

**ANALISIS KONSTRUKSI MODEL GELOMBANG AIR DANGKAL 2D
(SHALLOW WATER EQUATIONS)**

SKRIPSI

**OLEH
MOCHAMAD IRFAN
NIM. 11610037**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**ANALISIS KONSTRUKSI MODEL GELOMBANG AIR DANGKAL 2D
(SHALLOW WATER EQUATIONS)**

SKRIPSI

**OLEH
MOCHAMAD IRFAN
NIM. 11610037**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**ANALISIS KONSTRUKSI MODEL GELOMBANG AIR DANGKAL 2D
(SHALLOW WATER EQUATIONS)**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Mochamad Irfan
NIM. 11610037**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**ANALISIS KONSTRUKSI MODEL GELOMBANG AIR DANGKAL 2D
(SHALLOW WATER EQUATIONS)**

SKRIPSI

Oleh
Mochamad Irfan
NIM. 11610037

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 11 Juni 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 198105022005011004

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

**ANALISIS KONSTRUKSI MODEL GELOMBANG AIR DANGKAL 2D
(SHALLOW WATER EQUATIONS)**

SKRIPSI

Oleh
Mochamad Irfan
NIM. 11610037

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal 29 Juni 2015

Penguji Utama : Dr. Usman Pagalay, M.Si

Ketua Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

Sekretaris Penguji : Mohammad Jamhuri, M.Si

Anggota Penguji : Dr. Abdussakir, M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 197510062003121001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Mochamad Irfan
NIM : 11610037
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Skripsi : Analisis Konstruksi Model Gelombang Air Dangkal 2D
(*Shallow Water Equations*)

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, Juni 2015
Yang Membuat Pernyataan,

Mochamad Irfan
NIM. 11610037

MOTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

“Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. Al- Insyirah/94:5-6)



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Ayahanda Imam Mahdi, ibunda Kusrini, beserta kakak Mukhammad Asfar dan adik Rizqi Alvia Juhro.



KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillah rabbil 'alamin, puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah Swt. atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini serta menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan baik dan lancar. Shalawat dan salam tak lupa penulis haturkan kepada junjungan nabi besar Muhammad Saw. yang telah memberikan pencerahan pada kehidupan.

Pada kesempatan ini, penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Raharjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang serta selaku dosen pembimbing agama yang banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang banyak memberikan pengetahuan, ilmu, dan bimbingan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
6. Ayah dan Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, serta motivasi kepada penulis.
7. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2011, terutama Amita Pradana Putra, M. Syaiful Arif, Lia Izzatun, Imam Mufid, Zukhrufun Nadhifa, Dia K., Eny M., A. Afifuddin, M. Afifuddin, Fitriatuz Zakiyah, Hilwin Nisa', M. Gaddafi, M. Syaiful Hasbi, Jadi Taqwa, Choirul Umam, dan “Grup Abelian” yang berjuang bersama-sama untuk meraih mimpi beserta kakak angkatan 2010 terutama M. Sukron, terima kasih atas kenangan indah yang dirajut bersama dalam menggapai impian dan pengalaman yang berharga selama menuntut ilmu.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal 'alamin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Malang, Juni 2015

Penulis

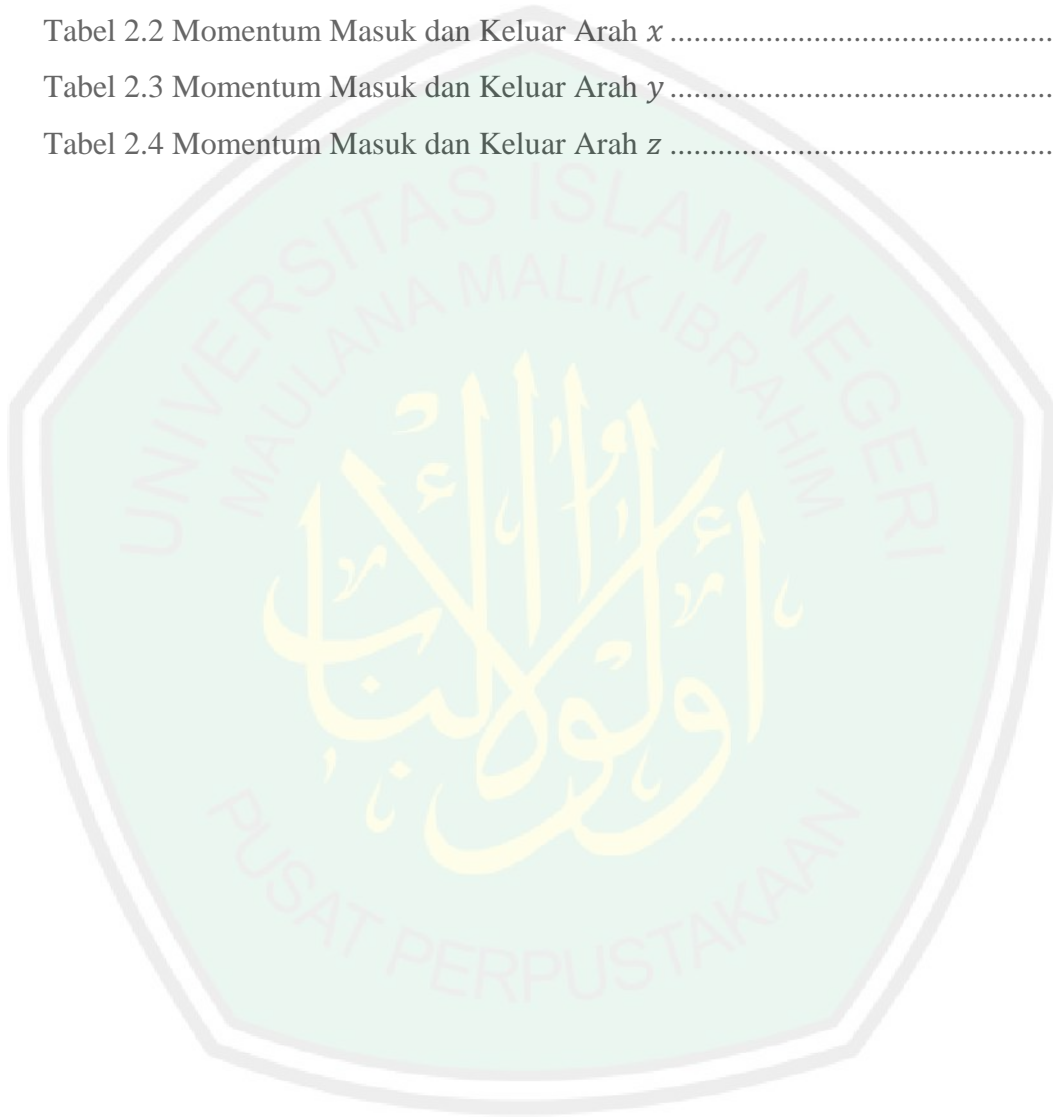
DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR SIMBOL	xiv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
ملخص	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	1
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	4
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6

BAB II KAJIAN PUSTAKA	8
2.1 Gelombang Air Dangkal.....	8
2.2 Persamaan Kontinuitas	9
2.3 Persamaan Momentum	12
2.3.1 Persamaan Momentum Arah x	12
2.3.2 Persamaan Momentum Arah y	15
2.3.3 Persamaan Momentum Arah z	17
2.4 Turunan Total	20
2.5 Integral Riemann	21
2.6 Integral Leibniz.....	22
2.7 Kondisi Batas Kinematik Fluida.....	25
2.8 Kajian Keagamaan tentang Model Matematika	25
BAB III PEMBAHASAN	30
3.1 Model Gelombang Air Dangkal	30
3.2 Kondisi Batas Kinematik.....	31
3.2.1 Kondisi Batas Kinematik Permukaan.....	31
3.2.2 Kondisi Batas Kinematik Dasar	33
3.3 Tekanan Hidrostatik	34
3.4 Rata-Rata Kedalaman	36
3.4.1 Rata-Rata Kedalaman Persamaan Kontinuitas	36
3.4.2 Rata-Rata Kedalaman Persamaan Momentum x	38
3.4.3 Rata-Rata Kedalaman Persamaan Momentum y	41
3.5 Hubungan Antara Permukaan dengan Dasar.....	44
3.6 Kajian Keagamaan Tentang Model Gelombang Air Dangkal.....	47
BAB IV PENUTUP	50
4.1 Kesimpulan.....	50
4.2 Saran	51
DAFTAR PUSTAKA	52
RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Massa Fluida yang Masuk dan Keluar	10
Tabel 2.2 Momentum Masuk dan Keluar Arah x	12
Tabel 2.3 Momentum Masuk dan Keluar Arah y	14
Tabel 2.4 Momentum Masuk dan Keluar Arah z	17



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Laju Perubahan Massa	10
Gambar 2.2 Partisi dari $[a, b]$ dengan titik-tik sampel \bar{x}_i	20
Gambar 2.3 Tafsiran Geometri Jumlah Riemann	21
Gambar 3.1 Kondisi Batas Kinematik	32
Gambar 3.2 Hubungan Antara s dengan b	45



DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini mempunyai makna yaitu sebagai berikut.

x, y, z : Koordinat arah bidang kartesius

t : Waktu

m : Massa

v : Kecepatan secara umum

u : Kecepatan arah x

v : Kecepatan arah y

w : Kecepatan arah z

s : Batas atas permukaan gelombang

b : Batas bawah dasar gelombang

h : Kedalaman gelombang

P : Tekanan hidrostatik

F : Gaya eksternal

A : Luas

V : Volume

Δx : Perubahan x

Δy : Perubahan y

Δz : Perubahan z

Δt : Perubahan t

k : Gravitasi arah x

n : Gravitasi arah y

g : Gravitasi arah z

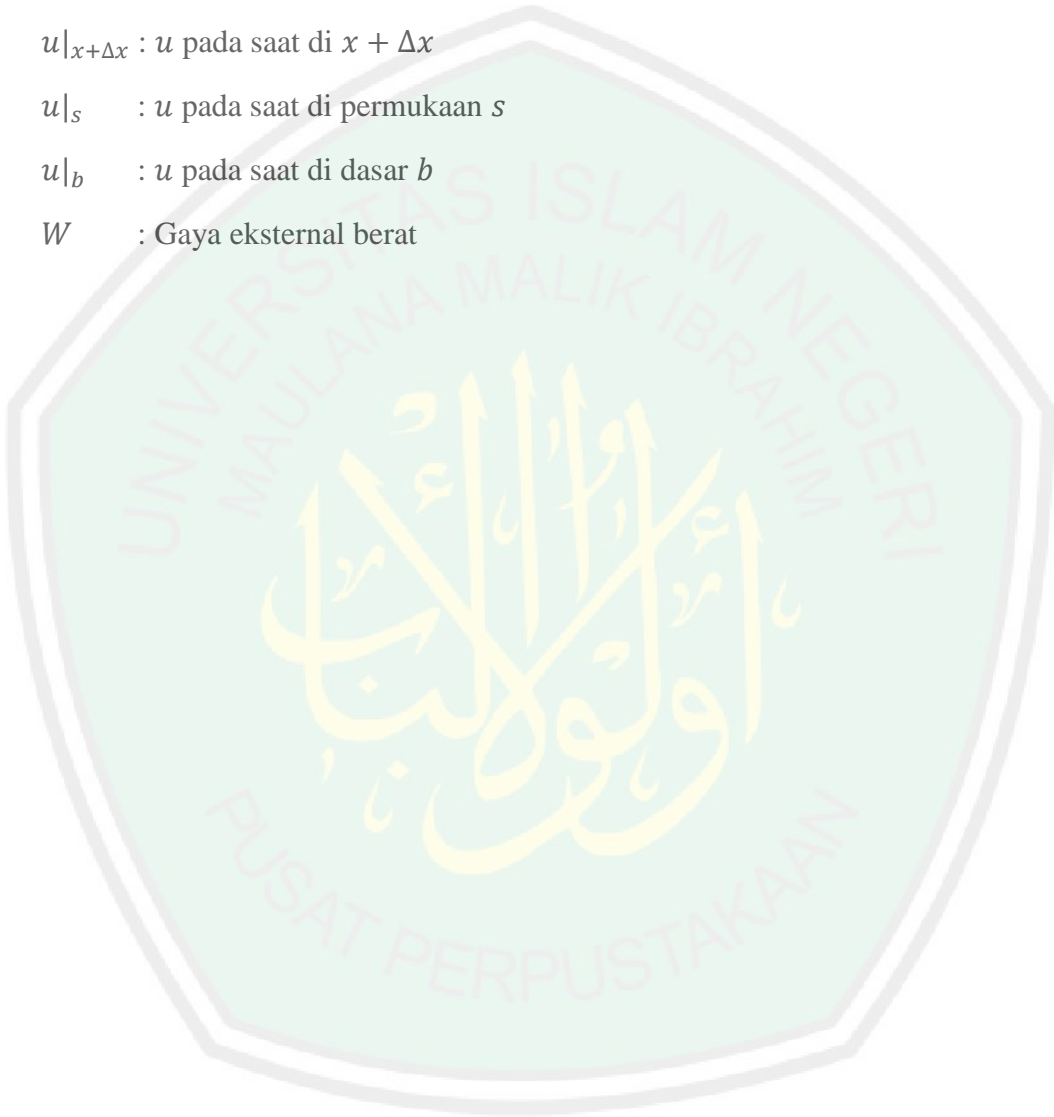
p : Momentum

ρ : Massa jenis

u_x : Turunan u terhadap x

u_y : Turunan u terhadap y

- u_z : Turunan u terhadap z
 u_t : Turunan u terhadap t
 $u|_x$: u pada saat di x
 $u|_{x+\Delta x}$: u pada saat di $x + \Delta x$
 $u|_s$: u pada saat di permukaan s
 $u|_b$: u pada saat di dasar b
 W : Gaya eksternal berat



ABSTRAK

Irfan, Mochamad. 2015. **Analisis Konstruksi Model Gelombang Air Dangkal Dua Dimensi**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Kata kunci: analisis konstruksi, model gelombang air dangkal, dua dimensi

Pada penelitian ini dibahas tentang analisis konstruksi model gelombang air dangkal dua dimensi. Dalam pembahasannya dibutuhkan persamaan kontinuitas, persamaan momentum, persamaan tekanan hidrostatis, dan kondisi batas kinematik gelombang air dangkal. Metode yang digunakan dalam penyelesaian konstruksi model adalah teknik pengintegralan dengan kaidah *Riemann* dan *Leibniz*. Hasil penelitian ini adalah model gelombang air dangkal dua dimensi yaitu sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial\left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial\left(h\bar{v}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

dengan diketahui h adalah kedalaman gelombang air dangkal, u, v adalah komponen kecepatan arah x, y , g adalah konstanta gravitasi, dan b adalah profil dasar dari gelombang air dangkal.

ABSTRACT

Irfan, Mochamad. **Construction Analysis of Two Dimensional Shallow Water Wave Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Mohammad Jamhuri, M.Si. (II) Dr. Abdussakir, M.Pd.

Keywords: construction analysis, shallow water wave model, two dimensions

This research discusses about construction analysis of two dimensional shallow water wave model. In the discussion, it needs continuity equations, momentum equations, hydrostatic pressure equations, and kinematic boundary condition of shallow water wave. Method used in the solving of model construction is integral technique implementing Riemann and Leibniz principles. The result of this research is model of two-dimensional Shallow Water Wave as follows:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial\left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial\left(h\bar{v}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

with h is height of shallow water wave, b is bottom profile of shallow water wave, u, v are velocities component in the x, y directions, and g is gravity constant.

ملخص

عرفان، محمد. ٥١٠٢. التحليل البنيوي نموذج موجة الماء السطحي على بعد ٢. البحث الجامعي. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) محمد جمهوري الماجستير و(٢) الدكتور عبد الشاكر الماجستير.

الكلمات الرئيسية: الكلمات الرئيسية: التحليل البنيوي، صورة موجة الماء السطحي، ثنائي البعد، الحجم المحدودة.

في هذا البحث الجامعي سيبحث الباحث عن التحليل البنيوي لصورة موجة الماء السطحي ثنائي البعد. واحتاج هذا البحث إلى التعادل الاستمراري والتعادل الزخمي وشأن الحد الحركي. والمنهج المستخدمة في هذا البحث عن البنيوي المثالي هي طريقة المتكامل بقاعدة ريمان (*Riemann*) وليبنيز (*Leibniz*). ونتيجة هذا البحث هي صورة موجة الماء السطحي ثنائي البعد، وهي كما يلي:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial\left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial\left(h\bar{v}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

بمعرفة على أن "h" هو عمق موجة الماء السطحي، وأن "u, v" هو مقوم سرعة الوجهة "x, y"، وأن "g" هو ثابت الجاذبية، و"b" هو الجانبية الأساسية من موجة الماء السطحي.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Manusia adalah makhluk yang berakal yang memiliki kemampuan untuk mengkaji, meneliti, membahas, dan mengamati tentang fenomena alam yang berada di langit dan di bumi. Fenomena alam yang berada di langit dan di bumi banyak yang berhubungan dengan gelombang, contohnya bunyi, cahaya, dan air. Gelombang sendiri adalah getaran yang merambat, baik melalui medium (seperti air) maupun tidak (seperti bunyi dan cahaya). Dari ketiga contoh tersebut, lebih mudah mengamati gelombang yang melalui medium perambatan seperti gelombang air karena kondisi fisisnya yang jelas yang dilihat dari amplitudo gelombang dan panjang gelombangnya. Kemudian dilihat dari perbandingannya, jika amplitudo gelombang jauh lebih kecil daripada panjang gelombangnya maka gelombang air tersebut dinamakan gelombang air dangkal (Kampf, 2009:68). Landasan agama untuk melakukan penelitian tentang gelombang air dangkal ini didasarkan pada firman Allah surat al-Imran/3:190-191 sebagai berikut.

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَأُخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ
 ﴿١٩٠﴾ الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ
 السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴿١٩١﴾

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka” (QS. al-Imran/3:190-191).

Dalam penciptaan langit dan bumi maupun alam semesta ini ternyata memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta beserta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79). Begitu juga dengan gelombang air dangkal yang tercipta memiliki persamaan atau model matematika. Landasan agama bahwa gelombang air dangkal memiliki model matematika didasarkan pada firman Allah surat al-Furqan/25:2 sebagai berikut.

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ۝٢

“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (QS. al Furqan/25:2).

Secara umum pengertian dari model matematika adalah persamaan matematika atau suatu usaha untuk menciptakan replika dari fenomena alam (Abdussakir, 2007:79). Model matematika terbentuk dengan mengidentifikasi permasalahan yang diteliti terlebih dahulu, menerjemahkan ke dalam bahasa matematika dan menentukan variabel apa saja yang terlibat serta menggambarkan fenomena yang terjadi. Setelah itu, merumuskan asumsi-asumsi yang rasional yang dapat menyederhanakan permasalahan. Kemudian model yang dikonstruksi selalu dalam bentuk persamaan diferensial yang memodelkan fenomena perubahan suatu objek yang terjadi. Oleh karena itu, penyelesaian konstruksi model matematika memerlukan teknik-teknik atau metode-metode penyelesaian persamaan diferensial

matematika, misalnya dengan mengintegalkannya. Setelah model terbentuk maka harus diinterpretsaikan kembali ke masalah nyatanya (Kartono, 2012:9). Begitu juga dengan model gelombang air dangkal yang harus ditelusuri bagaimana asal mula terbentuknya.

Pada dasarnya, air termasuk ke dalam fluida (suatu fase benda yang berbentuk cairan). Secara tidak langsung air berhubungan dengan hukum kesetimbangan fluida, yaitu hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum. Oleh karena itu, konstruksi model gelombang air dangkal ini berasal dari hukum kesetimbangan fluida (Mustain, 2010:116). Kemudian dengan tambahan asumsi-asumsi dari definisi dangkal sehingga model gelombang air dangkal terbentuk.

Penelitian terkait dengan konstruksi model gelombang air dangkal ini, sebelumnya banyak yang membahas tentang simulasi numerik dari model gelombang air dangkal, baik pada kasus satu dimensi, dua dimensi, maupun tiga dimensi. Kemudian simulasi numeriknya menggunakan metode yang berbeda-beda seperti metode beda hingga, metode *finite volume*, dan yang lainnya. Seperti Mungkasi (2012) dalam penelitiannya yang berjudul *ANUGA Software for Numerical Simulations of Shallow Water Flows*, meneliti persamaan gelombang air dangkal dua dimensi dengan menggunakan metode *finite volume* dan implementasinya dalam perangkat lunak yang bernama ANUGA.

Pada penelitian sebelumnya tidak dibahas bagaimana penjabaran konstruksi model gelombang air dangkal, sehingga penulis tertarik untuk menganalisis konstruksi model gelombang air dangkal pada kasus dua dimensi dalam skripsi ini, yang berjudul *Analisis Konstruksi Model Gelombang Air Dangkal Dua Dimensi*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana analisis konstruksi model gelombang air dangkal dua dimensi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah mengetahui bagaimana hasil analisis konstruksi model gelombang air dangkal dua dimensi.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diambil dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Dapat menjelaskan secara jelas bagaimana analisis konstruksi model gelombang air dangkal dua dimensi.
2. Dapat menjadi landasan dalam penelitian selanjutnya tentang gelombang air dangkal.

1.5 Batasan Masalah

Untuk mendekati sasaran yang diharapkan, maka perlu adanya pembatasan permasalahan antara lain:

1. Penjabaran dalam konstruksi model gelombang air dangkal adalah masalah dua dimensi, yaitu dua variabel ruang x dan y serta satu variabel waktu t .
2. Fluida diasumsikan ideal, yaitu tak termampatkan dan tak kental.

3. Fluida diasumsikan tak berotasi.
4. Fluida diasumsikan memiliki rapat massa jenis yang konstan.
5. Profil fluida adalah aliran air yang dangkal.

1.6 Metode Penelitian

Teknik yang digunakan penulis dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*), dengan mengkaji tentang penelusuran bagaimana model gelombang air dangkal dua dimensi terbentuk. Berikut langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini:

1. Mengidentifikasi permasalahan secara rinci dan jelas. Masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana model gelombang air dangkal dua dimensi dapat terbentuk.
2. Merumuskan asumsi-asumsi yang digunakan untuk memodelkan gelombang air dangkal dua dimensi.
3. Menurunkan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum arah x , y , dan z dari hukum kesetimbangan fluida yang berbentuk sistem model gelombang tiga dimensi.
4. Menurunkan kondisi batas kinematik gelombang air dangkal pada batas atas permukaan gelombang dan batas bawah dasar gelombang.
5. Menentukan persamaan tekanan hidrostatik yang terjadi pada gelombang air dangkal dengan menurunkannya dari persamaan momentum arah z .
6. Mensubstitusikan persamaan tekanan hidrostatik ke dalam persamaan momentum arah x dan y .

7. Menyederhanakan bentuk sistem model gelombang tiga dimensi ke dalam bentuk sistem model dua dimensi dari persamaan kontinuitas dan persamaan momentum arah x dan y dengan menggunakan kaidah integral *Riemann* dan *Leibniz*.
8. Menentukan rata-rata kedalaman gelombang dengan menggunakan asumsi dari definisi gelombang air dangkal.
9. Menentukan hubungan dari batas atas permukaan gelombang air dangkal dengan batas bawah dasar gelombang air dangkal.
10. Menyelesaikan model gelombang air dangkal dua dimensi.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan digunakan untuk mempermudah dalam memahami intisari dari laporan penelitian. Sistematika penulisan dalam skripsi ini terbagi menjadi empat bagian, masing-masing dijabarkan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan tentang gelombang air dangkal, persamaan kontinuitas, persamaan momentum, turunan total, integral *Riemann*, integral *Leibniz*, kondisi batas kinematik, dan kajian keagamaan tentang model matematika.

Bab III Pembahasan

Bab ini berisi pembahasan konstruksi model gelombang air dangkal dua dimensi beserta kajian keagamaan tentang model gelombang air dangkal.

Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari penelitian dan saran untuk penelitian selanjutnya.





BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Gelombang Air Dangkal

Gelombang adalah getaran yang merambat baik melalui medium maupun tidak. Contoh dari gelombang yang memerlukan medium adalah gelombang air dengan air sebagai mediumnya sedangkan contoh dari gelombang yang tidak memerlukan medium adalah gelombang bunyi dan gelombang cahaya. Dari kedua macam gelombang tersebut, lebih mudah mengamati gelombang yang melalui medium perambatan karena kondisi fisisnya yang jelas terlihat dari panjang gelombang dan amplitudo gelombangnya. Kemudian dilihat dari perbandingannya, jika amplitudo gelombang jauh lebih kecil dari panjang gelombangnya, yaitu mencapai 1:10 maka gelombang air tersebut dinamakan gelombang air dangkal (Kampf, 2009:68).

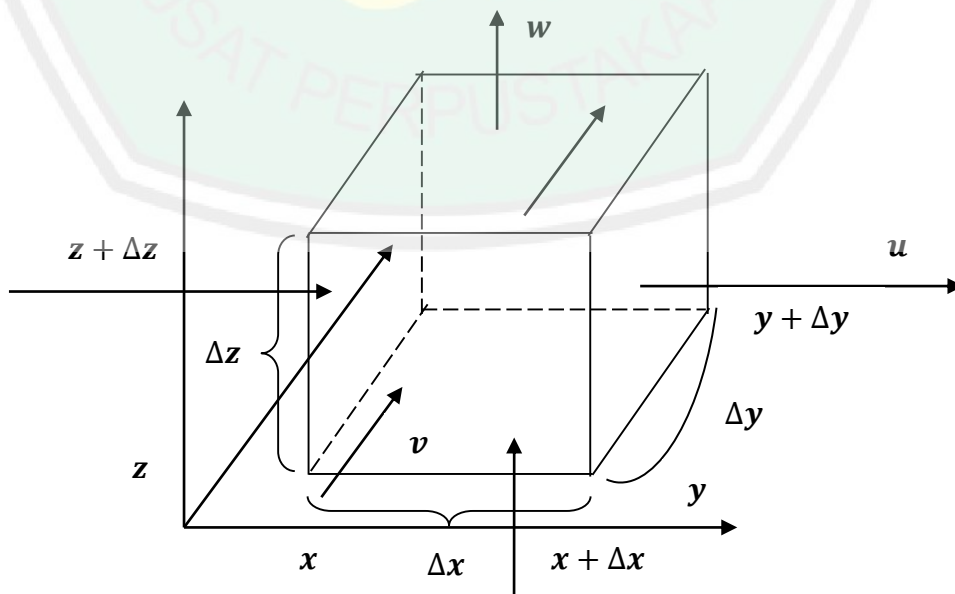
Pada dasarnya air terbagi lagi ke dalam fase cairan yang dinamakan fluida sehingga gelombang air dangkal berhubungan dengan fluida yang profilnya adalah ideal yang memiliki massa jenis konstan, fluida yang tidak kental (*inviscid*), dan fluida yang tidak dapat ditekan (*incompressible*) yang mengalir secara tak berotasi (*irrotational*). Gelombang air dangkal sering disebut juga dengan gelombang panjang karena profilnya yang dangkal ini menyebabkan rata-rata kedalamannya hampir sama.

Gelombang air dangkal memiliki persamaan atau model yang diturunkan dari hukum kesetimbangan fluida yaitu hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum. Hukum kekekalan massa membentuk persamaan

kontinuitas. Hukum kekekalan momentum membentuk persamaan momentum arah x , y , dan z (White, 1986:202). Kemudian dari empat persamaan ini dengan asumsi tambahan dari definisi dangkal maka terbentuk model gelombang air dangkal.

2.2 Persamaan Kontinuitas

Persamaan kontinuitas berasal dari hukum kekekalan massa. Hukum kekekalan massa menyatakan bahwa dalam suatu volume zat, massanya selalu konstan. Oleh karena itu, laju perubahan massanya sama dengan nol. Misalkan ρ menyatakan massa jenis suatu fluida, x, y , dan z masing-masing menyatakan koordinat, serta t menyatakan waktu. Selanjutnya u, v , dan w masing-masing menyatakan kecepatan partikel yang bergerak searah dengan koordinat x, y , dan z . Rumus untuk massa (m) pada fluida adalah perkalian antara massa jenis (ρ) dengan volume fluida (V). Penurunan persamaan dasar fluida yaitu persamaan kontinuitas mengacu pada perubahan massa fluida satu lapisan seperti ilustrasi pada Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2.1 Laju Perubahan Massa

Volume untuk massa fluida yang masuk maupun keluar saat titik tertentu dipengaruhi oleh kecepatan dan luas penampangnya. Seperti halnya sebuah gelas kosong yang permukaannya dibatasi, jika diisi air dengan kecepatan tertentu maka gelas tersebut terisi sesuai dengan luas permukaannya. Oleh karena itu, massa fluida yang masuk dan massa fluida yang keluar arah x , y , dan z ditunjukkan pada Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1 Massa Fluida yang Masuk dan Keluar

Massa Fluida yang Masuk	Massa Fluida yang Keluar
$\rho(u _x \Delta y \Delta z)$	$\rho(u _{x+\Delta x} \Delta y \Delta z)$
$\rho(v _y \Delta x \Delta z)$	$\rho(v _{y+\Delta y} \Delta x \Delta z)$
$\rho(w _z \Delta x \Delta y)$	$\rho(w _{z+\Delta z} \Delta x \Delta y)$

Sedangkan untuk volume fluida pada Gambar 2.1 yang sepanjang Δx , selebar Δy , dan setinggi Δz adalah

$$V = (\Delta x \Delta y) \Delta z$$

sehingga sesuai dengan hukum kekekalan massa yang menyatakan bahwa laju perubahan massa terhadap waktu adalah selisih massa yang masuk dengan massa yang keluar dan dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial m}{\partial t} = m_{masuk} - m_{keluar}$$

Kemudian substitusikan yang diketahui dari Tabel 2.1 sehingga menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho V}{\partial t} &= \left(\rho(u|_x \Delta y \Delta z) + \rho(v|_y \Delta x \Delta z) + \rho(w|_z \Delta x \Delta y) \right) \\ &\quad - \left(\rho(u|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z) + \rho(v|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z) + \rho(w|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y) \right)\end{aligned}$$

Substitusikan $V = \Delta x \Delta y \Delta z$, kemudian dikumpulkan yang sama antara u , v , dan w , lalu difaktorkan.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z &= (\rho(u|_x \Delta y \Delta z) - \rho(u|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z)) \\ &\quad + (\rho(v|_y \Delta x \Delta z) - \rho(v|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z)) \\ &\quad + (\rho(w|_z \Delta x \Delta y) - \rho(w|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y)) \\ &= \Delta y \Delta z (\rho(u|_x) - \rho(u|_{x+\Delta x})) \\ &\quad + \Delta x \Delta z (\rho(v|_y) - \rho(v|_{y+\Delta y})) \\ &\quad + \Delta x \Delta y (\rho(w|_z) - \rho(w|_{z+\Delta z}))\end{aligned}\tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta z$ sehingga menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{(\rho(u|_x) - \rho(u|_{x+\Delta x}))}{\Delta x} + \frac{(\rho(v|_y) - \rho(v|_{y+\Delta y}))}{\Delta y} \\ &\quad + \frac{(\rho(w|_z) - \rho(w|_{z+\Delta z}))}{\Delta z}\end{aligned}\tag{2.2}$$

Kemudian didekati dengan limit untuk $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow 0$ pada persamaan (2.2) sehingga menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho(u|_x) - \rho(u|_{x+\Delta x}))}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho(v|_y) - \rho(v|_{y+\Delta y}))}{\Delta y} \\ &\quad + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho(w|_z) - \rho(w|_{z+\Delta z}))}{\Delta z} \\ &= -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\end{aligned}$$

$$= -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) \quad (2.3)$$

Dengan asumsi bahwa massa jenis pada fluida adalah konstan maka $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, kemudian kedua ruas dibagi dengan ρ sehingga persamaan (2.3) menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) adalah persamaan kontinuitas (Olson, 1993:532).

2.3 Persamaan Momentum

Momentum (p) adalah hasil perkalian antara massa (m) dengan kecepatan (v). Massa merupakan perkalian dari massa jenis (ρ) dengan volumenya (V).

Persamaan momentum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p &= m v \\ &= (\rho V) v \\ &= \rho v (\Delta x \Delta y \Delta z) \end{aligned}$$

Momentum terjadi pada tiga arah, yaitu x , y , dan z .

2.3.1 Persamaan Momentum Arah x

Berdasarkan Gambar 2.1, momentum masuk dan keluar arah x adalah seperti pada Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2 Momentum Masuk dan Keluar Arah x

Momentum Masuk	Momentum Keluar
$\rho(u _x \Delta y \Delta z) u _x = \Delta y \Delta z \rho u^2 _x$	$\rho(u _{x+\Delta x} \Delta y \Delta z) u _{x+\Delta x} = \Delta y \Delta z \rho u^2 _{x+\Delta x}$
$\rho(u _y \Delta x \Delta z) v _y = \Delta x \Delta z \rho uv _y$	$\rho(u _{y+\Delta y} \Delta x \Delta z) v _{y+\Delta y} = \Delta x \Delta z \rho uv _{y+\Delta y}$
$\rho(u _z \Delta x \Delta y) w _z = \Delta x \Delta y \rho uw _z$	$\rho(u _{z+\Delta z} \Delta x \Delta y) w _{z+\Delta z} = \Delta x \Delta y \rho uw _{z+\Delta z}$

Laju perubahan momentum terhadap waktu adalah selisih antara momentum masuk dengan momentum keluar dijumlah dengan gaya eksternal. Gaya eksternal adalah gaya berat (W) yang dipengaruhi gravitasi dan gaya yang dipengaruhi oleh tekanan (P). Dinotasikan gravitasi searah x adalah k , sehingga gaya berat adalah perkalian antara massa dengan gravitasi dan dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W &= mk \\ &= (\rho V)k \\ &= (\rho(\Delta x \Delta y \Delta z))k \end{aligned}$$

Rumus umum untuk tekanan P adalah

$$P = \frac{F}{A}$$

Kemudian gaya dipengaruhi oleh tekanan dan luas dituliskan sebagai berikut.

$$F = PA$$

Selisih gaya pada saat masuk dan keluar arah x yaitu,

$$\begin{aligned} F &= F_{masuk} - F_{keluar} \\ &= P|_x \Delta y \Delta z - P|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

Sehingga laju perubahan momentum pada arah x terhadap waktu dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z &= (\Delta y \Delta z \rho u^2|_x + \Delta x \Delta z \rho uv|_y + \Delta x \Delta y \rho uw|_z) \\
 &\quad - (\Delta y \Delta z \rho u^2|_{x+\Delta x} + \Delta x \Delta z \rho uv|_{y+\Delta y} + \Delta x \Delta y \rho uw|_{z+\Delta z}) \\
 &\quad + (\rho(\Delta x \Delta y \Delta z)k) + (P|_x \Delta y \Delta z - P|_{x+\Delta x} \Delta y \Delta z) \\
 &= \Delta y \Delta z (\rho u^2|_x - \rho u^2|_{x+\Delta x}) \\
 &\quad + \Delta x \Delta z (\rho uv|_y - \rho uv|_{y+\Delta y}) \\
 &\quad + \Delta x \Delta y (\rho uw|_z - \rho uw|_{z+\Delta z}) \\
 &\quad + (\rho(\Delta x \Delta y \Delta z)k) + \Delta y \Delta z (P|_x - P|_{x+\Delta x})
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta z$ sehingga menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &= \frac{(\rho u^2|_x - \rho u^2|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho uv|_y - \rho uv|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \\
 &\quad + \frac{(\rho uw|_z - \rho uw|_{z+\Delta z})}{\Delta z} + (\rho k) + \frac{(P|_x - P|_{x+\Delta x})}{\Delta x}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Kemudian didekati dengan limit untuk $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow 0$ sehingga persamaan (2.6) menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho u^2|_x - \rho u^2|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho uv|_y - \rho uv|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \\
 &\quad + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho uw|_z - \rho uw|_{z+\Delta z})}{\Delta z} + (\rho k) \\
 &\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(P|_x - P|_{x+\Delta x})}{\Delta x} \\
 &= -\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} + \rho k - \frac{\partial P}{\partial x} \\
 \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} &= \rho k - \frac{\partial P}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dengan asumsi bahwa massa jenis (ρ) adalah konstan kemudian kedua ruas dibagi dengan ρ sehingga persamaan (2.7) menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right) = \rho k - \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.8)$$

2.3.2 Perubahan Momentum Arah y

Berdasarkan Gambar 2.1, momentum masuk dan keluar arah y adalah seperti pada Tabel 2.3 berikut.

Tabel 2.3 Momentum Masuk dan Keluar Arah y

Momentum Masuk	Momentum Keluar
$\rho(v _x \Delta y \Delta z) u _x = \Delta y \Delta z \rho u v _x$	$\rho(v _{x+\Delta x} \Delta y \Delta z) u _{x+\Delta x} = \Delta y \Delta z \rho u v _{x+\Delta x}$
$\rho(v _y \Delta x \Delta z) v _y = \Delta x \Delta z \rho v^2 _y$	$\rho(v _{y+\Delta y} \Delta x \Delta z) v _{y+\Delta y} = \Delta x \Delta z \rho v^2 _{y+\Delta y}$
$\rho(v _z \Delta x \Delta y) w _z = \Delta x \Delta y \rho v w _z$	$\rho(v _{z+\Delta z} \Delta x \Delta y) w _{z+\Delta z} = \Delta x \Delta y \rho v w _{z+\Delta z}$

Laju perubahan momentum terhadap waktu adalah selisih antara momentum masuk dengan momentum keluar dijumlah dengan gaya eksternal. Gaya eksternal adalah gaya berat (W) yang dipengaruhi gravitasi dan gaya yang dipengaruhi oleh tekanan (P). Dinotasikan gravitasi searah y adalah n , sehingga gaya berat adalah perkalian antara massa dengan gravitasi dan dituliskan sebagai berikut.

$$W = mn$$

$$= (\rho V)n$$

$$= (\rho(\Delta x \Delta y \Delta z))n$$

Rumus umum untuk tekanan adalah

$$P = \frac{F}{A}$$

Kemudian gaya dipengaruhi oleh tekanan dan luas dituliskan sebagai berikut.

$$F = PA$$

Selisih gaya pada saat masuk dan keluar arah y yaitu,

$$\begin{aligned} F &= F_{masuk} - F_{keluar} \\ &= P|_y \Delta x \Delta z - P|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z \end{aligned}$$

Sehingga laju perubahan momentum pada arah y terhadap waktu dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z &= (\Delta y \Delta z \rho uv|_x + \Delta x \Delta z \rho v^2|_y + \Delta x \Delta y \rho vw|_z) \\ &\quad - (\Delta y \Delta z \rho uv|_{x+\Delta x} + \Delta x \Delta z \rho v^2|_{y+\Delta y} + \Delta x \Delta y \rho vw|_{z+\Delta z}) \\ &\quad + (\rho(\Delta x \Delta y \Delta z)n) + (P|_y \Delta y \Delta z - P|_{y+\Delta y} \Delta x \Delta z) \\ &= \Delta y \Delta z (\rho uv|_x - \rho uv|_{x+\Delta x}) \\ &\quad + \Delta x \Delta z (\rho v^2|_y - \rho v^2|_{y+\Delta y}) \\ &\quad + \Delta x \Delta y (\rho vw|_z - \rho vw|_{z+\Delta z}) \\ &\quad + (\rho(\Delta x \Delta y \Delta z)n) + \Delta x \Delta z (P|_y - P|_{y+\Delta y}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta z$ sehingga menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} &= \frac{(\rho uv|_x - \rho uv|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho v^2|_y - \rho v^2|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \\ &\quad + \frac{(\rho vw|_z - \rho vw|_{z+\Delta z})}{\Delta z} + (\rho n) + \frac{(P|_y - P|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Kemudian didekati dengan limit untuk $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow 0$ sehingga persamaan (2.10) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho uv|_x - \rho uv|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho v^2|_y - \rho v^2|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \\ &\quad + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho vw|_z - \rho vw|_{z+\Delta z})}{\Delta z} + (\rho n) + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(P|_y - P|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \\ &= -\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} + \rho n - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} &= \rho n - \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dengan asumsi bahwa massa jenis (ρ) adalah konstan kemudian kedua ruas dibagi dengan ρ sehingga persamaan (2.11) menjadi

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right) &= \rho n - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} &= n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3.3 Perubahan Momentum Arah z

Berdasarkan Gambar 2.1, momentum masuk dan keluar arah z adalah seperti pada Tabel 2.4 berikut.

Tabel 2.4 Momentum Masuk dan Keluar Arah z

Momentum Masuk	Momentum Keluar
$\rho(w _x\Delta y\Delta z)u _x = \Delta y\Delta z\rho uw _x$	$\rho(w _{x+\Delta x}\Delta y\Delta z)u _{x+\Delta x} = \Delta y\Delta z\rho uw _{x+\Delta x}$
$\rho(w _y\Delta x\Delta z)v _y = \Delta x\Delta z\rho vw _y$	$\rho(w _{y+\Delta y}\Delta x\Delta z)v _{y+\Delta y} = \Delta x\Delta z\rho vw _{y+\Delta y}$
$\rho(w _z\Delta x\Delta y)w _z = \Delta x\Delta y\rho w^2 _z$	$\rho(w _{z+\Delta z}\Delta x\Delta y)w _{z+\Delta z} = \Delta x\Delta y\rho w^2 _{z+\Delta z}$

Laju perubahan momentum terhadap waktu adalah selisih antara momentum masuk dengan momentum keluar dijumlah dengan gaya eksternal. Gaya eksternal adalah gaya berat (W) yang dipengaruhi gravitasi dan gaya yang dipengaruhi oleh tekanan (P). Dinotasikan gravitasi searah z adalah g , sehingga gaya berat adalah perkalian antara massa dengan gravitasi dan dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (\rho V)g \\ &= (\rho(\Delta x\Delta y\Delta z))g \end{aligned}$$

Rumus umum untuk tekanan adalah

$$P = \frac{F}{A}$$

Kemudian gaya dipengaruhi oleh tekanan dan luas dituliskan sebagai berikut.

$$F = PA$$

Selisih gaya pada saat masuk dan keluar arah z yaitu,

$$\begin{aligned} F &= F_{masuk} - F_{keluar} \\ &= P|_z\Delta x\Delta y - P|_{z+\Delta z}\Delta x\Delta y \end{aligned}$$

Sehingga laju perubahan momentum pada arah z terhadap waktu dijabarkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z &= (\Delta y \Delta z \rho u w|_x + \Delta x \Delta z \rho v w|_y + \Delta x \Delta y \rho w^2|_z) \\
 &\quad - (\Delta y \Delta z \rho u w|_{x+\Delta x} + \Delta x \Delta z \rho v w|_{y+\Delta y} + \Delta x \Delta y \rho w^2|_{z+\Delta z}) \\
 &\quad + (\rho(\Delta x \Delta y \Delta z)g) + (P|_z \Delta x \Delta y - P|_{z+\Delta z} \Delta x \Delta y) \\
 &= \Delta y \Delta z (\rho u w|_x - \rho u w|_{x+\Delta x}) \\
 &\quad + \Delta x \Delta z (\rho v w|_y - \rho v w|_{y+\Delta y}) \\
 &\quad + \Delta x \Delta y (\rho w^2|_z - \rho w^2|_{z+\Delta z}) \\
 &\quad + (\rho(\Delta x \Delta y \Delta z)g) + \Delta x \Delta y (P|_z - P|_{z+\Delta z})
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Persamaan (2.13) dibagi dengan $\Delta x \Delta y \Delta z$ sehingga menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} &= \frac{(\rho u w|_x - \rho u w|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \frac{(\rho v w|_y - \rho v w|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \\
 &\quad + \frac{(\rho w^2|_z - \rho w^2|_{z+\Delta z})}{\Delta z} + (\rho g) + \frac{(P|_z - P|_{z+\Delta z})}{\Delta z}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Kemudian didekati dengan limit untuk $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow 0$ sehingga persamaan (2.14) menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\rho u w|_x - \rho u w|_{x+\Delta x})}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{(\rho v w|_y - \rho v w|_{y+\Delta y})}{\Delta y} \\
 &\quad + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\rho w^2|_z - \rho w^2|_{z+\Delta z})}{\Delta z} + (\rho g) \\
 &\quad + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(P|_z - P|_{z+\Delta z})}{\Delta z} \\
 &= -\frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} + \rho g - \frac{\partial P}{\partial z} \\
 \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} &= \rho g - \frac{\partial P}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dengan asumsi bahwa massa jenis (ρ) adalah konstan kemudian kedua ruas dibagi dengan ρ sehingga persamaan (2.15) menjadi

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} \right) = \rho g - \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (2.16)$$

Persamaan (2.8), (2.12), dan (2.16) dituliskan kembali dalam bentuk sistem, sehingga menjadi

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} &= k - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} &= n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} &= g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Gravitasi yang berpengaruh pada arah z yaitu hanya g saja, sedangkan gravitasi arah x yaitu k , dan gravitasi arah y yaitu n tidak berpengaruh atau sama dengan nol sehingga persamaan (2.17) menjadi

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} &= g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Persamaan (2.18) adalah persamaan momentum (White, 1986:207).

2.4 Turunan Total

Turunan fungsi $w(x, y, z, t)$ terhadap ruang x dinotasikan dengan $\frac{\partial w}{\partial x}$ atau w_x (Purcell, 1987:114) didefinisikan sebagai berikut.

$$w_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w(x + \Delta x, y, z, t) - w(x, y, z, t)}{\Delta x}$$

Kemudian untuk menentukan turunan total terhadap waktu dari $w(x, y, z, t)$ menggunakan aturan rantai sebagai berikut.

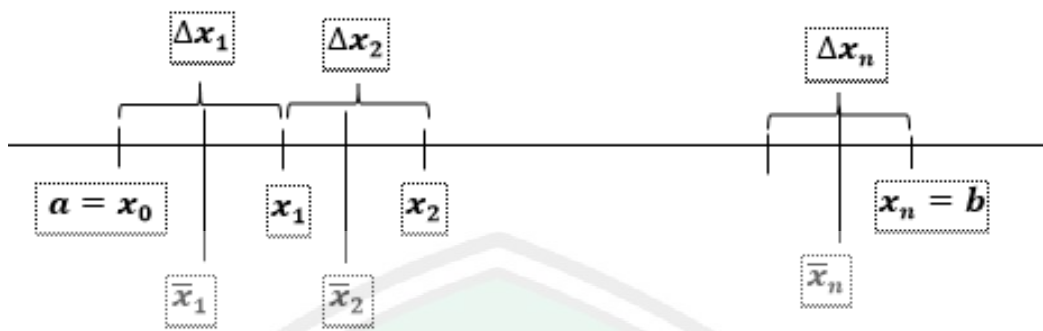
$$\begin{aligned} \frac{dw(x, y, z, t)}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= w_t + w_x \frac{dx}{dt} + w_y \frac{dy}{dt} + w_z \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

2.5 Integral Riemann

Integral adalah anti turunan. Aplikasinya diterapkan untuk menghitung luas maupun volume. Penjumlahan seluruh luas yang dipartisi atau dibagi menjadi luas satuan kemudian perubahan terhadap ruang x diasumsikan sangat kecil dengan pendekatan limit untuk $\Delta x \rightarrow 0$ maka penjumlahan tersebut menggunakan kaidah *Riemann*.

Jika diketahui $y = f(x)$ pada interval $[a, b]$ maka luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ sepanjang interval $[a, b]$ menggunakan kaidah *Riemann* dengan proses sebagai berikut:

1. Pandang suatu partisi P dari interval $[a, b]$ menjadi n bagian banyaknya yang memakai titik-titik $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ dan misal $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pada tiap selang bagian $[x_{i-1}, x_i]$, diambil sebuah titik sebarang \bar{x}_i yang disebut titik sampel untuk selang bagian ke- i . Perhatikan Gambar 2.2 berikut.



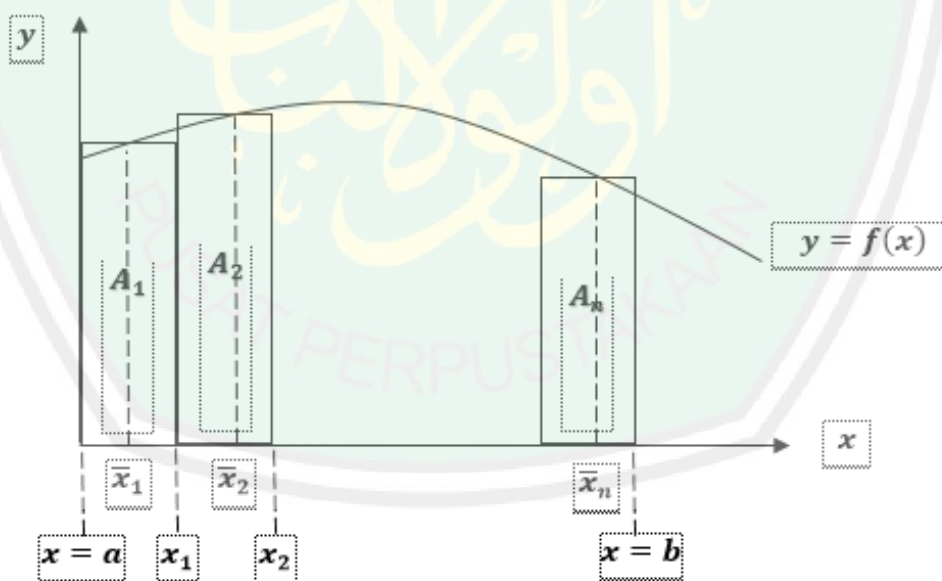
Gambar 2.2 Partisi dari $[a, b]$ dengan Titik-titik Sampel \bar{x}_i

2. Kemudian dibentuk penjumlahan

$$R_P = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$$

dengan R_P adalah jumlah *Riemann* untuk f yang berpadanan dengan partisi P .

Tafsiran geometrinya dapat dilihat pada Gambar 2.3 berikut.



Gambar 2.3 Tafsiran Geometri Jumlah *Riemann*

3. Setelah itu, karena partisinya sebanyak n dari interval $[a, b]$ dengan asumsinya bahwa partisinya sangat kecil atau mendekati nol maka berlaku integral *Riemann* yaitu,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{P_i} \sum_{i=1}^{\infty} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

(Purcell, 1987:274).

2.6 Integral Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz adalah salah seorang dari dua penemu utama kalkulus (yang lainnya adalah Isaac Newton). Cara penulisannya untuk turunan dan integral masih dipakai secara luas, khususnya dalam bidang terapan seperti fisika, kimia, dan ekonommi (Purcell, 1987:145). Salah satu contohnya adalah persamaan diferensial yang dapat diselesaikan dengan menggunakan metode integral yang salah satunya adalah integral *Leibniz*. Jika terdapat sebuah fungsi $u(x, y, t)$ yang dibatasi dengan batas atas permukaan $z = s(x, y, t)$ dan batas bawah dasar $z = b(x, y)$ maka

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} dz \neq \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u(x, y, t) dz$$

Contohnya jika $u(x, y, t) = e^{2x+y+t}$, $b(x, y) = x + y$, dan $s(x, y, t) = 2x + 2y + t$ maka

$$\begin{aligned} \int_{x+y}^{2x+2y+t} \frac{\partial(e^{2x+y+t})}{\partial x} dz &= \int_{x+y}^{2x+2y+t} 2e^{2x+y+t} dz \\ &= 2ze^{2x+y+t} \Big|_{z=x+y}^{z=2x+2y+t} \\ &= 2((2x + 2y + t) - (x + y))e^{2x+y+t} \\ &= 2(x + y + t)e^{2x+y+t} \end{aligned}$$

sedangkan

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \int_{x+y}^{2x+2y+t} e^{2x+y+t} dz &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{2x+y+t} z \Big|_{z=x+y}^{z=2x+2y+t}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{2x+y+t} ((2x+2y+t) - (x+y))) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} (e^{2x+y+t} (x+y+t)) \\
 &= (x+y+t) \frac{\partial(e^{2x+y+t})}{\partial x} + e^{2x+y+t} \frac{\partial(x+y+t)}{\partial x} \\
 &= 2(x+y+t)e^{2x+y+t} + e^{2x+y+t}
 \end{aligned}$$

Dari contoh di atas dapat disimpulkan bahwa

$$\begin{aligned}
 \int_{x+y}^{2x+2y+t} \frac{\partial(e^{2x+y+t})}{\partial x} dz &\neq \frac{\partial}{\partial x} \int_{x+y}^{2x+2y+t} e^{2x+y+t} dz \\
 2(x+y+t)e^{2x+y+t} &\neq 2(x+y+t)e^{2x+y+t} + e^{2x+y+t}
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, digunakan kaidah *Leibniz* sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u(x,y,t) dz - u(z=s(x,y,t)) \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial x} \\
 &\quad + u(z=b(x,y)) \frac{\partial b(x,y)}{\partial x}
 \end{aligned}$$

sehingga dari contoh di atas didapatkan

$$\begin{aligned}
 u(z=s(x,y,t)) \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial x} &= e^{2x+y+t} \frac{\partial(2x+2y+t)}{\partial x} \\
 &= 2e^{2x+y+t} \\
 u(z=b(x,y)) \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} &= e^{2x+y+t} \frac{\partial(x+y)}{\partial x} \\
 &= e^{2x+y+t}
 \end{aligned}$$

maka hasilnya dengan menggunakan kaidah *Leibniz* adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u(x,y,t) dz - u(z=s(x,y,t)) \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial x} + u(z=b(x,y)) \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \\ = 2(x+y+t)e^{2x+y+t} + e^{2x+y+t} - 2e^{2x+y+t} + e^{2x+y+t} \\ = 2(x+y+t)e^{2x+y+t} \end{aligned}$$

Hasil dari menggunakan kaidah *Leibniz* sama yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u(x,y,t) dz - u(z=s(x,y,t)) \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial x} \\ + u(z=b(x,y)) \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \end{aligned}$$

$$2(x+y+t)e^{2x+y+t} = 2(x+y+t)e^{2x+y+t}$$

Dengan demikian, jika terdapat dua operator matematika, turunan dan integral, dapat dinyatakan bahwa tidak semua turunan yang kemudian diintegrasikan hasilnya sama dengan integral yang kemudian diturunkan.

2.7 Kondisi Batas Kinematik Fluida

Masalah pada aliran fluida merupakan permasalahan diferensial parsial terhadap bidang dan waktu sehingga kondisi batas sangat diperlukan untuk dapat menyelesaikan model yang ada. Kondisi batas ada dua jenis yaitu kondisi batas kinematik dan kondisi batas dinamik. Kondisi batas dinamik hanya berlaku pada permukaan bebas (Mustain, 2010:81). Kondisi batas kinematik adalah kondisi yang membatasi aliran fluida yang dilihat dari ada atau tidaknya pengaruh kekentalan, aliran yang dapat ditekan atau tidak, dan aliran yang tetap atau tidak. Kondisi batas kinematik dilihat dari dasar fluida dan permukaan fluida.

2.8 Kajian Keagamaan tentang Model Matematika

Berdasarkan pemaparan pendahuluan pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa manusia memiliki akal yang digunakan untuk mengkaji, meneliti, dan mengamati tentang segala sesuatu yang telah tercipta di langit dan bumi. Hal ini sesuai dengan isi dari al-Qur'an surat al-Imran/3:190-191 yaitu,

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَأَخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لآيَاتٍ لِأُولِي الْأَلْبَابِ
 الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ
 السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka” (QS. al-Imran/3:190-191)

Asbabun nuzul dari ayat ini diriwayatkan oleh ath-Thabarani dan Ibnu Abi Hatim, yang bersumber dari Ibnu ‘Abbas bahwa orang Quraisy datang kepada Yahudi untuk bertanya, “Mukjizat apa yang dibawa Musa kepada kalian?” Mereka menjawab, “Tongkat dan tangannya terlihat putih bercahaya.” Kemudian mereka bertanya kepada kaum Nasrani, “Mukjizat apa yang dibawa ‘Isa pada kalian?” Mereka menjawab, “Ia dapat menyembuhkan orang buta sejak lahir hingga dapat melihat, menyembuhkan orang berpenyakit sopak, dan menghidupkan orang mati.” Kemudian mereka menghadap nabi Muhammad Saw. dan berkata “Hai Muhammad, coba berdoalah engkau kepada Rabb-mu agar gunung Shafa ini dijadikan emas.” Lalu beliau berdoa sehingga turunlah ayat tersebut (al-Imran/3:190) sebagai petunjuk untuk memperhatikan apa yang telah ada, yang akan lebih besar manfaatnya bagi orang yang menggunakan akal.

Tafsir secara umum pada ayat 190 surat al-Imran adalah Allah mengajak manusia untuk berpikir dan merenungi tentang penciptaan langit dan bumi. Kemudian pada ayat berikutnya Allah menjelaskan hasil dan buah dari berpikir ini. Ayat ini menjelaskan tentang keEsaan Allah dan menyatakan bahwa apabila manusia memikirkan dengan cermat dan menggunakan akalnyanya terkait dengan proses penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya siang dan malam, maka ia akan menemukan tanda-tanda jelas atas kekuasaan Allah, maha karya dan rahasia-rahasia yang menakjubkan yang akan menuntun para hamba kepada Allah dan hari kiamat serta menggiring mereka pada kekuasaan Allah yang tak terbatas. Makna dua ayat ini adalah mereka yang menyaksikan, yang didasari dengan pemikiran dan perenungan, penciptaan langit dan bumi, silih bergantinya siang dan malam, pemikiran dan perenungan ini menyebabkan mereka senantiasa akan mengingat Allah. Dengan perantara ini mereka akan menyadari bahwa Allah segera akan membangkitkan mereka dan atas dasar itu ia memohon rahmat-Nya serta meminta supaya janji yang diberikan kepada mereka dapat terealisasi baginya (Dasuki, 1995:102).

Kemudian dalam penciptaan langit dan bumi, Allah telah menciptakan semuanya sesuai dengan ukurannya. Hal ini sesuai dengan al-Qur'an surat al-Furqan/25:2 yaitu,

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ۝٢

“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (QS. al-Furqan/25:2)

Dalam al-Qur'an surat al-Furqan/25:2 diterangkan kekuasaan dan kebesaran Allah yang menurunkan *al-Furqan* dan mengutus hamba-Nya itu kepada seluruh alam. Dia adalah Allah yang menguasai seluruh langit dan bumi. Penguasa dari sekalian penguasa, raja dari sekalian raja, menaikkan dan menurunkan, memuliakan dan menghinakan. Kekuasaan-Nya adalah mutlak dan kekal. Tanda dari kekuasaan itu terasa apabila ilmu semakin bertambah. Dengan ilmu pengetahuan alam dapatlah sedikit demi sedikit melihat kekuasaan yang mutlak itu. Perjalanan matahari yang teratur detik demi detik, persamaan terbit dan terbenamnya pada persamaan tanggal dan bulannya sehingga satu detik pun tidak ada selisih adalah bukti nyata dari kekuasaan-Nya. Apabila menambah ilmu pengetahuan tentang ilmu alam, ilmu bumi, ilmu tumbuh-tumbuhan, dan sekalian cabang ilmu yang lain, bertambah nyatalah kekuasaan yang mutlak itu sehingga semakin manusia dapat mengetahui suatu cabang ilmu, semakin juga manusia mengetahui bahwa yang diketahuinya ini adalah perkara yang telah ada sejak dulu. Ilmu pengetahuan manusia tidak menambah peraturan yang baru pada peraturan yang telah ada, melainkan hanya telah mengetahui perkara yang tadinya belum diketahui (Dasuki, 1995:680).

Segala sesuatu tercipta sesuai dengan ukurannya juga dijelaskan dalam al-Qur'an surat al-Qamar/54:49.

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

“*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*” (QS. al-Qamar/54:49)

Asbabun nuzul untuk surat al-Qamar diriwayatkan oleh Muslim dan at-Tirmidzi, yang bersumber dari Abu Hurairah bahwa kaum musyrikin Quraisy pernah membantah Rasulullah Saw. berkenaan dengan persoalan takdir. Ayat ini

(al-Qamar:47-49) turun sehubungan dengan peristiwa tersebut, yang melukiskan bahwa segala sesuatu diciptakan menurut ukuran dan aturan. Maksudnya, Allah menetapkan suatu ukuran dan memberi petunjuk kepada semua makhluk pada ketetapan tersebut. Oleh karena itu, para ulama menjadikan ayat yang mulia ini sebagai dalil untuk menetapkan takdir Allah bagi semua makhluk sebelum makhluk itu diciptakan. Hal itu merupakan ilmu Allah terhadap segala sesuatu sebelum adanya dan pencatatan ketentuan masing-masing makhluk sebelum semuanya tercipta (Jalaludin, 1993:507).

Setelah manusia memikirkan tentang langit dan bumi bahwa segala sesuatu itu sesuai dengan ukurannya maka segala sesuatu itu juga ada hitungannya. Hal ini sesuai dengan al-Qur'an surat yasin/36:12.

إِنَّا نَحْنُ نُحْيِي الْمَوْتَىٰ وَنَكْتُبُ مَا قَدَّمُوا وَعَاءَثْرَهُمْ كُلَّ شَيْءٍ أَحْصَيْنَاهُ فِي إِمَامٍ مُّبِينٍ ﴿١٢﴾

“Sesungguhnya Kami menghidupkan orang-orang mati dan Kami menuliskan apa yang telah mereka kerjakan dan bekas-bekas yang mereka tinggalkan. dan segala sesuatu Kami kumpulkan dalam kitab induk yang nyata (Lauh mahfuzh)” (QS. Yasin/36:12).

Diriwayatkan oleh at-Tirmidzi dengan sanad yang hasan dan al-Hakim dengan sanad yang shahih, yang bersumber dari Abu Sa'id al Khudri. Diriwayatkan pula oleh ath-Thabarani yang bersumber dari Ibnu 'Abbas bahwa bani Salamah bertempat di pinggiran kota Madinah dan ingin pindah ke dekat masjid. Maka turunlah ayat ini (QS. Yasin/36:12) yang menegaskan bahwa setiap langkah manusia dicatat oleh Allah. Setelah turun ayat tersebut, nabi Muhammad Saw. menasihati bani Salamah agar tidak pindah dari tempat tinggalnya, dengan sabdanya, “Sesungguhnya bekas telapak kalian menuju masjid dicatat oleh Allah, sebaiknya kalian jangan pindah dari tempat kalian” (Basyuni, 2007:199).

Pada akhirnya, setelah segala sesuatu itu ada ukuran dan hitungannya maka segala sesuatu juga ada sebabnya sehingga harus ditelusuri bagaimana ia terjadi.

Jalan penelusuran ini sesuai dengan al-Qur'an surat al-Kahfi/18:84-85.

إِنَّا مَكَّنَّا لَهُ فِي الْأَرْضِ وَءَاتَيْنَاهُ مِنْ كُلِّ شَيْءٍ سَبِيلًا ﴿٨٤﴾ فَاتَّبَعَ سَبِيلًا ﴿٨٥﴾

“Sesungguhnya Kami telah memberi kekuasaan kepadanya di (muka) bumi, dan Kami telah memberikan kepadanya jalan (untuk mencapai) segala sesuatu. Maka diapun menempuh suatu jalan” (QS. Al-Kahfi/18:84-85).





BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Model Gelombang Air Dangkal

Gelombang air dangkal adalah gelombang air yang memiliki kedalaman yang jauh lebih kecil dibandingkan dengan panjang gelombangnya. Gelombang air dangkal sering disebut dengan gelombang panjang karena profilnya yang dangkal menyebabkan rata-rata kedalaman fluidanya sama pada setiap titik pengamatan. Diasumsikan dari definisi dangkal bahwa percepatan arah z konstan sehingga turunan total untuk momentum terhadap arah z adalah nol. Hal ini mengakibatkan jika ada benda yang berada di atas gelombang maka benda tersebut akan tetap berada di atas gelombang atau kejadian ini disebut dengan fluida yang tak berotasi.

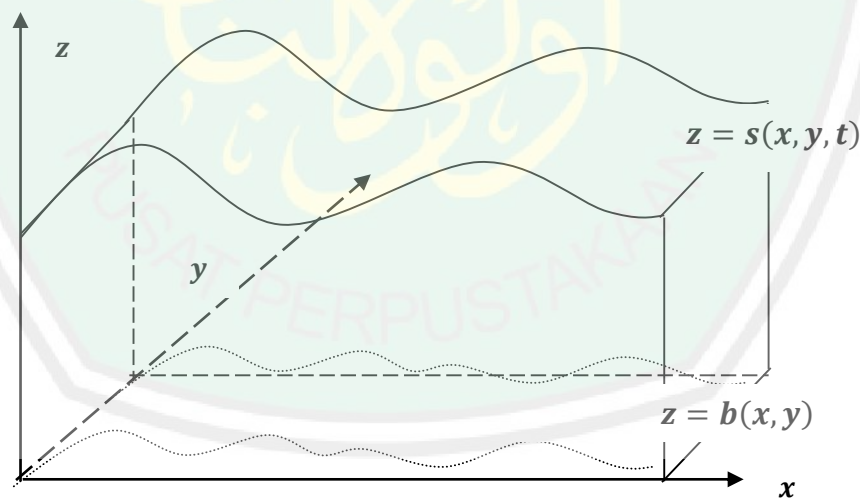
Model dari gelombang air dangkal dua dimensi berhubungan dengan variabel ruang x, y dan variabel waktu t . Model gelombang air dangkal dua dimensi ini diturunkan dari dua persamaan yaitu persamaan kontinuitas dan persamaan momentum yang telah dijabarkan pada kajian teori yang berasal dari hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum yang berdimensi tiga yaitu dimensi ruang x, y, z , dan dimensi waktu t . Penurunan model gelombang air dangkal dua dimensi ini bertujuan untuk menyederhanakan variabel sehingga mempermudah dalam meneliti sebuah permasalahan tentang gelombang air dangkal.

Konstruksi model gelombang air dangkal dua dimensi dimulai dari penurunan kondisi batas kinematik gelombang air dangkal yang meliputi kondisi

batas kinematik permukaan gelombang dan kondisi batas kinematik dasar gelombang. Kemudian penurunan tekanan hidrostatis untuk gelombang air dangkal dua dimensi berasal dari persamaan momentum arah z . Setelah itu ditentukan rata-rata kedalamannya untuk ketiga persamaan yang tersisa yaitu persamaan kontinuitas, persamaan momentum arah x , dan persamaan momentum arah y . Berikut ini adalah penjabaran dari konstruksi model gelombang air dangkal dua dimensi.

3.2 Penurunan Kondisi Batas Kinematik

Kondisi batas kinematik pada permukaan gelombang dan dasar gelombang air dangkal diilustrasikan pada Gambar 3.1 sebagai berikut.



Gambar 3.1 Kondisi Batas Kinematik

Berikut ini adalah penurunan kondisi batas kinematik gelombang air dangkal.

3.2.1 Kondisi Batas Kinematik Permukaan

Pada arah z , batas atas gelombang air dangkal adalah permukaan gelombang (*surface*) yang dituliskan dengan $z = s(x, y, t)$. Diketahui bahwa permukaan

gelombang dipengaruhi oleh variabel x , y , dan t . Kemudian kondisi batas kinematik permukaan gelombang air dangkal dijabarkan sebagai berikut.

$$z = s(x, y, t)$$

$$z - s(x, y, t) = 0$$

Dituliskan secara implisit bentuk $z - s(x, y, t) = F(x, y, z, t)$ kemudian karena fluida tak berotasi maka turunan total untuk fungsi implisit F adalah nol.

$$\frac{dF(x, y, z, t)}{dt} = 0$$

Aturan rantai untuk turunan total digunakan, sehingga

$$\frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

Diketahui bahwa perubahan x terhadap waktu t adalah u , perubahan y terhadap waktu t adalah v , dan perubahan z terhadap waktu t adalah w sehingga

$$\frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial x} u + \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial y} v + \frac{\partial F(x, y, z, t)}{\partial z} w = 0$$

Kemudian substitusikan fungsi yang diketahui sebelumnya menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (z - s(x, y, t)) + u \frac{\partial}{\partial x} (z - s(x, y, t)) + v \frac{\partial}{\partial y} (z - s(x, y, t)) \\ + w \frac{\partial}{\partial z} (z - s(x, y, t)) = 0 \end{aligned}$$

Digunakan penulisan operator turunan menjadi

$$-s_t - us_x - vs_y + w = 0$$

Kemudian s_t dipindah ruas menjadi

$$-us_x - vs_y + w = s_t \quad (3.1)$$

3.2.2 Kondisi Batas Kinematik Dasar

Pada arah z , batas bawah gelombang air dangkal adalah dasar gelombang (*bottom*) yang dituliskan dengan $z = b(x, y)$. Diketahui bahwa dasar gelombang dipengaruhi oleh variabel x dan y . Kemudian kondisi batas kinematik dasar gelombang air dangkal dijabarkan sebagai berikut.

$$z = b(x, y)$$

$$z - b(x, y) = 0$$

Dituliskan secara implisit bentuk $z - b(x, y) = G(x, y, z)$ kemudian karena fluida tak berotasi maka turunan total untuk fungsi implisit G adalah nol.

$$\frac{dG(x, y, z)}{dt} = 0$$

Aturan rantai untuk turunan total digunakan, sehingga

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial t} + \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

Diketahui bahwa perubahan x terhadap waktu t adalah u , perubahan y terhadap waktu t adalah v , dan perubahan z terhadap waktu t adalah w sehingga

$$\frac{\partial G(x, y, z)}{\partial t} + \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial x} u + \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial y} v + \frac{\partial G(x, y, z)}{\partial z} w = 0$$

Substitusikan fungsi yang diketahui sebelumnya sehingga

$$\frac{\partial}{\partial t}(z - b(x, y)) + u \frac{\partial}{\partial x}(z - b(x, y)) + v \frac{\partial}{\partial y}(z - b(x, y))$$

$$+ w \frac{\partial}{\partial z}(z - b(x, y)) = 0$$

Kemudian digunakan penulisan untuk operator turunan menjadi

$$-ub_x - vb_y + w = 0 \quad (3.2)$$

3.3 Tekanan Hidrostatik

Setelah penjabaran kondisi batas kinematik gelombang air dangkal kemudian ditentukan tekanan hidrostatik untuk gelombang air dangkal dua dimensi yang berasal dari persamaan momentum arah z . Berikut ini adalah persamaan momentum arah z .

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.3)$$

Persamaan (3.4) diuraikan dengan menggunakan aturan rantai turunan menjadi

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Dipisahkan untuk w dan sebelumnya diketahui bahwa perubahan x terhadap waktu t adalah u , perubahan y terhadap waktu t adalah v , dan perubahan z terhadap waktu t adalah w sehingga menjadi

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} + w \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.4)$$

Substitusikan persamaan kontinuitas pada persamaan (3.4) kemudian menggunakan aturan turunan total untuk w sehingga persamaan (3.4) menjadi

$$\frac{dw}{dt} = g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.5)$$

Setelah itu karena fluida tak berotasi maka turunan total untuk w adalah nol dan g dikanselasi sehingga persamaan (3.5) menjadi

$$\partial P = \rho g \partial z \quad (3.6)$$

P adalah tekanan hidrostatik yang perubahannya adalah tetap namun dipengaruhi oleh permukaan gelombangnya. Persamaan untuk tekanan hidrostatik ini ditentukan dengan mengintegalkannya terhadap variabel z dengan batas atas $s(x, y, t)$ dan

dengan batas bawahnya sepanjang arah z yang konstan sehingga persamaan (3.6) menjadi

$$\int \partial P = \int_z^{s(x,y,t)} \rho g dz$$

$$P = \rho g z \Big|_z^{s(x,y,t)}$$

$$= \rho g s(x, y, t) - \rho g z$$

$$= \rho g (s(x, y, t) - z) \quad (3.7)$$

Tekanan hidrostatik yang didapat dari persamaan (3.7) kemudian diturunkan terhadap x dan y sehingga menjadi

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho g (s(x, y, t) - z))}{\partial x}$$

$$= \rho g \frac{\partial s}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(\rho g (s(x, y, t) - z))}{\partial y}$$

$$= \rho g \frac{\partial s}{\partial y} \quad (3.9)$$

Persamaan (3.8) disubstitusikan pada persamaan momentum arah x menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\rho g \frac{\partial s}{\partial x} \right)$$

$$= -g \frac{\partial s}{\partial x} \quad (3.10)$$

Persamaan (3.9) disubstitusikan pada persamaan momentum arah y menjadi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \left(\rho g \frac{\partial s}{\partial y} \right)$$

$$= -g \frac{\partial s}{\partial y} \quad (3.11)$$

3.4 Rata-Rata Kedalaman

Setelah menentukan tekanan hidrostatisnya kemudian menentukan rata-rata kedalaman gelombang air dangkal. Persamaan kontinuitas, persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) yang digunakan untuk menentukan rata-rata kedalamannya dengan mengintegrasikan terhadap z dengan batas atas $z = s(x, y, t)$ dan batas bawah $z = b(x, y)$.

3.4.1 Rata-Rata Kedalaman Persamaan Kontinuitas

Pertama, rata-rata kedalaman untuk persamaan kontinuitas dijabarkan sebagai berikut.

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

Kemudian dipisah satu per satu menjadi

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (3.12)$$

Aturan *Leibniz* sesuai dengan subbab 2.6 sebelumnya telah dijelaskan kemudian digunakan untuk integral u dan integral v sedangkan integral w diintegrasikan secara umum, sehingga persamaan (3.12) dijabarkan satu per satu dimulai dari penjabaran

$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dz$ menjadi

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u dz - u|_{s(x,y,t)} \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial x} + u|_{b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u dz - u|_s s_x + u|_b b_x \end{aligned}$$

Penjabaran untuk $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial v}{\partial y} dz$ yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial v}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v dz - v|_{s(x,y,t)} \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial y} + v|_{b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v dz - v|_s s_y + v|_b b_y \end{aligned}$$

Sedangkan penjabaran $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial w}{\partial z} dz$ yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial w}{\partial z} dz &= w|_{s(x,y,t)}^{s(x,y,t)} \\ &= w|_{s(x,y,t)} - w|_{b(x,y)} \\ &= w|_s - w|_b \end{aligned}$$

Hasil dari penjabaran satu per satu di atas menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v dz - u|_s s_x - v|_s s_y + w|_s \\ + u|_b b_x + v|_b b_y - w|_b = 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substitusikan persamaan (3.1) dan (3.2) pada persamaan (3.13) sehingga persamaan

(3.13) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v dz + s_t = 0 \quad (3.14)$$

Kemudian persamaan (3.14) menggunakan kaidah *Riemann* yang sebelumnya telah dijelaskan pada subbab 2.5 yaitu integralnya menggunakan pendekatan rata-rata sehingga persamaan (3.14) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n u_i \Delta z_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_i \Delta z_i \right) + s_t = 0 \quad (3.15)$$

Karena $\Delta z \neq 0$ maka operator limit dapat dihilangkan, misalkan $\sum_{i=1}^n u_i = \bar{u}$, $\sum_{i=1}^n v_i = \bar{v}$, dan diketahui dari definisi dangkal bahwa rata-rata kedalamannya adalah sama yaitu $\Delta z_i = \Delta z = s(x, y, t) - b(x, y) = s - b$ sehingga persamaan (3.15) menjadi

$$\frac{\partial((s-b)\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial((s-b)\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial t} = 0 \quad (3.16)$$

3.4.2 Rata-rata Kedalaman Persamaan Momentum x

Persamaan momentum arah x sebelumnya telah dijelaskan bahwa membutuhkan persamaan tekanan hidrostatis sehingga persamaan momentum arah x menjadi persamaan (3.10). Persamaan (3.10) ditentukan rata-rata kedalamannya yang dijabarkan sebagai berikut.

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} \right) dz = \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \left(-g \frac{\partial s}{\partial x} \right) dz$$

Kemudian dipisah satu per satu menjadi

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dz + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(uv)}{\partial y} dz \\ + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(uw)}{\partial z} dz = -g \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial s}{\partial x} dz \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aturan *Leibniz* sesuai dengan subbab 2.6 sebelumnya telah dijelaskan kemudian digunakan untuk integral u dan integral v sedangkan w menggunakan

pengintegralan secara umum dan $(s - b)$ independen terhadap z sehingga

persamaan (3.17) dijabarkan satu per satu dimulai dari $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial u}{\partial t} dz$ menjadi

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial u}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u dz - u|_{s(x,y,t)} \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial t} + u|_{b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u dz - u|_s s_t \end{aligned}$$

Penjabaran $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dz$ yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u^2 dz - u^2|_{s(x,y,t)} \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial x} + u^2|_{b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u^2 dz - u^2|_s s_x + u^2|_b b_x \end{aligned}$$

Penjabaran $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial uv}{\partial y} dz$ yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial uv}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} uv dz - uv|_{s(x,y,t)} \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial y} + uv|_{b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} uv dz - uv|_s s_y + uv|_b b_y \end{aligned}$$

Sedangkan penjabaran $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial uw}{\partial z} dz$ yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial uw}{\partial z} dz &= uw|_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \\ &= uw|_{s(x,y,t)} - uw|_{b(x,y)} \\ &= uw|_s - uw|_b \end{aligned}$$

Kemudian penjabaran $-g \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial s}{\partial x} dz$ yaitu,

$$\begin{aligned} -g \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial s}{\partial x} dz &= -g \frac{\partial s}{\partial x} z \Big|_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \\ &= -g \frac{\partial s}{\partial x} (z|_{s(x,y,t)} - z|_{b(x,y)}) \\ &= -g(s-b) \frac{\partial s}{\partial x} \end{aligned}$$

Hasil dari penjabaran satu per satu di atas menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} uv dz - u|_s s_t - u^2|_s s_x \\ - uv|_s s_y + uw|_s + u^2|_b b_x + uv|_b b_y - uw|_b = -g(s-b) \frac{\partial s}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Kemudian persamaan (3.2) dikalikan dengan $u|_s$ dan persamaan (3.3) dikalikan dengan $u|_b$ menjadi

$$-u^2|_s s_x - uv|_s s_y + uw|_s = u|_s s_t \quad (3.19)$$

$$-u^2|_b b_x - uv|_b b_y + uw|_b = 0 \quad (3.20)$$

Substitusikan persamaan (3.19) dan (3.20) pada persamaan (3.18) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} uv dz = -g(s-b) \frac{\partial s}{\partial x} \quad (3.21)$$

Kemudian digunakan definisi dari dangkal yang telah dijelaskan sebelumnya pada subbab 3.4.1 persamaan (3.21) menggunakan kaidah *Riemann* yang sebelumnya telah dijelaskan pada subbab 2.5 yaitu integralnya menggunakan pendekatan rata-rata sehingga persamaan (3.21) menjadi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} u_i \Delta z_i \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 \Delta z_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i \Delta z_i \right) \\ & = -g(s - b) \frac{\partial s}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Karena $\Delta z \neq 0$ maka operator limit dapat dihilangkan, misalkan $\sum_{i=1}^{\infty} u = \bar{u}$, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2 = \bar{u}^2$, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i = \bar{u}\bar{v}$, dan diketahui dari definisi dangkal bahwa rata-rata kedalamannya adalah sama yaitu $\Delta z_i = \Delta z = s(x, y, t) - b(x, y) = s - b$ sehingga persamaan (3.22) menjadi

$$\frac{\partial((s - b)\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial((s - b)\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial((s - b)\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = -g(s - b) \frac{\partial s}{\partial x} \quad (3.23)$$

3.4.3 Rata-rata Kedalaman Persamaan Momentum y

Persamaan momentum arah y sebelumnya telah dijelaskan bahwa membutuhkan persamaan tekanan hidrostatis sehingga persamaan momentum arah y menjadi persamaan (3.11). Persamaan (3.11) ditentukan rata-rata kedalamannya yang dijabarkan sebagai berikut.

$$\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} \right) dz = \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \left(-g \frac{\partial s}{\partial y} \right) dz$$

Dipisah satu per satu menjadi

$$\begin{aligned} & \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial v}{\partial t} dz + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(uv)}{\partial x} dz + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(v^2)}{\partial y} dz + \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(vw)}{\partial z} dz \\ & = -g \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial s}{\partial y} dz \end{aligned} \quad (3.24)$$

Aturan *Leibniz* sesuai dengan subbab 2.6 sebelumnya telah dijelaskan kemudian digunakan untuk integral u dan integral v sedangkan integral w menggunakan

pengintegralan secara umum dan $(s - b)$ independen terhadap z sehingga

persamaan (3.24) dijabarkan satu per satu dimulai dari $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial v}{\partial t} dz$ menjadi

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial v}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v dz - v|_{s(x,y,t)} \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial t} + v|_{b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v dz - v|_s s_t \end{aligned}$$

Penjabaran $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(v^2)}{\partial y} dz$ yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial(v^2)}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v^2 dz - v^2|_{s(x,y,t)} \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial y} + v^2|_{b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v^2 dz - v^2|_s s_y + v^2|_b b_y \end{aligned}$$

Penjabaran $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial uv}{\partial x} dz$ adalah yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial uv}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} uv dz - uv|_{s(x,y,t)} \frac{\partial s(x,y,t)}{\partial x} + uv|_{b(x,y)} \frac{\partial b(x,y)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} uv dz - uv|_s s_x + uv|_b b_x \end{aligned}$$

Sedangkan penjabaran $\int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial vw}{\partial z} dz$ yaitu,

$$\begin{aligned} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial vw}{\partial z} dz &= vw|_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \\ &= vw|_{s(x,y,t)} - vw|_{b(x,y)} \\ &= vw|_s - vw|_b \end{aligned}$$

Penjabaran $-g \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial s}{\partial y} dz$ yaitu,

$$\begin{aligned} -g \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \frac{\partial s}{\partial y} dz &= -g \frac{\partial s}{\partial y} z \Big|_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} \\ &= -g \frac{\partial s}{\partial y} (z|_{s(x,y,t)} - z|_{b(x,y)}) \\ &= -g(s-b) \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned}$$

Hasil dari penjabaran satu per satu di atas menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v^2 dz - v|_s s_t - uv|_s s_x \\ -v^2|_s s_y + vw|_s + uv|_b b_x + v^2|_b b_y - vw|_b = -g(s-b) \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Kemudian persamaan (3.1) dikalikan dengan $v|_s$ dan persamaan (3.2) dikalikan dengan $v|_b$ menjadi

$$-uv|_s s_x - v^2|_s s_y + vw|_s = v|_s s_t \quad (3.26)$$

$$-uv|_b b_x - v^2|_b b_y + vw|_b = 0 \quad (3.27)$$

Substitusikan persamaan (3.26) dan (3.27) pada persamaan (3.25), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} uv dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{b(x,y)}^{s(x,y,t)} v^2 dz = -g(s-b) \frac{\partial s}{\partial y} \quad (3.28)$$

Kemudian persamaan (3.28) menggunakan kaidah *Riemann* yang sebelumnya telah dijelaskan pada subbab 2.5 yaitu integralnya menggunakan pendekatan rata-rata sehingga persamaan (3.28) menjadi

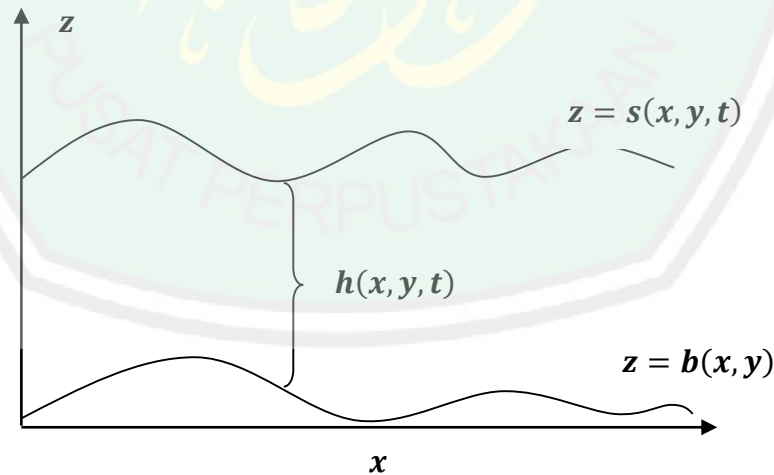
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} v_i \Delta z_i \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i \Delta z_i \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 \Delta z_i \right) \\ = -g(s - b) \frac{\partial s}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Karena $\Delta z \neq 0$ maka operator limit dapat dihilangkan, misalkan $\sum_{i=1}^{\infty} v_i = \bar{v}$, $\sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 = \bar{v}^2$, $\sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i = \bar{u}\bar{v}$, dan diketahui dari definisi dangkal bahwa rata-rata kedalamannya adalah sama yaitu $\Delta z_i = \Delta z = s(x, y, t) - b(x, y) = s - b$ sehingga persamaan (3.22) menjadi

$$\frac{\partial((s - b)\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial((s - b)\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial((s - b)\bar{v}^2)}{\partial y} = -g(s - b) \frac{\partial s}{\partial y} \quad (3.30)$$

3.5 Hubungan Antara Permukaan dengan Dasar

Hubungan antara permukaan gelombang dengan dasar gelombang pada gelombang air dangkal ditunjukkan pada Gambar 3.3 sebagai berikut.



Gambar 3.1 Hubungan antara s dengan b

Pada gambar 3.3 tersebut dapat diketahui bahwa h adalah selisih antara s dengan b . Diketahui bahwa h adalah kedalaman (*height*), s adalah permukaan (*surface*) dan

b adalah dasar (*bottom*). Karena $s(x, y, t)$ dan $b(x, y)$ maka $h(x, y, t)$ sehingga hubungan ini dapat dituliskan seperti berikut.

$$h(x, y, t) = s(x, y, t) - b(x, y) \quad (3.31)$$

Jika persamaan (3.31) diturunkan terhadap waktu t maka persamaan (3.31) menjadi

$$h_t(x, y, t) = s_t(x, y, t) \quad (3.32)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (3.31) dan (3.32) pada persamaan (3.16) maka persamaan (3.16) menjadi

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (3.33)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.31) pada persamaan (3.23) maka persamaan (3.23) menjadi

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} = -gh \frac{\partial s}{\partial x} \quad (3.34)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (3.31) pada persamaan (3.30) maka persamaan (3.30) menjadi sebagai berikut:

$$\frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial y} = -gh \frac{\partial s}{\partial y} \quad (3.35)$$

Persamaan (3.34) dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh \frac{\partial(h+b)}{\partial x} \\ &= -gh \frac{\partial h}{\partial x} - gh \frac{\partial b}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{2}g \frac{\partial h^2}{\partial x} - gh \frac{\partial b}{\partial x} \\ &= -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} - gh \frac{\partial b}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} &= -gh\frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial\left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Persamaan (3.35) juga dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial y} &= -gh\frac{\partial(h+b)}{\partial y} \\ &= -gh\frac{\partial h}{\partial y} - gh\frac{\partial b}{\partial y} \\ &= -\frac{1}{2}g\frac{\partial h^2}{\partial y} - gh\frac{\partial b}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} - gh\frac{\partial b}{\partial y} \\ \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v}^2)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial y} \\ \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial\left(h\bar{v}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Persamaan (3.33), (3.36), dan (3.37) dituliskan kembali dalam bentuk sistem persamaan berikut.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial\left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial\left(h\bar{v}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Persamaan (3.38) inilah yang merupakan sistem persamaan gelombang air dangkal dua dimensi.

3.6 Kajian Keagamaan tentang Model Gelombang Air Dangkal

Manusia telah diberi akal pikiran yang memiliki kemampuan untuk mengkaji, meneliti, dan mengamati segala sesuatu yang telah tercipta di langit dan di bumi. Hal ini sesuai dengan firman Allah dalam surat al-Imran/3:190-191.

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَأُخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ لآيَاتٍ لِأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾
 الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ
 السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَانَكَ فَقِنَا عَذَابَ النَّارِ ﴿١٩١﴾

“Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadaan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka” (QS. al-Imran/3:190-191)

Segala sesuatu yang tercipta di langit dan di bumi begitu luas namun dalam penelitian ini lebih dikhususkan membahas masalah yang berada di bumi, yaitu di air, mengamati tentang gelombang air yang dangkal. Penelitian ini dalam rangka mencari *qadar* yang bisa disamakan dengan persamaan atau model matematika.

Dalam penciptaan langit dan bumi maupun alam semesta ini ternyata memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi. Hal ini sesuai dengan firman Allah surat al-Furqan/25:2.

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُ شَرِيكٌ فِي
 الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ وَتَقْدِيرًا ﴿٢﴾

“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia telah

menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (QS. al-Furqan/25:2)

Segala sesuatu tercipta sesuai dengan ukurannya juga terdapat dalam firman Allah surat al-Qamar/54:49.

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

“*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*” (QS. al-Qamar/54:49)

Segala sesuatu yang telah tercipta, selain memiliki ukurannya atau persamaannya, juga memiliki catatan atau hitungan yang dihitung dan dikumpulkan jadi satu lengkap yang berada di Lauh Mahfuzh. Hal ini sesuai dengan firman Allah surat yasin/36:12.

إِنَّا نَحْنُ نُحْيِي الْمَوْتَىٰ وَنَكْتُبُ مَا قَدَّمُوا وَعَاءَثْرَهُمْ وَكُلَّ شَيْءٍ أَحْصَيْنَاهُ فِي إِمَامٍ مُّبِينٍ ﴿١٢﴾

“*Sesungguhnya Kami menghidupkan orang-orang mati dan Kami menuliskan apa yang telah mereka kerjakan dan bekas-bekas yang mereka tinggalkan. dan segala sesuatu Kami kumpulkan dalam kitab induk yang nyata (Lauh mahfuzh)*” (QS. Yasin/36:12)

Manusia juga harus melakukan perhitungan bahkan penelusuran tentang segala sesuatu yang tercipta karena Allah telah memberikan kekuasaan kepada manusia untuk melakukannya. Hal ini sesuai dengan firman Allah surat al-Kahfi/18:84-85.

إِنَّا مَكَّنَّا لَهُمْ فِي الْأَرْضِ وَءَاتَيْنَاهُ مِنْ كُلِّ شَيْءٍ سَبَبًا ﴿٨٤﴾ فَاتَّبَعَ سَبَبًا ﴿٨٥﴾

“*Sesungguhnya Kami telah memberi kekuasaan kepadanya di (muka) bumi, dan Kami telah memberikan kepadanya jalan (untuk mencapai) segala sesuatu. Maka diapun menempuh suatu jalan*” (QS. al Kahfi/18:84-85)

Oleh karena itu, dalam penelitian tentang gelombang air yang dangkal ini dibahas tentang penelusurannya mengenai bagaimana model gelombang air dangkal ini terbentuk kemudian menelusuri dari mana model itu berasal sehingga

sungguh benar firman Allah yang menyatakan bahwa segala sesuatu yang tercipta di langit dan di bumi ini tidaklah sia-sia.

Setelah dipelajari, memang benar bahwa segala sesuatu yang tercipta di langit dan di bumi ini tidaklah sia-sia. Begitu juga dengan gelombang air dangkal dua dimensi bahwa ia memiliki *qadar* atau persamaan atau model matematikanya. Berikut ini adalah model matematika untuk gelombang air dangkal dua dimensi.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial\left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial\left(h\bar{v}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

dengan u dan v adalah kecepatan arah x dan y , g adalah konstanta gravitasi, b adalah profil dasar gelombang air dangkal, dan h adalah kedalaman gelombang air dangkal.

Akhirnya, dengan adanya *qadar* atau model matematika untuk gelombang air dangkal dua dimensi ini dapat memperluas ilmu pengetahuan. *Qadar* atau model matematika terdapat pada semua ciptaan Allah yang semakin dipelajari semakin juga meningkatkan keimanan dan ketakwaan kepada Allah. Segala sesuatu yang tercipta baik di langit dan di bumi ini memang benar-benar tidaklah sia-sia. Maha Besar Allah dengan segala keagungan dan kekuasaan-Nya.



BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Model gelombang air dangkal dua dimensi dikonstruksi dengan membutuhkan persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan kondisi batas kinematik gelombang air dangkal dua dimensi. Kemudian menentukan persamaan tekanan hidrostatis dari penguraian persamaan momentum arah z dan persamaan tekanan hidrostatis ini lalu disubstitusikan pada persamaan momentum arah x dan y . Setelah itu menentukan rata-rata kedalaman gelombang air dangkal dua dimensi dari persamaan kontinuitas dan persamaan momentum arah x, y dengan menggunakan integral *Riemann* dan *Leibniz* dengan batas atas dan bawahnya adalah kondisi batas kinematik gelombang air dangkal dua dimensi. Dengan demikian, model gelombang air dangkal dua dimensi terbentuk sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial\left(h\bar{u}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial x} \\ \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial\left(h\bar{v}^2 + \frac{1}{2}gh^2\right)}{\partial y} &= -gh\frac{\partial b}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

dengan u dan v adalah kecepatan arah x dan y , g adalah gravitasi, b adalah profil dasar gelombang air dangkal, dan h adalah kedalaman gelombang air dangkal.

4.2 Saran

Pada penelitian tentang analisis konstruksi gelombang air dangkal dua dimensi ini tidak diberikan simulasi, baik dari solusi analitik maupun numeriknya. Oleh karena itu, pada penelitian selanjutnya diharapkan bisa menjelaskan solusi analitik maupun solusi numerik dari model gelombang air dangkal dua dimensi serta bisa mensimulasikannya dengan berbagai metode numerik.





DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Basyuni, M. 2007. *Al-Qur'an dan Tafsirnya Jilid 8*. Jakarta: Departemen Agama Republik Indonesia.
- Bronson, R. 2007. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga.
- Dasuki, H. 1995. *Al-Qur'an dan Tafsirnya Jilid II*. Yogyakarta: PT Dana BHakti Wakaf.
- Dasuki, H. 1995. *Al-Qur'an dan Tafsirnya Jilid IV*. Yogyakarta: PT Dana BHakti Wakaf.
- Camfield, F. E. 1980. *Tsunami Engineering*. United State of America: Coastal Engineering Research Center.
- Jalaludin, I. 1993. *Riwayat Turunnya Ayat-Ayat Suci Al-Qur'an*. Semarang: CV Asy-Syifa'.
- Kampf, J. 2009. *Ocean Modelling for Beginners*. London: Springer.
- Kartono. 2012. *Persamaan Diferensial Biasa*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Mungkasi, S. 2012. ANUGA Software for Numerical Simulations of Shallow Water Flows. *Archive Mathematics*, 1: 1-30.
- Mustain, M. 2010. *Mekanika Fluida*. Surabaya: ITSPress.
- Olson, R. M. 1993. *Dasar-Dasar Mekanika Fluida Teknik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Umum.
- Purcell, J. E. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Rousseau, M. 2012. Overland Flow Modelling with the Shallow Water Equations using a Well Balanced Numerical Scheme. *Journal of Computer Science and Information*, 1 (5): 1-8.
- White, F. M. 1986. *Mekanika Fluida*. Jakarta: Erlangga.

