DISKRITISASI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL POLA PEMBENTUKAN SEL

SKRIPSI

OLEH
KHUSNUL KHAMIDIYAH
NIM. 09610009

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

DISKRITISASI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL POLA PEMBENTUKAN SEL

SKRIPSI

Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh
Khusnul Khamidiyah
NIM. 09610009

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015

DISKRITISASI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL POLA PEMBENTUKAN SEL

SKRIPSI

Oleh
Khusnul Khamidiyah
NIM. 09610009

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal 21 November 2014

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Usman Pagalay, M.Si	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19650414 200312 1 001	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

DISKRITISASI PADA SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL POLA PEMBENTUKAN SEL

SKRIPSI

Oleh
Khusnul Khamidiyah
NIM. 09610009

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 8 Januari 2015

PengujiUtama	: Drs. H. Turmudi, M.Si	....
KetuaPenguji	: Mohammad Jamhuri, M.Si	....
SekretarisPenguji	:Dr. UsmanPagalay, M.Si	....
Anggota Penguji	:Dr. H. Ahmad Barizi, M.A	....

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Khusnul Khamidiyah
NIM	: 09610009
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Diskritisasi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Pola Pembentukan Sel

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Januari 2015
Yang membuat pernyataan,

Khusnul Khamidiyah
NIM. 09610009

MOTO

Do’a tak akan pernah mampu mengembalikan waktu yang telah berlalu,

namun dengan do’a akan hadir kesempatan baru.

PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda H. Abdul Fatah Abdullah, BA dan Ibunda Hj. Juwariyah,

serta suami tercinta H. Abdulloh Umar Badri yang nasihat dan motivasinya selalu

memberikan semangat yang berarti bagi penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah yang telah melimpahkan rahmat serta karuniaNya kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Ucapan terima kasih tidak lupa penulis sampaikan kepada seluruh pihak yang telah mendukung lancarnya penyusunan skripsi ini. Dengan hormat penulis ucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen pembimbing bidang matematika yang telah banyak memberikan arahan, nasihat serta motivasi kepada penulis.
5. Dr. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing bidang integrasi Islam dan sains.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

7. Ayahanda H. Abdul Fatah Abdullah, BA dan Ibunda Hj. Juwariyah selaku orang tua yang senantiasa memberikan dukungan, arahan, nasihat serta motivasi yang berharga kepada penulis.
8. Belahan jiwa H. Abdullah Umar Badri, yang selalu mendukung dan menginspirasi penulis.
9. Saudara-saudari semua yang namanya tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 21 Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Khamidiyah, Khusnul. 2015. **Diskritisasi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Pola Pembentukan Sel**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

Kata kunci: Persamaan *Meinhardt*, metode beda hingga, skema *Crank-Nicolson*

Persamaan Meinhardt merupakan sebuah model matematika yang menggambarkan pola pembentukan sel pada *hydra*. Hans Meinhardt menggunakan jenis persamaan difusi untuk menggambarkan bagaimana variabel-variabel berkembang biak, mati, bergerak, dan berinteraksi. Bentuk model yang dirumuskan oleh Meinhardt tersebut merupakan model kontinu, sehingga salah satu studi yang dapat diterapkan pada model *Meinhardt* adalah dilakukannya diskritrisasi. Diskritisasi merupakan proses kuantisasi sifat-sifat kontinu. Salah satu metode yang dapat memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit ialah metode beda hingga. Sehingga dalam penelitian ini akan dilakukan proses diskritisasi pada model pembentukan sel.

Metode yang digunakan adalah beda hingga skema *Crank-Nicolson* yang merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Kelebihan dari skema *Crank-Nicolson* adalah nilai *error* yang lebih kecil dari pada skema eksplisit dan implisit. Dalam penelitian ini digunakan beda hingga maju untuk turunan t dan beda hingga pusat untuk turunan x pada persamaan *activator* $a(x,t)$ dan inhibitor $b(x,t)$. Langkah-langkah yang dilakukan adalah dimulai dengan menganalisis persamaan *Meinhardt* dan dilanjutkan dengan diskritisasi. Akhirnya, diperoleh kesimpulan bentuk diskrit dari persamaan *Meinhardt* sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
-0,025a_{i-1}^{n} + (1,05025)a_i^n - 0,025a_{i+1}^{n} &= 0,025a_{i-1}^{n-1} + (0,94975)a_i^{n-1} + 0,05\left(a_i^n\right)^2 b_i^{n+1} \\
&\quad + 0,05\left(a_i^{n-1}\right)^2 b_i^n + 0,025a_{i+1}^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-2b_{i-1}^{n} + (5,0004)b_i^n - 2b_{i+1}^{n} &= 0,0002 + 2b_{i-1}^{n-1} + (-3,0004)b_i^{n-1} + 2b_{i+1}^{n-1} \\
&\quad - 0,005b_i^n\left(a_i^{n+1}\right)^2 - 0,005b_i^{n-1}\left(a_i^n\right)^2
\end{aligned}
$$

ABSTRACT

Khamidiyah, Khusnul. 2015. **Discretization on Partial Differential Equation System on the Pattern Formation of Cell**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisor: (I) Dr. Usman Pagalay, M.Si. (II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.

Keywords: Meinhardt equation, finite difference method, Crank-Nicolson scheme

Meinhardt equation is a mathematical model which describes the pattern of cell formation in hydra. Hans Meinhardt uses the diffusion equation type to describe how the variables are breed, die, move, and interact. The model formulated by Meinhardt is a continuous model. Thus, one of the studies which can be applied to Meinhardt equation is discretization. Discretization is a quantization process of continuous properties. One method which can predict continuous differential form into discrete form is by applying finite difference method. Thus, the proses of discretization will be conducted in this research on the pattern formation of cell.

The method used in this study is finite difference method implementing Crank-Nicolson scheme which is the result of explicit and implicit scheme development. The advantage of the Crank Nicolson scheme is the smaller error values than the explicit and implicit scheme. This method used finite forward difference for derivatives of (t) and finite centre difference for derivatives of (x) at the activator $a(x,t)$ and inhibitor $b(x,t)$. The Steps conducted by analyzing Meinhardt equation and continued with discretization. We obtain this following discrete form as the conclution:

$$-0,025a_{i-1}^{n}+(1,05025)a_i^n-0,025a_{i+1}^{n}=0,025a_{i-1}^{n-1}+(0,94975)a_i^{n-1}+0,05\left(a_i^n\right)^2 b_i^{n+1}$$
$$+0,05\left(a_i^{n-1}\right)^2 b_i^n+0,025a_{i+1}^{n-1}$$

$$-2b_{i-1}^{n}+(5,0004)b_i^n-2b_{i+1}^{n}=0,0002+2b_{i-1}^{n-1}+(-3,0004)b_i^{n-1}+2b_{i+1}^{n-1}$$
$$-0,005b_i^n\left(a_i^{n+1}\right)^2-0,005b_i^{n-1}\left(a_i^n\right)^2$$

ملخص

الحميدية، حسن. 2015. **تفريد المنهج لمعادلة تفاضلية جزئية علي تشكيل الخلية.** بحث الجامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم و التكنولوجيا. الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (1) الدكتور عثمان بغالي الماجستير (2) الدكتور أحمد بارزي الحاج الماجستير

الكلمة المفتاحية: مينهاردت المعادلة، الفرق المحدود، المخطط لكرنك نيكلسون

معادلة مينهاردت هي نموذج رياضي يصف نمط تشكيل خلية في هيدرا. استخدم هانز مينهاردت معادلة الإنتشار لوصف كيفية تولد المتغيرات، وموتها، وتحركها وتفاعلها. المعادلة قد صاغها مينهاردت هي نموذج المستمر، حتى أن واحدة من الدراسات التي يمكن تطبيقها على هذا النموذج هي تفريدية. التفريدية هي خصائص تكميم مستمر. إحدى الطرق التي يمكن تقدير أشكال مستمرة إلي شكل منفصل هي طريقة الفروق المحدودة. حتى يستخدم فى هذا البحث التفريد علي تشكيل الخلية.

و يعمل فى هذه طريقة الفرق المحدود مخطط كرنك نيكلسون، التي كانت تنمية مخطط صريح ومخطط ضمني. مزايا مخطط كرنك نيكلسون هي في أصغر قيم الخطأ من مخطط صريح و مخطط ضمني. في هذه الطريقة تستخدم الفرق المحدود المتقدم لوقت (t) و الفرق المحدود الوسط لفضاء (x) في المنشط $a(x,t)$ و المانع $b(x,t)$، يتقدم الخطوات المعدودات ببحث التعادل المينهاردت ثم بالتفريد. حتى يحصل إلى جنس التفريد:

$$-0,025a_{i-1}^{n}+(1,05025)a_{i}^{n}-0,025a_{i+1}^{n}=0,025a_{i-1}^{n-1}+(0,94975)a_{i}^{n-1}+0,05\left(a_{i}^{n}\right)^{2}b_{i}^{n+1}+0,05\left(a_{i}^{n-1}\right)^{2}b_{i}^{n}+0,025a_{i+1}^{n-1}$$

$$-2b_{i-1}^{n}+(5,0004)b_{i}^{n}-2b_{i+1}^{n}=0,0002+2b_{i-1}^{n-1}+(-3,0004)b_{i}^{n-1}+2b_{i+1}^{n-1}-0,005b_{i}^{n}\left(a_{i}^{n+1}\right)^{2}-0,005b_{i}^{n-1}\left(a_{i}^{n}\right)^{2}$$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model matematik yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesis-hipotesis yang dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung turunan melalui bahasa matematik. Sebagai salah satu contoh yaitu model pembentukan sel pada *hydra*.

Menurut Gierer (1977) pada organisme yang lebih tinggi, pentingnya proses pembentukan pola dasar pada subdivisi dari sebuah organisme hanya terjadi sekali dan dalam waktu yang relatif singkat. Dalam berbagai kasus, embrio lebih sulit dijangkau dalam manipulasi sebuah penelitian. Berbeda dengan potongan-potongan kecil pada *hydra* yang hidup di air tawar dapat meregenerasi tubuhnya setiap saat. Oleh karena itu, model organisme yang tepat untuk dipelajari dan diajukan sebagai model serta sistem biologi yang nyata. Sedangkan menurut Trembley (1744) *hydra* telah dipelajari dalam proses perkembangan yang cukup lama.

Meinhardt (2012b) telah merumuskan ke dalam suatu sistem persamaan diferensial parsial orde dua tentang pembentukan sel, dimana sistem tersebut merumuskan pembentukan sel pada *hydra*. Sistem persamaan tersebut terdiri dari dua persamaan yang meliputi pengaktif (*activator*) $a(x,t)$:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

dan penghambat (*inhibitor*) $b(x,t)$:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = b_b - sba^2 - r_b b + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \qquad (1.2)$$

Agar pembentukan pola dapat terjadi, penghambat (b) harus berdifusi jauh lebih cepat $(D_b \geq D_a)$. Pola akan stabil jika tingkat kerusakan penghambat lebih tinggi dibandingkan dengan pengaktif $(r_b > r_a)$, dan jika sebaliknya $(r_a > r_b)$ terjadi maka osilasi akan terjadi. b_a menggambarkan laju produksi *activator-independen* dari pengaktif yang diperlukan untuk memulai produksi *activator autocatalytic* pada tingkat rendah pada pengaktif (a), misalnya selama regenerasi berlangsung. Dalam kebanyakan simulasi, kepadatan sel (s) diasumsikan merata kecuali beberapa fluktuasi acak kecil yang memicu pembentukan pola dan yang tetap konstan selama simulasi (Meinhardt, 2012b:2).

Sel merupakan kumpulan materi paling sederhana yang dapat hidup dan termasuk unit penyusun tubuh (*building block*). Hal ini dapat dikaitkan dengan firman Allah dalam surat Nuh ayat 14 yang berbunyi:

وَقَدْ خَلَقَكُمْ أَطْوَارًا

"Padahal Dia sesungguhnya telah menciptakan kamu dalam beberapa tingkatan kejadian" (QS: Nuh/71:15).

Ayat di atas menjelaskan tentang tingkat kejadian makhluk hidup termasuk hewan tidak bertulang belakang, di antaranya *hydra*. Meinhardt menggunakan *hydra* sebagai obyek penelitiannya karena dapat meregenerasi tubuhnya setiap saat. *Hydra* merupakan metazoan atau hewan bersel banyak yang hidup di kolam atau di sungai yang airnya mengalir. Tubuh *hydra* berbentuk polip yang hidup soliter dalam arti tidak berkoloni, dapat berpindah tempat tetapi biasanya melekat pada obyek, misalnya batu-batuan, batang kayu, dan tanaman air. Tubuhnya berbentuk silindris yang dapat dijulurkan serta dipendekkan. Kemampuan untuk dapat menjulur dan memendek ini karena memang tubuh *hydra* memiliki fibril-fibril khusus pada beberapa sel. Panjang tubuh *hydra* mulai dari 2 sampai 20 mm, dengan diameter tubuhnya tidak lebih dari 1 mm (Kastawi, 2005:57).

Tubuh *hydra* berbentuk tabung elastik yang bervariasi ukuran panjang dan ketebalannya. Ujung bawah (*proksimal*) dari tubuhnya merupakan bagian yang tertutup dan disebut cakram basal (*basal disc*) yang berfungsi sebagai alat gerak dan alat pelekat. Ujung atas (*distal*) dari tubuhnya merupakan bagian yang membentuk konus atau sirkel yang disebut *hypostome*, dan bagian ujungnya terbuka seperti mulut. Di sekitar mulut dikelilingi oleh 4 sampai 12 buah tentakel yang ramping. Bagian tubuh yang terletak di antara mulut dan cakram basal disebut tangkai tubuh. Mulutnya bermuara ke dalam suatu rongga yang disebut rongga gastrovaskular atau enteron yang berfungsi untuk mencernakan makanan dan sekaligus mengedarkan sari-sari makanan ke seluruh penjuru tubuh. Rongga gastrovaskular ini juga berhubungan dengan rongga yang terdapat di dalam tentakelnya (Kastawi, 2005:57-58).

Persamaan pada pola pembentukan sel *hydra* yang dirumuskan oleh Meinhardt merupakan persoalan pada model matematik. Untuk memperoleh suatu persamaan diferensial yang melukiskan persoalan pada kehidupan nyata, penulis misalkan bahwa keadaan tersebut diatur oleh hukum-hukum yang sangat sederhana. Sekali model matematik tersusun dalam bentuk persamaan diferensial, langkah selanjutnya adalah menyelesaikan persamaan tersebut dan menggunakan penyelesaiannya sebagai perkiraan mengenai kelakuan masalah sebenarnya.

Dalam memperkirakannya tidak selalu sesuai dengan kenyataan, maka harus mengubahnya menjadi pemisalan yang mengarah dan mengusahakan membentuk suatu model yang lebih mendekati kenyataan.

Model dan pemodelan telah membantu manusia memahami sistem alam yang kompleks, mulai dari yang mikroskopik sampai yang makroskopik. Model tidak lain adalah representasi suatu realitas dari seorang model. Dengan kata lain, model adalah jembatan antara dunia nyata (*real world*) dengan dunia berpikir (*thinking*) untuk memecahkan suatu masalah. Proses penjabaran atau merepresentasikan ini disebut sebagai *modelling* atau pemodelan yang tidak lain merupakan proses berpikir melalui sekuen yang logis (Pagalay, 2009:2).

Bentuk model yang dirumuskan oleh Meinhardt (2012b) di atas merupakan model kontinu, sehingga salah satu studi yang dapat diterapkan pada model tersebut adalah dilakukannya diskritrisasi. Diskritisasi merupakan proses kuantisasi sifat-sifat kontinu. Kuantisasi diartikan sebagai proses pengelompokan sifat-sifat kontinu pada selang-selang tertentu (*step size*). Kegunaan diskritisasi adalah untuk mereduksi dan menyederhanakan data, sehingga didapatkan data diskrit yang lebih mudah dipahami, digunakan, dan dijelaskan. Oleh karena itu, hasil pembelajaran dengan bentuk diskrit dipandang Dougherty (1995) sebagai hasil yang cepat dan akurat dibandingkan hasil dari bentuk kontinu (Liu dan Husain, 2012:2).

Salah satu metode yang dapat memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskrit ialah dengan metode beda hingga. Metode beda hingga merupakan salah satu alat dasar penyelesaian numerik suatu persamaan diferensial parsial. Secara umum proses penyelesaiaan metode ini adalah dengan mentransformasi persamaan diferensial parsial ke bentuk beda hingga menggunakan deret *Taylor*.

Salah satu metode beda hingga yang dapat digunakan adalah skema *Crank-Nicolson* yang merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Kelebihan dari skema *Crank-Nicolson* adalah nilai *error* yang lebih kecil dari pada skema eksplisit dan implisit. Berdasarkan paparan tersebut di atas, penulis tertarik untuk membahas dan mengkaji model *Meinhardt* dalam tulisan ini dengan judul *Diskritisasi pada Sistem Persamaan Diferensial Parsial Pola Pembentukan Sel*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang, maka rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana hasil diskritisasi pada sistem persamaan diferensial parsial pola pembentukan sel.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini yaitu untuk mengetahui hasil diskritisasi sistem persamaan diferensial parsial pola pembentukan sel.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penulisan laporan penelitian ini, penulis memberikan batasan pembahasan pada penggunaan sistem persamaan diferensial parsial yang dirumuskan oleh Meinhardt (2012b) dalam jurnalnya yang berjudul *Models of Biological Pattern Formation*. Batasan masalah yang diberikan sebagai berikut:

1. Model yang digunakan adalah persamaan diferensial parsial pola pembentukan sel yang dirumuskan oleh Meinhardt.
2. Pengaktif $a(x,t)$, yaitu $\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$.
3. Penghambat $b(x,t)$, yaitu $\frac{\partial b}{\partial t} = b_b - sba^2 - r_b a + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$.
4. Diskritisasi persamaan *Meinhardt* dengan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan beberapa manfaat, antara lain:

a. Bagi penulis, untuk memperdalam pengetahuan mengenai diskritisasi persamaan diferensial parsial khususnya dengan menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*.

b. Bagi pembaca, sebagai tambahan wawasan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*.

c. Bagi lembaga, sebagai tambahan bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya mata kuliah pemodelan matematika.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dipakai dalam laporan penelitian ini adalah "kajian kepustakaan" atau *library research*, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan pembentukan serta obyek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Penelitian kepustakaan ini dilakukan dengan cara mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan yaitu dengan mempelajari buku teks penunjang, karya ilmiah yang berbentuk jurnal, sumber bacaan internet, dan diskusi-diskusi ilmiah.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Analisis persamaan *Meinhardt*.
2. Diskritisasi persamaan *Meinhardt* dengan menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*.
3. Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan Skripsi

Penulisan laporan penelitian ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut berisi tentang dasar-dasar teori sebagai acuan dalam penulisan skripsi ini, yang terdiri atas persamaan diferensial parsial *Meinhardt*, deret *Taylor*, diferensial numerik, metode diskritisasi (skema beda hingga), analisis teoritik persamaan *Meinhardt*, pembentukan sel, pembentukan sel pada *hydra*, dan pembentukan sel dalam al-Quran.

Bab III Pembahasan

Bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah-langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

Bab IV Penutup

Bab ini akan memaparkan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial *Meinhardt*

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan-persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan itu haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas. Tingkat persamaan diferensial parsial adalah tingkat turunan tertinggi pada persamaan itu (Ayres, 1992:231). Sebagai contoh, pandang persamaan (2.1) dan (2.2) berikut:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = b_b - sba^2 - r_b b + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

Berdasarkan pernyataan Ayres (1992:231) variabel bebas pada persamaan (2.1) dan (2.2) adalah x dan t sedangkan variabel terikatnya adalah a dan b.

2.1.1 Orde Persamaan Diferensial Parsial

Menurut Sasongko (2010:143) penggolongan untuk persamaan diferensial parsial juga berdasarkan pada unsur yang sama, yaitu orde, linieritas, dan kondisi batas. Orde dari persamaan diferensial parsial ditentukan berdasarkan orde dari turunan tertinggi pada persamaan diferensial parsial tersebut. Sebagai contoh, persamaan diferensial parsial pola pembentukan sel yang kemudian disebut sebagai persamaan *Meinhardt* berikut merupakan contoh persamaan orde satu dan orde dua:

PDP orde satu: $\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a$ (2.3)

PDP orde dua: $\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$ (2.4)

Meninjau kembali pernyataan Sasongko (2010:143) di atas, dimana orde dari persamaan diferensial parsial ditentukan berdasarkan orde dari turunan tertinggi pada persamaan diferensial tersebut, maka turunan parsial berorde tertinggi yang dimuat dalam persamaan (2.1) adalah $D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$ yang berorde dua, sehingga persamaan (2.1) di atas merupakan persamaan diferensial parsial orde dua. Begitu juga dengan persamaan (2.2), dimana turunan parsial berorde tertinggi yang dimuat dalam persamaan tersebut adalah $D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$ yang berorde dua, sehingga persamaan (2.2) di atas merupakan persamaan diferensial parsial orde dua.

2.1.2 Linieritas Persamaan Diferensial Parsial

Menurut Sasongko (2010) persamaan diferensial parsial berikut merupakan bentuk persamaan diferensial orde dua:

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \chi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta = 0 \quad (2.5)$$

Selain itu, Sasongko (2010:143-144) menyatakan bahwa persamaan diferensial parsial juga digolongkan menjadi persamaan linier, kuasilinier, dan nonlinier dengan penjelasan berikut:

1. Apabila koefisien pada persamaan (2.5) adalah konstan atau fungsi yang hanya terdiri dari variabel bebas saja $\left[\alpha = \beta = \chi = \delta = (x, y)\right]$, maka persamaan itu disebut persamaan linier.

2. Apabila koefisien pada persamaan (2.5) adalah fungsi dari variabel tak bebas (*dependent variable*) dan/atau merupakan turunan dengan pangkat yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya $\left[\alpha = \beta = \chi = \delta = \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$ maka persamaan itu disebut persamaan kuasilinier.
3. Apabila koefisiennya merupakan fungsi dengan turunan sama dengan pangkatnya $\left[\alpha = \beta = \chi = \delta = \left(x, y, u, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)\right]$, maka persamaan itu disebut persamaan nonlinier.

Sebagai contoh pandang persamaan berikut:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \tag{2.6}$$

Misalkan $D_a = 1$ yang merupakan konstanta, maka persamaan (2.6) berbentuk:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \tag{2.7}$$

sehingga berdasarkan pernyataan Sasongko (2010:143-144) persamaan (2.7) merupakan persamaan diferensial parsial linier. Jika $D_a = f(a) = \frac{\partial a}{\partial x}$ yang merupakan turunan dengan pangkat yang lebih rendah daripada persamaan diferensialnya, maka persamaan (2.7) sebagai berikut:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial a}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right] \tag{2.8}$$

sehingga persamaan (2.8) tersebut merupakan persamaan diferensial parsial kuasilinier. Dan jika $D_a = \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}$ merupakan suatu fungsi yang memiliki pangkat sama dengan orde persamaan diferensialnya, maka persamaan (2.6) menjadi sebagai berikut:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\right] \tag{2.9}$$

sehingga persamaan (2.9) merupakan persamaan diferensial parsial nonlinier.

Berdasarkan uraian di atas, maka persamaan pola pembentukan sel yang dirumuskan oleh Meinhardt (2012b:2) dapat diketahui bahwa persamaan (2.1) merupakan persamaan diferensial parsial orde dua kuasilinier. Hal ini disebabkan karena D_a merupakan suatu konstanta yang bernilai $0,005$, $-sba^2$ dan $-r_a a$ merupakan suatu fungsi dengan turunan yang memiliki pangkat lebih rendah dari persamaan diferensialnya. Begitu pula dengan persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial parsial orde dua kuasilinier. Hal ini disebabkan karena persamaan tersebut memiliki koefisien difusi D_b yang merupakan konstanta yang bernilai $0,4$ sedangkan $-sba^2$ dan $-r_b b$ merupakan suatu fungsi dengan turunan yang memiliki pangkat lebih rendah dari persamaan diferensialnya.

2.1.3 Bentuk Kanonik Persamaan Diferensial Parsial

Sasongko (2010:143-144) menyatakan bahwa bentuk persamaan diferensial parsial orde dua dengan dua variabel bebas selanjutnya akan diklasifikasikan dalam tiga bentuk kanonik, yaitu ellips, parabola dan hiperbola. Bentuk umum persamaan diferensial parsial orde dua sebagai berikut:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \tag{2.10}$$

Sasongko (2010:144) menyatakan jika $g = 0$, maka persamaan (2.10) disebut persamaan diferensial homogen. Koefisien yang muncul merupakan konstanta atau fungsi dari variabel bebas saja. Berikut ini diberikan beberapa bentuk persamaan diferensial parsial:

1. Persamaan Ellips, jika $b^2 - 4ac < 0$

   Persamaan ellips biasanya berhubungan dengan masalah-masalah keseimbangan atau aliran permanen, seperti aliran air tanah di bawah bendungan dan karena adanya pemompaan, defleksi plat karena adanya pembebanan dan sebagainya.

2. Persamaan Parabola, jika $b^2 - 4ac = 0$

   Persamaan yang mengandung waktu sebagai variabel bebas biasanya termasuk dalam persamaan parabola. Persamaan parabola yang paling sederhana adalah perambatan panas dan difusi polutan.

3. Persamaan Hiperbola, jika $b^2 - 4ac > 0$

   Persamaan hiperbola yang paling sederhana adalah persamaan gelombang (Triatmodjo, 2002:201-202).

Diskriminan untuk persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) dapat dihitung sebagai berikut:

1. Persamaan (2.1) dengan nilai $A = D_a = 0,005$, $B = 0$ dan $C = 0$ sehingga

$$D = B^2 - 4AC$$

$$D = 0^2 - 4(0,005)(0)$$

$$D = 0$$

2. Persamaan (2.2) dengan nilai $A = D_b = 0,4$, $B = 0$ dan $C = 0$ sehingga

$$D = B^2 - 4AC$$

$$D = 0^2 - 4(0,4)(0)$$

$$D = 0$$

Sesuai dengan pernyataan Triatmodjo di atas, maka persamaan (2.1) dan (2.2) termasuk persamaan diferensial parsial tipe parabolik.

2.2 Deret *Taylor*

Deret *Taylor* merupakan dasar untuk menyelesaikam masalah dalam metode numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan dari f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka dengan deret *Taylor* dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i (Triatmodjo, 2002: 7-8).

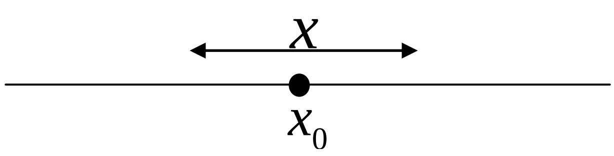
Andaikan f adalah suatu fungsi dengan turunan ke $(n+1)$, $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk setiap x pada suatu selang terbuka I yang mengandung a. Maka untuk setiap x di I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \qquad (2.11)$$

dimana sisa (atau kesalahan) $R_n(x)$ diberikan oleh rumus:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (2.12)$$

dengan c suatu titik antara x dan a (Purcell dan Varberg, 1999:506).



Gambar 2.1 Nilai-nilai x di sekitar x_0
(Sumber: Munir, 2003:18)

Persamaan (2.11) merupakan penjumlahan dari suku-suku (*term*), yang disebut deret. Perhatikanlah bahwa deret *Taylor* ini panjangnya tidak terhingga, untuk memudahkan penulisan suku-suku selanjutnya digunakan tanda ellipsis (...). Jika dimisalkan $x-a=h$, maka $f(x)$ dapat juga ditulis sebagai:

$$f(x)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+R_n(x) \qquad (2.13)$$

Deret pangkat dari $(x-a)$ yang menggambarkan sebuah fungsi dinamakan deret *Taylor*. Apabila $a=0$, deret yang bersangkutan disebut deret *Maclaurin* (Purcell dan Varberg, 1999:57).

Metode Euler dapat dipandang sebagai hampiran dari deret *Taylor* dengan menyertakan hanya dua suku pertama dari deret ini. Dalam hal umum, jika deret *Taylor* dihampiri oleh:

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (2.14)$$

kita katakan bahwa hampiran itu adalah suatu hampiran *Taylor* orde I. Menurut ketentuan ini, metode Euler adalah hampiran *Taylor* orde I (Finizio dan Ladas, 1982:267). Sebagai contoh menentukan deret *Maclaurin* untuk $\sin x$:

$$f(x)=\sin x \qquad f(0)=0$$

$$f'(x)=\cos x \qquad f'(0)=1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad\qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad\qquad f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad\qquad f^{(4)}(x) = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

Sehingga

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{2.15}$$

Uraian deret ini berlaku untuk semua x, asal dapat dibuktikan bahwa:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{(n+1)} = 0 \tag{2.16}$$

dimana,

$\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |\cos x|$ atau $\left|f^{(n+1)}(x)\right| = |\sin x|$ dan $\left|R_n(x)\right| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Akan tetapi $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$, karena $\frac{x^n}{n!}$ adalah suku ke-n sebuah deret yang konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ (Purcell dan Varberg, 1999:58).

Jika dihampiri dengan deret *Taylor* orde 4 di sekitar $x_0 = 1$ adalah:

$$\sin(x) = \sin(1) + \frac{(x-1)}{1!}\cos(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}(-\sin(1)) + \frac{(x-1)^3}{3!}(-\cos(1)) + \frac{(x-1)^4}{4!}\sin(1) + R_4(x) \tag{2.17}$$

yang dalam hal ini,

$$R_4(x) = \frac{(x-1)^5}{5!}\cos(c); 1 < c < x$$

Deret *Taylor* terpotong di sekitar $x_0 = 0$ disebut deret *Maclaurin* terpotong.

Deret *Taylor* banyak digunakan untuk menurunkan metode-metode numerik. Deret *Taylor* yang terpotong digunakan sebagai titik awal dalam menurunkan metode (Munir, 2003:21-23).

2.3 Diferensial Numerik

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskret. Diferensial numerik ini banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial. Bentuk tersebut dapat diturunkan berdasar pada deret *Taylor*.

Djojodihardjo (2000:152) menyatakan bahwa persamaan (2.18) di bawah ini

$$y'(x_{i+1}) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} \tag{2.18}$$

dikenal dengan metode numerik sebagai beda terbagi berhingga. Secara umum dapat dinyatakan sebagai

$$f'(x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} + o(x_{i+1} - x_i) \tag{2.19}$$

atau

$$f'(x_{i+1}) = \frac{\Delta f_i}{h} + oh \tag{2.20}$$

dengan Δf_i disebut beda ke depan pertama dan h disebut ukuran langkah, yaitu panjang selang hampiran. Istilah ke depan digunakan karena ada hampiran turunan di titik i dipergunakan data pada titik yang bersangkutan dan titik yang di depannya. Suku $\frac{\Delta f_i}{h}$ disebut sebagai beda terbagi berhingga pertama (Djojodihardjo, 2000:152).

Beda terbagi ke depan ini merupakan salah satu dari beberapa cara yang dapat dikembangkan dari deret *Taylor* guna memperoleh turunan secara numerik.

2.3.1 Hampiran Beda ke Belakang dari Turunan Pertama

Djojodihardjo (2000:152) menyatakan deret *taylor* dapat diekspansikan ke belakang untuk menghitung nilai turunan fungsi $y(x)$ berdasarkan nilainya pada titik yang diketahui.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 - \cdots \tag{2.21}$$

Gambar 2.2 Gambaran Grafis Beda Berhingga
(Sumber: Djojodihardjo, 2000:152)

Bila dipangkas setelah turunan yang pertama dan disusun kembali, diperoleh:

$$f'(x_{i+1}) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} - o(h) \tag{2.22}$$

atau

$$f'(x_{i+1}) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{\Delta f_i}{h} \tag{2.23}$$

dengan galat sebesar $o(h)$ dan Δf_i dikenal sebagai beda ke belakang pertama (Djojodihardjo, 2000:152-153).

2.3.2 Hampiran Beda Tengah dari Turunan Pertama

Djojodihardjo (2000:153) menyatakan bahwa cara ketiga untuk menghitung turunan pertama adalah dengan mengurangkan rumus beda ke belakang (2.21) dari rumus beda ke depan berdasarkan ekspansi deret *Taylor*

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 - \frac{f'''(x_i)}{6}h^3 \qquad (2.24)$$

dan dengan demikian dihasilkan

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + \frac{f'''(x_i)}{6}h^3 \qquad (2.25)$$

Dari sini diperoleh

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f'''(x_i)}{6}h^2 + \cdots \qquad (2.26)$$

atau

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - o(h^2) \qquad (2.27)$$

atau

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i + h) - f(x_i - h)}{2h} \qquad (2.28)$$

Persamaan (2.27) dikenal sebagai rumus beda tengah dari turunan pertama. Perlu diperhatikan bahwa pada rumusan tersebut, galat yang diperoleh akibat pemangkasan mempunyai orde h^2, berbeda dengan hampiran beda ke depan atau ke belakang yang mempunyai galat dengan orde h. Dengan demikian, analisis berdasarkan ekspansi deret *Taylor* menghasilkan kesimpulan bahwa beda tengah merupakan rumusan yang lebih akurat terhadap turunan. Bila panjang langkah diperkecil menjadi setengahnya, maka rumusan beda tengah akan menghasilkan galat seperempat galat semula (Djojodihardjo, 2000:153).

2.4 Metode Diskritisasi (Skema Beda Hingga)

Yang, dkk. (2005:406) menyatakan bahwa untuk mempelajari skema beda hingga, misal diberikan persamaan parabola sebagai berikut:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, 0 < x < L \tag{2.29}$$

dengan syarat awal adalah:

$$T(x,0) = a_0(x), 0 < x < L$$

dan syarat batas sebagai berikut:

$$T(0,t) = b_0(t), t < 0$$

$$T(L,t) = b_L(t), t < 0$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas dengan skema beda hingga akan dihitung nilai pendekatan $T(x,t)$ (temperatur) pada jaringan titik (x_i, t_i) dengan domain komputasi didiskritkan menggunakan *grid* yang *uniform* baik pada arah x maupun arah t, sebagai berikut:

$$t_n = n \bullet \Delta t; t \geq 0$$

$$x_i = i \bullet \Delta x; 0 \leq i \leq m$$

di mana m adalah banyaknya pias (Mutholi'ah, 2008).

2.4.1 Skema Eksplisit

Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $n+1$ dihitung berdasarkan variabel pada waktu n yang diketahui. Dengan menggunakan skema diferensial maju untuk turunan pertama terhadap t, serta diferensial terpusat untuk turunan kedua terhadap x, fungsi variabel $T(x,t)$ dan turunannya dalam ruang dan waktu didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x,t)=T_i^n$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t} \tag{2.30}$$

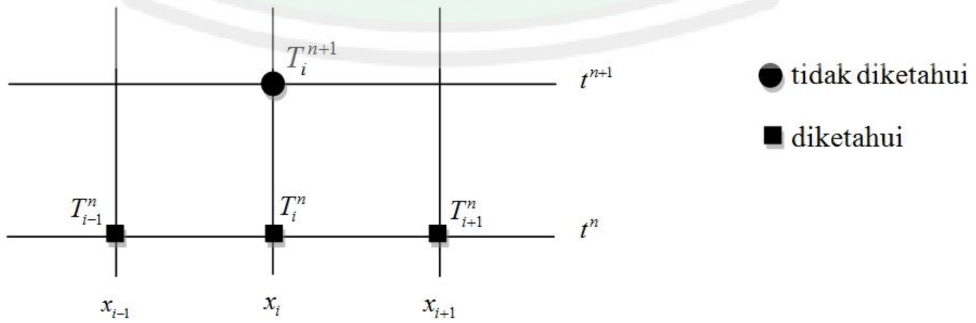
$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}=\frac{T_{i-1}^n-2T_i^n+T_{i+1}^n}{\Delta x^2} \tag{2.31}$$

dengan menggunakan skema di atas, persamaan (2.29) dengan menganggap bahwa K konstan, dapat ditulis dalam bentuk berikut:

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=K\left(\frac{T_{i-1}^n-2T_i^n+T_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right) \tag{2.32}$$

atau

$$T_i^{n+1}=T_i^n+K\frac{\Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i-1}^n-2T_i^n+T_{i+1}^n\right) \tag{2.33}$$



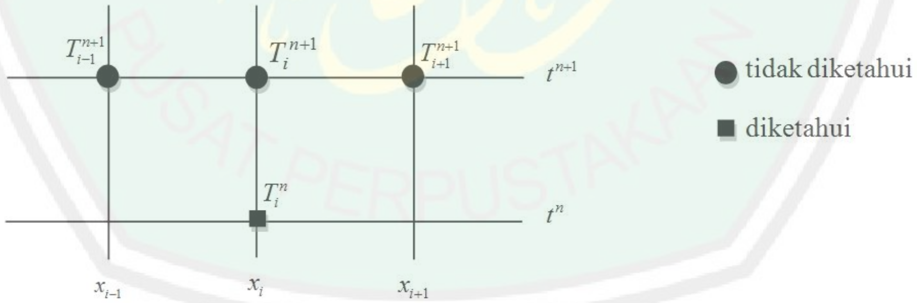
Gambar 2.3 Skema Eksplisit pada Persamaan Perambatan Panas
(Sumber: Triatmodjo, 2002:207)

Dari gambar 2.3, jarak antara titik hitung (panjang pias) adalah $\Delta x = \dfrac{L}{m}$, dengan m adalah jumlah pias pada x, sedangkan interval waktu hitungan adalah $\Delta t = \dfrac{T}{r}$, dengan r adalah jumlah pada t (Yang, dkk., 2005:406).

Nilai T_i^{n+1} dapat diperoleh secara eksplisit dari nilai sebelumnya, yaitu T_{i-1}^n T_i^n dan T_{i+1}^n. Dengan nilai n yang sudah diketahui, memungkinkan untuk menghitung $T_i^{n+1}; i = 1, 2, \ldots, m-1$ (Triatmodjo, 2002:208).

2.4.2 Skema Implisit

Pada skema eksplisit, ruas kanan ditulis pada waktu n yang nilainya sudah diketahui, sedang pada skema implisit ruas kanan ditulis pada waktu $n+1$ dimana nilainya belum diketahui. Gambar 2.4 berikut merupakan jaringan titik hitung pada skema implisit, dimana turunannya didekati sebuah waktu pada saat $n+1$.



Gambar 2.4 Skema Implisit pada Persamaan Perambatan Panas
(Sumber: Triatmodjo, 2002:216)

Menurut Triatmodjo (2002:217) dari gambar 2.4 di atas, fungsi $T(x,t)$ dan turunannya didekati oleh bentuk berikut:

$$T(x,t) = T_i^n$$

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \tag{2.35}$$

sehingga persamaan (2.29) dapat ditulis dalam bentuk beda hingga sebagai berikut:

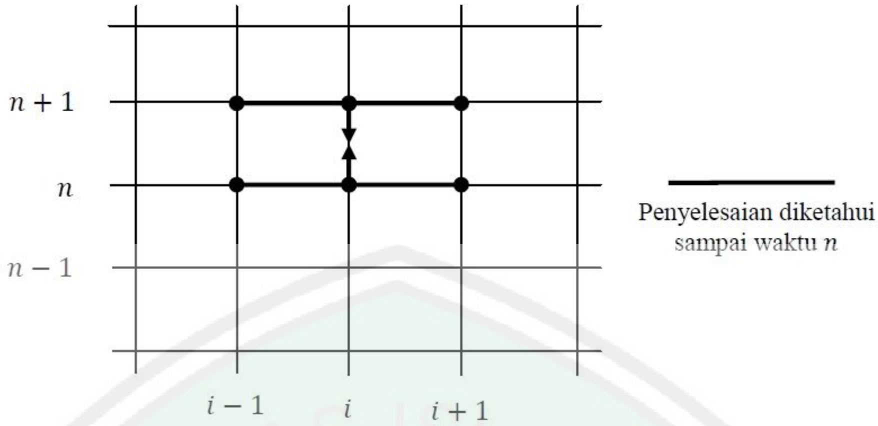
$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = K\left(\frac{T_{i-1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right) \tag{2.36}$$

2.4.3 Skema *Crank-Nicolson*

Skema *Crank-Nicolson* merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Dalam skema eksplisit, ruas kanan ditulis pada waktu ke n. Dalam skema implisit, ruas kanan ditulis untuk waktu $n+1$. Dalam kedua skema tersebut diferensial terhadap waktu ditulis dalam bentuk:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{(T_i^{n+1} - T_i^n)}{\Delta t} \tag{2.37}$$

yang berarti diferensial terpusat terhadap waktu $n+\frac{1}{2}$. Skema *Crank-Nicolson* menulis ruas kanan pada waktu $n+\frac{1}{2}$ yang merupakan nilai rerata dari skema eksplisit dan implisit. Skema jaringan titik hitungan diberikan oleh gambar 2.5.



Gambar 2.5 Skema *Crank-Nicolson*
(Sumber: Triatmodjo, 2002:222)

Skema ini menggunakan teknik pembobotan untuk diskritisasi waktu sekarang (t^n) dan diskritisasi waktu yang akan datang (t^{n+1}) dengan cara yang lebih fleksibel yaitu dengan menggunakan faktor pemberat waktu. Beda hingga terhadap ruang (x):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \theta\left(\frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right) + (1-\theta)\left(\frac{T_{i+1}^{n} - 2T_i^{n} + T_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right) \tag{2.38}$$

dengan $0 \le \theta \le 1$ adalah faktor pemberat waktu (Luknanto, 2003:24-25).

Sedangkan untuk beda hingga terhadap waktu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \tag{2.39}$$

dengan θ adalah koefisien pembobot dengan nilai

$\theta = 0$, jika skema adalah eksplisit

$\theta = 1$, jika skema adalah implisit

$\theta = \frac{1}{2}$, jika skema adalah *Crank-Nicolson* (Lapidus dan Pinder, 1981:162).

Sehingga persamaan (2.38) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{n}-2T_i^{n}+T_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right) \tag{2.40}$$

Crank dan Nicolson (1947) mengajukan dan juga menggunakan sebuah metode yang mereduksi perhitungan pada volume total, dan itu dianggap sah (konvergen dan stabil) untuk semua nilai r. Mereka mempertimbangkan persamaan diferensial parsial terpenuhi di titik $\left(ih,\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right)$ dan mengganti dengan $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ dengan rata-rata perkiraan perbedaan pada saat n dan $n+1$. Dengan kata lain mereka mengganti persamaan

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

dengan persamaan

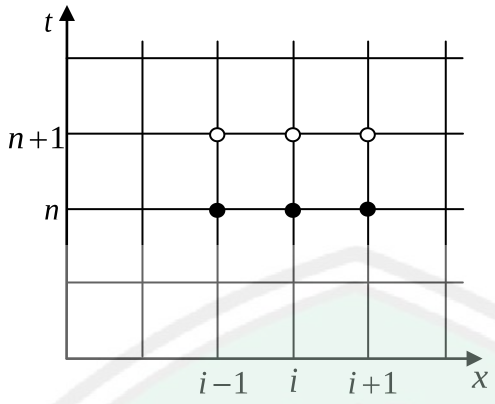
$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^{n}}{k}=\frac{1}{2}\left(\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{h^2}+\frac{T_{i+1}^{n}-2T_i^{n}+T_{i-1}^{n}}{h^2}\right)$$

dan diberikan

$$-rT_{i-1}^{n+1}+(2+2r)T_i^{n+1}-rT_{i+1}^{n+1}=rT_{i-1}^{n}+(2-2r)T_i^{n}+rT_{i+1}^{n} \tag{2.41}$$

dimana $r=\frac{k}{h^2}$ (Smith, 1985:19-20).

Secara umum, sisi kiri pada persamaan (2.41) terdapat tiga nilai penting pada T yang diketahui dan pada sisi kiri terdapat tiga yang tidak diketahui. Skema jaringan titik hitungan diberikan oleh gambar 2.6.



Gambar 2.6 Skema *Crank-Nicolson*
(Sumber: Smith, 1985:20)

Jika terdapat N titik hitungan pada setiap baris, maka $n=0$ dan $i=1,2,\ldots,N$, persamaan (2.41) memberikan N persamaan simultan untuk N nilai T yang tidak diketahui sepanjang baris pertama dalam hal nilai awal dan nilai batas. Begitu juga $n=1$ menunjukkan N nilai T yang tidak diketahui sepanjang baris kedua dalam hal nilai-nilai yang dihitung mulai pertama dan selanjutnya (Smith, 1985:20-21).

Untuk pembaca yang akrab dengan notasi beda hingga, metode *Crank-Nicolson* mendekati persamaan diferensial parsial pada titik $\left(ih,\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right)$ dengan

$$\frac{1}{k}\delta_t T_i^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2h^2}\left(\delta_x^2 T_i^{n+1}+\delta_x^2 T_i^n\right)$$

dimana subskrip x dan t menunjukkan komponen dalam arah sumbu x dan sumbu t. Relatif pada titik $\left(ih,\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right)$, untuk $\frac{\partial T}{\partial t}$ dan $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ telah diganti dengan perkiraan beda pusat. Kecenderungan ini untuk mengurangi kesalahan yang diperkirakan (Smith, 1985:21).

2.5 Analisis Teoritik Persamaan *Meinhardt*

Hans Meinhardt (2012) menyajikan sebuah model matematika yang menggambarkan pola pembentukan sel pada *hydra*. Hans Meinhardt (2012) menggunakan jenis persamaan difusi untuk menggambarkan bagaimana variabel-variabel berkembang biak, mati, bergerak dan berinteraksi. Dimana model pembentukan sel tersebut dipengaruhi oleh *activator* yang selanjutnya disebut sebagai zat pengaktif dan *inhibitor* yang selanjutnya disebut sebagai zat penghambat pertumbuhan sel. Dengan mendefinisikan $a(x,t)$ sebagai pengaktif dan $b(x,t)$ sebagai penghambat pembentukan sel. Dimana x dan t menunjukan ruang dan waktu. Secara umum dapat ditulis dalam bentuk persamaan sebagai berikut

$$\frac{\partial a}{\partial t} = s\frac{a^2 + b_a}{b} - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = sa^2 - r_b b + D_a \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + b_b \tag{2.43}$$

Persamaan (2.42) dapat dibaca perubahan konsentrasi *activator* per satuan waktu yang diberikan saat produksi, dengan kerusakan dan melalui pertukaran dengan sel tetangganya karena difusi. Aktifitas non-linear pada produksi *activator* a sangatlah penting. Produksi ini dihambat oleh *inhibitor* b. Produksi itu sebanding dengan kepadatan sel (s), yang menggambarkan kemampuan sel tersebut untuk melakukan reaksi autokatalitik. Agar pembentukan pola dapat terjadi, *inhibitor* harus berdifusi jauh lebih cepat $(D_b \geq D_a)$ dari pada *activator*. Pola akan terbentuk secara stabil jika tingkat kerusakan *inhibitor* lebih tinggi dibandingkan dengan *activator* $(r_b > r_a)$, dan sebaliknya osilasi akan terjadi. b_a

menggambarkan laju produksi *activator*-independen dari *activator* yang diperlukan untuk memulai produksi *activator* autokatalitik pada tingkat rendah, misalnya selama regenerasi berlangsung. Dalam kebanyakan simulasi, kepadatan sel s diasumsikan merata kecuali pada beberapa fluktuasi acak kecil yang memicu pembentukan pola dan tetap konstan selama simulasi (Meinhardt, 2012b:2).

Pembentukan pola biologis menunjukkan banyaknya situasi pada tingkat tinggi pola regulasi. Ini adalah fitur dari reaksi yang dijelaskan di atas. Misalnya, setelah penghapusan daerah aktif, *inhibitor* meluruh sampai autokatalitik memicu lagi, mengembalikan ke pola asal. Reaksi antagonis tersebut juga berdasarkan pada berkurangnya substrat atau co-faktor yang diperlukan untuk *activator* autokatalitik. Berikut persamaan (Meinhardt, 2012b:2):

$$\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = b_b - sba^2 - r_b b + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$$

Parameter-parameter $s, r_a, r_b, D_a, D_b, b_a$ dan b_b merupakan konstanta positif. Dimana s menyatakan kepadatan sel, r_a dan r_b berturut-turut menyatakan tingkat kerusakan pada pengaktif dan penghambat, b_a dan b_b menyatakan laju produksi pengaktif dan penghambat, serta D_a dan D_b merupakan koefisien difusi.

Pembentukan sel yang dipengaruhi oleh zat pengaktif dan zat penghambat terjadi melalui proses difusi. Dimana difusi sendiri menurut Villee dkk. (1984:56) adalah gerakan molekul dari suatu daerah dengan konsentrasi tinggi ke daerah lain dengan konsentrasi lebih rendah yang disebabkan oleh energi kinetik molekul-

molekul tersebut. Tiap molekul cenderung bergerak lurus sampai terbentur pada molekul lain kemudian terpental dan bergerak ke arah lain. Setelah tersebar secara merata, molekul tersebut tetap bergerak, tetapi jika ada molekul yang bergerak dengan cepat dari kiri ke kanan, secepat itu pula ada molekul lain yang bergerak dari kanan ke kiri sehingga keseimbangan dapat dipertahankan.

2.6 Pembentukan Sel

Seluruh makhluk hidup tersusun atas sel. Sel adalah unit dasar kehidupan. Dalam kingdom monera dan protista, keseluruhan organisme tersusun atas sel tunggal. Pada kebanyakan fungi dan dalam kingdom hewan dan tumbuhan, organisme adalah susunan yang luar biasa kompleks dari sel-sel yang dapat triliunan banyaknya (Fried dan Hademenos, 2005:35).

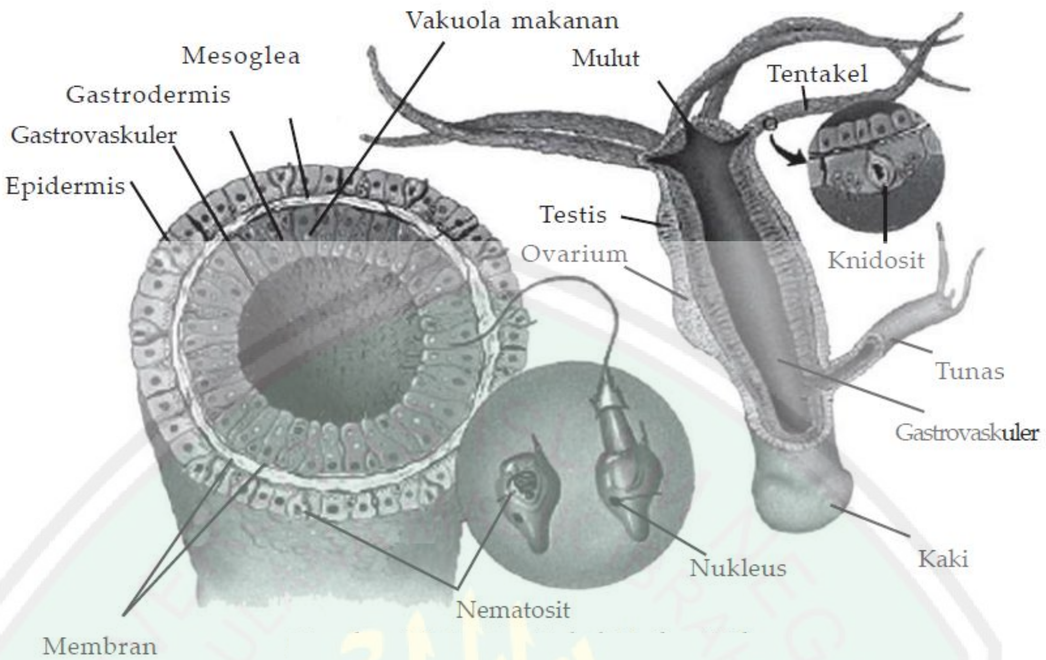
Pada abad kesembilan belas, sel dideskripsikan sebagai sesuatu yang sekedar memiliki membran pembatas di bagian luar, nukleus yang terletak di dalam, dan suatu massa besar sitoplasma yang mengelilingi nukleus. Hanya sedikit, yang telah diketahui mengenai sel selain kenyataan bahwa sel ada. Akan tetapi, metode-metode yang semakin maju untuk menyelidiki sel lama-kelamaan membuat para peneliti dapat mengetahui struktur-struktur internal sel (Fried dan Hademenos, 2005:35-36).

Dengan berhasil dipelajarinya berbagai struktur subseluler, jelaslah bahwa fungsi-fungsi sel dilakukan oleh struktur-struktur terspesialisasi yang dapat dibandingkan dengan organ-organ tubuh kita; karenanya, struktur-struktur tersebut dinamakan organel. Organel-organel itu memberikan keterpisahan regional, seperti ruangan-ruangan dalam sebuah rumah, dan memungkinkan terjadinya spesialisasi (Fried dan Hademenos, 2005:37).

2.7 Pembentukan Sel pada *Hydra*

Hydra, satu diantara segelintir *cnidaria* yang ditemukan di perairan tawar, merupakan *hydrozoa* yang tak lazim karena hanya terdapat dalam bentuk polip. Ketika kondisi lingkungan menguntungkan, *hydra* bereproduksi secara aseksual. Ketika kondisi memburuk, *hydra* dapat bereproduksi secara seksual, membentuk zigot resisten yang tetap dorman hingga keadaan membaik (Campbell, dkk., 2012:244).

Bentuk polip, tubuh dan tentakel berongga. Tunas medusa tereduksi dalam bentuk gonad, sehingga dapat dikatakan tidak memiliki fase medusa. Polip bereproduksi secara seksual dan aseksual. Zigot yang bercangkang tebal dapat bertahan dalam lingkungan yang dingin ataupun kering. *Hydra* terutama memakan *crustacean* kecil, seperti *cyclops* dan *daphnia*. Sel endoderm *h.viridis* mengandung *zoochlorella* yang bersifat simbiotik (Oemarjati dan Wardhana, 1990:30).



Gambar 2.7 Anatomi Tubuh Hydra
(Sumber: Kastawi, 2005:60)

2.8 Pembentukan Sel dalam Al-Quran

Seperti kita ketahui bersama, banyak ilmu pengetahuan yang sebenarnya bersumber dari dunia Islam. Seperti misalnya dalam bidang matematika, ditemukannya lambang bilangan arab merupakan kontribusi ilmuwan Islam abad 8-12 M, dimana tanpa adanya lambang bilangan betapa sulitnya kita menuliskan hasil-hasil perhitungan. Selain itu juga banyak ahli-ahli matematika yang berasal dari timur (Arab). Seperti contohnya Omar al-Khayyam, Ibnu Sina, al-Khawarizmi dan al-Biruni, mereka adalah ahli matematika muslim dalam bidang geometri dan kalkulus. Tetapi dalam perkembangannya, ahli-ahli matematika non-muslim menjadi lebih dikenal, hal ini karena pengembangan keilmuan di dunia Islam lebih terbatas pada ilmu-ilmu *ushuluddin*, *syari'ah*, *tarbiyah*, *adab*, dan *dakwah*. Tetapi pengembangan terhadap ilmu-ilmu lainnya seperti matematika, fisika, kimia, biologi, teknik, dan ekonomi masih sangat minim (Turmudi, 2006:94).

Dalam al-Quran telah dijelaskan mengenai perkembangan makhluk hidup, walaupun hampir seluruh pengetahuan ini belum ditemukan hingga beberapa abad kemudian. Ini membuktikan bahwa Nabi Muhammad adalah utusan Allah dengan mu’jizat-Nya yang menjadi dasar riset para ilmuwan modern. Maha Suci Allah dalam firman-Nya yang berkenaan dengan tahapan penciptaan makhluk hidup pada surat Nuh (71) ayat 14 yang berbunyi:

وَ قَدْ خَلَقَكُمْ أَطْوَارًا

“*Padahal Dia sesungguhnya telah menciptakan kamu dalam beberapa tingkatan kejadian” (QS. Nuh/71:14).*

Tingkatan kejadian dalam surat Nuh ayat 14 di atas menjelaskan tentang tingkatan-tingkatan (tahap-tahap) penciptaan seluruh makhluk hidup diantaranya metazoan atau hewan bersel banyak yang hidup di kolam atau di sungai yang airnya mengalir. Seperti dalam firman Allah surat al-Naml ayat 61:

أَمَّنْ جَعَلَ الْأَرْضَ قَرَارًا وَ جَعَلَ خِلَٰلَهَا أَنْهَارًا وَ جَعَلَ لَهَا رَوَاسِيَ وَ جَعَلَ بَيْنَ الْبَحْرَيْنِ حَاجِزًا أَءِلَٰهٌ مَّعَ اللهِ بَلْ أَكْثَرُهُمْ لَا يَعْلَمُوْنَ

“Atau siapakah yang telah menjadikan bumi sebagai tempat berdiam, dan yang menjadikan sungai-sungai di celah-celahnya, dan yang menjadikan gunung-gunung untuk (mengkokohkan)nya dan menjadikan suatu pemisah antara dua laut? Apakah di samping Allah ada Tuhan (yang lain)? Bahkan (sebenarnya) kebanyakan dari mereka tidak mengetahui” (QS: al-Naml/27:61).

Menurut Panduwijayan (2011) sungai difungsikan sebagai kelengkapan sempurnanya lingkungan hidup. Sungai berfungsi sebagai ekosistem yang dapat menjadikan kehidupan terus berjalan secara baik. Sungai mempunyai fungsi vital kaitannya dengan ekologi, sungai dan bantarannya biasanya merupakan habitat yang sangat kaya akan flora dan fauna sekaligus sebagai barometer kondisi ekologi daerah tersebut. Sungai yang masih alamiah dapat berfungsi sebagai aerasi alamiah yang akan meningkatkan atau menjaga kandungan oksigen air di sungai.

Penemuan-penemuan ilmiah kontemporer dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan membuktikan bahwa alam semesta dengan seluruh isinya, seperti benda-benda langit, bintang-bintang, makhluk hidup dan benda-benda mati, saling menyempurnakan serta saling melengkapi. Semua itu terjadi dengan izin Allah, seperti dalam firman-Nya:

صُنْعَ اللهِ الَّذِىْ أَتْقَنَ كُلَّ شَيْءٍ إِنَّهُ خَبِيْرٌ بِمَا تَفْعَلُوْنَ

"*(Begitulah) perbuatan Allah yang membuat dengan kokoh tiap-tiap sesuatu; Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan" (QS: al-Naml/27:88).*

Bukti dari pendapat ini adalah adanya kesempurnaan, kesesuaian dan keteraturan yang seksama antara bagian-bagian alam semesta. Kesempurnaan, keserasian dan keteraturan menunjukkan kokohnya sesuatu (أَتْقَنَ كُلَّ شَيْءٍ). Ilmu pengetahuan modern telah berhasil menentukan letak, ukuran dan rasi bintang, serta memetakan dengan jelas daya gravitasi yang ada di antara bintang-bintang di langit (إِنَّهُ خَبِيْرٌ بِمَا تَفْعَلُوْنَ). Semua itu membuktikan adanya kesatuan dan hubungan yang serasi antara unit-unit astronomis di alam semesta yang sekaligus berfungsi menjaga kelangsungan hidup di dunia ini (Fath, 2010:10).

Kesatuan dan keteraturan di dunia hewan dibuktikan dengan keserasian jumlah antara burung pemangsa, lalat, serangga, mikroba serta berbagai makhluk hidup lainnya. Dengan komposisi yang ideal tersebut kehidupan di alam semesta berlangsung dengan sempurna (Fath, 2010:13).

Maha Besar Allah dalam segala firman-Nya, yang telah mewahyukan al-Quran kepada Nabi Muhammad, sebagai nabi terakhir untuk seluruh umat. Wahyu tersebut dapat dibuktikan sepanjang zaman. Lahirnya penemuan para ahli semakin membuktikan bahwa al-Quran merupakan sumber dari segala sumber ilmu (Kiptiyah, 2007:23).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Persamaan *Meinhardt*

3.1.1 Variabel yang Berperan pada Persamaan *Meinhardt*

Variabel-variabel yang digunakan dalam model pengaruh pengaktif dan penghambat terhadap pembentukan sel pada *hydra* diambil dari jurnal yang dirumuskan oleh Hans Meinhardt (2012b) dalam karya tulisnya yang berjudul *Models of Biological Pattern Formation* sebagai berikut:

1) Pengaktif (*activator*) $a(x,t)$;

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = sb(x,t)a^2(x,t) - r_a a(x,t) + D_a \frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

2) Penghambat (*inhibitor*) $b(x,t)$.

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} = b_b - sb(x,t)a^2(x,t) - r_b b(x,t) + D_b \frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial x^2(x,t)} \tag{3.2}$$

Sebagaimana hasil penelitian yang telah dilakukan oleh Meinhardt (2012a), setelah mengetahui variabel-variabel yang digunakan dalam membentuk persamaan *Meinhardt*, selanjutnya menentukan parameter yang digunakan dalam penelitian ini:

Tabel 3.1 Tabel Nilai Parameter

Lambang	Nilai	Keterangan
D_a	0,005	Koefisien difusi pada pengaktif
D_b	0,4	Koefisien difusi pada penghambat
s	0,1	Sumber kepadatan sel yang kompeten
r_a	0,005	Kerusakan pada pengaktif
r_b	0,008	Kerusakan pada penghambat
b_a	0,1	Laju produksi pengaktif
b_b	0,002	Laju produksi penghambat

3.1.2 Interpretasi Persamaan *Meinhardt*

Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Hans Meinhardt (2012b) diperoleh persamaan model matematika yang berupa sistem persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

a) Pengaktif $\frac{\partial a}{\partial t} = sba^2 - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}$

b) Penghambat $\frac{\partial b}{\partial t} = b_b - sba^2 - r_b b + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$

Perubahan konsentrasi pengaktif persatuan waktu sebanding dengan kepadatan sel s yang menggambarkan kemampuan sel tersebut untuk melakukan reaksi dan sebanding dengan berkurangnya kerusakan pengaktif melalui pertukaran dengan sel tetangganya akibat difusi. Sedangkan perubahan konsentrasi penghambat persatuan waktu sebanding dengan laju produksi penghambat dan sebanding dengan berkurangnya kerusakan penghambat.

Agar pembentukan pola dapat terjadi, penghambat harus berdifusi jauh lebih cepat dari pengaktif $(D_b \geq D_a)$. Pola akan stabil jika tingkat kerusakan penghambat lebih tinggi dibandingkan dengan pengaktif $(r_b > r_a)$, dan jika keadaan sebaliknya terjadi $(r_a > r_b)$ maka osilasi akan terjadi. b_a menggambarkan laju produksi *activator-independen* kecil dari pengaktif yang diperlukan untuk memulai produksi *activator autocatalytic* pada tingkat rendah pada a, misalnya selama regenerasi berlangsung. Dalam kebanyakan simulasi, kepadatan sel s diasumsikan merata kecuali beberapa fluktuasi acak kecil yang memicu pembentukan pola dan yang tetap konstan selama simulasi (Meinhardt, 2012b:2).

3.2 Diskritisasi Persamaan *Meinhardt* dengan Metode Beda Hingga Skema *Crank-Nicolson*

3.2.1 Diskritisasi Pengaktif

Berikut merupakan proses diskritisasi model pengaktif, persamaan yang digunakan yaitu persamaan (3.1)

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = sb(x,t)a^2(x,t) - r_a a(x,t) + D_a \frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x^2}$$

dinotasikan

$$a(x_i, t_n) = \frac{1}{2}\left(a_i^n + a_i^{n+1}\right) \tag{3.3}$$

$$b(x_i, t_n) = \frac{1}{2}\left(b_i^n + b_i^{n+1}\right) \tag{3.4}$$

Berdasarkan pernyataan Luknanto (2003) sebagaimana tercantum dalam bab dua, maka transformasi beda hingga maju untuk turunan t dan beda hingga pusat untuk turunan x adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = \frac{a_i^{n+1} - a_i^n}{\Delta t} \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{i-1}^{n+1} - 2a_i^{n+1} + a_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{a_{i-1}^n - 2a_i^n + a_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right) \tag{3.6}$$

Bentuk beda hingga di atas disubstitusikan ke persamaan (3.1), sehingga diperoleh bentuk persamaan diskrit sebagai berikut

$$\frac{a_i^{n+1}-a_i^n}{\Delta t}=\frac{1}{2}s\left[b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2+b_i^n\left(a_i^n\right)^2\right]-\frac{1}{2}r_a\left[a_i^{n+1}+a_i^n\right]$$

$$+\frac{1}{2}D_a\left[\frac{a_{i-1}^{n+1}-2a_i^{n+1}+a_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{a_{i-1}^n-2a_i^n+a_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right] \quad (3.7)$$

Persamaan (3.7) juga dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{a_i^{n+1}}{\Delta t}=\frac{a_i^n}{\Delta t}+\frac{s}{2}b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2+\frac{s}{2}b_i^n\left(a_i^n\right)^2-\frac{r_a}{2}a_i^{n+1}-\frac{r_a}{2}a_i^n+\frac{D_a}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n+1}-\frac{D_a}{\Delta x^2}a_i^{n+1}$$

$$+\frac{D_a}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n+1}+\frac{D_a}{2\Delta x^2}a_{i-1}^n-\frac{D_a}{\Delta x^2}a_i^n+\frac{D_a}{2\Delta x^2}a_{i+1}^n \quad (3.8)$$

Persamaan (3.8) dikalikan dengan Δt pada kedua ruasnya, sehingga diperoleh

$$a_i^{n+1}=a_i^n+\frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2+\frac{s\Delta t}{2}b_i^n\left(a_i^n\right)^2-\frac{r_a\Delta t}{2}a_i^{n+1}-\frac{r_a\Delta t}{2}a_i^n+\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n+1}$$

$$-\frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}a_i^{n+1}+\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n+1}+\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^n-\frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}a_i^n+\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^n \quad (3.9)$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana dan untuk mengelompokkan antara diskritisasi waktu sekarang (n) dan diskritisasi waktu yang akan datang ($n+1$), maka persamaan (3.9) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$-\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n+1}+a_i^{n+1}+\frac{r_a\Delta t}{2}a_i^{n+1}+\frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}a_i^{n+1}-\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n+1}-\frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2=\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^n$$

$$+a_i^n-\frac{r_a\Delta t}{2}a_i^n-\frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}a_i^n+\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^n+\frac{s\Delta t}{2}b_i^n\left(a_i^n\right)^2 \quad (3.10)$$

Persamaan (3.10) disederhanakan dalam bentuk sebagai berikut

$$-\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^{n+1}+\left(1+\frac{r_a\Delta t}{2}+\frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}\right)a_i^{n+1}-\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^{n+1}-\frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2=\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i-1}^n$$

$$+\left(1-\frac{r_a\Delta t}{2}-\frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}\right)a_i^n+\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}a_{i+1}^n+\frac{s\Delta t}{2}\left(a_i^n\right)^2b_i^n \quad (3.11)$$

Didefinisikan

$$P=\frac{D_a\Delta t}{2\Delta x^2}$$

$$Q=\frac{r_a\Delta t}{2}$$

$$R=\frac{D_a\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$S=\frac{s\Delta t}{2}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan P,Q,R dan S pada persamaan (3.11), maka diperoleh

$$-Pa_{i-1}^{n+1}+\left(1+Q+R\right)a_i^{n+1}-Pa_{i+1}^{n+1}-Sb_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2=Pa_{i-1}^{n}+\left(1-Q-R\right)a_i^{n}+Pa_{i+1}^{n}$$
$$+Sb_i^n\left(a_i^n\right)^2 \quad (3.12)$$

3.2.2 Diskritisasi Penghambat

Persamaan penghambat dalam pembentukan sel pada *hydra* sebagaimana persamaan (3.2):

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}=b_b-sb(x,t)a^2(x,t)-r_b b(x,t)+D_b\frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial x^2(x,t)}$$

Transformasi beda hingga maju untuk turunan t dan beda hingga pusat untuk turunan x adalah sebagai berikut

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial t}=\frac{b_i^{n+1}-b_i^n}{\Delta t} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{b_{i-1}^{n+1}-2b_i^{n+1}+b_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{b_{i-1}^{n}-2b_i^{n}+b_{i+1}^{n}}{\Delta x^2}\right) \quad (3.14)$$

Bentuk beda hingga di atas disubstitusikan ke persamaan (3.2), sehingga diperoleh bentuk persamaan diskrit sebagai berikut

$$\frac{b_i^{n+1}-b_i^n}{\Delta t}=b_b-\frac{1}{2}s\left[b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2+b_i^n\left(a_i^n\right)^2\right]-\frac{1}{2}r_b\left[b_i^{n+1}+b_i^n\right]$$

$$+\frac{1}{2}D_b\left[\frac{b_{i-1}^{n+1}-2b_i^{n+1}+b_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2}+\frac{b_{i-1}^n-2b_i^n+b_{i+1}^n}{\Delta x^2}\right] \qquad (3.15)$$

Persamaan (3.15) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{b_i^{n+1}}{\Delta t}=\frac{b_i^n}{\Delta t}+b_b-\frac{s}{2}b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2-\frac{s}{2}b_i^n\left(a_i^n\right)^2-\frac{r_b}{2}b_i^{n+1}-\frac{r_b}{2}b_i^n+\frac{D_b}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n+1}-\frac{D_b}{\Delta x^2}b_i^{n+1}$$

$$+\frac{D_b}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n+1}+\frac{D_b}{2\Delta x^2}b_{i-1}^n-\frac{D_b}{\Delta x^2}b_i^n+\frac{D_b}{2\Delta x^2}b_{i+1}^n \qquad (3.16)$$

Persamaan (3.16) dikalikan dengan Δt pada kedua ruasnya, sehingga diperoleh

$$b_i^{n+1}=b_i^n+b_b\Delta t-\frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2-\frac{s\Delta t}{2}b_i^n\left(a_i^n\right)^2-\frac{r_b\Delta t}{2}b_i^{n+1}-\frac{r_b\Delta t}{2}b_i^n+\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n+1}$$

$$-\frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}b_i^{n+1}+\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n+1}+\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^n-\frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}b_i^n+\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^n \qquad (3.17)$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana dan untuk mengelompokkan antara diskritisasi waktu sekarang (n) dan diskritisasi waktu yang akan datang ($n+1$), maka persamaan (3.17) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$-\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n+1}+b_i^{n+1}+\frac{r_b\Delta t}{2}b_i^{n+1}+\frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}b_i^{n+1}-\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n+1}+\frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2=b_b\Delta t$$

$$+\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^n+b_i^n-\frac{r_b\Delta t}{2}b_i^n-\frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}b_i^n+\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^n-\frac{s\Delta t}{2}b_i^n\left(a_i^n\right)^2 \qquad (3.18)$$

Dalam bentuk yang lebih sederhana, persamaan (3.18) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut

$$-\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^{n+1}+\left(1+\frac{r_b\Delta t}{2}+\frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}\right)b_i^{n+1}-\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^{n+1}+\frac{s\Delta t}{2}b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2=b_b\Delta t+\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i-1}^n$$

$$+\left(1-\frac{r_b\Delta t}{2}-\frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}\right)b_i^n+\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}b_{i+1}^n-\frac{s\Delta t}{2}b_i^n\left(a_i^n\right)^2 \quad (3.19)$$

Didefinisikan

$$T=\frac{D_b\Delta t}{2\Delta x^2}$$

$$U=\frac{r_b\Delta t}{2}$$

$$V=\frac{D_b\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$W=\frac{s\Delta t}{2}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan T,U,V dan W pada persamaan (3.19), maka diperoleh

$$-Tb_{i-1}^{n+1}+\left(1+U+V\right)b_i^{n+1}-Tb_{i+1}^{n+1}+Wb_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2=b_b\Delta t+Tb_{i-1}^n+\left(1-U-V\right)b_i^n+Tb_{i+1}^n$$
$$-Wb_i^n\left(a_i^n\right)^2 \quad (3.20)$$

Dari proses diskritisasi di atas, maka diperoleh sistem persamaan *Meinhardt* diskrit sebagai berikut

$$\left.\begin{aligned}&-Pa_{i-1}^{n+1}+\left(1+Q+R\right)a_i^{n+1}-Pa_{i+1}^{n+1}-Sb_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2=Pa_{i-1}^n+\left(1-Q-R\right)a_i^n\\&\qquad\qquad\qquad\qquad+Pa_{i+1}^n+Sb_i^n\left(a_i^n\right)^2\\&-Tb_{i-1}^{n+1}+\left(1+U+V\right)b_i^{n+1}-Tb_{i+1}^{n+1}+Wb_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2=b_b\Delta t+Tb_{i-1}^n\\&\qquad\qquad\qquad\qquad+\left(1-U-V\right)b_i^n+Tb_{i+1}^n\\&\qquad\qquad\qquad\qquad-Wb_i^n\left(a_i^n\right)^2\end{aligned}\right\} \quad (3.21)$$

Setelah mengetahui solusi numerik model *Meinhardt* dengan menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*, maka selanjutnya akan dilakukan substitusi nilai parameter. Adapun nilai parameter yang digunakan sebagai berikut: koefisien difusi pengaktif $D_a = 0,005$; koefisien difusi penghambat $D_b = 0,4$; laju produksi pengaktif $b_a = 0,1$; laju produksi penghambat $b_b = 0,002$; kerusakan pada pengaktif $r_a = 0,005$; kerusakan penghambat $r_b = 0,008$ dan kepadatan sel *hydra* $s = 0,1$ (Meinhardt, 2012a). Sehingga persamaan (3.1) dan (3.2) dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{\partial a(x,t)}{\partial t} = 0,1b(x,t)a^2(x,t) - 0,005a(x,t) + 0,005\frac{\partial^2 a(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial b(x,t)}{\partial t} = 0,002 - 0,1b(x,t)a^2(x,t) - 0,008b(x,t) + 0,4\frac{\partial^2 b(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.23}$$

Dikarenakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* merupakan skema yang stabil, maka dipilih nilai $\Delta x = 0,1$ dan $\Delta t = 0,1$. Untuk mempermudah perhitungan, penulis menggunakan sistem persamaan (3.21) dengan mensubstitusikan nilai-nilai parameter Δt dan Δx. Substitusikan Δt dan Δx pada persamaan (3.21a)

$$P = \frac{D_a \Delta t}{2\Delta x^2} = 0,005\frac{0,1}{2(0,1)^2} = 0,025$$

$$Q = \frac{r_a \Delta t}{2} = 0,005\frac{0,1}{2} = 0,00025$$

$$R = \frac{D_a \Delta t}{\Delta x^2} = 0,005\frac{0,1}{(0,1)^2} = 0,05$$

$$S = \frac{s\Delta t}{2} = 0,1\frac{0,1}{2} = 0,005$$

Sehingga diperoleh

$$-0,025a_{i-1}^{n+1} + 1,05025a_i^{n+1} - 0,025a_{i+1}^{n+1} - 0,005b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2 = 0,025a_{i-1}^{n}$$

$$+0,94975a_i^n + 0,025a_{i+1}^n$$

$$+0,005b_i^n\left(a_i^n\right)^2$$

Substitusi nilai-nilai parameter Δt dan Δx pada persamaan (3.21b) dengan

$$T = \frac{D_b \Delta t}{2\Delta x^2} = 0,4\frac{0,1}{2\left(0,1\right)^2} = 2$$

$$U = \frac{r_b \Delta t}{2} = 0,008\frac{0,1}{2} = 0,0004$$

$$V = \frac{D_b \Delta t}{\Delta x^2} = 0,4\frac{0,1}{\left(0,1\right)^2} = 4$$

$$W = \frac{s\Delta t}{2} = 0,1\frac{0,1}{2} = 0,005$$

Sehingga diperoleh

$$-2b_{i-1}^{n+1} + 5,0004b_i^{n+1} - 2b_{i+1}^{n+1} + 0,005b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2 = 0,01 + 2b_{i-1}^n - 3,0004b_i^n$$

$$+2b_{i+1}^n - 0,005b_i^n\left(a_i^n\right)^2$$

Dari proses subtitusi nilai-nilai parameter di atas, maka diperoleh sistem persamaan *Meinhardt* diskrit sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}
&-0,025a_{i-1}^{n+1} + 1,05025a_i^{n+1} - 0,025a_{i+1}^{n+1} - 0,005b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2 = 0,025a_{i-1}^n \\
&\qquad +0,94975a_i^n \\
&\qquad +0,025a_{i+1}^n \\
&\qquad +0,005b_i^n\left(a_i^n\right)^2 \\
&-2b_{i-1}^{n+1} + 5,0004b_i^{n+1} - 2b_{i+1}^{n+1} + 0,005b_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2 = 0,01 + 2b_{i-1}^n - 3,0004b_i^n \\
&\qquad +2b_{i+1}^n - 0,005b_i^n\left(a_i^n\right)^2
\end{aligned}\right\} \quad (3.24)$$

Sistem persamaan (3.24) di atas merupakan bentuk diskrit dari persamaan *Meinhardt* pada persamaan (3.1) dan (3.2) dengan menggunakan metode beda hingga skema *Crank-Nicolson*.

3.3 Pembentukan Sel *Hydra* dalam Pandangan Islam

Fakta ilmiah yang merupakan bagian inti ilmu embriologi dan baru diketahui prinsip-prinsip prematurnya pada akhir abad ke-18 serta memakan waktu dua abad lebih untuk mengendap di alam sanubari para ilmuwan embriologi ini telah dibicarakan oleh Rasulullah dengan cukup detail, ilmiah, menyeluruh, dan holistik sejak awal abad ke-7 M atau sepuluh abad lebih awal sebelum diketahui oleh disiplin ilmu manusia (An-Najjar, 2006:246).

Jika kita perhatikan dan mentadzaburi Surat al-Nur ayat 45 bahwasannya Allah mengajarkan kepada manusia untuk mengambil sebuah pengetahuan dan pelajaran yang terdapat dalam al-Quran. Semua makhluk Allah yang hidup di muka bumi seperti hewan, tumbuhan dan manusia dalam tubuhnya tersusun oleh unsur yang kompleks. Susunan yang kompleks ini selalu teratur dan rapi, serta tidak ada yang tidak teratur. Allah-lah penguasa keteraturan itu. Jika kita perhatikan salah satu unsur terbesar penyusun setiap tubuh makhluk hidup adalah air. Berikut firman Allah dalam surat al-Nur ayat 45 yang menyatakan bahwa semua jenis makhluk hidup diciptakan berasal dari air.

وَ اللهُ خَلَقَ كُلَّ دَابَّةٍ مِنْ مَاءٍ فَمِنْهُمْ مَّنْ يَمْشِى عَلَى بَطْنِهِ وَ مِنْهُمْ مَّنْ يَمْشِى عَلَى رِجْلَيْنِ وَ مِنْهُمْ مَّنْ
يَمْشِى عَلَى أَرْبَعٍ يَخْلُقُ مَا يَشَاءُ إِنَّ اللهَ عَلَى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيْرٌ

"Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu" (QS: An-Nur/24:45).

Nurosid (2008) mengatakan bahwa air merupakan senyawa ciptaan Allah yang tersusun oleh unsur atom H dan atom O. Seperti penjelasan di atas bahwa Allah menciptakan semua makhluk-Nya berasal dari air. Air adalah unsur komponen kehidupan yang paling penting. Setiap makhluk hidup pasti membutuhkan air, jika tanpa air maka makhluk hidup tidak akan hidup. Demikianlah Allah menciptakan air sebagai unsur terpenting dalam penciptaan makhluk-Nya. Dalam sebuah penelitian, kandungan air dalam otak manusia 83%, ginjal 82%, jantung 79%, paru-paru 80%, tulang 22%, dan darah 90%. Bila kandungan air dalam masing-masing organ tersebut tetap dipertahankan sesuai kebutuhan, maka organ tersebut akan tetap sehat. Sebaliknya bila menurun, fungsinya juga akan menurun dan lebih mudah terganggu oleh bakteri, virus, dan lainnya. Maka dapat dibayangkan betapa besar peran air dalam tubuh manusia.

Allah berfirman tentang kerajaan-Nya yang besar dan kekuasaan-Nya yang meliputi segala sesuatu dan bahwasanya Dia telah menciptakan berbagai ragam makhluk yang berbeda-beda bentuk, rupa, gerak dan harkatnya dan bahwa Dia telah menciptakan semua jenis hewan dari air. Di antara jenis hewan itu ada yang berjalan dengan perutnya seperti ular dan sebagainya, ada yang berjalan dengan dua kaki seperti manusia dan burung, ada pula yang berjalan dengan empat kaki seperti kebanyakan binatang. Semuanya diciptakan dengan kekuasaan-Nya. Bahkan lihat pula di antara binatang-binatang itu hidup di air, tetapi tidak disebutkan dalam ayat ini karena Allah menerangkan bahwa Dia menciptakan apa yang dikehendaki-Nya bukan saja binatang-binatang yang berkaki banyak tetapi mencakup semua binatang dengan berbagai macam bentuk.

Ayat ini mengajarkan kepada orang-orang beriman bahwa Allah menciptakan semua makhluk yang berjalan di atas bumi ini dari air ayah ibunya. Kemudian dari air itu terbelah dalam sel-sel yang membentuk organ tubuh, dengan spesifikasi bentuk dan fungsi. Allah menciptakan hewan seperti kambing, sapi, burung, termasuk *hydra* berasal dari air. Dalam ayat lain dijelaskan bahwa manusia diciptakan berasal dari air, air yang dimaksud di sini adalah air mani. Begitu halnya dengan *hydra* dapat juga diciptakan oleh dari air mani. Artinya, hewan ini berkembangbiak secara seksual.

Satu organisme menghasilkan sel telur dan sperma sekaligus, yang dilepaskan di air, dan mengalami fertilisasi yaitu sperma akan menuju sel telur kemudian terjadilah peleburan. Hasil peleburan membentuk zigot yang akan berkembang sampai stadium *gastrula*. Kemudian embrio ini akan berkembang membentuk kista dengan dinding dari zat tanduk atau larva bersilia yang disebut *planula*. Kista ini dapat berenang meninggalkan induknya dengan tujuan agar tidak terjadi perebutan makanan. Di tempat yang sesuai akan melekat pada obyek di dasar perairan. Kemudian bila keadaan lingkungan membaik, inti kista pecah dan embrio tumbuh menjadi *hydra* baru. Hewan ini juga bereproduksi secara aseksual yaitu melalui pembentukan tunas pada bagian samping *hydra*. Tunas tersebut membesar dan akhirnya melepaskan diri dari tubuh induknya untuk menjadi individu baru.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan keseluruhan deskripsi metode beda hingga skema *Crank-Nicolson* untuk menyelesaikan sistem persamaan *Meinhardt* sebagaimana dalam bab tiga, maka dapat disimpulkan bahwa bentuk diskrit dari sistem persamaan *Meinhardt* sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
-Pa_{i-1}^{n+1} + (1+Q+R)a_i^{n+1} - Pa_{i+1}^{n+1} - Sb_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2 &= Pa_{i-1}^{n} + (1-Q-R)a_i^{n} \\
&\quad + Pa_{i+1}^{n} + Sb_i^{n}\left(a_i^{n}\right)^2 \\
-Tb_{i-1}^{n+1} + (1+U+V)b_i^{n+1} - Tb_{i+1}^{n+1} + Wb_i^{n+1}\left(a_i^{n+1}\right)^2 &= b_b\Delta t + Tb_{i-1}^{n} \\
&\quad + (1-U-V)b_i^{n} + Tb_{i+1}^{n} \\
&\quad - Wb_i^{n}\left(a_i^{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan di atas merupakan bentuk diskrit dari persamaan *Meinhardt*, dimana bentuk diskrit lebih sederhana dan mudah digunakan dalam mencari selesaian numerik dibanding model dengan bentuk kontinu.

4.2 Saran

Pada pengembangan penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan studi diskritisasi model matematika pola pembentukan sel dengan menggunakan metode penyelesaian numerik lainnya. Penelitian selanjutnya juga dapat mengembangkan metode yang sama dengan melanjutkan simulasi menggunakan bantuan program seperti MATLAB atau pada model matematika yang berbeda seperti pada molusca dan lain sebagainya.

DAFTAR PUSTAKA

An-Najjar, Z. 2006. *Pembuktian Sains dalam Sunnah Buku 2*. Jakarta: Amzah.

Ayres, F. 1992. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.

Campbell, N.A., Reece, J.B., dan Mitchell, L.G. 2012. *Biology*. Terjemahan Damaning Tyas Wulandari. Jakarta: Erlangga.

Djojodihardjo, H. 2000. *Metode Numerik*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.

Fath, A.F. 2010. *Nadzariyatul Wihdah Al Qur'aniyyah Inda Ulamail Muslimiin Wadawruhaa Fii Fikril Islam*. Terjemahan Nasiruddin Abbas. Jakarta: Anggota IKAPI DKI.

Finizio, N dan Ladas, G. 1982. *Ordinary Diferential Equations*. Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga.

Fried, G.H dan Hademenos, G.J. 2005. *Schaum's Outlines of Theory and Problems of Biology Second Edition*. Terjemahan Damaring Tyas. Jakarta: Erlangga.

Gierer, A. 1977. Biological Features and Physical Concepts of Pattern Formation Exemplified by Hydra. *Curr. Top. Dev. Biol.*, 11: 17-59.

Kastawi, Y. 2005. *Zoology Avertebrata*. Malang: UM Press.

Kiptiyah. 2007. *Embriologi dalam Alqur'an Kajian pada Proses Penciptaan Manusia*. Malang: UIN-Malang Press.

Lapidus, L dan Pinder, G.F. 1981. *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*. New York: A Wiley-Interscience Publication.

Liu dan Husain, T.T. 2012. *Discretization: An Enabling Technique*. Arizona: Departement of Computer Science and Enginering-arizona State University.

Luknanto, D. 2003. *Model Matematika*. Bahan Kuliah tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Jurusan Teknik Sipil FT UGM.

Meinhardt, H. 2012a. Modeling Pattern Formation in Hydra - A Route to Understand Essential Steps in Development, Tubingen: Max Planck Gesellschaft. (Online). (*http://www.eb.tuebingen.mpg.de/fileadmin/uploads/images/Research/emeriti/Hans_Meinhardt/Meinh_Supplem_Material.ppt.*), diakses 7 Februari 2014.

_________. 2012b. *Models of Biological Pattern Formation*. Tubingen: Max Planck Gesellschaft.

Munir, R. 2003. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

Mutholi'ah, E. 2008. *Analisis Perbandingan Metode Beda Hingga Skema Implisit dan Crank-Nicholson pada Penyelesaian Persamaan Diferensial Parsial*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Negeri Malang.

Nurosid. 2008. Semua Jenis Hewan Berasal dari Air. (Online), (*http://tijii.wordpress.com/2008/11/15/semua-jenis-hewan-berasal-dari-air/*), diakses 13 Januari 2015.

Oemarjati, B.S dan Wardhana, W. 1990. *Taksonomi Avertebrata*. Jakarta: UI Press.

Pagalay, U. 2009. *Mathematical Modelling: Aplikasi pada Kedokteran, Imunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan.* Malang: UIN-Malang Press.

Panduwijayan, T.. 2011. Fungsi-fungsi Sungai. (Online), (*http://tanjungpanduwijayan2011.blogspot.com/2011/04/definisi-permasalahan-dan-karakteristik.html*), diakses 13 Maret 2014.

Purcell, E.J dan Varberg, D. 1999. *Calculus with Analytic Geometry 5th Edition*. Terjemahan I Njoman Susila, dkk.. Jakarta: Erlangga.

Sasongko, S.B. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta.

Smith, G.D. 1985. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford: Clarendon Press.

Syamiil Al-Qur'an (Al-Qur'an dan Terjemahnya). 2009. Bandung: Sygma Examedia Arkanleema.

Trembley, A. 1744. *Memoires Pour Servira L'histoire D'un Genre de Polypes D'eau Douce a Bras en Forme de Cornes*. Terjemahan Hans Meinhardt. London: Academic Press.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.

Turmudi. 2006. *Islam, Sains, dan Teknologi Menggagas Bangunan Keilmuan Fakultas Sains dan Teknologi Islam Masa Depan*. Malang: UIN Press.

Villee, C.A. 1984. *General Zoologi Sixth Edition*. Terjemahan Nawangsari Sugiri. Jakarta: Erlangga.

Yang, W., Cao, W., Chung, T., dan Morris, J. 2005. *Applied Numerical Methods Using Matlab*. New Jersey: Willey Interscience.