DIMENSI METRIK GRAF KINCIR $K_1 + mK_s$
$m \geq 2;\ s \geq 3;\ m,s \in Z^+$

SKRIPSI

Oleh:

WILDAN HABIBI
NIM. 06510008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

DIMENSI METRIK GRAF KINCIR $K_1 + mK_s$
$m \geq 2$; $s \geq 3$; $m,s \in Z^+$

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

WILDAN HABIBI
NIM. 06510008

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2011

DIMENSI METRIK GRAF KINCIR $K_1 + mK_s$
$m \geq 2; s \geq 3; m,s \in Z^+$

SKRIPSI

Oleh:

WILDAN HABIBI
NIM. 06510008

Telah disetujui oleh:

Dosen Pembimbing I	**Dosen Pembimbing II**
Wahyu H. Irawan, M.Pd	**Fachrur Rozi, M.Si**
NIP. 197104202000031003	**NIP. 198005272008011012**

Malang, 14 Januari 2011

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

DIMENSI METRIK GRAF KINCIR $K_1 + mK_s$
$m \geq 2; s \geq 3; m,s \in Z^+$

SKRIPSI

Oleh:

WILDAN HABIBI
NIM. 06510008

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 24 Maret 2011

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Abdussakir, M.Pd NIP. 197510062003121001	( )
2. Ketua	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 197206041999032001	( )
3. Sekretaris	: Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 197104202000031003	( )
4. Anggota	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 198005272008011012	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

SURAT PERNYATAAN

ORISINALITAS PENELITIAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : WILDAN HABIBI

NIM : 06510008

Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika

Judul Skripsi : Dimensi Metrik Graf Kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 14 Januari 2011

Yang Membuat Pernyataan,

Wildan Habibi

NIM. 06510008

MOTTO

"Kegagalan adalah sebuah keberhasilan
Jika kita mau belajar darinya"

PERSEMBAHAN

Karya ini hanya penulis persembahkan kepada:
(alm) Ibu Hj. Cholifah Dan Bapak H. Masykur B
yang telah mencurahkan seluruh cinta dan kasih sayangnya
tanpa mengharap suatu imbalan apapun
serta keluarga besar penulis
yang selalu memberikan motivasi, arahan dan semangat
yang luar biasa tanpa henti-henti.
Semoga Allah senantiasa mencurahkan kasih sayang-Nya
kepada (alm) Ibu, Bapak, dan keluarga besar penulis.
Penulis akan senantiasa berusaha memberikan yang terbaik
untuk (alm) Ibu, Bapak, dan keluarga besar penulis

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur Alhamdulillah penulis haturkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan hidayah-Nya sehingga penulis mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "*Dimensi Metrik Graf Kincir* $K_1 + mK_s, m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$" dengan baik. Shalawat serta salam semoga senantiasa terlimpahkan kepada Baginda Rasullullah Muhammad SAW yang telah menuntun umat Islam dari kegelapan menuju jalan yang terang benderang.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dosen yang selalu

memberikan motivasi dan inspirasi kepada penulis selama menjadi mahasiswa.

4. Wahyu H. Irawan, M.Pd selaku Dosen Pembimbing Matematika yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan, sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Fachrur Rozi, M.Si selaku Dosen Pembimbing Integrasi Sains Matematika dan Islam yang telah banyak memberi arahan kepada penulis.
6. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah menyalurkan ilmunya, membimbing dan memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
7. (Alm) Ibu H. Cholifah Bapak dan H. Masykur Baidowi tercinta dan seluruh keluarga, yang senantiasa memberikan do'a kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Kakak Fatkhiyah, Ida, Ninik, Fitri, Arif, Kharisma dan seluruh keluarga besarku yang selalu memberikan doa, semangat dan kasih sayang tanpa batas.
9. Adik Nuril Futikhatul Amanah dan keluarga Bapak Enik Junaedi yang selalu memberikan do'a, semangat, dan motivasi yang tanpa henti-henti.
10. Sahabat-sahabat Rayon Galileo yang selalu memberikan motivasi, do'a dan keceriaan dalam menyelesaikan skripsi ini seperti: Agus Syaifurrohim, Okta Tri, Arif Wahyulloh, Akhmad Fauzi, Muhammad Izza, Arif Nur Handika, Mufid Nur Rohman, Syamsul Arifin, Lutfi Nur Arifin serta teman-teman

aku Mahfudz Wahyudin, Samsul Arif, dan Syaiful Bukhari yang selalu menemani disaat aku lagi jenuh.

11. Teman-teman senasib seperjuangan Matematika 2006 terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
12. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis berdo'a semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin.

Malang, 14 Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Habibi, Wildan. 2011. **DIMENSI METRIK GRAF KINCIR K_1 + mK_s , m ≥ 2; s ≥ 3; m,s ∈ Z^+.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Wahyu H. Irawan, M.Pd
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata Kunci: Jarak, Himpunan Pemisah, Dimensi Metrik, dan Graf Kincir.

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini dirumuskan sebagai berikut yaitu; bagaimana menentukan dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s, m \geq 2; s \geq 3; m,s \in Z^+$, membuat rumusan dari dimensi metrik graf kincir, serta bagaimana membuktikan rumusan tersebut benar secara umum. Sedangkan yang melatar belakangi skripsi ini adalah dimensi metrik dirasa masih baru dan belum pernah dibahas waktu perkuliahan.

Jika G adalah graf terhubung, jarak antara dua sisi u dan v di G, $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari sisi-sisi dalam graf terhubung G dan sisi $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-tuple) $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \dots, d(v,w_k))$ Jika $r(v|W)$ untuk setiap sisi $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut basis metrik, dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan $dim(G)$.

Dalam kajian ini, penulis mengkaji dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m,s \in Z^+$. Untuk mendapatkan dimensi metrik tersebut maka dilakukan dengan menentukan kardinalitas minimum dari himpunan pemisah dengan menggunakan lemma yaitu jika $u = v$ maka $d(u,v) = 0$, jika u *dan* v pada daun kincir yang sama dan graf yang digunakan adalah graf komplit maka $d(u,v) = 1$ sedangkan jika u *dan* v pada daun kincir yang berbeda maka $d(u,v) = 2$ dan K_1 dengan titik yang ada pada daun kincir mempunyai $d(K_1, v) = 1$ Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa rumus umum dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s, m \geq 2; s \geq 3; m,s \in Z^+$ adalah $m(s-1)$. Pembahasan mengenai dimensi graf kincir ini masih dapat dilanjutkan dengan memakai operasi perkalian pada graf-graf yang berbeda.

ABSTRACT

Habibi, Wildan. 2011. **On the Metric Dimension of Windmill Graph $K_1 + mK_s$, $m \geq 2$; $s \geq 3$; $m,s \in Z^+$.** Thesis. Mathematics Department Faculty of Science and Technology The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisor: (I) Wahyu H. Irawan, M.Pd
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Key words: distance, resolving set, metric dimension, windmill graph

Problem which discussed here are how to determine the metric dimension of windmill graph $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$, then formula the metric dimension of that graf and how to prove the formula in general. While the background of this thesis is the metric dimension is still new and never studied in lecturer.

If u and v are vertices in a connected graph G, then the distance $d(u,v)$ is shortest path between u and v in G. For ascending set of $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k\}$ of vertex in a connecting graph to G is undirected, no double edge, and vertex $v \in V(G)$, represent v to W is with $r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), \ldots, d(v,w_k))$. For $r(v|W)$ each vertex is $v \in V(G)$ different, this W is called resolving set. Resolving set with cardinal minimum is called minimum resolving set, and cardinal states metric dimension of G and noted with $dim(G)$.

In this thesis, writen explains about the metric dimension of windmill graph $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$ for determining the metric dimension of windmill graph we have to determine the minimum cardinality of resolving set using lemma that are, if $u = v$ maka $d(u,v) = 0$,if u *dan* v in the same leaf and graph of that leaf is complete graph then $d(u,v) = 1$, while if u *dan* v in the different leaf then $d(u,v) = 2$ and distance of K_1 with vertex in the leaf of windmill graph $d(K_1, v) = 1$.

The outcome of this thesis is the formula of windmill graph $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$ that is $m(s-1)$. The discussed abaout windmill graph can be contiuned with using join operation in different graph.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Salah satu nuktah kosmologi Al-Qur'an ialah kebenaran (haqqiyyah) alam raya ciptaan Allah ini, yaitu bahwa alam raya ini diciptakan oleh Allah dengan benar (bi al-haqq "bilhaqq"). Termasuk kejadian, objek alam, penciptaan di bumi dan langit, dan struktur Al-Qur'an, tidak ada yang kebetulan. Semuanya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi, (Abdussyakir, 2007:79). Ayat-ayat ini dapat diklasifikasikan ke dalam beberapa kelompok :

a) Sebagian menjelaskan bahwa penciptaan langit dan bumi tidaklah sia-sia, tetapi dibalik itu benar-benar memiliki tujuan.

   "*Dan Dialah Yang menciptakan langit dan Bumi dengan benar (QS. 6:73)*"

b) Di dalam beberapa ayat disebutkan bahwa kejadian-kejadian mengikuti suatu jalur alami untuk periode tertentu yang sebelumnya sudah ditentukan.

   "*Allahlah yang meninggikan langit tanpa tiang (sebagaimana yang kamu lihat), kemudian Dia bersemayam di atas 'Arsy, dan menundukkan matahari dan bulan. Masing-masing beredar hingga waktu yang ditentukan, Allahmengatur urusan (makhluk-Nya),menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya), supaya kamu meyakini pertemuan dengan Tuhanmu (QS 13:2)*"

c) Beberapa ayat menyebutkan kepada kita bahwa keseluruhan proses penciptaan dan perjalanan kejadian-kejadian di dalam alam mengikuti suatu perhitungan dan ukuran yang sesuai (yaitu, bagi setiap sesuatu ada ukuran dan aturan yang di tentukan).

"*Matahari dan bulan itu mengikuti suatu perhitungan (QS 13:8)*" (Mehdi Golshani, 2003:70).

Dilihat dari kacamata Al-Qur'an tujuan utama dalam memahami alam adalah untuk memahami dan mendekatkan diri kepada Allah SWT. Dalam Al-Qur'an terdapat lebih dari 750 ayat yang merujuk kepada fenomena alam, sebagaimana dikukuhkan oleh banyak ulama Islam terkemuka, Al-Qur'an bukanlah sebuah buku ilmu kealaman, melainkan kitab petunjuk dan pencerahan. Rujukan Al-Qur'an terhadap fenomena alam dimaksudkan untuk menarik perhatian manusia pada Pencipta Alam yang Mahamulia dan Mahabijaksana dengan mempertanyakan dan merenungkan wujud-wujud alam, dan untuk mendorong manusia agar berjuang mendekat kapada-Nya, (Mehdi Golshani, 2003:66-68).

Maka sebagai muslim harus mempunyai keyakinan bahwa hukum-hukum keteraturan tersebut datangnya dari Allah dan Allah menetapkan hukum sesuai dengan apa yang dikehendaki-Nya. Sesuai firman Allah dalam Al-Qur'an surat Al-Jinn ayat 28 yang berbunyi:

لِّيَعْلَمَ أَن قَدْ أَبْلَغُوا۟ رِسَٰلَٰتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَىْءٍ عَدَدًۢا ﴿٢٨﴾

Artinya :*"Supaya Dia mengetahui, bahwa Sesungguhnya Rasul-Rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu".*

Dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَىْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya :*"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".*

Ilmu pengetahuan adalah prasyarat untuk mewujudkan salah satu tujuan diciptakannya alam ini, yaitu untuk manfaat manusia. Tetapi ilmu pengetahuan itu diberikan Allah kepada manusia melalui kegiatan manusia itu sendiri dalam usaha memahami alam raya ini. Dalam usaha memahami alam sekitarnya itu maka manusia harus mengerahkan dan mencurahkan akalnya yang menjadi objek pemahaman sekaligus sumber pelajaran hanya untuk mereka yang berfikir saja. Karena itu akal bukanlah alat pada manusia untuk “menciptakan" kebenaran, malainkan untuk “memahami” atau barang kali “menemukan” kebenaran yang memang dari semula telah ada dan berfungsi dalam lingkungan di luar diri manusia, (Ahmad Syafi’i dan Said Tuhuleley,1996:7-9).

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur’an. Salah satu konsep dari disiplin ilmu matematika yang terdapat dalam Al-Qur’an adalah masalah teori graf. Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mendiskusikan tentang persoalan yang terjadi di kota Kaliningrad Rusia, yaitu bagaimana caranya agar seseorang dapat menyeberang ke semua jembatan tanpa harus melewati satu jembatan lebih dari satu kali. Publikasi dari masalah ini dan usulan solusinya dikenal sebagai masalah dari teori graf. Teori graf dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai jenis permasalahan. Sebagai contoh, menghitung angka dari kombinasi berbeda dari penerbangan diantara dua kota pada suatu jaringan maskapai penerbangan, memeriksa kemungkinan untuk melewati semua jalan yang ada di suatu kota tanpa melewati suatu jalan dua kali atau lebih, menemukan jumlah warna yang diperlukan untuk mewarnai sejumlah daerah pada suatu peta, membedakan dua senyawa kimia dengan formula molekul yang sama namun memiliki struktur yang berbeda.

Demikianlah beberapa contoh dari sekian banyak aplikasi graf mencangkup disiplin ilmu yang luas.

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua dengan banyak pokok bahasan, salah satunya adalah tentang dimensi metrik pada graf. Dimensi metrik adalah kardinalitas minimum himpunan *resolving* (*resolving set*) pada G. Misalkan u dan v adalah *vertex-vertex* dalam graf terhubung G, maka jarak adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk setiap *vertex* v dari graf terhubung dan sebuah subset S dari $V(G)$, jarak antara v dan S adalah $d(v,S)=\min\{d(v,x)\,|\,x\in S\}$. Untuk *vertex*-vertex u dan v dalam graf terhubung G, jarak $d(u,v)$ adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W=(w_1,w_2,...,w_k)$ dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung G dan *vertex* v pada G. $r(v\,|\,W)=(d(v,W_1),d(v,W_2),...,d(v,W_k))$ menunjukkan representasi dari v terhadap W. Himpunan W dinamakan himpunan *resolving* G jika semua *vertex* di G mempunyai representasi berbeda. Himpunan *resolving* dengan kardinalitas minimum disebut himpunan *resolving* minimum, dan kardinalitas tersebut menyatakan dimensi metric dari G dan dinotasikan dengan $\dim(G)$, (Chartrand, 2000). Allah SWT berfirman dalam surat Al-Hujurat ayat 13 berbunyi :

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓا۟ ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

Artinya : *"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa*

> *dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal".*

Dari sekian banyak jurnal yang membahas tentang dimensi metrik, ada satu jurnal yang menarik perhatian peneliti untuk membahasnya lebih jauh. Karena dimensi metrik dirasa masih baru dan belum pernah di bahas waktu perkuliahan. Maka dari itu peneliti akan menjelaskan bagaimana mencari dimensi metrik dari suatu graf komplit dan jurnal tersebut ditulis oleh (Suhud Wahyudi dan Sumarno, 2010) berisi tentang dimensi metrik graf kincir dengan pola $K_1 + mK_3$. Namun, ada beberapa hal yang perlu ditambah dalam jurnal tersebut, yaitu langkah-langkah untuk mendapatkan dimensi metrik beserta bukti-bukti dari teorema-teorema yang diperoleh. Peneliti ingin mengembangkan penelitian ini pada **"Dimensi Metrik Graf Kincir K_1 + mK_s , $m \geq 2$; $s \geq 3$; $m,s \in Z^+$"** sebagai bahan untuk diteliti lebih lanjut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dipaparkan di atas maka masalah yang dapat dirumuskan adalah tentang bagaimana menentukan dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$

1.3 Fokus Penelitian

Fokus penelitian dalam penulisan skripsi ini adalah :

1. Menentukan dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$
2. Membuat rumusan dari dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Mendeskripsikan bagaimana menentukan dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$
2. Membuat rumusan dari dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$

1.5 ManfaatPenelitian

Adapun manfaat dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi Penulis
   a) Untuk menambah pemahaman tentang konsepsi teori graf khususnya dimensi graf.
   b) Sebagai tambahan pengalaman untuk mengaktualisasi diri sebagai insan akademik dalam menerapkan ilmu pengetahuan khususnya teori graf.

2. Bagi pembaca

a) Dapat menambah wawasan pengetahuan tentang teori graf khususnya dimensi graf.

b) Sebagai tambahan literatur bagi mahasiswa khususnya yang sedang menempuh mata kuliah teori graf.

3. Bagi lembaga

a) Memperbanyak bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan di jurusan matematika tentang dimensi graf.

b) Sebagai rujukan atau acuan dalam penelitian mahasiswa lainnya khususnya tentang dimensi graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Dalam hal ini dapat berupa buku-buku referensi, artikel, diktat kuliah, internet, ataupun hasil penelitian orang lain yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.

Langkah – langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1) Merumuskan masalah dalam bentuk kalimat berita.

2) Menfokuskan penelitian berdasarkan masalah.

3) Menentukan tujuan penelitian berdasarkan masalah.

4) Mencari sejumlah data pendukung yang diperoleh dengan menggunakan dua cara, yaitu:

a) Data primer, diperoleh dari gambar graf kincir $K_1 + mK_s$, dengan $m = 2,3,4 \; dan \; s = 1,2,3,4,5$

b) Data sekunder, berupa definisi, teorema, sifat, gambar, dan contoh tentang definisi graf, titik dan sisi, terhubung dan terkait, derajat, lintasan dan jalan, operasi penjumlahan pada graf, jarak, eksentrisitas, dan diameter graf, graf komplit, graf kincir, dan dimensi metric.

5) Menganalisis data

Langkah – langkah untuk menganalisis data adalah sebagai berikut :

a) Menggambar graf kincir $K_1 + mK_s$, dengan $m = 2,3,4,5 \, dan \, s = 1,2,3,4$

b) Mencari dimensi metrik graf kincir dengan cara :

- Mencari jarak satu titik terhadap keseluruhan titik dalam himpunan, jika titik tersebut bukan himpunan pemisah lanjutkan pengambilan pada dua titik, tiga titik dan seterusnya.
- Dari himpunan pemisah yang sudah didapatkan, ambil himpunan yang kardinalitasnya minimum (basis metrik).
- Kardinalitas minimum dari himpunan pemisah tersebut adalah dimensi metrik.
- Membuat pola dari dimensi metrik.

c) Menentukan rumusan dimensi melalui konjekjer.

d) Membuktikan rumusan hasil dimensi metrik graf kincir.

e) Melaporkan hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditela'ah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab yaitu sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini mendeskripsikan secara umum mengenai isi skripsi. Pembagian bab ini terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, fokus penelitian, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang definisi graf, definisi titik dan sisi, definisi terhubung dan terkait, definisi derajat, definisi lintasan dan jalan, definisi operasi penjumlahan pada graf, definisi jarak, eksentrisitas, dan diameter graf, definisi graf komplit, definisi graf kincir, definisi dimensi metrik, serta kajian keagamaan.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan yang memaparkan tentang bagaimana menentukan dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$

BAB IV PENUTUP

Bab ini memuat kesimpulan dan saran dari penulisan skripsi ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut size dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q, (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

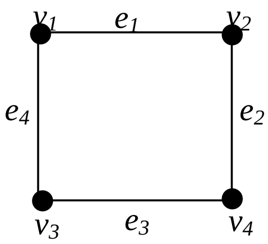
Contoh :

Misal $G:(V, E)$ dengan

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_3, v_1)\}$$

Jadi graf G digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.1 Graf G dengan empat titik dan empat sisi

2.1.2 Definisi Titik dan Sisi

Banyaknya anggota himpunan titik pada suatu graf G disebut *order* G dan dinotasikan dengan $p(G)$ atau p saja. Sedangkan banyaknya anggota himpunan sisinya disebut *size* G dan dinotasikan dengan $q(G)$ atau q. Apabila ada suatu notasi graf (p,q) maka artinya adalah graf tersebut mempunyai *order* p dan *size* q, (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

Teorema 1

Misalkan G adalah sebuah graf dengan order p dan size q, dimana $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_p\}$. Maka $\sum_{i=1}^{p} d_G(v_i)=2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7)

Bukti:

Setiap menghitung derajat suatu titik di G, maka suatu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajad titik di G sama dengan 2 kali jumlah sisi di G.

Akibat teorema

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap, (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

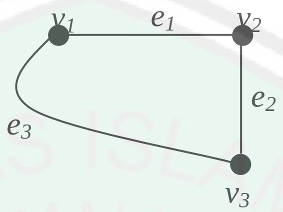
Bukti:

Misalkan graf G dengan size q. Dan misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v\in v(\mathrm{G})}\deg_{\mathrm{G}} v=\sum_{v\in \mathrm{W}}\deg_{\mathrm{G}} v+\sum_{v\in \mathrm{U}}\deg_{\mathrm{G}} v=2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

Contoh:



Gambar 2.2 Graf G (3,3)

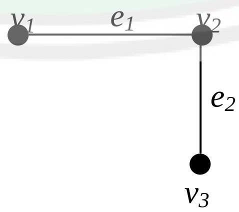
Graf G di atas mempunyai order 3 dan size 3 yang dapat dinotasikan sebagai graf (3,3).

2.1.3 Definisi Terhubung dan Terkait

Suatu sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi pada graf G maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*) sedangkan u dan e disebut terkait langsung (*incident*), begitu juga dengan v dan e, (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

Contoh:

Misal $G : (V, E)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3)\}$



Gambar 2.3 Graf G dengan titik dan sisi yang *adjecent* dan *incident*

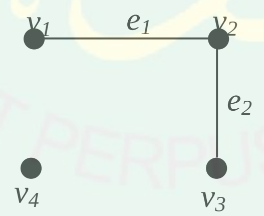
Dari gambar di atas diketahui bahwa v_1 dan v_2 terhubung langsung (*adjacent*) begitu pula dengan v_2 dan v_3. Sedangkan v_1 dan e_1 disebut terkait langsung (*incident*) karena tidak terdapat sisi diantara kedua titik tersebut. Dan titik yang terkait langsung adalah sebagai berikut:

1. Pada sisi e_1 yang terkait langsung v_1 dan v_2
2. Pada sisi e_2 yang terkait langsung v_2 dan v_3

2.1.4 Definisi Derajat

Derajat dari titik v di graf G ditulis $\deg_g(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v, (Chartrand dan Leniak, 1986:7). Dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf *G*, maka tulisan $\deg_g(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap* (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (*end vertices*), (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

Contoh:



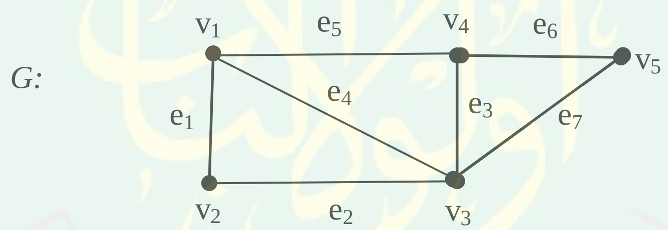
Gambar 2.4 Graf G dengan derajat titik

Titik v_1 mempunyai derajat 1, $\deg_g(v_1)=1$, titik v_2 mempunyai derajat 2, $\deg_g(v_2)=2$ dan titik v_4 mempunyai derajat 0, $\deg_g(v_4)=0$. Titik v_1 dan titik v_3 disebut titik ujung. Sedangkan titik v_4 disebut titik terisolasi.

2.1.5 Definisi Lintasan dan Jalan

Misalkan u dan v adalah adalah titik – titik pada graf G. Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ pada graf G adalah barisan selang – seling antar titik dan sisi, $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots\ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ dimulai dengan titik u dan diakhiri dengan titik v, dimana $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, 3, \ldots.,n$. Bilangan n disini menunjukkan panjangnya jalan. Sebuah jalan trivial tidak mempunyai sisi, $n = 0$. Perlu diperhatikan bahwa pada jalan ada kemungkinan pengulangan sisi dan titik. Sebuah $u - v$*trail* adalah sebuah jalan $u - v$ yang tidak terdapat pengulangan sisi, sedangkan sebuah jalan $u - v$ yang tidak terdapat pengulangan titik dan sisi adalah lintasan $u - v$. Oleh sebab itu setiap lintasan pasti merupakan *trail*, (Chartrand dan Lesniak, 1986:26)

Perhatikan graf G berikut,



Gambar 2.5 Gambar untuk mengilustrasikan jalan (walk)

Maka

$W_1 = v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_3, v_5, v_4, v_1$

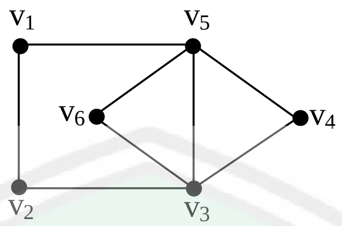
adalah jalan di G. W_1 mempunyai panjang 8

$W_2 = v_1, v_4, v_2, v_3, v_4$

bukan jalan di *G* karena sisi $v_4v_2$tidak ada di *G*.

Jika $v_0 = v_n$, maka *W* disebut *jalan tertutup*. Sedangkan jika $v_0 \neq v_n$maka *W* disebut *jalan terbuka*. Jika semua sisi di *W* berbeda, maka *W* disebut *trail* (Chatrand and Lesniak, 1986: 26).

Perhatikan gambar berikut,



Gambar 2.6 Gambar jalan tertutup, jalan terbuka, dan trail

Maka

$W_1 = v_4, v_5, v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_3, v_4$

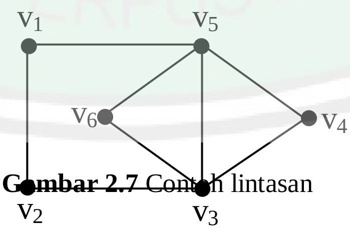
adalah jalan tertutup, dan merupakan trail karena semua sisinya berbeda atau tidak ada sisi yang dilalui lebih dari satu kali.

$W_2 = v_5, v_3, v_2, v_1, v_5, v_3, v_4$

adalah jalan terbuka, dan bukan trail karena sisi v_5v_3 dilalui lebih satu kali, atau dengan kata lain ada sisi yang sama pada jalan W_2.

Jalan terbuka yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *lintasan*. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa setiap lintasan pasti trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Wilson and Watkins, 1989: 35).

Perhatikan gambar berikut,



Gambar 2.7 Contoh lintasan

Jalan

$W_1 = v_1, v_2, v_3, v_5, v_4$

$W_2 = v_1, v_5, v_3, v_4$

dan

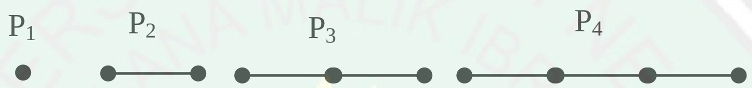
$W_3 = v_1, v_2, v_3, v_6, v_5, v_4$

adalah lintasan di *G* karena semua titiknya berbeda. Sedangkan

$W_4 = v_1, v_5, v_4, v_3, v_5, v_3, v_2, v_1$

adalah bukan termasuk lintasan karena terdapat titik yang sama v_3 dan v_5.

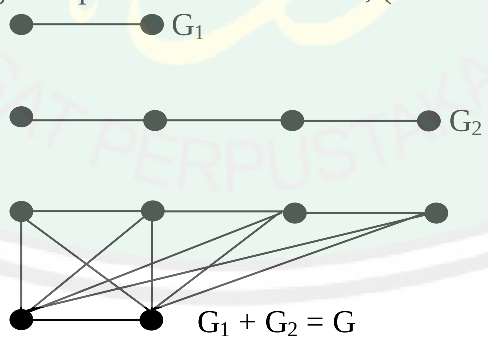
Jika graf yang berbentuk lintasan dengan titik sebanyak *n*, maka disebut *graf lintasan* dan disimbolkan dengan P_n. Perhatikan gambar berikut,



Gambar 2.8 Graf lintasan P_1, P_2, P_3, dan P_4

2.1.6 Operasi Penjumlahan Pada Graf

Definisi dari operasi jumlahan dari graf G_1 dan G_2 adalah graf $G = G_1 + G_2$, dengan himpunan vertex $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan edge-nya $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x,y)|x \in V(G_1), y \in V(G_2)\}$. Contoh dari operasi penjumlahan pada graf dapat dilihat dibawah ini, (Abdussakir, dkk. 2009)



Gambar 2.9 Graf $G = G_1 + G_2$

2.1.7 Definisi Jarak, Eksentrisitas, dan Diameter Graf

Jarak *d*(*u*,*v*) antara dua titik *u* dan *v* adalah panjang minimum dari lintasan *u*-*v* pada graf G. Jika tidak ada lintasan antara u dan v maka $d(u,v) = \infty$, (Chartrand dan Lesniak, 1986:29)

Eksentrisitas titik u di graf G dinotasikan dengan $e(u)$ adalah jarak terbesar dari u ke semua titik di G. Jadi,

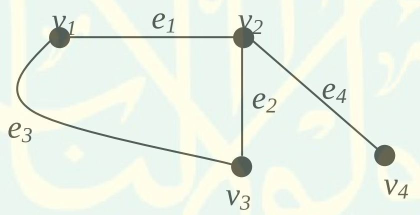
$$e(u) = \max\{d(u,v) | v \in V(G)\}$$

Jika u dan v adalah titik pada G sehingga $e(u) = d(u,v)$, maka v disebut titik eksentrik dari u. Dengan kata lain, titik v disebut titik eksentrik dari u jika jarak dari u ke v sama dengan eksentrisitas dari u.

Diameter dari graf G dinotasikan dengan $diam\,(G)$, adalah eksentrisitas terbesar dari semua titik di G. Jadi,

$$diam\,(G) = max\{\, e\,(v) | v \in V\}.$$

Contoh:



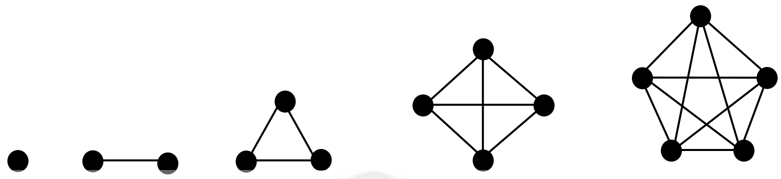
Gambar 2.10 Graf G dengan empat titik dan empat sisi

Jarak dari v_1 ke $v_2, v_3,$ dan v_4 adalah $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_3) = 1$ dan $d(v_1, v_4) = 2$. Sehingga $e(v_1) = 2$.

2.1.8 Graf Komplit

Graf G dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan $(n-1)$ dengan order $p = n$ dan size $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

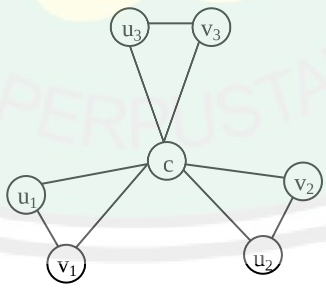
Berikut ini adalah gambar graf $K_1, K_2, K_3, K_4, dan\ K_5$ (Abdussakir, dkk. 2009).



Gambar 2.11 Graf Komplit $K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ dan\ K_5$

2.1.9 Graf Kincir

Graf kincir adalah gabungan dari graf komplit K_r dan mK_s. Graf kincir dinotasikan dengan W_2^m. Dimana W simbol dari graf kincir, sedangkan 2 menunjukkan graf komplit-2,dan m himpunan terurut dari *vertex* pada graf berhingga. Graf tersebut adalah graf yang dibangun dengan menghubungkan semua *vertex* mK_2 dengan sebuah *vertex* yang disebut *vertex* pusat c. Secara matematis graf kincir $W_2^m = K_1 + mK_2$. *Vertex* pusat dalam graf kincir diberi nama c, sedangkan u_i dan v_i untuk dua *vertex* luar di bilah i dimana $1 \le i \le m$. Contoh dari *graf kincir* dengan 3 bilah (W_2^3) dapat dilihat pada Gambar 2.12 di bawah ini:



Gambar 2.12 Graf kincir dengan 3 bilah W_2^3

2.1.10 Dimesi Metrik

Dimensi Metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pemisah (*resolving set*) pada G. Misalkan u dan v adalah *vertex-vertex* dalam graf terhubung G, maka jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k\}$ dari *vertex-vertex* dalam graf terhubung G dan vertex $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor (pasangan k-tuple)

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \ldots, d(v, w_k))$$

Jika $r(v|W)$ untuk setiap *vertex* $v \in V(G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pemisah dari $V(G)$. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum (basis metrik), dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari G dinotasikan $dim(G)$ (Suhud Wahyudi dan Sumarno, Dimensi Metrik Graf Kincir dengan Pola $K_1 + mK_3$, 2010).

Setiap graf terhubung sederhana pasti memiliki suatu himpunan pemisah, seperti yang terjamin oleh teorema berikut ini.

Teorema 2

Pada setiap graf terhubung sederhana G, terdapat suatu $W \subseteq V(G)$ yang merupakan himpunan pemisah.

Bukti:

Misalkan G terhubung sederhana. Ambil $W = V(G)$ sebagai subset, maka untuk setiap $v \in V(G)$, elemen ke-i dari vektor koordinat bernilai 0. Karena perbedaan letak 0 pada setiap $v \in V(G)$, maka $r(v|W)$ berbeda untuk setiap $v \in V(G)$. Sesuai definisi, W adalah himpunan pemisah dari G. Jadi, setiap graf terhubung sederhana pasti memiliki paling tidak satu himpunan pemisah, yaitu $V(G)$ itu sendiri.

Teorema 3

Untuk graf kincir $K_1 + mK_s, m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$ maka berlaku :

$$d(u,v) = \begin{cases} 0 & jika \;\; u = v \\ 1 & jika \;\; u \;\; dan \;\; v \;\; pada \;\; daun \;\; kincir \;\; yang \;\; sama \\ & dan \;\; atau \;\; jika \;\; u \;\; dan \;\; v \;\; adalah \;\; pusat \;\; kincir\,(z) \\ 2 & jika \;\; u \;\; dan \;\; v \;\; berada \;\; pada \;\; daun \;\; kincir \;\; yang \;\; berbeda \end{cases}$$

(Arif Johanes Purwono, 2010).

Bukti :

Jika $u = v$ pada satu daun kincir yang sama atau berada pada daun kincir yang berbeda, maka jarak antara titik ke titik yang lain adalah $d(u,v) = 0$ karena setiap titik tidak ada yang saling berhubungan (tidak mempunyai nilai). Jika untuk kasus u *dan* v pada satu daun kincir yang sama dan graf yang digunakan pada daun kincir adalah graf komplit maka jarak dari setiap titik ke titik lainnya adalah $d(u,v) = 1$, karena setiap titik dihubungkan oleh satu sisi. Walaupun pada daun kincir tersebut di tambah satu titik lagi maka jarak yang akan dihasilkan sama dan nilainya tetap tidak akan berubah yaitu $d(u,v) = 1$.

Sedangkan titik yang terletak pada daun kincir yang berbeda akan terpisah oleh titik pusatnya sehingga jaraknya adalah $d(u,v) = 2$, walaupun di tambah satu titik maka nilainya juga tetap akan sama, dan titik pusat dengan titik yang ada pada daun kincir mempunyai jarak $d(u,v) = 1$. Kasus ini berlaku untuk graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$

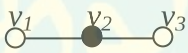
Teorema 4

Basis metrik dari graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$ diperoleh dengan tidak memasukkan z atau *vertex* pusat kincir dalam subhimpunan W. (Arif Johanes Purwono, 2010).

Bukti :

Menurut Teorema 3, diperoleh bahwa jarak *vertex* daun kincir terhadap pusat (K_1) adalah 1, $d(K_1, v) = 1$ sehingga jika tidak ada vertex dari K_1 yang masuk ke dalam subhimpunan W, maka representasi jaraknya akan sama untuk masing-masing *vertex* pada K_1 terhadap subhimpunan yang diambil dan tidak memberikan representasi yang berbeda. Sehingga harusnya hanya ada satu *vertex* dari K_1 yang tidak masuk dalam subhimpunan K_1.

Contoh 1

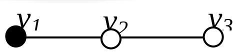


Gambar 2.13 Graf dengan tiga titik

Misal diambil W ={v_2}, maka representasinya adalah :

r(v_1|W) = (1) r(v_2|W) = (0) r(v_3|W) = (1),

karena masih terdapat nilai representasi yang sama yaitu r(v_1|W) = (1) = r(v_3|W), maka W = {v_2} bukan merupakan himpunan pemisah



Gambar 2.14 Graf dengan tiga titik

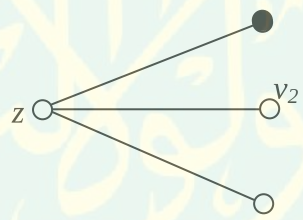
Misal diambil W = {v_1}, maka representasinya adalah :

r(v_1|W) = (0) r(v_2|W) = (1) r(v_3|W) = (2), karena W = {v_1} mempunyai nilai representasi yang berbeda maka W = {v_1} merupakan salah satu himpunan pemisah. Begitu juga apabila diambil W = {v_3}, representasinya adalah sebagaimana berikut :

r(v_1|W) = (2) r(v_2|W) = (1) r(v_3|W) = (0),

karena W = {v_1} dan W = {v_3} merupakan himpunan pemisah dari graf di atas. W = {v_1} dan W = {v_3} disebut sebagai himpunan pemisah yang mempunyai jumlah anggota minimum (basis metrik) sehingga dim(G) = 1. Untuk selanjutnya apabila ada dua basis metrik maka akan diambil satu basis metrik untuk mempercepat penghitungan dimensi metriknya.

Contoh 2



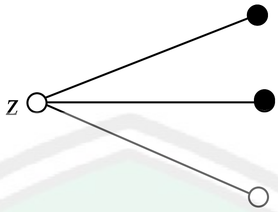
Gambar 2.15 Graf dengan empat titik

Ambil W = {v_1}, maka representasi jaraknya adalah :

r(z|W) = (1) r(v_1|W) = (0)

r(v_2|W) = (2) r(v_3|W) = (2),

karena masih terdapat nilai representasi yang sama yaitu r(v_2|W) = (2) = r(v_3|W) maka W = {v_1} bukan merupakan himpunan pemisah. Oleh sebab itu dicoba untuk mengambil dua titik.



Gambar 2.16 Graf dengan empat titik

Ambil W = {v_1,v_2}, maka representasi jarak untuk himpunan W yang memiliki lebih dari satu anggota dihitung mulai dari representasi jarak dari anggota pertama diikuti representasi anggota kedua dan seterusnya seperti itu. Keterangan lebih jelas, dapat diamati pada representasi berikut,

Representasi jarak W = {v_1,v_2} adalah :

r(z|W) = (1,1) r(v_1|W) = (0,2)

r(v_2|W) = (2,0) r(v_3|W) = (2,2).

Karena W = {v_1,v_2}mempunyai nilai representasi jarak yang berbeda dan mempunyai jumlah anggota minimum yaitu 2, maka W = {v_1,v_2} adalah basis metrik dan dim(G) = 2.

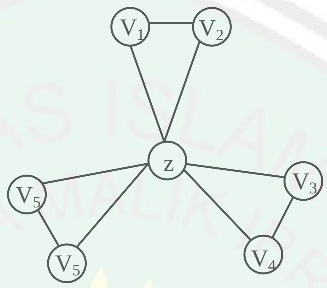
2.2 Pandangan Islam Dalam Kajian Dimensi Graf Kincir

Dalam skripsi ini kajian dimensi graf kincir $K_1 + mK_s, m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$ diilhami oleh salah satu ayat dalam Al-Qur'an yaitu surat Al-Hujurat ayat 13 :

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَـٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَـٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓا۟ ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

Artinya : *"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang* *paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal".*

Ayat di atas ambil contoh pada graf dalam hubungan antara manusia dengan sang Pencipta, perhatikan gambar di bawah ini :



Gambar 2.17 Graf kincir $K_1 + 3K_2$

Titik-titik dalam suatu graf, dapat diasumsikan menurut keperluan dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Jika dua titik pada suatu graf diasumsikan sebagai suatu benda dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka hal ini memiliki artian bahwa dua benda tersebut mempunyai suatu hubungan tertentu. Jika dua titik dalam suatu graf diasumsikan sebagai suatu kejadian dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka dapat diambil suatu pengertian bahwa ada dua kejadian yang mempunyai hubungan. Dalam teori Islam elemen-elemen yang dimaksud meliputi Pencipta (Allah) dan hamba-hambanya, sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah bagaimana hubungan antara Allah dengan hamba-hambanya dan juga hubungan sesama hamba yang terjalin. Sehungga dengan demikian, hal ini menunjukkan adanya suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lainnya.

Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, misalkan untuk titik a, b anggap kelompok-A, untuk titik c, d anggap kelompok-B, dan titik e, f anggap kelompok-C, sedangkan z atau K_1 (titik pusat) yaitu Sang Pencipta. Setiap kelompok-A, B, dan C masing-masing mempunyai anggota sebut saja m dalam sebuah graf kincir dan m mempunyai sup anggota lagi dimisalkan s dimana untuk setiap m dan s ada yang pro dan ada yang kontra tentang pandangan hukum yang ada didalam Islam. Biar pembahasan ini tidak melebar terlalu jauh maka difokuskan untuk membahas mengenai hubungan manusia dengan Allah SWT. Di dunia ini diharuskan untuk beriman dan bertakwa, namun setiap kelompok hamba Allah memiliki cara pandang yang berbeda-beda atas sebagian hukum Islam menurut imam yang dipercayainya, imam-imam inilah yang menggantikan kedudukan Nabi SAW setelah beliau wafat. Misalkan dalam mendo'akan orang yang sudah meninggal ada salah satu ajaran yang menganjurkan membaca surat Yaasin karena mengikuti sebagian ulama yang menjalankannya, namun sebagian ajaran lain tidak menganjurkan membaca surat Yaasin dengan dasar firman Allah SWT yang berbunyi : *"Walaa Taziru Waazirotun Wizro Ukhro"* yang intinya bahwa setiap amal yang kita kerjakan tidak akan berpengaruh kepada orang lain. Mereka juga berpegang pada dasar hukum yang berbunyi : *"Lanaa A'maluna walakum A'malukum"* maksudnya setiap amal yang kita kerjakan hanya akan berpengaruh kepada umat manusia. Juga mengenai masalah tentang waktu menjalankan sholat subuh ada salah satu ajaran yang tidak membaca do'a qunut tetapi ada juga kelompok ajaran lain yang dianjurkan membacanya.

Walaupun cara pandang setiap kelompok pada sebagian hukum berbeda-beda, tetapi pada dasarnya ajaran-ajaran yang di pahami oleh setiap kelompok adalah sama, yaitu untuk beriman dan bertakwa kepada sang Kholiq.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dijelaskan mengenai analisis permasalahan beserta pembahasannya dalam dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$ Untuk mendapatkan dimensi metrik tersebut maka dilakukan dengan menentukan kardinalitas minimum dari himpunan *resolving*.

3.1 Dimensi Metrik Graf Kincir $K_1 + mK_1$

Untuk mencari dimensi metrik dari graf kincir $K_1 + mK_1$, dimulai dengan memasukkan nilai $m = 2,3,4$

1. Untuk $m = 2$

   Graf kincir $K_1 + 2K_1$ dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 3.1 Graf kincir $K_1 + 2K_1$

Ambil $w = \{v_1\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 | w) = (0)$

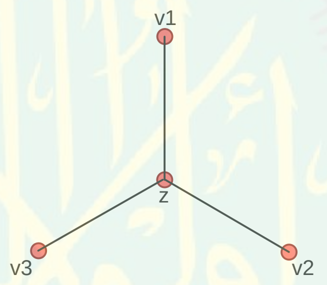
$r(v_2 | w) = (2)$

$r(z | w) = (1)$

Karena tidak ada satupun representasi jarak yang sama untuk $w=\{v_1\}$, maka $w=\{v_1\}$ merupakan himpunan pemisah dan basis metrik. Selain itu, banyaknya anggota basis ini merupakan yang paling minimum sehingga banyaknya anggota $w=\{v_1\}$ dapat dinyatakan sebagai dimensi metrik dari graf kincir K_1+2K_1 dim(G) = 1.

2. Untuk $m=3$

Graf kincir K_1+3K_1 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 Graf kincir K_1+3K_1

Ambil $w=\{v_1\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 \mid w)=(0)$ $\quad\quad$ $r(v_3 \mid w)=(2)$

$r(v_2 \mid w)=(2)$ $\quad\quad$ $r(z \mid w)=(1)$

Karena $r(v_2 \mid w), r(v_3 \mid w)=(2)$, maka $w=\{v_1\}$ bukan himpunan pemisah dan juga bukan merupakan basis metrik. Sehingga banyaknya anggota $w=\{v_1\}$ tidak dapat dikatakan sebagai dimensi metrik.

Ambil $w=\{v_1,v_2\}$, representasi jaraknya adalah:

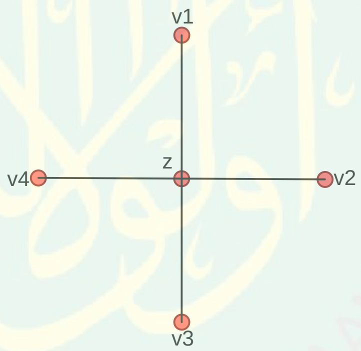
$r(v_1|w)=(0,2)$ $\quad$ $r(v_3|w)=(2,2)$

$r(v_2|w)=(2,0)$ $\quad$ $r(z|w)=(1,1)$

Karena $r(v_1|w)\neq r(v_2|w)\neq r(v_3|w)\neq r(z|w)$ maka $w=\{v_1,v_2\}$ merupakan himpunan pemisah, dan karena banyaknya anggota minimum maka $w=\{v_1,v_2\}$ juga merupakan basis metrik, sehingga dim(G) = 2.

3. Untuk $m=4$

Graf kincir K_1+4K_1 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Graf kincir K_1+4K_1

Ambil $w=\{v_1\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1|w)=(0)$ $\quad$ $r(v_3|w)=(2)$

$r(v_2|w)=(2)$ $\quad$ $r(v_4|w)=(2)$

$r(z|w)=(1)$

Karena masih ada jarak yang sama jika diambil $w=\{v_1\}$, maka $w=\{v_1\}$ bukanlah himpunan pemisah, sehingga tidak bisa menentukan dimensi metriknya.

Ambil $w=\{v_1,v_2\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 \mid w)=(0,2)$ $\quad$ $r(v_3 \mid w)=(2,2)$

$r(v_2 \mid w)=(2,0)$ $\quad$ $r(v_4 \mid w)=(2,2)$

$r(z \mid w)=(1,1)$

Karena $r(v_3 \mid w), r(v_4 \mid w)=(2,2)$ maka $w=\{v_1,v_2\}$ bukan merupakan himpunan pemisah, bukan pula sebuah basis metrik. Sehingga meski banyaknya anggota minimum, banyaknya anggota himpunan w bukan merupakan dimensi metrik.

Ambil $w=\{v_1,v_2,v_3\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 \mid w)=(0,2,2)$ $\quad$ $r(v_3 \mid w)=(2,2,0)$

$r(v_2 \mid w)=(2,0,2)$ $\quad$ $r(v_4 \mid w)=(2,2,2)$

$r(z \mid w)=(1,1,1)$

Karena keseluruhan representasi jaraknya berbeda, maka $w=\{v_1,v_2,v_3\}$ adalah himpunan pemisah, dan karena banyak anggotanya minimum, maka bisa disimpulkan bahwa dim(G) = 3.

4. Untuk $m = k$

Dari analisis di atas dapat diambil kesimpulan sementara untuk dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_1$ sebagai berikut :

No	Graf Kincir	Dimensi
1	Untuk m = 2	1
2	Untuk m = 3	2
3	Untuk m = 4	3
	⋮	⋮
	Untuk m = k	k - 1

Tabel 3.1 Dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_1$

Jadi, dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_1$ adalah k – 1.

Lemma 3.1

Untuk graf $K_1 + mK_1$, maka berlaku:

Dim($K_1 + mK_1$) = k – 1 , untuk m ≥ 2

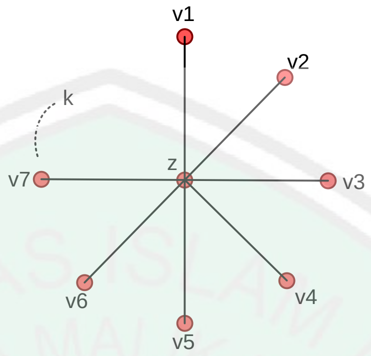
Bukti:

Untuk m ≥ 2 akan dibuktikan bahwa $\dim(K_1 + mK_1) = k - 1$

Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_1 + mK_1$ dengan m ≥ 2, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_1 + mK_1$ tersebut.

i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_1 + mK_1)$, maka ambil $w = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{k-2}\}$.

Graf $K_1 + mK_1$ dengan pengambilan w dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.4 Graf kincir $m = k$

Sehingga w mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_1 + mK_1$. Dengan demikian w merupakan himpunan pemisah dari graf $K_1 + mK_1$ yang kardinalitasnya $|w| = k - 1$, yang diperoleh dari sebanyak k – 2 titik pada daun kincir. w ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika w bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada w yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_1 + mK_1) \le k - 1$

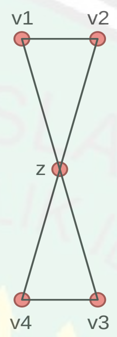
ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|w| = k - 2$. Maka pasti w ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_1 + mK_1$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $w = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_{k-3}\}$, maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_1 + mK_1$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap w, yaitu v_{k-2} *dan* v_{k-1}. Sehingga w pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Titik yang tidak dimasukkan sebagai anggota himpunan w pada pemisalan tersebut adalah v_{k-2}, v_{k-1} . Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan w, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan daun kincir yang tidak termasuk dalam anggota himpunan w. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada v_{k-2} *dan* v_{k-1}. Sehingga salah satu dari v_{k-2} *dan* v_{k-1} harus menjadi anggota himpunan w. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan w adalah v_{k-2}, dengan asumsi bahwa k – 1 adalah daun kincir terakhir dari $K_1 + mK_1$. Jadi batas bawahnya $k-1 \leq |w|$ atau dapat di tuliskan $k-1 \leq (K_1 + mK_1)$ karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_1 + mK_1)$ adalah $k-1 \leq (K_1 + mK_1) \leq k-1$ maka $\dim(K_1 + mK_1) = k-1$. Jadi, terbukti bahwa $\dim(K_1 + mK_1) = k-1$ untuk m ≥ 2.

3.2 Dimensi Metrik Graf Kincir $K_1 + mK_2$

Untuk mencari dimensi metrik dari graf kincir $K_1 + mK_2$, dimulai dengan memasukkan nilai $m = 2, 3, 4$

1. Untuk $m = 2$

Graf kincir $K_1 + 2K_2$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.5 Graf kincir $K_1 + 2K_2$

Ambil $w = \{v_1\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 | w) = (0)$ $\quad$ $r(v_3 | w) = (2)$

$r(v_2 | w) = (1)$ $\quad$ $r(v_4 | w) = (2)$

$r(z | w) = (1)$

Karena $r(v_3 | w), r(v_4 | w) = (2)$, maka $w = \{v_1\}$ bukan himpunan pemisah dan juga bukan merupakan basis metrik. Sehingga banyaknya anggota $w = \{v_1\}$ tidak dapat dikatakan sebagai dimensi metrik.

Ambil $w = \{v_1, v_3\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 | w) = (0, 2)$ $\quad$ $r(v_3 | w) = (2, 0)$

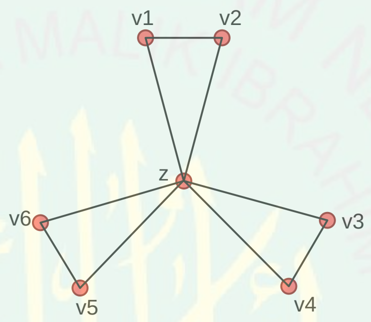
$r(v_2 | w) = (1, 2)$ $\quad$ $r(v_4 | w) = (2, 1)$

$r(z | w) = (1, 1)$

Karena keseluruhan representasi jaraknya berbeda, maka $w = \{v_1, v_3\}$ adalah himpunan pemisah, dan karena banyak anggotanya minimum, maka bisa disimpulkan bahwa dim(G) = 2.

2. Untuk $m = 3$

Graf kincir $K_1 + 3K_2$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.6 Graf kincir $K_1 + 3K_2$

Ambil $w = \{v_1, v_3, v_5\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 \mid w) = (0,2,2)$ $\quad$ $r(v_4 \mid w) = (2,2,2)$

$r(v_2 \mid w) = (1,2,2)$ $\quad$ $r(v_5 \mid w) = (2,2,0)$

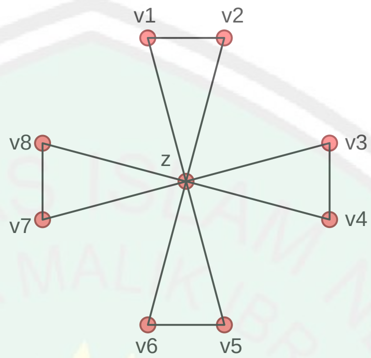
$r(v_3 \mid w) = (2,0,2)$ $\quad$ $r(v_6 \mid w) = (2,2,1)$

$r(z \mid w) = (1,1,1)$

Karena $r(v_1 \mid w) \neq r(v_2 \mid w) \neq r(v_3 \mid w)$ dan $r(v_4 \mid w) \neq r(v_5 \mid w) \neq r(v_6 \mid w) \neq r(z \mid w)$ maka $w = \{v_1, v_3, v_5\}$ merupakan himpunan pemisah, dan karena banyaknya anggota minimum maka $w = \{v_1, v_3, v_5\}$ juga merupakan basis metrik, sehingga dim(G) = 3.

3. Untuk $m = 4$

Graf kincir $K_1 + 4K_2$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.7 Graf kincir $K_1 + 4K_2$

Ambil $w = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 \mid w) = (0,2,2,2)$ $r(v_5 \mid w) = (2,2,0,2)$

$r(v_2 \mid w) = (1,2,2,2)$ $r(v_6 \mid w) = (2,2,1,2)$

$r(v_3 \mid w) = (2,0,2,2)$ $r(v_7 \mid w) = (2,2,1,0)$

$r(v_4 \mid w) = (2,2,2,2)$ $r(v_8 \mid w) = (2,2,2,1)$

$r(z \mid w) = (1,1,1,1)$

Karena keseluruhan representasi jaraknya berbeda, maka $w = \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ adalah himpunan pemisah, dan karena banyak anggotanya minimum, maka bisa disimpulkan bahwa dim(G) = 4.

4. Untuk $m = k$

Dari analisis di atas dapat diambil kesimpulan sementara untuk dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_2$ sebagai berikut :

No	Graf Kincir	Dimensi
1	Untuk m = 2	2
2	Untuk m = 3	3
3	Untuk m = 4	4
	$\vdots$	$\vdots$
	Untuk m = k	k

Tabel 3.2 Dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_2$

Jadi, dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_2$ adalah k.

Lemma 3.2

Untuk graf $K_1 + mK_2$, maka berlaku:

$$\text{Dim}(K_1 + mK_2) = k \quad , \text{untuk } m \geq 2$$

Bukti:

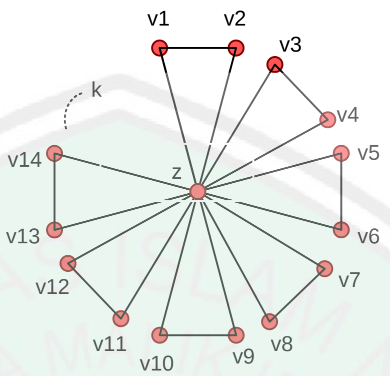
Untuk m ≥ 2 akan dibuktikan bahwa $\dim(K_1 + mK_2) = k$

Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_1 + mK_2$ dengan m ≥ 2, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_1 + mK_2$ tersebut.

i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_1 + mK_2)$, maka ambil

$w = \{v_1, v_3, v_5, v_7, ..., v_{k-1}\}$.

Graf $K_1 + mK_2$ dengan pengambilan w dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.8 Graf kincir $m = k$

Sehingga w mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_1 + mK_2$. Dengan demikian w merupakan himpunan pemisah dari graf $K_1 + mK_2$ yang kardinalitasnya $|w| = k$, yang diperoleh dari sebanyak k – 1 titik pada daun kincir. w ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika w bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada w yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_1 + mK_2) \leq k$

ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|w| = k - 1$. Maka pasti w ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_1 + mK_2$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $w = \{v_1, v_3, v_5, v_7, ..., v_{k\text{-}2}\}$, maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_1 + mK_2$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap w, yaitu v_{k-1} *dan* v_k. Sehingga w pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Titik yang tidak dimasukkan sebagai anggota himpunan w pada pemisalan tersebut adalah

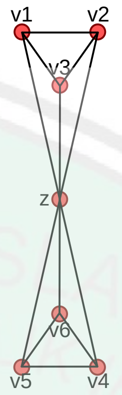
v_{k-1}, v_k . Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan w, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan daun kincir yang tidak termasuk dalam anggota himpunan w. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada v_{k-1} *dan* v_k. Sehingga salah satu dari v_{k-1} *dan* v_k harus menjadi anggota himpunan w. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan w adalah v_{k-1}, dengan asumsi bahwa k adalah daun kincir terakhir dari $K_1 + mK_2$. Jadi batas bawahnya $k \leq |w|$ atau dapat di tuliskan $k \leq (K_1 + mK_2)$ karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_1 + mK_2)$ adalah $k \leq (K_1 + mK_2) \leq k$ maka $\dim(K_1 + mK_2) = k$. Jadi, terbukti bahwa $\dim(K_1 + mK_2) = k$ untuk m $\geq$ 2.

3.3 Dimensi Metrik Graf Kincir $K_1 + mK_3$

Untuk mencari dimensi metrik dari graf kincir $K_1 + mK_3$, dimulai dengan memasukkan nilai $m = 2, 3, 4$

1. Untuk $m = 2$

Graf kincir $K_1 + 2K_3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.9 Graf kincir $K_1 + 2K_3$

Ambil $w = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 | w) = (0,1,2,2)$ $r(v_4 | w) = (2,2,0,1)$

$r(v_2 | w) = (1,0,2,2)$ $r(v_5 | w) = (2,2,1,0)$

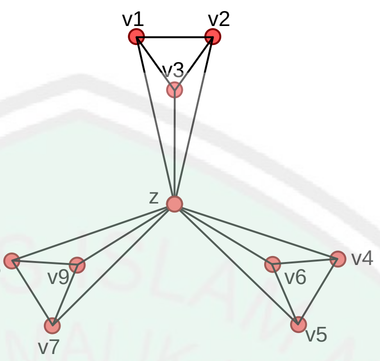
$r(v_3 | w) = (1,1,2,2)$ $r(v_6 | w) = (2,2,1,1)$

$r(z | w) = (1,1,1,1)$

Karena keseluruhan representasi jaraknya berbeda, maka $w = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ adalah himpunan pemisah, dan karena banyak anggotanya minimum, maka bisa disimpulkan bahwa dim(G) = 4.

2. Untuk $m = 3$

Graf kincir $K_1 + 3K_3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.10 Graf kincir $K_1 + 3K_3$

Ambil $w = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 \mid w) = (0,1,2,2,2,2)$ $\quad$ $r(v_6 \mid w) = (2,2,1,1,2,2)$

$r(v_2 \mid w) = (1,0,2,2,2,2)$ $\quad$ $r(v_7 \mid w) = (2,2,2,2,0,1)$

$r(v_3 \mid w) = (1,1,2,2,2,2)$ $\quad$ $r(v_8 \mid w) = (2,2,2,2,1,0)$

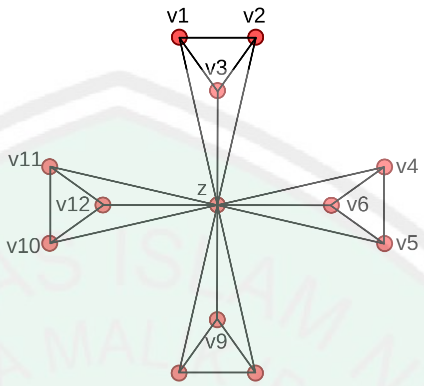
$r(v_4 \mid w) = (2,2,0,1,2,2)$ $\quad$ $r(v_9 \mid w) = (2,2,2,2,1,1)$

$r(v_5 \mid w) = (2,2,1,0,2,2)$ $\quad$ $r(z \mid w) = (1,1,1,1,1,1)$

Karena $r(v_1 \mid w) \neq r(v_2 \mid w) \neq r(v_3 \mid w) \neq r(v_4 \mid w) \neq r(v_5 \mid w)$ dan $r(v_6 \mid w) \neq r(v_7 \mid w) \neq r(v_8 \mid w) \neq r(v_9 \mid w) \neq r(z \mid w)$ maka $w = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8\}$ merupakan himpunan pemisah, dan karena banyaknya anggota minimum maka $w = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8\}$ juga merupakan basis metrik, sehingga dim(G) = 6.

3. Untuk $m = 4$

Graf kincir $K_1 + 4K_3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.11 Graf kincir $K_1 + 4K_3$

Ambil $w = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 | w) = (0,1,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_2 | w) = (1,0,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_3 | w) = (1,1,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_4 | w) = (2,2,0,1,2,2,2,2)$

$r(v_5 | w) = (2,2,1,0,2,2,2,2)$

$r(v_6 | w) = (2,2,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_7 | w) = (2,2,2,2,0,1,2,2)$

$r(v_8 | w) = (2,2,2,2,1,0,2,2)$

$r(v_9 | w) = (2,2,2,2,1,1,2,2)$

$r(v_{10} | w) = (2,2,2,2,2,2,0,1)$

$r(v_{11} | w) = (2,2,2,2,2,2,1,0)$

$r(v_{12} | w) = (2,2,2,2,2,2,1,1)$

$r(z | w) = (1,1,1,1,1,1,1,1)$

Karena keseluruhan representasi jaraknya berbeda, maka $w = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}\}$ adalah himpunan pemisah, dan karena banyak anggotanya minimum, maka bisa disimpulkan bahwa dim(G) = 8.

4. Untuk $m = k$

Dari analisis di atas dapat diambil kesimpulan sementara untuk dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_3$ sebagai berikut :

No	Graf Kincir	Dimensi
1	Untuk m = 2	4
2	Untuk m = 3	6
3	Untuk m = 4	8
	$\vdots$	$\vdots$
	Untuk m = k	2k

Tabel 3.3 Dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_3$

Jadi, dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_3$ adalah 2k.

Lemma 3.3

Untuk graf $K_1 + mK_3$, maka berlaku:

Dim($K_1 + mK_3$) = 2k , untuk m $\geq$ 2

Bukti:

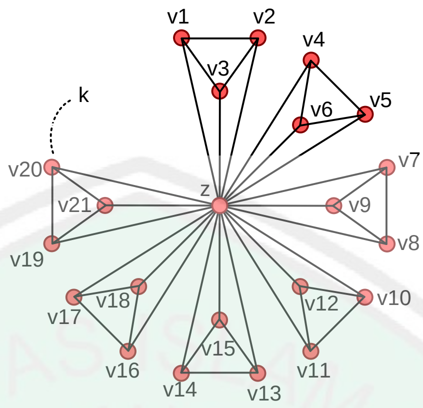
Untuk m $\geq$ 2 akan dibuktikan bahwa $\dim(K_1 + mK_3) = 2k$

Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_1 + mK_2$ dengan m $\geq$ 2, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_1 + mK_3$ tersebut.

i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_1 + mK_3)$, maka ambil

$w = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, ..., v_{2k-1}\}$.

Graf $K_1 + mK_3$ dengan pengambilan *w* dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.12 Graf kincir $m = k$

Sehingga w mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_1 + mK_3$. Dengan demikian w merupakan himpunan pemisah dari graf $K_1 + mK_3$ yang kardinalitasnya $|w| = 2k$, yang diperoleh dari sebanyak 2k – 1 titik pada daun kincir. w ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika w bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada 瀛 yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_1 + mK_3) \le 2k$

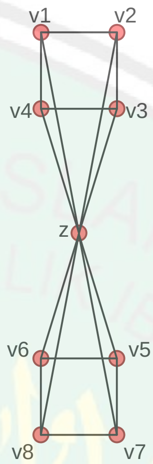
ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|w| = 2k - 1$. Maka pasti w ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_1 + mK_3$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $w = \{v_1, v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_{10}, v_{11}, ..., v_{2k-2}\}$, maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_1 + mK_3$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap w, yaitu v_{2k-1} *dan* v_{2k}. Sehingga w pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Titik yang tidak dimasukkan sebagai anggota himpunan w pada pemisalan tersebut adalah v_{2k-1}, v_{2k} . Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan w, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan daun kincir yang tidak termasuk dalam anggota himpunan w. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada v_{2k-1} *dan* v_{2k}. Sehingga salah satu dari v_{2k-1} *dan* v_{2k} harus menjadi anggota himpunan w. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan w adalah v_{2k-1}, dengan asumsi bahwa 2k adalah daun kincir terakhir dari K_1+mK_3. Jadi batas bawahnya $2k \le |w|$ atau dapat di tuliskan $2k \le (K_1+mK_3)$ karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_1+mK_3)$ adalah $2k \le (K_1+mK_3) \le 2k$ maka $\dim(K_1+mK_3)=2k$. Jadi, terbukti bahwa $\dim(K_1+mK_3)=2k$ untuk m $\ge$ 2.

3.4 Dimensi Metrik Graf Kincir K_1+mK_4

Untuk mencari dimensi metrik dari graf kincir K_1+mK_4, dimulai dengan memasukkan nilai $m=2,3,4$

1. Untuk $m = 2$

Graf kincir $K_1 + 2K_4$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.13 Graf kincir $K_1 + 2K_4$

Ambil $w = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 \mid w) = (0,1,1,2,2,2)$ $\qquad$ $r(v_5 \mid w) = (2,2,2,0,1,1)$

$r(v_2 \mid w) = (1,0,1,2,2,2)$ $\qquad$ $r(v_6 \mid w) = (2,2,2,1,0,1)$

$r(v_3 \mid w) = (1,1,0,2,2,2)$ $\qquad$ $r(v_7 \mid w) = (2,2,2,1,1,0)$

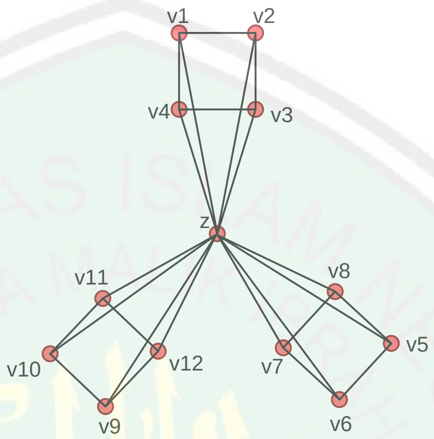
$r(v_4 \mid w) = (1,1,1,2,2,2)$ $\qquad$ $r(v_8 \mid w) = (2,2,2,1,1,1)$

$r(z \mid w) = (1,1,1,1,1,1)$

Karena keseluruhan representasi jaraknya berbeda, maka $w = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7\}$ adalah himpunan pemisah, dan karena banyak anggotanya minimum, maka bisa disimpulkan bahwa dim(G) = 6.

2. Untuk $m=3$

Graf kincir K_1+3K_4 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.14 Graf kincir K_1+3K_4

Ambil $w=\{v_1,v_2,v_3,v_5,v_6,v_7,v_9,v_{10},v_{11}\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1\,|\,w)=(0,1,1,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_2\,|\,w)=(1,0,1,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_3\,|\,w)=(1,1,0,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_4\,|\,w)=(1,1,1,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_5\,|\,w)=(2,2,2,0,1,1,2,2,2)$

$r(v_6\,|\,w)=(2,2,2,1,0,1,2,2,2)$

$r(v_7\,|\,w)=(2,2,2,1,1,0,2,2,2)$

$r(v_8\,|\,w)=(2,2,2,1,1,1,2,2,2)$

$r(v_9\,|\,w)=(2,2,2,2,2,2,0,1,1)$

$r(v_{10}\,|\,w)=(2,2,2,2,2,2,1,0,1)$

$r(v_{11}\,|\,w)=(2,2,2,2,2,2,1,1,0)$

$r(v_{12}\,|\,w)=(2,2,2,2,2,2,1,1,1)$

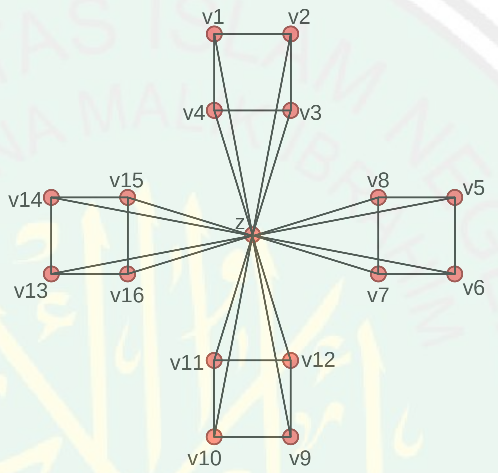
$r(z\,|\,w)=(1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

Karena $r(v_1\,|\,w)\neq r(v_2\,|\,w)\neq r(v_3\,|\,w)\neq r(v_4\,|\,w)\neq r(v_5\,|\,w)\neq r(v_6\,|\,w)$, $r(v_7\,|\,w)\neq r(v_8\,|\,w)\neq r(v_9\,|\,w)\neq r(v_{10}\,|\,w)\neq r(v_{11}\,|\,w)\neq r(v_{12}\,|\,w)\neq r(z\,|\,w)$

maka $w=\{v_1,v_2,v_3,v_5,v_6,v_7,v_9,v_{10},v_{11}\}$ merupakan himpunan pemisah, dan karena banyaknya anggota minimum maka $w=\{v_1,v_2,v_3,v_5,v_6,v_7,v_9,v_{10},v_{11}\}$ juga merupakan basis metrik, sehingga dim(G) = 9.

3. Untuk $m=4$

Graf kincir K_1+4K_4 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.15 Graf kincir K_1+4K_4

Kita ambil $w=\{v_1,v_2,v_3,v_5,v_6,v_7,v_9,v_{10},v_{11},v_{13},v_{14},v_{15}\}$, representasi jaraknya adalah:

$$r(v_1\,|\,w)=(0,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$$

$$r(v_2\,|\,w)=(1,0,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$$

$$r(v_3\,|\,w)=(1,1,0,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$$

$$r(v_4\,|\,w)=(1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$$

$$r(v_5\,|\,w)=(2,2,2,0,1,1,2,2,2,2,2,2)$$

$$r(v_6\,|\,w)=(2,2,2,1,0,1,2,2,2,2,2,2)$$

$$r(v_7\,|\,w)=(2,2,2,1,1,0,2,2,2,2,2,2)$$

$r(v_8 \mid w) = (2,2,2,1,1,1,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_9 \mid w) = (2,2,2,2,2,2,0,1,1,2,2,2)$

$r(v_{10} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,1,0,1,2,2,2)$

$r(v_{11} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,1,1,0,2,2,2)$

$r(v_{12} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,1,1,1,2,2,2)$

$r(v_{13} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,0,1,1)$

$r(v_{14} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,1)$

$r(v_{15} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,0)$

$r(v_{16} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1)$

$r(z \mid w) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

Karena keseluruhan representasi jaraknya berbeda, maka $w = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_{14}, v_{15}\}$ adalah himpunan pemisah, dan karena banyak anggotanya minimum, maka bisa disimpulkan bahwa dim(G) = 12.

4. Untuk $m = k$

Dari analisis di atas dapat diambil kesimpulan sementara untuk dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_4$ sebagai berikut :

No	Graf Kincir	Dimensi
1	Untuk m = 2	6
2	Untuk m = 3	9
3	Untuk m = 4	12
	$\vdots$	$\vdots$
	Untuk m = k	3k

Tabel 3.4 Dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_4$

Jadi, dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_4$ adalah 3k.

Lemma 3.4

Untuk graf $K_1 + mK_4$, maka berlaku:

Dim($K_1 + mK_4$) = 3k , untuk m ≥ 2

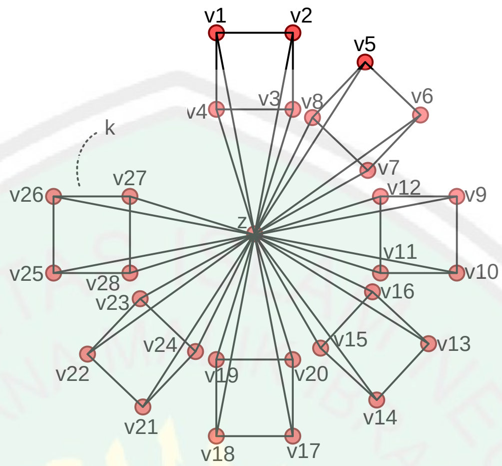
Bukti:

Untuk m ≥ 2 akan dibuktikan bahwa $\dim(K_1 + mK_4) = 3k$

Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_1 + mK_4$ dengan m ≥ 2, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_1 + mK_4$ tersebut.

i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_1 + mK_4)$, maka ambil $w = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, ..., v_{3k-1}\}$.

Graf $K_1 + mK_4$ dengan pengambilan w dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.16 Graf kincir $m = k$

Sehingga w mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_1 + mK_4$. Dengan demikian w merupakan himpunan pemisah dari graf $K_1 + mK_4$ yang kardinalitasnya $|w| = 3k$, yang diperoleh dari sebanyak 3k – 1 titik pada daun kincir. w ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika w bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada w yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_1 + mK_4) \leq 3k$

ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|w| = 3k - 1$. Maka pasti w ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_1 + mK_4$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $w = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, \ldots, v_{3k-2}\}$, maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_1 + mK_4$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap w, yaitu

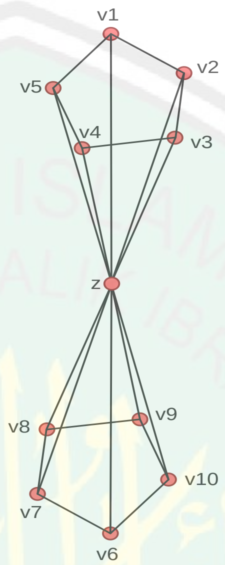
v_{3k-1} *dan* v_{3k}. Sehingga w pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Titik yang tidak dimasukkan sebagai anggota himpunan w pada pemisalan tersebut adalah v_{3k-1}, v_{3k} . Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan w, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan daun kincir yang tidak termasuk dalam anggota himpunan w. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada v_{3k-1} *dan* v_{3k}. Sehingga salah satu dari v_{3k-1} *dan* v_{3k} harus menjadi anggota himpunan w. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan w adalah v_{3k-1}, dengan asumsi bahwa 3k adalah daun kincir terakhir dari $K_1 + mK_4$. Jadi batas bawahnya $3k \leq |w|$ atau dapat di tuliskan $3k \leq (K_1 + mK_4)$ karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_1 + mK_4)$ adalah $3k \leq (K_1 + mK_4) \leq 3k$ maka $\dim(K_1 + mK_4) = 3k$. Jadi, terbukti bahwa $\dim(K_1 + mK_4) = 3k$ untuk $m \geq 2$.

3.5 Dimensi Metrik Graf Kincir $K_1 + mK_5$

Untuk mencari dimensi metrik dari graf kincir $K_1 + mK_5$, dimulai dengan memasukkan nilai $m = 2, 3, 4$

1. Untuk $m = 2$

Graf kincir $K_1 + 2K_5$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.17 Graf kincir $K_1 + 2K_5$

Ambil $w = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 \mid w) = (0,1,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_2 \mid w) = (1,0,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_3 \mid w) = (1,1,0,1,2,2,2,2)$

$r(v_4 \mid w) = (1,1,1,0,2,2,2,2)$

$r(v_5 \mid w) = (1,1,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_6 \mid w) = (2,2,2,2,0,1,1,1)$

$r(v_7 \mid w) = (2,2,2,2,1,0,1,1)$

$r(v_8 \mid w) = (2,2,2,2,1,1,0,1)$

$r(v_9 \mid w) = (2,2,2,2,1,1,1,0)$

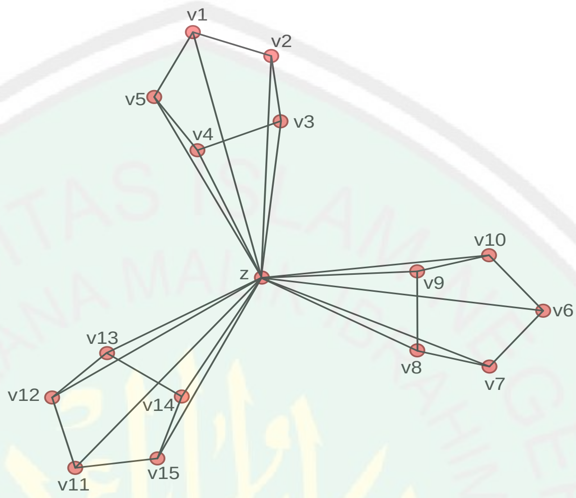
$r(v_{10} \mid w) = (2,2,2,2,1,1,1,1)$

$r(z \mid w) = (1,1,1,1,1,1,1,1)$

Karena keseluruhan representasi jaraknya berbeda, maka $w = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ adalah himpunan pemisah, dan karena banyak anggotanya minimum, maka bisa disimpulkan bahwa dim(G) = 8.

2. Untuk $m=3$

Graf kincir K_1+3K_5 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.18 Graf kincir K_1+3K_5

Ambil $w=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{11},v_{12},v_{13},v_{14}\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1|w)=(0,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_2|w)=(1,0,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_3|w)=(1,1,0,1,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_4|w)=(1,1,1,0,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_5|w)=(1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_6|w)=(2,2,2,2,0,1,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_7|w)=(2,2,2,2,1,0,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_8|w)=(2,2,2,2,1,1,0,1,2,2,2,2)$

$r(v_9|w)=(2,2,2,2,1,1,1,0,2,2,2,2)$

$r(v_{10} | w) = (2,2,2,2,1,1,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_{11} | w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,0,1,1,1)$

$r(v_{12} | w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,1,1)$

$r(v_{13} | w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,0,1)$

$r(v_{14} | w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,0)$

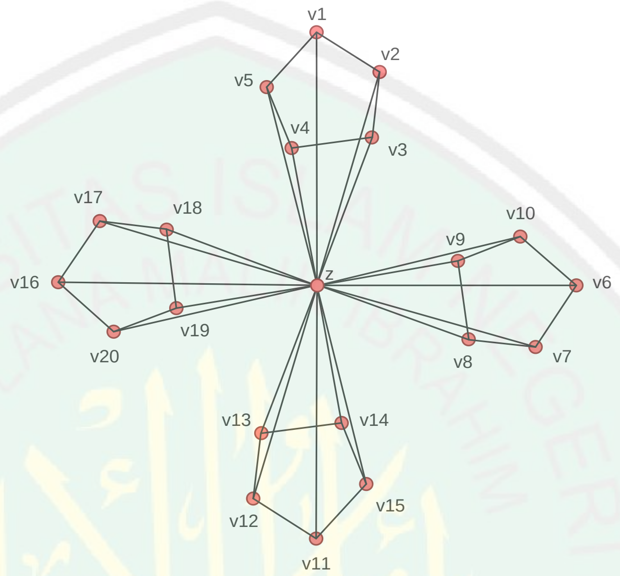
$r(v_{15} | w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1)$

$r(z | w) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

Karena $r(v_1 | w) \neq r(v_2 | w) \neq r(v_3 | w) \neq r(v_4 | w) \neq r(v_5 | w) \neq r(v_6 | w)$, $r(v_7 | w) \neq r(v_8 | w) \neq r(v_9 | w) \neq r(v_{10} | w) \neq r(v_{11} | w) \neq r(v_{12} | w) \neq r(v_{13} | w)$, dan $r(v_{14} | w) \neq r(v_{15} | w) \neq r(z | w)$ maka $w = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$ merupakan himpunan pemisah, dan karena banyaknya anggota minimum maka $w = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$ juga merupakan basis metrik, sehingga dim(G) = 12.

3. Untuk $m = 4$

Graf kincir $K_1 + 4K_5$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.19 Graf kincir $K_1 + 4K_5$

Ambil $w = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$, representasi jaraknya adalah:

$r(v_1 \mid w) = (0,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_2 \mid w) = (1,0,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_3 \mid w) = (1,1,0,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_4 \mid w) = (1,1,1,0,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_5 \mid w) = (1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_6 \mid w) = (2,2,2,2,0,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_7 \mid w) = (2,2,2,2,1,0,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_8 \mid w) = (2,2,2,2,1,1,0,1,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_9 \mid w) = (2,2,2,2,1,1,1,0,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_{10} \mid w) = (2,2,2,2,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2)$

$r(v_{11} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,0,1,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_{12} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_{13} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,0,1,2,2,2,2)$

$r(v_{14} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,0,2,2,2,2)$

$r(v_{15} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1,2,2,2,2)$

$r(v_{16} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,0,1,1,1)$

$r(v_{17} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,0,1,1)$

$r(v_{18} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,0,1)$

$r(v_{19} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,0)$

$r(v_{20} \mid w) = (2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,1,1,1,1)$

$r(z \mid w) = (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$

Karena keseluruhan representasi jaraknya berbeda, maka $w = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}\}$ adalah himpunan pemisah, dan karena banyak anggotanya minimum, maka bisa disimpulkan bahwa dim(G) = 16.

4. Untuk $m = k$

Dari analisis di atas dapat diambil kesimpulan sementara untuk dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_5$ sebagai berikut :

No	Graf Kincir	Dimensi
1	Untuk m = 2	8
2	Untuk m = 3	12
3	Untuk m = 4	16
	$\vdots$	$\vdots$
	Untuk m = k	4k

Tabel 3.5 Dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_5$

Jadi, dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_5$ adalah 4k.

Lemma 3.5

Untuk graf $K_1 + mK_5$, maka berlaku:

Dim($K_1 + mK_5$) = 4k , untuk m ≥ 2

Bukti:

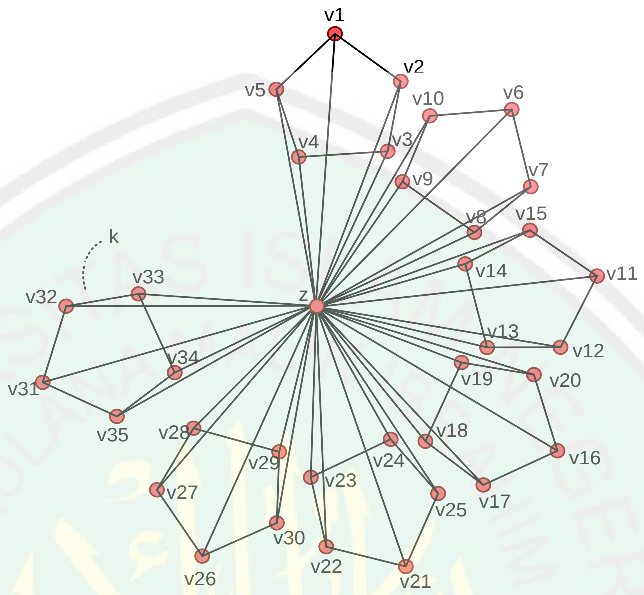
Untuk m ≥ 2 akan dibuktikan bahwa $\dim(K_1 + mK_5) = 4k$

Untuk menentukan dimensi metrik dari graf $K_1 + mK_5$ dengan m ≥ 2, maka dicari dulu batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari graf $K_1 + mK_5$ tersebut.

i. Untuk menemukan batas atas $\dim(K_1 + mK_5)$, maka ambil

$$w = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, ..., v_{5k-1}\}.$$

Graf $K_1 + mK_5$ dengan pengambilan w dapat digambarkan sebagai berikut;



Gambar 3.20 Graf kincir $m = k$

Sehingga w mempunyai representasi jarak yang berbeda terhadap setiap titik pada graf $K_1 + mK_5$. Dengan demikian w merupakan himpunan pemisah dari graf $K_1 + mK_5$ yang kardinalitasnya $|w| = 4k$, yang diperoleh dari sebanyak 4k – 1 titik pada daun kincir. w ini merupakan himpunan pemisah, tapi belum tentu merupakan sebuah basis metrik. Jika w bukan merupakan basis metrik, maka tentu saja ada w yang kardinalitasnya lebih minimum menjadi sebuah basis metrik. Jadi berlaku, batas atas $\dim(K_1 + mK_5) \le 4k$

ii. Untuk menemukan batas bawahnya ambil $|w| = 4k - 1$. Maka pasti w ini bukan himpunan pemisah, karena ada setidaknya dua titik pada graf $K_1 + mK_5$ yang memiliki representasi jarak yang sama. Misal diambil $w = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v_{19}, ..., v_{5k-2}\}$, maka akan didapatkan dua titik pada graf $K_1 + mK_5$ yang mempunyai jarak yang sama terhadap w, yaitu $v_{4k-1}\ dan\ v_{4k}$. Sehingga w pada pemisalan ini bukan merupakan himpunan pemisah. Titik yang tidak dimasukkan sebagai anggota himpunan w pada pemisalan tersebut adalah v_{4k-1}, v_{4k} . Artinya, ada dua titik pada dua bilah yang berbeda yang tidak masuk sebagai anggota himpunan w, padahal jika ingin mendapatkan representasi jarak yang berbeda hanya boleh ada satu titik dari keseluruhan daun kincir yang tidak termasuk dalam anggota himpunan w. Hal inilah yang kemudian memberikan representasi jarak yang sama pada $v_{4k-1}\ dan\ v_{4k}$. Sehingga salah satu dari $v_{4k-1}\ dan\ v_{4k}$ harus menjadi anggota himpunan w. Untuk memudahkan penulisan, yang masuk sebagai anggota himpunan w adalah v_{4k-1}, dengan asumsi bahwa 4k adalah daun kincir terakhir dari $K_1 + mK_5$. Jadi batas bawahnya $4k \le |w|$ atau dapat di tuliskan $4k \le (K_1 + mK_5)$ karena batas atas dan batas bawah dari $\dim(K_1 + mK_5)$ adalah $4k \le (K_1 + mK_5) \le 4k$ maka $\dim(K_1 + mK_5) = 4k$. Jadi, terbukti bahwa $\dim(K_1 + mK_5) = 4k$ untuk $m \ge 2$.

Beberapa kesimpulan dari pejelasan tentang dimensi metrik graf kincir di atas terangkum dalam tabel berikut:

No	Graf Kincir Dengan Pola	Dimensi
1	$K_1 + mK_1$	m - 1
2	$K_1 + mK_2$	m
3	$K_1 + mK_3$	2m
4	$K_1 + mK_4$	3m
5	$K_1 + mK_5$	4m
	$\vdots$	$\vdots$
	$K_1 + mK_s$	$m(s-1)$

Tabel 3.6 Dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$

Dari hal di atas, maka dapat dibuat suatu teorema sebagaimana berikut:

Teorema 3.1

Untuk G graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$ maka berlaku $\dim(G) = m(s-1)$

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa

$$\dim(K_1 + mK_s) = m(s-1)$$

Diambil :

$$\dim(K_r + mK_s) \geq \dim(K_r) + \dim(mK_s)$$

$$\dim(K_r + mK_s) \geq (r-1) + m(s-1)$$

$$\dim(K_1 + mK_s) \geq (1-1) + m(s-1)$$

$$\dim(K_1 + mK_s) \geq m(s-1)$$

Ambil

$$W=\{v_1,v_2,...,v_{(s-1)},v_4,v_5,...,v_{(s-1)},v_7,v_8,...,v_{(s-1)},\ .....,m_1,m_2,\ ...,m_{(s-1)}\}$$

Representasi jaraknya adalah

$$r(v_1\,|\,w)=(0,1,...,1,2,2,...,2,2,2,...,2,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

$$r(v_2\,|\,w)=(1,0,...,1,2,2,...,2,2,2,...,2,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

. . .

$$r(v_{(s-1)}\,|\,w)=(1,1,...,0,2,2,...,2,2,2,...,2,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

$$r(s\,|\,w)=(1,1,...,1,2,2,...,2,2,2,...,2,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

$$r(v_4\,|\,w)=(2,2,...,2,0,1,...,1,2,2,...,2,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

$$r(v_5\,|\,w)=(2,2,...,2,1,0,...,1,2,2,...,2,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

. . .

$$r(v_{(s-1)}\,|\,w)=(2,2,...,2,1,1,...,0,2,2,...,2,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

$$r(2s\,|\,w)=(2,2,...,2,1,1,...,1,2,2,...,2,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

$$r(v_7\,|\,w)=(2,2,...,2,2,2,...,2,0,1,...,1,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

$$r(v_8\,|\,w)=(2,2,...,2,2,2,...,2,1,0,...,1,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

. . .

$$r(v_{(s-1)}\,|\,w)=(2,2,...,2,2,2,...,2,1,1,...,0,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

$$r(3s\,|\,w)=(2,2,...,2,2,2,...,2,1,1,...,1,\ \ ...\ \ ,2,2,...,2)$$

. . . .

$$r(m_1 \mid w) = (2,2,\ldots,2,2,2,\ldots,2,2,2,\ldots,2,\ \ldots\ ,0,1,\ldots,1)$$

$$r(m_2 \mid w) = (2,2,\ldots,2,2,2,\ldots,2,2,2,\ldots,2,\ \ldots\ ,1,0,\ldots,1)$$

. . .

$$r\left(m_{(s-1)} \mid w\right) = (2,2,\ldots,2,2,2,\ldots,2,2,2,\ldots,2,\ \ldots\ ,1,1,\ldots,0)$$

$$r(ms \mid w) = (2,2,\ldots,2,2,2,\ldots,2,2,2,\ldots,2,\ \ldots\ ,1,1,\ldots,1)$$

$$r(z \mid w) = (1,1,\ldots,1,1,1,\ldots,1,1,1,\ldots,1,\ \ldots\ ,1,1,\ldots,1)$$

Karena W memiliki representasi jarak yang berbeda, maka W ini adalah himpunan pemisah. Misal X adalah basis metrik, maka berlaku :

$$|X| \le |W|$$

$$\dim(K_1 + mK_s) \le |W|$$

Karena

$$|W| = m(s-1)$$

Diperoleh

$$\dim(K_1 + mK_s) \le m(s-1)$$

dan

$$m(s-1) \le \dim(K_1 + mK_s) \le m(s-1)$$

Jadi, terbukti bahwa :

$$\dim(K_1 + mK_s) = m(s-1)$$

3.6 Tinjauan Agama

Telah ketahui bersama bahwa manusia dalam dunia pasti membutuhkan orang lain untuk melangsungkan kehidupannya sehari-hari, sehingga manusia juga disebut sebagai makhluk sosial. Dalam hal ini Allah SWT berfirman dalam surat Al-Hujurat ayat 13 yang berbunyi :

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

Artinya : *"Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal".*

Dalam menyikapi masalah lafat *"An-Nas"* Prof. Dr. Akhmad Mubarok M.A dalam bukunya yang berjudul "Psikologi Keluarga Dari Keluarga Sakinah Hingga Keluarga Bangsa" mengungkapkan Al-Qur'an bukan hanya menyebut manusia dengan sebutan *Insan* yang bermakna makhluk psikologi tetapi *An-Nas* yang bermakna makhluk sosial.

Imam Al-Qurtubi dalam kitab "Al-Jami' li Akhkamil Qur'an" dalam menafsiri *"Inna Kholaknaakum Mindzakari Waunsaa"* menerangkan bahwa manusia mempunyai hubungan yang sangat erat dengan manusia yang lainnya, karena manusia berasal dari nenek moyang yang sama yaitu Adam dan Hawa. Sedangkan Ahmad Mushthafa Al-Maraghi menyebutkan Allah menerangkan bahwa manusia seluruhnya berasal dari seorang ayah dan seorang ibu. Maka kenapakah saling mengolok-olok sesama saudara hanya saja Allah Ta'ala menjadikan mereka bersuku-suku dan kabilah-kabilah yang berbeda-beda, agar diantara mereka saling kenal dan tolong-menolong dalam kemaslahatan-kemaslahatan mereka yang bermacam-macam. Namun tetap tidak ada kelebihan dari seorang pun atas yang lain, kecuali dengan takwa dan kesalehan, di samping kesempurnaan jiwa bukan hal-hal yang bersifat keduniaan yang tiada abadi.

Dalam kitab tafsir “Anwaru Tanzil wa Asrorut Ta’wil juz 5” dalam menafsiri *“Wajaalnaakum Su’ubau Waqobaa Ila Litaarofuu”* menerangkan bahwa manusia dengan bermacam-macam perbedaan, supaya mereka bisa saling kenal-mengenal dan mengambil faedah (belajar) satu dengan yang lainnya.

Dalam ayat *“Inna Akromakum Indzallohi Atkokum”* yang lebih cenderung pada hal ubudiyah (agama) yang berhubungan dengan ketuhanan atau hubungan manusia dengan Tuhan yang bersifat individualis. Namun menurut Ahmad Mushthafa Al-Maraghi yaitu jika kamu hendak berbangga maka banggakanlah takwamu, artinya barang siapa yang ingin memperoleh derajat-derajat yang tinggi maka hendaklah ia bertakwa. Ibnu Umar ra. meriwayatkan bahwa Nabi SAW pernak berkhutbah kepada orang-orang banyak pada *Fathu Makkah*, sedang beliau di atas kendaraannya. Beliau memuji dan menyanjung Allah dengan pujian dan sanjungan yang patut diterima-Nya. Kemudian beliau bersabda, “Hai manusia sesungguhnya Allah benar-benar telah menghilangkan dari kalian keangkuhan dan kesombongan jahiliyyah dengan nenek moyang mereka. Karena manusia itu ada dua macam, yaitu orang yang baik dan bertakwa serta mulia di sisi Allah, dan orang yang berdosa, sengsara dan hina di sisi Allah Ta’ala”.

Dalam uraian di atas dapat di ambil dua poin yang penting yakni :

1. Hubungan manusia dengan manusia yaitu :
    a) Hubungan persaudaraan karena berasal dari nenek moyang yang sama (Adam dan Hawa).
    b) Hubungan sosial karena saling membutuhkan.
2. Hubungan manusia dengan Tuhan yang bersifat individualis.

Namun dalam kehidupan sehari-hari manusia tidak akan pernah luput dari yang namanya "perbedaan", hal ini tidak lepas dari fitrah manusia sebagai makhluk sosial atau makhluk yang saling membutuhkan satu sama lainnya. Karena disadari atau tidak dengan adanya suatu perbedaan bisa memenuhi kebutuhan sehari-hari. Ambil sebuah contoh misalnya, seorang petani untuk memenuhi kebutuhan sehati-harinya membutuhkan orang yang profesinya berbeda seperti penjahit, pedagang, dan seterusnya. Karena petani hanya mampu memenuhi kebutuhan pangan sedangkan kebutuhan sandang tidak akan terpenuhi tanpa adanya penjahit dan sebaliknya. Dari sini dapat ambil kesimpulan bagaimana ragam dan corak perbedaannya, tetapi mempunyai satu tujuan yaitu menciptakan suatu hubungan simbiosis mutualisme.

Dalam Islam masalah perbedaan tidak begitu saja dibiarkan, karena pada dasarnya mempunyai poros yang sama. Contoh perbedaan dalam Islam adalah adanya banyak madzhab-madzhab seperti Imam Hanafi, Imam Maliki, Imam Syafi'i, dan Imam Hambali yang di dalamya terdapat beberapa perbedaan pandangan tentang hukum-hukum Islam. Tetapi semua madzhab-madzhab itu mempunyai satu tujuan yang sama yakni ibadah kepada Allah dengan sepenuhnya dan tetap berpegang pada satu kaidah yaitu "*Jalbul Mashoolikhii wa Daaro'ul Mafaasiid* " yang artinya menarik kebaikan dan menolak kemungkaran. (terjemah Faroidul Bahiyah), dan berpegang pada hadis Nabi SAW : *"Ikhtilaafu Ummatii Rohmatu"* perbedaan di antara umatku adalah rahmat.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Langkah-langkah untuk menentukan dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$ adalah sebagai berikut :

1. Menentukan himpunan pemisahnya
2. Menentukan basis metric
3. Menyimpulkan dimensi metriknya
4. Membuat pola secara umum

Dari pembahasan tentang dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, ini didapatkan kesimpulan bahwa untuk $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$ maka berlaku: $\dim(K_1 + mK_s) = m(s-1)$.

4.2 Saran

Karena penelitian ini masih membahas tentang dimensi metrik graf kincir $K_1 + mK_s$, maka dalam penelitian selanjutnya diharapkan dari setiap representasi dimensi graf kincir ditemukan bentuk umum dari hasil operasi perkalian dengan jenis-jenis graf yang berbeda.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Qurtubi Imam. *Al-Jami' li Akhkamil Qur'an*. Surabaya: Al-Hidayah.

Arif Johanes Purwono. *Dimensi Metrik Pada Pengembangan Graph Kincir Dengan Pola* $K_1 + mK_n$.

Adib M. Bisri. 1977. *Terjemah Faroidul Bahiyah.* Semarang: CV Toha Putra Semarang.

Baidlowi Imam. *Anwaru Tanzil wa Asrorut Ta'wil juz 5*. Surabaya: Al-Hidayah.

Caseres,dkk.2007. *On the Metric Dimension of Cartesian Products of Graphs*. SIAM Journal of Discrete Mathematics.,

Chartrand, Garry dan Linda Lesniak. 1986. *Graphs and Digraphs*. California: Pacific Grove.

F. Harary and R. A. Melter. 1990. *On the metric dimension of graph*. Ars.Combin.2: 191-195.

G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, and O. R. Oellerman, 2000. *Resolv-ability in graphs and the metric dimension of graph*. Discrete Appl. Math,105, 99-113.

Golshani Mehdi. 2003. *Filsafat-Sains Menurut Al-Qur'an*. Bandung : Mizan Media Utama (MMU).

Irawan, C. 2008. *Dimensi Partisi Pada Graph Kincir*. Tugas Akhir, Jurusan Matematika FMIPA ITS.

Mubarok Akhmad M.A. 2005. *Psikologi Keluarga Dari Keluarga Sakinah Hingga Keluarga Bangsa.*

Mushthafa A. Al-Maraghi. 1993. *Tafsir Al-Maraghi 26.* Semarang : CV. Toha Putra Semarang.

Quraish Shihab, M. 2003. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al-Qur'an vol. 11*.Ciputat: Lentera Hati.

Syafii Ahmad Maarif dan Tuhuleley Said. 1996. *Al-Qur'an dan Tantangan Modernitas.* Yogyakarta : SIPRESS

Wahyudi Suhud dan Sumarno. 2010. *Dimensi Metrik Graph Kincir Dengan Pola* $K_1 + mK_3$ Surabaya **:** Jurusan Matematika (ITS) Surabaya

Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach*: *A first Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Wildan Habibi
NIM : 06510008
Fakultas / jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul skripsi : Dimensi Metrik Graf Kincir $K_1 + mK_s$, $m \geq 2; s \geq 3; m, s \in Z^+$
Pembimbing I : Wahyu H. Irawan M.Pd
Pembimbing II : Fachrur Rozi, M.Si

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan	
1	05 Oktober 2010	Konsultasi masalah	1.	
2	04 November 2010	Konsultasi bab I dan II		2.
3	08 November 2010	Konsultasi agama bab I dan II	3.	
4	16 Desember 2010	Konsultasi bab I, II dan III		4.
5	20 Desember 2010	Konsultasi agama bab II dan III	5.	
6	24 Desember 2010	Revisi bab I dan II		6.
7	04 Januari 2011	Revisi agama bab I, II dan III	7.	
8	05 Januari 2011	Revisi bab I, II dan III		8.
9	10 Januari 2011	Acc agama	9.	
10	10 Januari 2011	Acc keseluruhan		10.

Malang, 14 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001