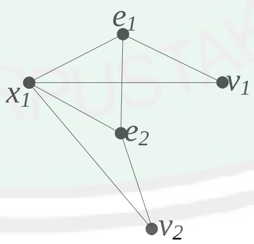
3.3.1 Graf Kincir $K_1 + 2K_1$

Graf kincir $K_1 + 2K_1$ merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dengan $2K_1$. Gambar yang diperoleh dari $K_1 + 2K_1$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.12 Graf Kincir $K_1 + 2K_1$

Setelah graf $K_1 + 2K_1$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + 2K_1$ adalah:



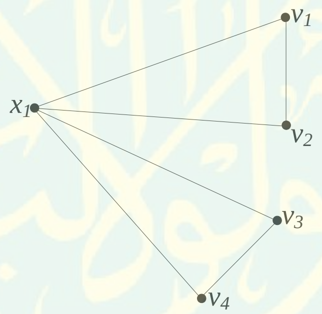
Gambar 3.13 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + 2K_1$

Gambar graf kincir $K_1 + 2K_1$ samahalnya dengan dua graf $K_1 + K_1$ yang bersekutu pada satu titik pusat, sehingga banyak sikel yang dihasilkan dari graf total $K_1 + 2K_1$ samahalnya dengan dua kali banyak sikel-3 yang didapat dari graf total $K_1 + K_1$ yaitu $\{x_1 e_1 v_1, x_1 e_2 v_2\}$. Multiplisitas sikel pada graf total $K_1 + 2K_1$ adalah:

$$CM\left[T\left(K_1 + 2K_1\right)\right] = 2 \cdot \left(CM\left[T\left(K_1 + K_1\right)\right]\right)$$
$$= 2 \cdot 1$$
$$= 2$$

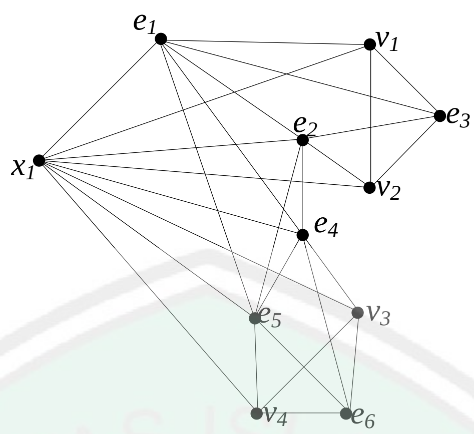
3.3.2 Graf kincir $K_1 + 2K_2$

Graf kincir $K_1 + 2K_2$ merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dengan $2K_2$. Gambar yang diperoleh dari $K_1 + 2K_2$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.14 Graf Kincir $K_1 + 2K_2$

Setelah graf $K_1 + 2K_2$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + 2K_2$ adalah:



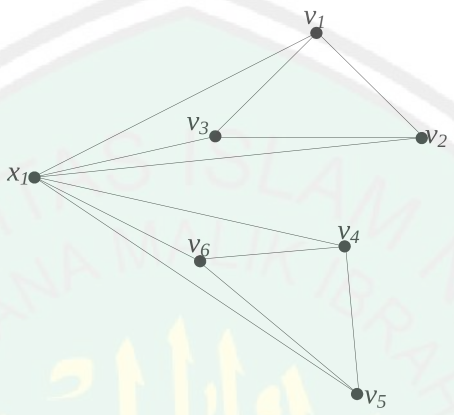
Gambar 3.15 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + 2K_2$

Gambar graf kincir $K_1 + 2K_2$ samahalnya dengan dua graf $K_1 + K_2$ yang bersekutu pada satu titik pusat, sehingga banyak sikel yang dihasilkan dari graf total $K_1 + 2K_2$ samahalnya dengan dua kali banyak sikel-3 yang didapat dari graf total $K_1 + K_2$ yaitu $\{x_1 e_1 v_1, x_1 e_2 v_2, v_1 e_3 v_2, e_1 e_2 e_3, x_1 e_4 v_3, x_1 e_5 v_4, v_3 e_6 v_4, e_4 e_5 e_6\}$. Karena kedua graf total $K_1 + K_2$ bersekutu pada satu titik pusat $\{x_1\}$, maka di antara kedunya akan terhubung dengan sisi yang membentuk graf K_4 dengan titik $\{e_1 e_2 e_3 e_4\}$, namun karena sisi $\{e_1 e_2\}$ dan $\{e_4 e_5\}$ telah terpakai pada penghitungan sikel disetiap buah daun, maka sisi penghubung yang awalnya berbentuk graf K_4 akan menjadi graf bipartisi komplit $K_{2,2}$ di mana hanya termuat satu sikel-4 yaitu $\{e_1 e_4 e_2 e_5\}$. Sehingga Multiplisitas sikel pada graf total $K_1 + 2K_2$ adalah:

$$
\begin{aligned}
CM\left[T\left(K_1 + 2K_2\right)\right] &= 2 \cdot \left(CM\left[T\left(K_1 + K_2\right)\right]\right) + 1 \\
&= 2 \cdot 4 + 1 \\
&= 9
\end{aligned}
$$

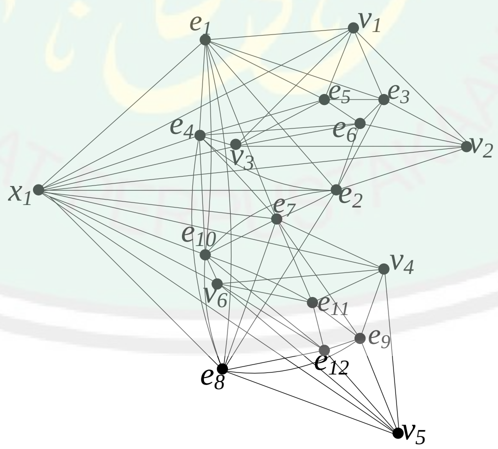
3.3.3 Graf Kincir $K_1 + 2K_3$

Graf kincir $K_1 + 2K_3$ merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dengan $2K_3$. Gambar yang diperoleh dari $K_1 + 2K_3$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.16 Graf Kincir $K_1 + 2K_3$

Setelah graf $K_1 + 2K_3$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + 2K_3$ adalah:



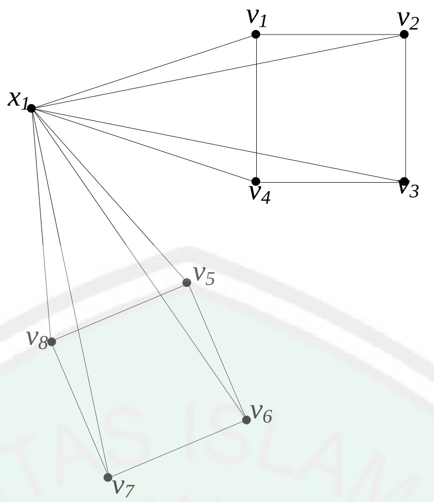
Gambar 3.17 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + 2K_3$

Gambar Graf kincir $K_1 + 2K_3$ samahalnya dengan dua graf $K_1 + K_3$ yang bersekutu pada satu titik pusat, sehingga banyak sikel yang dihasilkan dari graf total $K_1 + 2K_3$ samahalnya dengan dua kali banyak sikel-3 yang didapat dari graf total $K_1 + K_3$ yaitu: $\{x_1 e_1 v_1, x_1 e_2 v_2, x_1 e_4 v_3, v_1 e_3 v_2, v_2 e_6 v_3, v_1 e_5 v_3, e_1 e_2 e_3, e_1 e_4 e_5, e_2 e_4 e_6, e_3 e_5 e_6, x_1 e_7 v_4, x_1 e_8 v_5, x_1 e_{10} v_6, v_4 e_9 v_5, v_5 e_{12} v_6, v_4 e_{11} v_6, e_7 e_8 e_9, e_7 e_{10} e_{11}, e_8 e_{10} e_{12}, e_9 e_{11} e_{12}\}$. Karena kedua graf total $K_1 + K_3$ bersekutu pada satu titik pusat $\{x_1\}$, maka di antara kedunya akan terhubung dengan sisi yang membentuk graf K_6 dengan titik $\{e_1 e_2 e_4 e_7 e_8 e_{10}\}$, namun karena sisi $\{e_1 e_2, e_1 e_4, e_2 e_4, e_7 e_8, e_7 e_{10}, e_8 e_{10}\}$ telah terpakai pada penghitungan sikel disetiap buah daun, maka sisi penghubung yang pada awalnya berbentuk graf K_6 akan menjadi graf bipartisi komplit $K_{3,3}$ di mana hanya termuat satu sikel-4 yang saling lepas yaitu $\{e_1 e_7 e_2 e_8\}$. Sehingga Multiplisitas sikel pada graf total $K_1 + 2K_3$ adalah:

$$\begin{aligned} CM\left[T\left(K_1 + 2K_3\right)\right] &= 2 \cdot \left(CM\left[T\left(K_1 + K_3\right)\right]\right) + 1 \\ &= 2 \cdot 10 + 1 \\ &= 21 \end{aligned}$$

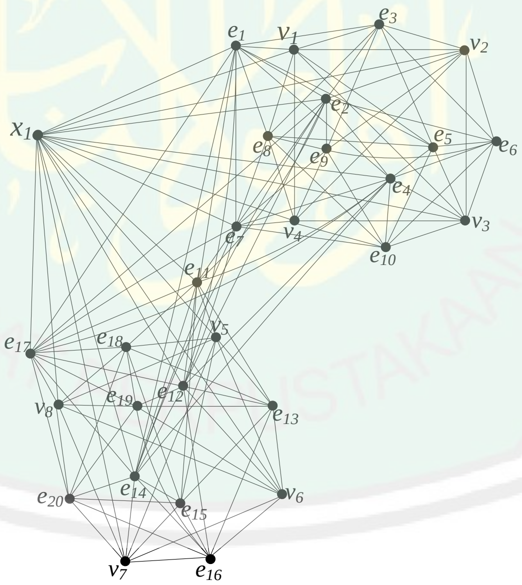
3.3.4 Graf Kincir $K_1 + 2K_4$

Graf kincir $K_1 + 2K_4$ merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dan $2K_4$. Gambar yang diperoleh dari $K_1 + 2K_4$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.18 Graf Kincir $K_1 + 2K_4$

Setelah graf $K_1 + 2K_4$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + 2K_4$ adalah:



Gambar 3.19 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + 2K_4$

Gambar Graf kincir $K_1 + 2K_4$ samahalnya dengan dua graf $K_1 + K_4$ yang bersekutu pada satu titik pusat, sehingga banyak sikel-3 yang dihasilkan dari graf total K_1+2K_4 samahalnya dengan dua kali banyak sikel yang didapat dari graf total K_1+K_4 yaitu:

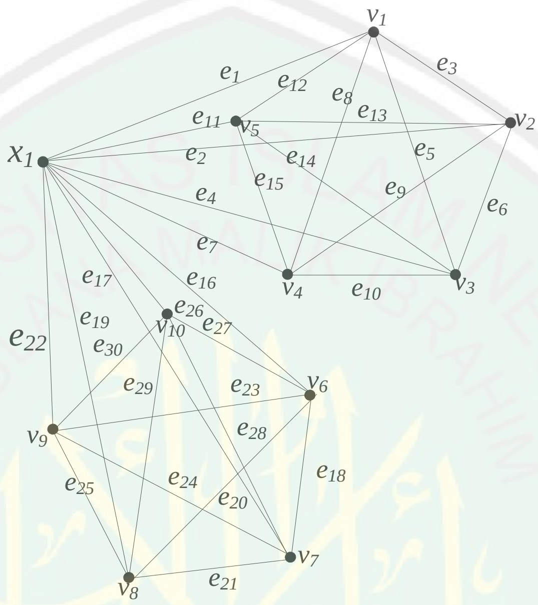
$\{x_1\,e_1\,v_1, x_1\,e_2\,v_2, x_1\,e_4\,v_3, x_1\,e_7\,v_4, v_1\,e_3\,v_2, v_2\,e_6\,v_3, v_3\,e_{10}\,v_4, v_1\,e_5\,v_3, v_1\,e_8\,v_4, v_2\,e_9\,v_4,$
$e_1\,e_2\,e_3, e_1\,e_4\,e_5, e_1\,e_7\,e_8, e_2\,e_4\,e_6, e_3\,e_5\,e_6, e_2\,e_7\,e_9, e_3\,e_8\,e_9, e_4\,e_7\,e_{10}, e_5\,e_8\,e_{10}, e_6\,e_9\,e_{10}$
$x_1\,e_{11}\,v_5, x_1\,e_{12}\,v_6, x_1\,e_{14}\,v_7, x_1\,e_{17}\,v_8, v_5\,e_{13}\,v_6, v_6\,e_{16}\,v_7, v_7\,e_{20}\,v_8, v_5\,e_{15}\,v_7, v_5\,e_{18}\,v_8,$
$v_6\,e_{19}\,v_8, e_{11}\,e_{12}\,e_{13}, e_{11}\,e_{14}\,e_{15}, e_{11}\,e_{17}\,e_{18}, e_{12}\,e_{14}\,e_{16}, e_{13}\,e_{15}\,e_{16}, e_{12}\,e_{17}\,e_{19}, e_{13}\,e_{18}\,e_{19},$
$e_{14}\,e_{17}\,e_{20}, e_{15}\,e_{18}\,e_{20}, e_{16}\,e_{19}\,e_{20}\}$

Karena kedua graf total K_1+K_4 bersekutu pada satu titik pusat $\{x_1\}$, maka di antara kedunya akan terhubung dengan sisi yang membentuk graf K_8 dengan titik $\{e_1\,e_2\,e_4\,e_7\,e_{11}\,e_{12}\,e_{14}\,e_{17}\}$, namun karena sisi $\{e_1\,e_2, e_1\,e_4, e_1\,e_7, e_2\,e_4, e_2\,e_7, e_4\,e_7,$ $e_{11}\,e_{12}, e_1\,e_{14}, e_1\,e_{17}, e_{12}\,e_{14}, e_{12}\,e_{17}, e_{14}\,e_{17}\}$ telah terpakai pada penghitungan sikel disetiap buah daun, maka sisi penghubung yang pada awalnya berbentuk graf K_8 akan menjadi graf bipartisi komplit $K_{4,4}$ di mana hanya termuat empat sikel-4 yang saling lepas yaitu $\{e_1\,e_{11}\,e_2\,e_{12}, e_1\,e_{14}\,e_2\,e_{17}, e_4\,e_{11}\,e_7\,e_{17}, e_4\,e_{14}\,e_7\,e_{17}\}$. Sehingga Multiplisitas sikel pada graf total K_1+2K_4 adalah:

$$CM\left[T\left(K_1+2K_4\right)\right] = 2\cdot\left(CM\left[T\left(K_1+K_4\right)\right]\right)+4$$
$$= 2\cdot 20+4$$
$$= 44$$

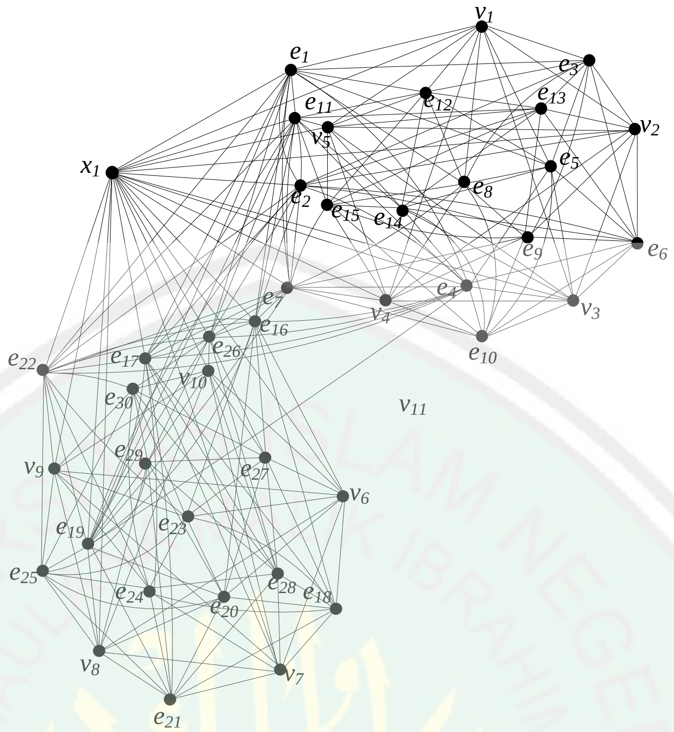
3.3.5 Graf kincir $K_1 + 2K_5$

Graf kincir $K_1 + 2K_5$ merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dan $2K_5$. Gambar yang diperoleh dari $K_1 + 2K_5$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.20 Graf Kincir $K_1 + 2K_5$

Setelah graf $K_1 + 2K_5$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + 2K_5$ adalah:



Gambar 3.21 Graf Total pada Graf Kincir K_1+2K_5

Gambar Graf kincir K_1+2K_5 samahalnya dengan dua graf K_1+K_5 yang bersekutu pada satu titik pusat, sehingga banyak sikel-3 yang dihasilkan dari graf total K_1+2K_5 samahalnya dengan dua kali banyak sikel yang didapat dari graf total K_1+K_5 yaitu $\{x_1 e_1 v_1, x_1 e_2 v_2, x_1 e_4 v_3, x_1 e_7 v_4, x_1 e_{11} v_5, v_1 e_3 v_2, v_2 e_6 v_3,$

$v_3 e_{10} v_4, v_4 e_{15} v_5, v_1 e_5 v_3, v_1 e_8 v_4, v_2 e_9 v_4, v_1 e_{12} v_5, v_2 e_{13} v_5, v_3 e_{14} v_5, e_1 e_2 e_3, e_1 e_4 e_5,$

$e_1 e_7 e_8, e_1 e_{11} e_{12}, e_2 e_4 e_6, e_3 e_5 e_6, e_2 e_7 e_9, e_3 e_8 e_9, e_4 e_7 e_{10}, e_5 e_8 e_{10}, e_6 e_9 e_{10}, e_3 e_{12} e_{13},$

$e_2 e_{11} e_{13}, e_4 e_{11} e_{14}, e_5 e_{12} e_{14}, e_6 e_{13} e_{14}, e_7 e_{11} e_{15}, e_8 e_{12} e_{15}, e_9 e_{13} e_{15}, e_{10} e_{14} e_{15}, x_1 e_{16} v_6,$

$x_1 e_{17} v_7, x_1 e_{19} v_8, x_1 e_{22} v_9, x_1 e_{26} v_{10}, v_6 e_{18} v_7, v_7 e_{21} v_8, v_8 e_{25} v_9, v_9 e_{30} v_{10}, v_6 e_{20} v_8,$

$v_6 e_{23} v_9, v_7 e_{24} v_9, v_6 e_{27} v_{10}, v_7 e_{28} v_{10}, v_8 e_{29} v_{10}, e_{16} e_{17} e_{18}, e_{16} e_{19} e_{20}, e_{16} e_{22} e_{23},$

$e_{16} e_{26} e_{27}, e_{17} e_{19} e_{21}, e_{18} e_{20} e_{21}, e_{17} e_{22} e_{24}, e_{18} e_{23} e_{24}, e_{19} e_{22} e_{25}, e_{20} e_{23} e_{25}, e_{21} e_{24} e_{25},$

$e_{18} e_{27} e_{28}, e_{17} e_{26} e_{28}, e_{19} e_{26} e_{29}, e_{20} e_{27} e_{29}, e_{21} e_{28} e_{29}, e_{22} e_{26} e_{30}, e_{23} e_{27} e_{30}, e_{24} e_{28} e_{30},$

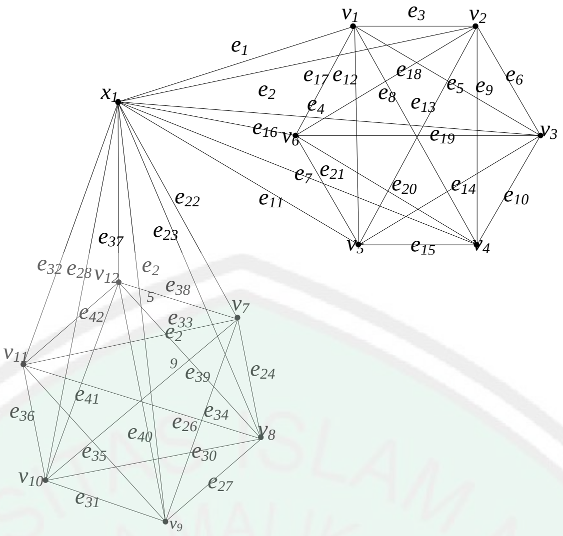
$e_{25} e_{29} e_{30}\}$

Karena kedua graf total K_1+K_5 bersekutu pada satu titik pusat $\{x_1\}$, maka di antara kedunya akan terhubung dengan sisi yang membentuk graf K_{10} dengan titik $\{e_1\,e_2\,e_4\,e_7\,e_{11}\,e_{16}\,e_{17}\,e_{19}\,e_{22}\,e_{26}\}$, namun karena sisi $\{e_1\,e_2, e_1\,e_4, e_1\,e_7, e_1\,e_{11}, e_2\,e_4,$ $e_2\,e_7, e_2\,e_{11}, e_4\,e_7, e_4\,e_{11}, e_7\,e_{11}, e_{16}\,e_{17}, e_{16}\,e_{19}, e_{16}\,e_{22}, e_{16}\,e_{26}, e_{17}\,e_{19}, e_{17}\,e_{22}, e_{17}\,e_{26}, e_{19}\,e_{22},$ $e_{19}\,e_{26}, e_{22}\,e_{26},, e_{14}\,e_{17}\}$ telah terpakai pada penghitungan sikel disetiap buah daun, maka sisi penghubung yang pada awalnya berbentuk graf K_{10} akan menjadi graf bipartisi komplit $K_{5,5}$ di mana hanya termuat empat sikel-4 yang saling lepas yaitu $\{e_1\,e_{16}\,e_2\,e_{17}, e_1\,e_{19}\,e_2\,e_{22}, e_4\,e_{16}\,e_7\,e_{17}, e_4\,e_{19}\,e_7\,e_{22}\}$. Sehingga Multiplisitas sikel pada graf total K_1+2K_5 adalah:

$$\begin{aligned} CM\left[T\left(K_1+2K_5\right)\right] &= 2\cdot\left(CM\left[T\left(K_1+K_5\right)\right]\right)+4 \\ &= 2\cdot 35+4 \\ &= 74 \end{aligned}$$

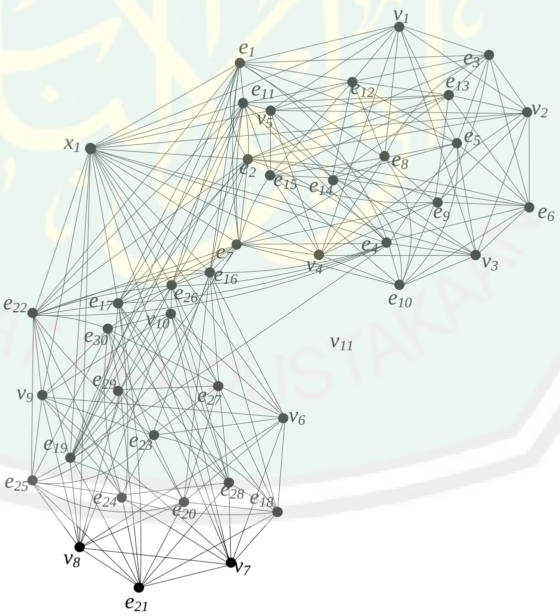
3.3.6 Graf kincir K_1+2K_6

Graf kincir K_1+2K_6 merupakan penjumlahan antara graf komplit K_1 dan $2K_6$. Gambar yang diperoleh dari K_1+2K_6 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.22 Graf Kincir $K_1 + 2K_6$

Setelah graf $K_1 + 2K_6$ dijadikan graf total, maka gambar dari graf total $K_1 + 2K_6$ adalah:



Gambar 3.23 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + 2K_6$

Gambar Graf kincir $K_1 + 2K_6$ samahalnya dengan dua graf $K_1 + K_6$ yang bersekutu pada satu titik pusat, sehingga banyak sikel-3 yang dihasilkan dari graf total $K_1 + 2K_6$ samahalnya dengan dua kali banyak sikel yang didapat dari graf total $K_1 + K_6$ yaitu:

$\{x_1 e_1 v_1, x_1 e_2 v_2, x_1 e_4 v_3, x_1 e_7 v_4, x_1 e_{11} v_5, x_1 e_{16} v_6, v_1 e_3 v_2, v_2 e_6 v_3, v_3 e_{10} v_4, v_4 e_{15} v_5,$
$v_5 e_{21} v_5, v_1 e_5 v_3, v_1 e_8 v_4, v_2 e_9 v_4, v_1 e_{12} v_5, v_2 e_{13} v_5, v_3 e_{14} v_5, v_1 e_{17} v_6, v_2 e_{18} v_6, v_3 e_{19} v_6,$
$v_4 e_{20} v_6, e_1 e_2 e_3, e_1 e_4 e_5, e_1 e_7 e_8, e_1 e_{11} e_{12}, e_1 e_{16} e_{17}, e_2 e_4 e_6, e_3 e_5 e_6, e_2 e_7 e_9, e_3 e_8 e_9,$
$e_4 e_7 e_{10}, e_5 e_8 e_{10}, e_6 e_9 e_{10}, e_2 e_{11} e_{13}, e_3 e_{12} e_{13}, e_4 e_{11} e_{14}, e_5 e_{12} e_{14}, e_6 e_{13} e_{14}, e_7 e_{11} e_{15},$
$e_8 e_{12} e_{15}, e_9 e_{13} e_{15}, e_2 e_{16} e_{18}, e_3 e_{17} e_{18}, e_4 e_{16} e_{19}, e_5 e_{17} e_{19}, e_6 e_{18} e_{19}, e_7 e_{16} e_{20}, e_8 e_{17} e_{20},$
$e_9 e_{18} e_{20}, e_{10} e_{19} e_{20}, e_{11} e_{16} e_{21}, e_{12} e_{17} e_{21}, e_{13} e_{18} e_{21}, e_{14} e_{19} e_{21}, e_{15} e_{20} e_{21} x_1 e_{22} v_6, x_1 e_{23} v_7,$
$x_1 e_9 v_8, x_1 e_{28} v_9, x_1 e_{32} v_{10}, x_1 e_{37} v_{27}, v_6 e_{24} v_7, v_7 e_{27} v_8, v_8 e_{31} v_9, v_9 e_{36} v_{10}, v_{10} e_{42} v_{10},$
$v_6 e_{26} v_8, v_6 e_{29} v_9, v_7 e_{30} v_9, v_6 e_{33} v_{10}, v_7 e_{34} v_{10}, v_8 e_{35} v_{10}, v_6 e_{38} v_{11}, v_7 e_{39} v_{11}, v_8 e_{40} v_{11},$
$v_9 e_{41} v_{11}, e_{22} e_{23} e_{24}, e_{22} e_{25} e_{26}, e_{22} e_{28} e_{29}, e_{22} e_{32} e_{33}, e_{22} e_{37} e_{38}, e_{23} e_{25} e_{27}, e_{24} e_{26} e_{27},$
$e_{23} e_{28} e_{30}, e_{24} e_{29} e_{30}, e_{25} e_{28} e_{31}, e_{26} e_{29} e_{31}, e_{27} e_{30} e_{31}, e_{23} e_{32} e_{34}, e_{24} e_{33} e_{34}, e_{25} e_{32} e_{35},$
$e_{26} e_{33} e_{35}, e_{27} e_{34} e_{35}, e_{28} e_{32} e_{36}, e_{29} e_{33} e_{36}, e_{30} e_{34} e_{36}, e_{23} e_{37} e_{39}, e_{24} e_{38} e_{39}, e_{25} e_{37} e_{40},$
$e_{26} e_{38} e_{40}, e_{27} e_{39} e_{40}, e_{28} e_{37} e_{41}, e_{29} e_{38} e_{41}, e_{30} e_{39} e_{41}, e_{31} e_{40} e_{41}, e_{32} e_{37} e_{42}, e_{33} e_{38} e_{42},$
$e_{34} e_{39} e_{42}, e_{35} e_{40} e_{42}, e_{36} e_{41} e_{42}\}$

Karena kedua graf total $K_1 + K_6$ bersekutu pada satu titik pusat $\{x_1\}$, maka di antara kedunya akan terhubung dengan sisi yang membentuk graf K_{12} dengan titik $\{e_1 e_2 e_4 e_7 e_{11} e_{16} e_{22} e_{23} e_{25} e_{28} e_{32} e_{37}\}$, namun karena sisi $\{e_1 e_2, e_1 e_4, e_1 e_7, e_1 e_{11},$ $e_1 e_{16}, e_2 e_4, e_2 e_7, e_2 e_{11}, e_2 e_{16}, e_4 e_7, e_4 e_{11}, e_4 e_{16}, e_7 e_{11}, e_7 e_{16}, e_{11} e_{16}, e_{22} e_{23}, e_{22} e_{25}, e_{22} e_{28},$ $e_{22} e_{32}, e_{22} e_{37}, e_{23} e_{25}, e_{23} e_{28}, e_{23} e_{28}, e_{23} e_{32}, e_{23} e_{37}, e_{25} e_{28}, e_{25} e_{32}, e_{25} e_{37}, e_{28} e_{32}, e_{28} e_{37},$ $, e_{32} e_{37}\}$ telah terpakai pada penghitungan sikel disetiap buah daun, maka sisi penghubung yang pada awalnya berbentuk graf K_{12} akan menjadi graf bipartisi komplit $K_{6,6}$ di mana hanya termuat sembilan sikel-4 yang saling lepas yaitu $\{e_1 e_{22} e_2 e_{23}, e_1 e_{25} e_2 e_{28}, e_1 e_{32} e_2 e_{37}, e_2 e_{22} e_7 e_{23}, e_2 e_{25} e_7 e_{28}, e_2 e_{32} e_7 e_{37}, e_{11} e_{22} e_{16} e_{23},$ $e_{11} e_{25} e_{16} e_{28}, e_{11} e_{32} e_{16} e_{37}\}$. Sehingga Multiplisitas sikel pada graf total $K_1 + 2K_6$ adalah:

$$
\begin{aligned}
CM\left[T\left(K_1 + 2K_6\right)\right] &= 2 \cdot \left(CM\left[T\left(K_1 + K_6\right)\right]\right) + 9 \\
&= 2 \cdot 56 + 9 \\
&= 121
\end{aligned}
$$

Hasil dari perhitungan multiplisitas sikel K_1+2K_s dapat digambarkan dalam tabel seperti di bawah ini:

Tabel 3.2 Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Kincir K_1+2K_s

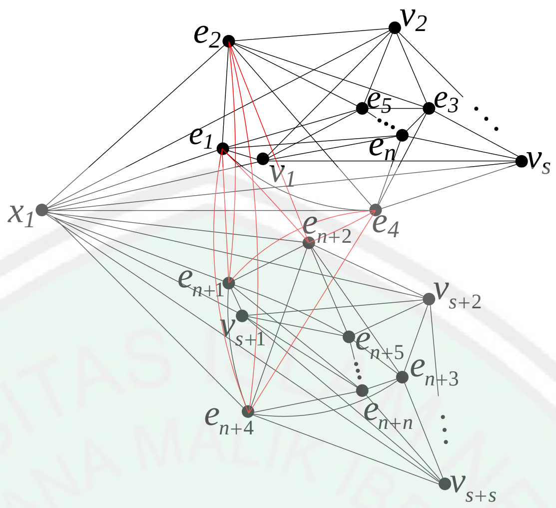
No	K_1+2K_s	$CM\left[T\left(K_1+K_s\right)\right]$	Sikel-4 dari graf $K_{s,s}$	$CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right]$
1	K_1+2K_1	1	0	2
2	K_1+2K_2	4	1	9
3	K_1+2K_3	10	1	21
4	K_1+2K_4	20	4	44
5	K_1+2K_5	35	4	74
6	K_1+2K_6	56	9	121
	…	...	…	…
s	K_1+2K_s	$\frac{s^3+3s^2+2s}{6}$	s Ganjil: $\frac{(s-1)^2}{4}$ s Genap: $\frac{s^2}{4}$	s Ganjil: $\frac{4s^3+15s^2+2s+3}{12}$ s Genap: $\frac{4s^3+15s^2+8s}{12}$

Teorema:

Multiplisitas sikel graf K_1+2K_s adalah:

$$CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right]=\begin{cases}\dfrac{4s^3+15s^2+2s+3}{12}, & s \textit{ ganjil}\\[2mm] \dfrac{4s^3+15s^2+8s}{12}, & s \textit{ genap}\end{cases}$$

Bukti:



Gambar 3.24 Graf Total pada Graf Kincir $K_1 + 2K_s$

Graf pada gambar 3.24 di atas menunjukkan bahwa graf total $K_1 + 2K_s$ terbentuk dari dua graf total $K_1 + K_s$ yang bersekutu pada satu titik pusat yang dinotasikan dengan x_1, sehingga banyak sikel yang saling lepas samahalnya dengan dua kali multiplisitas sikel yang diperoleh dari graf total $K_1 + K_s$ dan dapat ditulis:

$$2 \cdot K_1 + K_s = 2 \cdot \frac{s^3 + 3s^2 + 2s}{6}$$

$$= \frac{2s^3 + 6s^2 + 4s}{6}$$

Karena kedua graf total $K_1 + K_s$ bersekutu pada satu titik pusat $\{x_1\}$, maka di antara keduanya akan terhubung dengan sisi yang membentuk graf K_{2s} dengan titik yang merupakan sisi pada masing-masing daun yang terkait langsung dengan $\{x_1\}$, namun karena sisi yang terhubung pada masing-

masing daun telah terpakai pada penghitungan sikel di setiap daun, maka sisi yang akan dihitung hanyalah sisi penghubung antara daun kesatu dengan daun kedua sehingga sisi penghubung yang pada awalnya berbentuk graf K_{2s} akan menjadi graf bipartisi komplit $K_{s,s}$ di mana multiplisitas sikel pada graf $K_{s,s}$ adalah $\frac{(s-1)^2}{4}$ untuk s ganjil, dan $\frac{s^2}{4}$ untuk s genap. Sehingga multiplisitas sikel dari graf total pada graf kincir K_1+2K_s adalah

$$
\begin{aligned}
CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right] &= 2\cdot\left(CM\left[T\left(K_1+1K_s\right)\right]\right)+\left(\mathrm{K}_{s,s},\ s\ ganjil\right) \\
&= 2\cdot\left(\frac{s^3+3s^2+2s}{6}\right)+\frac{(s-1)^2}{4} \\
&= 2\cdot\left(\frac{s^3+3s^2+2s}{6}\right)+\frac{s^2-2s+1}{4} \\
&= \frac{2s^3+6s^2+4s}{6}+\frac{s^2-2s+1}{4} \\
&= \frac{4s^3+12s^2+8s}{12}+\frac{3s^2-6s+3}{12} \\
&= \frac{4s^3+15s^2+2s+3}{12}
\end{aligned}
$$

Maka $CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right]$ dengan s ganjil adalah:

$$CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right]=\frac{4s^3+15s^2+2s+3}{12}$$

$$
\begin{aligned}
CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right] &= 2\cdot\left(CM\left[T\left(K_1+1K_s\right)\right]\right)+\left(K_{s,s},\ s\ genap\right)\\
&= 2\cdot\left(\frac{s^3+3s^2+2s}{6}\right)+\frac{s^2}{4}\\
&= \frac{2s^3+6s^2+4s}{6}+\frac{s^2}{4}\\
&= \frac{4s^3+12s^2+8s}{12}+\frac{3s^2}{12}\\
&= \frac{4s^3+15s^2+8s}{12}
\end{aligned}
$$

Maka $CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right]$ dengan s genap adalah:

$$CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right]=\frac{4s^3+15s^2+8s}{12}$$

Satu persatu teorema dari graf total pada graf kincir K_1+mK_s telah berhasil dibuktikan, meski banyak menemui kendala tapi Allah Swt. telah membuktikan firman-Nya dalam al-Qur'an surat al-Insyirah/94:6, yaitu:

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٦

"Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan" (QS. al-Insyirah/94:5-6).

Allah Swt. sampai menyebutkan dua kali tentang *"adanya kemudahan sesudah kesulitan"* dalam sebuah surat, ini menandakan bahwa Allah Swt. benar-benar telah memberi sebuah kepastian solusi akan semua masalah atau cobaan yang hamba-Nya hadapi. Allah Swt. juga kembali menegaskan dalam al-Qur'an surat Adh-Duhaa/93:7:

وَوَجَدَكَ ضَآلًّا فَهَدَىٰ ﴿٧﴾

"Dan Dia mendapatimu dalam keadaan bingung kemudian Dia memberikanmu petunjuk" (QS. Adh-Duhaa/93:7).

Semua masalah semata-mata datangnya dari Allah Swt., dan hanya atas pertolongan-Nya semua masalah dapat terselesaikan. Sebagai hamba berkewajiban berusaha namun hasil akhir hanya Allah Swt. yang dapat menentukan.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf kincir $K_r + mK_S$, dapat disimpulkan sebagai berikut.

$$CM\left[T\left(K_1+1K_S\right)\right]=\frac{s^3+3\cdot s^2+2\cdot s}{6} \qquad ; CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right]=\begin{cases}\dfrac{4s^3+15s^2+2s+3}{12} & \mid \text{untuk } s \text{ ganjil}\\ \dfrac{4s^3+15s^2+8s}{12} & \mid \text{untuk } s \text{ genap}\end{cases}$$

4.2 Saran

Penelitian ini membahas tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf kincir $K_r + mK_S$, namun pada pembahasannya masih sampai dengan $CM\left[T\left(K_1+2K_s\right)\right]$, maka penilitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari $CM\left[T\left(K_1+mK_s\right)\right]$, $CM\left[T\left(K_2+mK_s\right)\right]$, $CM\left[T\left(K_3+mK_s\right)\right]$ sampai dengan $CM\left[T\left(K_r+mK_s\right)\right]$.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN-Malang Press

Abdussakir, Azizah, N. N., dan Nofandika, F. F. 2009. *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi.* Malang: UIN-Malang Press.

Ali, A. dan Panayappan, S. 2010. *Cycle Multiplicity of Total Graph of* C_n, P_n, *and* $K_{1,n}$. International Journal of Engineering, Science and Technology vol. 2, No. 2, 2010, pp. 54-58

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadswoeth. Inc.

Chartrand, G., Geller, D. dan Hedetniemi, S. 1971. Institute for Social Research. *Graph With Forbidden Subgraphs.* 2632:43.

Hindayani. 2011. *Dimensi Metrik Graf* $K_r + mK_s, m, r, s \in N$, Jurnal CAUCHY-ISSN:2086-0382. Vol. 1.

Ilmiyah, N. N. 2011. *Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Tangga* L_n, *Graf Star* S_n, *dan Double Star* $S_{n,n+1}$. *Skripsi*. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Muslihatin. 2011. *Multiplisitas Sikel pada Graf Komplit* K_n, *Graf Total pada Graf Kipas* F_n dan Graf Roda W_n. *Skripsi*. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi. Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Sujono. 1988. *Pengajaran Matematika untuk Sekolah Menengah*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Dirjen Dikti Proyek Pengembangan Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan.

Wahyudi, S. dan Sumarno. 2010. *Dimensi Metrik pada Graf Kincir dengan Pola* $K_1 + mK_3$. FMIPA ITS, 8: 731-744.