PENGGUNAAN FUNGSI HIPERBOLIK DAN ALJABAR DALAM PEMBUKTIAN HOMEOMORPHIK PADA RUANG-RUANG TOPOLOGI

SKRIPSI

Oleh :
MOCH. LUKMANUL CHAKIM
NIM. 05510036

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

PENGGUNAAN FUNGSI HIPERBOLIK DAN ALJABAR DALAM PEMBUKTIAN HOMEOMORPHIK PADA RUANG-RUANG TOPOLOGI

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
MOCH. LUKMANUL CHAKIM
NIM. 05510036

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

PENGGUNAAN FUNGSI HIPERBOLIK DAN ALJABAR DALAM PEMBUKTIAN HOMEOMORPHIK PADA RUANG -RUANG TOPOLOGI

SKRIPSI

Oleh :
MOCH. LUKMANUL CHAKIM
NIM. 05510036

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal : 02 Maret 2011

Pembimbing I	Pembimbing II
Wahyu H. Irawan, M. Pd	**Dr. Ahmad Barizi M.A**
NIP. 19710420 200003 1 003	**NIP. 19731212 199803 1 001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENGGUNAAN FUNGSI HIPERBOLIK DAN ALJABAR DALAM PEMBUKTIAN HOMEOMORPHIK PADA RUANG -RUANG TOPOLOGI

SKRIPSI

Oleh :
MOCH. LUKMANUL CHAKIM
NIM. 05510036

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal : 24 Maret 2011

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	**: Drs. H. Turmudzi** **NIP. 19571005 198203 1 006**	( )
2. Ketua	**: Hairur Rahman, S.Pd, M.Si** **NIP. 19800429 200604 1 003**	( )
3. Sekretaris	**: Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP. 19710420 200003 1 003**	( )
4. Anggota	**: Dr. Ahmad Barizi M.A** **NIP. 19751006 200312 1 001**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : MOCH. LUKMANUL CHAKIM

NIM : 05510036

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang,
Yang membuat pernyataan

M. Lukmanul Chakim
NIM. 05510036

MOTTO

Belajarlah, karena tidak ada seorangpun yang dilahirkan dalam keadaan berilmu melainkan dalam keadaan bodoh.

Tuntutlah ilmu dari buaian ibu sampai liang lahat

PERSEMBAHAN

Segala puji syukur ke hadirat Allah Seru Sekalian Alam atas Rahmat, Taufik dan Hidayah-Nya yang telah diberikan kepada penulis

penulis persembahkan karya ini kepada orang terbaik & tercinta ayahanda M. Asyik dan ibunda Artikah sebagai cinta kasih dan bakti penulis. untuk kakak Ismaniyah, Misbahuddin, Musyrifah, M. Fatchur Rochman, kepada habibati Durrotul wachda, dan seluruh keluarga besar "PS. Joss Cimande"

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirrobbil ‘alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “PENGGUNAAN FUNGSI HIPERBOLIK DAN ALJABAR DALAM PEMBUKTIAN HOMEOMORPHIK PADA RUANG-RUANG TOPOLOGI ” ini dengan baik. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam mencapai kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada :

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) MALIKI Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) MALIKI Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) MALIKI Malang.
4. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Dr. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing keagamaan, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.

6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) MALIKI Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah.
7. Orang tua, Kakak, Adik, dan keluarga tersayang, yang selalu memberikan bantuan, semangat dan do'a selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman Matematika angkatan 2005, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
9. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spiritual penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya bidang Matematika. Amien.

Malang, 04 Maret 2011

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Chakim, Moch. Lukmanul 2011. *Penggunaan Fungsi Hiperbolik Dan Aljabar Dalam Pembuktian Homeomorphik Pada Ruang-Ruang Topologi.* Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing : Wahyu Hengky Irawan, M.Pd
Dr. Ahmad Barizi, M.A

Kata Kunci : Fungsi, Hiperbolik, Ruang Topologi, Homeomorphik

Dalam matematika, ruang topologi adalah suatu himpunan tidak kosong (X) bersama suatu kelas(t) jika dan hanya jika t memenuhi 3 aksioma : X dan ϕ termasuk dalam *t*, Gabungan dari set-set anggota dari *t* adalah anggota *t*, Irisan dari dua set anggota *t* adalah anggota *t*.

Pada skripsi ini dibahas penggunaan fungsi hiperbolik dan aljabar untuk membuktikan homeomorphik pada ruang-ruang topologi. Pengertian ruang topologi homeomorphik adalah jika terdapat dua ruang topologi memiliki fungsi dan fungsi tersebut memenuhi sifat bijektif dan bikontinu. Fungsi bijektif adalah fungsi satu-satu dan onto, fungsi bikontinu adalah fungsi dan inversnya adalah kontinu di suatu titik. Fungsi hiperbolik merupakan kombinasi dari fungsi-fungsi eksponen e^x dan e^{-x}..

Berdasarkan pembahasan skripsi ini menggunakan fungsi hiperbolik dan fungsi aljabar digunakan untuk membuktikan homeomorphik pada ruang topologi. Contoh pertama fungsi hiperbolik $f(x)=\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ dan fungsi aljabar $f(x)=2x-3$ pada pembahasan, langkah awal dalam menggunakan fungsi tersebut diperoleh bahwa fungsi tersebut 1-1 dan onto. langkah terakhir diperoleh bahwa fungsi dan invers fungsi tersebut adalah kontinu di $a \in R$, maka terbukti bahwa ruang topologi (R,r) dan (R,s) adalah homeomorphik. Selanjutnya dari contoh 2 fungsi $f(x)=e^x - e^{-x}$ .dan $f(x)=\dfrac{2x-3}{2}$ digunakan pada ruang topologi (R,r) dengan ruang topologi (Q,q). dengan langkah yang sama pada contoh pertama, diperoleh kedua fungsi tersebut bijektif dan bikontinu. Sehingga ruang topologi (R,r) dan (Q,q) adalah homeomorphik. Dari contoh 3 fungsi $f(x)=2e^x + e^{-x}$ dan $f(x)=4x + 2$ digunakan pada ruang topologi (R,r) dengan ruang topologi (Z,z). dengan langkah yang sama pada contoh pertama, diperoleh kedua fungsi tersebut bijektif dan kontinu. Sehingga ruang topologi (R,r) dan (Z,z) adalah homeomorphik

ABSTRACT

Chakim, Moch. Lukmanul 2011. Use of Hyperbolic And Algebra Functions In Prove Homeomorphik Topological spaces. Thesis, Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors : Wahyu Hengky Irawan, M. Pd
Dr. Ahmad Barizi, M.A

Keywords: Functions, Hyperbolic, Space Topology, Homeomorphik

In mathematics, a topological space is a set (X) with a class (t) if and only if *t* satisfy three axioms: X and ϕ included in t, the combination of sets of members of *t* is a member of *t*, the wedge of two sets of *t* is a member of *t*.

In this thesis discussed the use of hyperbolic and algebra functions to prove homeomorphik on topological spaces. Understanding homeomorphik topological space is if there are two topological space have a functions and these functions satisfy properties bikontinu and bijektif. Bijektif function is the function one-one and onto, bikontinu function is the function and the inverse is continuous at a point. Hyperbolic function is a combination of exponential functions e^x and e^{-x}

Based on the discussion of this thesis uses hyperbolic functions and algebraic functions are used to prove homeomorphik on topological spaces. The first example of the hyperbolic function $f(x)=\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ and algebraic function $f(x)=2x-3$ in the discussion, the first step in using these functions is obtained that the function is 1-1 and onto. last step is obtained that the function and inverse function is continuous at $a \in R$, then proved that the topological space (R, r) and (R s) is homeomorphik. Furthermore, from sample 2 functions $f(x)=e^x - e^{-x}$. and $f(x)=\frac{2x-3}{2}$ used in a topological space (R, r) with a topological space (Q, q). with the same steps at the first instance, obtained this functions bikontinu and bijektif. So the topological space (R, r) and (Q, q) is homeomorphik. From a sample of 3 function $f(x)=2e^x + e^{-x}$ and $f(x)=4x + 2$ is used in a topological space (R, r) with a topological space (Z, z). with the same steps at the first instance, obtained this functions bijektif and continuous. So the topological space (R, r) and (Z, z) is homeomorphik.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang.

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab,* tidak cukup hanya berbekal kemampuan intelektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdussakir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat ke As-Shaad (38) ayat 29 :

كِتَٰبٌ أَنزَلْنَٰهُ إِلَيْكَ مُبَٰرَكٌ لِّيَدَّبَّرُوٓا۟ ءَايَٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُو۟لُوا۟ ٱلْأَلْبَٰبِ ﴿٢٩﴾

Artinya : "ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka memperhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran". (QS. As-Shaad 38 : 29)

Pendidikan merupakan suatu upaya transformasi nilai dan pengembangan potensi manusia yang berlangsung secara formal maupun informal karena pendidikan juga berfungsi untuk mengembangkan potensi manusia untuk dirinya sendiri. Dari berbagai teori pendidikan yang dihasilkan para pakar ilmu pendidikan, telah disepakati bahwa pendidikan harus disampaikan. Dengan demikian, pendidikan adalah suatu peristiwa penyampaian atau proses transformasi. Alqur'an menegaskan hal yang serupa ketika menyampaikan meterinya kepada penerimanya, yaitu Nabi

Muhammad SAW sebagaimana yang terdapat dalam surat Al Maidah (5) ayat 67 :

۞ يَـٰٓأَيُّهَا ٱلرَّسُولُ بَلِّغْ مَآ أُنزِلَ إِلَيْكَ مِن رَّبِّكَ ۖ وَإِن لَّمْ تَفْعَلْ فَمَا بَلَّغْتَ رِسَالَتَهُۥ ۚ وَٱللَّهُ
يَعْصِمُكَ مِنَ ٱلنَّاسِ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يَهْدِى ٱلْقَوْمَ ٱلْكَـٰفِرِينَ ﴿٦٧﴾

Artinya :"Hai Rasul, sampaikanlah apa yang disampaikan kepadamu dari Tuhanmu. Dan jika tidak kamu kerjakan (apa yang diperintahkan itu, berarti) kamu tidak menyampaikan amanah-Nya. Allah memelihara kamu dari (gangguan) manusia. Sesungguhnya Allah tidak memberi petunjuk kepada orang yang kafir". (QS. Al Maidah 5 : 67)

Di antara cabang matematika yang banyak manfaatnya untuk kehidupan sehari-hari adalah himpunan. Himpunan adalah kumpulan objek–objek yang terdefinisi dengan jelas. ruang topologi adalah suatu himpunan tidak kosong (X) bersama suatu kelas(t) jika dan hanya jika t memenuhi 3 aksioma :

1. X dan ϕ termasuk dalam *t*
2. Gabungan dari set-set anggota dari *t* adalah anggota *t*
3. Irisan dari dua set anggota *t* adalah anggota *t*

Anggota-anggota dari *t* disebut set-set buka dari *t*, dan X bersama *t* yaitu (X , *t)* disebut *ruang topolgi* (Wahyudin, 1992:60).

Dua ruang topologi disebut ruang topologi homeomorphik atau topologi equvalen jika fungsi yang digunakan fungsi homeomorphisme atau fungsinya bijektif dan bikontinu.

Berdasarkan uraian di atas, maka penulis ingin lebih dalam membahas permasalahan ini dengan judul " Penggunaan Fungsi Hiperbolik

Dan Aljabar Dalam Pembuktian Homeomorphik Pada Ruang-Ruang Topologi”

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana membuktikan homeomorphik pada ruang-ruang topologi dengan menggunakan fungsi hiperbolik dan fungsi aljabar?

1.3 Tujuan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah mencari informasi tentang pembuktian homeomorphik ruang-ruang topologi dengan manggunakan fungsi hiperbolik dan fungsi aljabar.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai topologi.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya dalam membuktikan ruang-ruang topologi yang saling homeomorphik.
3. Bagi lembaga UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika untuk mata kuliah topologi.

1.5 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini menggunakan penelitian perpustakaan (library research). Penelitian perpustakaan bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi dengan bermacam-macam material yang terdapat dalam ruangan perpustakaan, seperti buku-buku, majalah, dokumen dan lainnya.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

a. Merumuskan masalah. Sebelum penulis memulai kegiatannya, penulis membuat rancangan terlebih dahulu mengenai suatu permasalahan yang akan dibahas.
b. Mengumpulkan data dan informasi dengan cara membaca literatur yang berkaitan dengan fungsi hiperbolik, aljabar, dan ruang topologi.
c. Mengambil contoh ruang-ruang topologi yang akan dibuktikan
d. Mendefinisikan fungsi hiperbolik dan fungsi aljabar
e. Pembuktian homeomorphik ruang-ruang topologi dengan menggunakan fungsi yang telah didefinisikan.
f. Memberi kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.6 Sistem Penulisan

Adapun sistematika dari penyusunan skripsi ini adalah :

BAB I PENDAHULUAN

Berisi latar belakang belakang, rumusan masalah, tujuan, pembatasan masalah, metode penelitian

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori – teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian himpunan, fungsi, fungsi bijektif, limit fungsi, fungsi kontinu, fungsi eksponen, fungsi hiperbolik, fungsi aljabar, ruang topologi, ruang topologi homeomorphik, kajian ruang topologi dalam Alqur'an.

BAB III PEMBAHASAN

Berisi secara rinci tentang pembuktian homeomorphik pada ruang-ruang topologi dengan menggunakan fungsi hiperbolik dan fungsi aljabar.

BAB IV PENUTUP

Dalam bab ini disajikan tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Ruang Topologi dalam Alqur’an

Tuhan menciptakan alam semesta dengan kode-kode tertentu-struktur bilangan tertentu. Alam sendiri mcngajarkan kepada manusia tentang adanya periode-periode tertentu yang selalu berulang, terstruktur dan sistematis, misalnya, Bumi dan planet-planet, bintang-bintang, DNA, kromosom, sifat atom, lapisan bumi dan atmosfer perhatikan firman Allah surat ke 39 ayat 9.

أَمَّنۡ هُوَ قَٰنِتٌ ءَانَآءَ ٱلَّيۡلِ سَاجِدٗا وَقَآئِمٗا يَحۡذَرُ ٱلۡأٓخِرَةَ وَيَرۡجُواْ رَحۡمَةَ رَبِّهِۦۗ قُلۡ هَلۡ يَسۡتَوِي ٱلَّذِينَ يَعۡلَمُونَ وَٱلَّذِينَ لَا يَعۡلَمُونَۗ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٩

Artinya :(apakah kamu Hai orang musyrik yang lebih beruntung) ataukah orang yang beribadat di waktu-waktu malam dengan sujud dan berdiri, sedang ia takut kepada (azab) akhirat dan mengharapkan rahmat Tuhannya? Katakanlah: "Adakah sama orang-orang yang mengetahui dengan orang-orang yang tidak mengetahui?" Sesungguhnya orang yang berakallah yang dapat menerima pelajaran (Qs. Az-Zumar 39 :9).

Alqur’an menjelaskan bahwa Tuhan menciptakan sesuatu dengan perhitungan yang sangat teliti, misalkan menciptakan bumi dengan menghitung apa saja anggota yang akan berada di bumi. Lihat firman Allah surat ke 72 ayat 28

لِّيَعۡلَمَ أَن قَدۡ أَبۡلَغُواْ رِسَٰلَٰتِ رَبِّهِمۡ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيۡهِمۡ وَأَحۡصَىٰ كُلَّ شَيۡءٍ عَدَدَۢا ٢٨

Artinya : Supaya dia mengetahui, bahwa Sesungguhnya rasul-rasul itu Telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan dia menghitung segala sesuatu satu persatu (Qs. Al-Jinn 72 : 28).

Dalam pandangan Alqur’an, tidak ada peristiwa yang terjadi secara kebetulan. Semua terjadi dengan “hitungan” (Arifin Muftie, 2004). Pada konsep ruang topologi tidak lepas dari perhitungan. Unsur pada ruang topologi dihitung sehingga membentuk suatu ruang topologi.

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Alqur’an, salah satunya adalah matematika. konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al Qur’an, di antaranya adalah masalah himpunan, logika, pemodelan, statistic, topologi dan lain sebagainya.

Ruang topologi tidak lepas dari suatu himpunan, himpunan merupakan kumpulan objek-objek yang mempunyai cirri-ciri yang sangat jelas.

Mari kita lihat firman Allah SWT dalam Alqur’an surat ke 35 ayat 1.

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ جَاعِلِ ٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُوْلِيٓ أَجۡنِحَةٖ مَّثۡنَىٰ وَثُلَٰثَ
وَرُبَٰعَۚ يَزِيدُ فِي ٱلۡخَلۡقِ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ ١

Artinya :Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu (Qs. Al-Faathir 35 : 1).

Dalam ayat 1 surat al-Faathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki. Jadi, pada ayat tersebut terdapat tiga kelompok, yaitu :

1. Kelompok melaikat bersayap dua,
2. Kelompok malaikat bersayap tiga, dan
3. Kelompok malaikat bersayap empat.

Sesuai dengan definisinya ruang topologi adalah suatu himpunan tidak kosong (X) bersama suatu kelas(t) dimana anggota dari kelas tersebut adalah bagian dari himpunan tidak kosong (X, t). Hal ini dikuatkan dengan firman Allah dalam Alqur'an surat ke 24 ayat 45.

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٍ مِّن مَّآءٍ ۖ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ بَطْنِهِۦ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ رِجْلَيْنِ
وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰٓ أَرْبَعٍ ۚ يَخْلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿٤٥﴾

Artinya : Dan Allah Telah menciptakan semua jenis hewan dari air, Maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu (Qs. Al-Nuur 24 : 45).

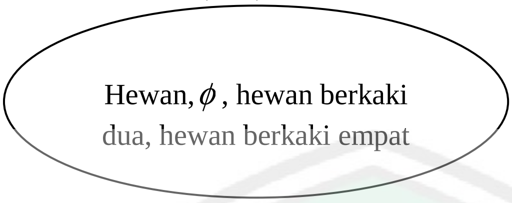
(Abdussakir, 2009:3)

Ayat di atas menjelaskan golongan, atau sekumpulan makhluk yang disebut hewan, dalam kelompok hewan tersebut ada kelompok hewan yang berbeda-beda. Terapannya pada ruang topologi yaitu

(X) **:** { hewan }

Kelas (x) **:** {Hewan, ϕ , hewan berkaki dua, hewan berkaki empat }

(X,x)



1. X dan ϕ termasuk dalam x
2. Gabungan dari set-set anggota dari x adalah anggota x
3. Irisan dari dua set anggota x adalah anggota x

Kelas x merupakan topologi pada X, dan dikatakan ruang topologi karena kelas x bersama X memenuhi tiga aksioma yang digunakan untuk membuktikan suatu ruang topologi.

2.2 Himpunan

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang mempunyai sifat tertentu dan didefinisikan dengan jelas. Objek dalam himpunan mempunyai sifat tertentu dan didefinisikan dengan jelas, agar dapat ditentukan apakah suatu objek termasuk dalam himpunan atau tidak.

Objek dalam himpunan disebut anggota himpunan, elemen himpunan, atau unsur himpunan. Untuk menyatakan himpunan digunakan huruf besar (huruf kapital) seperti A, B, C sedangkan anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil a, b, c dan ditulis diantara dua kurung kurawal

Ada beberapa cara untuk menyatakan himpunan

1. Cara pendaftaran atau tabulasi

   Cara pendaftaran atau tabulasi, dengan menuliskan semua anggotanya, elemen yang tidak ada dalam daftar berarti bukan anggota himpunan tersebut. Apabila anggota himpunan itu banyak, untuk menuliskan semua anggotanya diwakili "…" dan anggota yang diwakili tersebut sudah tertentu dan dapat disebutkan dengan benar. Misalkan A = {1, 2, 3, …}(Suharti dan Sukirman, 1993:2).

2. Cara dengan menunjukkan syarat keanggotaan

   Dalam cara ini hanya dituliskan syarat yang harus dipenuhi oleh anggota himpunan. Semua objek yang memenuhi syarat tersebut adalah anggota himpunan, meskipun tidak ditulis satu demi satu. Cara menyatakan him-punan dengan dengan syarat keanggotaan disebut pula cara pemerian atau cara diskripsi. Misalkan A = $\{x \mid x \in c, x < 5\}$ (Suharti dan Sukirman, 1993:3).

Himpunan semesta

Himpunan semesta dinyatakan dengan huruf S (himpunan semesta), huruf U (universal set), atau lambang lain dengan penjelasan sebelumnya. Misalkan A = {1, 2, 3} dapat ditetapkan S = {1, 2, 3, …, 10} (Suharti dan Sukirman, 1993:4).

Himpunan kosong

Definisi : Himpunan kosong atau hampa adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong dinyatakan dengan ϕ atau { } (Suharti dan Sukirman, 1993:4).

Himpunan bagian

Definisi : Himpunan A disebut himpunan bagian (sub set) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota dari A menjadi anggota dari B.

Jika himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B, maka ditulis $A \subset B$. jika himpunan C bukan himpunan bagian dari himpunan D, maka ditulis $C \not\subset D$

Jadi $A \subset B$ jika $(\forall x)$. $x \in A \Rightarrow x \in B$. $A \subset B$ dapat diartikan bahwa himpunan B memuat himpunan A, dan dinyatakan dengan $B \supset A$ (Suharti dan Sukirman, 1993:6).

Himpunan kuasa

Definisi : Himpunan kuasa (power set) dari himpunan A adalah himpunan semua himpunan bagian dari himpunan A. Himpunan kuasa dari himpunan A dinyatakan dengan lambing P(A) atau 2^A (Suharti dan Sukirman, 1993:8).

Diberikan himpunan A dan B, yaitu subhimpunan dari X. maka dapat dibentuk himpunan baru berikut :

1. Komplemen himpunan A : $A^c = \{x \mid x \in X, x \notin A\}$
2. Irisan himpunan A dan B : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$
3. Gabungan himpunan A dan B : $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$
4. Selisih himpunan A dan B : $A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\}$

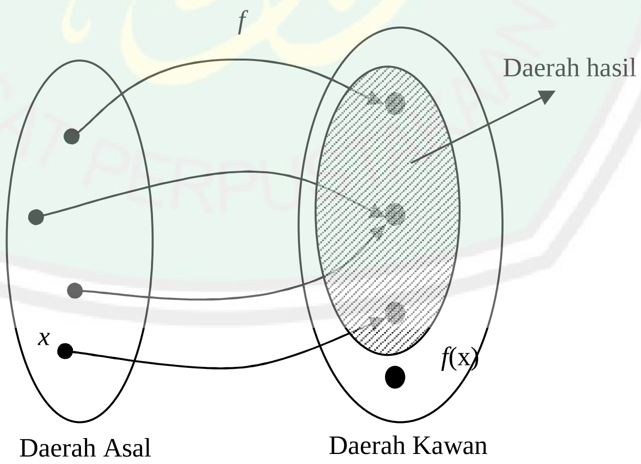
Misalkan X suatu himpunan semesta dan A dan B subhimpunan dari X. Maka diperoleh sifat : 1. $A \cup A^c = X$,

2. $A \cap A^c = \phi$,
3. $A^c = X - A$,
4. $(A^c)^c = A$,
5. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
6. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Ahmad Arifin, 2000 : 3).

2.3 Fungsi

Definisi 5

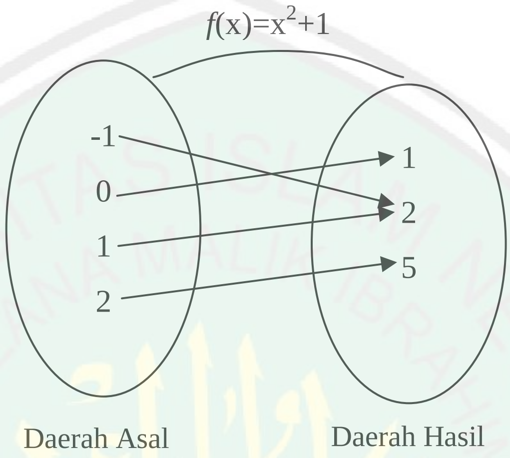
Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua, himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (jelajah) fungsi tersebut (Purcell dan Varberg, 1987:48).



Gambar 1 fungsi
(Purcell dan Varberg, 1987:48)

Contoh 1 :

Jika f adalah fungsi dengan aturan $f(x) = x^2 + 1$ dan jika daerah asal A = {-1, 0, 1, 2} maka daerah hasil B = {1,2,5 }



Gambar 2 fungsi

2.4 Fungsi Surjektif

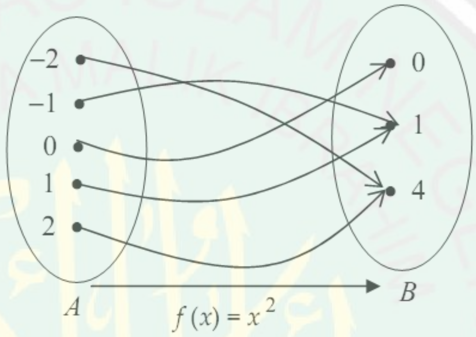
Misalkan f suatu fungsi dari A ke dalam B, maka daerah hasil f(A) dari fungsi f adalah himpunan bagian dari kodomain B atau $f(A) \subset B$, fungsi ini kenal dengan nama fungsi into (ke dalam) atau fungsi saja. Tetapi jika f(A) = B artinya setiap anggota B muncul sebagai peta dari sekurang-kurangnya satu elemen A, maka katakan "*f* adalah suatu fungsi A pada B". Fungsi pada (onto function) biasa juga disebut fungsi surjektif.

Definisi 6

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif, jika untuk setiap $b \in B$ sekurang-kurangnya satu $a \in A$ sedemikian hingga $b = f(a)$ (Setiawan, 2008:39).

Contoh 2 :

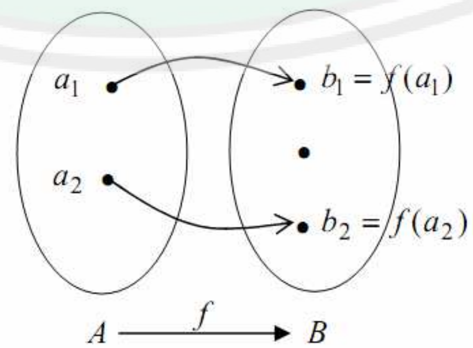
Fungsi f dari himpunan A = {-2,-1,0,1,2} ke dalam himpunan B = {0,1,4} yang didenifisikan oleh rumus fungsi $f(x) = x^2$ adalah suatu fungsi yang surjektif, karena setiap elemen di B merupakan peta dari sekurang-kurangnya satu elemen di A.



Gambar 3 fungsi surjektif
(Setiawan, 2008:39)

2.5 Fungsi Injektif

Suatu fungsi $f : A \rightarrow B$ sedemikian hingga untuk setiap anggota A yang berbeda mempunyai peta yang berbeda pula di B, dikatakan f sebagai fungsi yang injektif atau fungsi satu-satu



Gambar 4 Fungsi Injektif
(Setiawan, 2008:40)

Definisi 7

Fungsi f : $A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif (satu-satu), jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ akan berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$ (Setiawan, 2008 :40).

Dari ketentuan bahwa suatu fungsi f :$A \rightarrow B$ merupakan fungsi injektif, Rumus dari definisi bernilai logika sama dengan pernyataan :

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Pernyataan inilah yang biasa digunakan untuk menunjukkan apakah suatu fungsi itu injektif atau bukan.

Contoh 3

diberikan fungsi di dalam bilangan real R ($f : R \rightarrow R$), yang didefinisikan dengan rumus f (x) = 2x - 3.

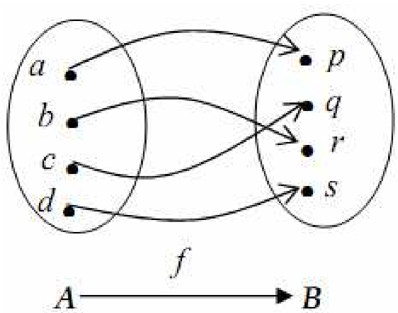
untuk setiap $x_1, x_2 \in R$ yang memenuhi), $f(x_1) = f(x_2)$ maka

$(2x_1-3) = (2x_2-3) \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Sehingga dari $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$, yang berarti f adalah fungsi injektif di dalam R

2.6 Fungsi Bijektif

Jika suatu fungsi f : $A \rightarrow B$ sedemikian hingga f suatu fungsi yang surjektif dan injektif sekaligus.



Gambar 5 Fungsi Bijektif
(Setiawan, 2008:41)

f adalah suatu fungsi bijektif atau korespondensi satu-satu.

Definisi 8

Fungsi f : A $\rightarrow$ B disebut suatu fungsi bijektif jika *f* sekaligus fungsi surjektif dan fungsi injektif (Setiawan, 2008:42).

Contoh 4

Fungsi f : R $\rightarrow$ R yang didefinisikan dengan f (x) = 2x - 3 adalah fungsi bijektif sebab untuk setiap y peta dari x pasti akan dipenuhi: 2x-3 = y $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(y+3)$ yang menunjukkan prapeta dari y di B. Dengan demikian *f* adalah fungsi yang surjektif.

Fungsi *f* fungsi injektif, dan dari *f* injektif dan surjektif sekaligus ini, dapat disimpulkan bahwa *f* adalah fungsi bijektif.

2.7 Limit Fungsi

Definisi 9

Milsalkan f sebuah fungsi yang terdefinisi pada suatu selang buka I, yang memuat a, kecuali mungkin pada a itu sendiri. Maka limit f(x) untuk x mendekati a adalah L, ditulis:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \ni |f(x) - L| < \varepsilon \text{ apabila } 0 < |x-a| < \delta$$

(Susanto, 2007:6).

Contoh 5

Buktikan $\lim_{x \to 5}(4x+2) = 22$

Bukti :

Tulis $f(x) = 4x + 2$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, pilih $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$

Dipunyai $0 < |x-5| < \delta$

Jelas $|f(x) - 22| = |4x + 2 - 22|$

$$= |4x - 20|$$

$$= 4|x - 5|$$

$$< 4\delta$$

$$< 4\frac{\varepsilon}{4}$$

$$< \varepsilon$$

Jadi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |f(x) - 22| < \varepsilon$ apabila $0 < |x-5| < \delta$, $\lim_{x \to 5}(4x+2) = 22$

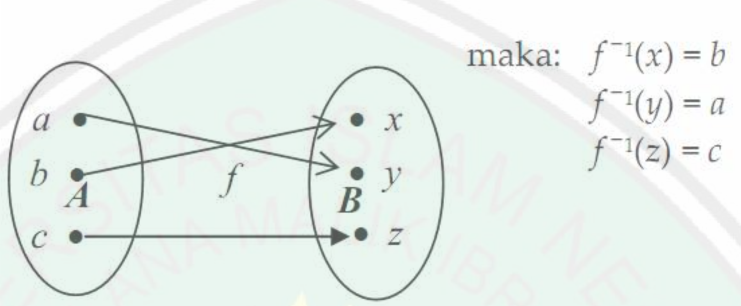
2.8 Invers Fungsi

Misalkan *f* suatu fungsi dari A ke dalam B dan misalkan untuk suatu a$\in$ A petanya adalah *f* (a) = b$\in$ B, maka invers dari b (dinyatakan dengan f^{-1}(b)) adalah elemen-elemen dalam A yang memiliki b$\in$ B sebagai petanya. Secara singkat, jika $f : A \to B$ sedemikian hingga $f : x \to f(x)$ maka yang dimaksud dengan invers fungsi b :

$$f^{-1}(b) = \{x \mid x \in A, f(x) = b\}$$

Contoh 6

Misalkan fungsi $f : A \rightarrow B$ didefinisikan sebagaimana diagram panah berikut:



Gambar 6 Invers Fungsi
(Setiawan, 2008:48)

2.9 Fungsi Kontinu

Definisi 10

(Kekontinuan di satu titik). katakan bahwa f kontinu di c jika beberapa selang terbuka di sekitar c terkandung dalam daerah asal f dan $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ (Purcell dan Varberg, 1987:48).

Dari definisi ini diperoleh 3 syarat dalam membuktikan kekontinuan fungsi yaitu :

1. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada

2. $f(c)$ ada

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$,

Jika salah satu dari ketiga syarat tersebut tidak terpenuhi, maka f takkontinu (diskoninu) di c.

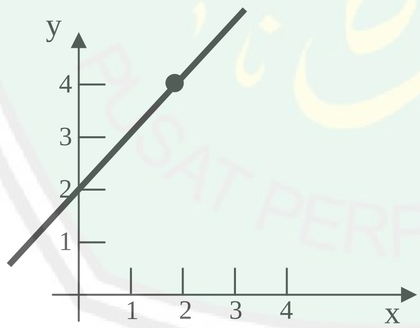
Contoh 7

Misalkan $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$. Bagaimana seharusnya f didefinisikan di x = 2 agar kontinu di titik itu?

Penyelesaian : $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x - 2}$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2) = 4$$

Karena itu, definisikan $f(2) = 4$



Gambar 7 Fungsi Kontinu

$f(x) = x + 2$ untuk semua x

2.10 Fungsi Logaritma Asli dan Eksponen Asli

Definisi 11

Fungsi logaritma asli, ditulis sebagai ln, didefinisikan dengan $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$, daerah definisinya adalah bilangan riil positif (Purcell dan Varberg, 1987:372).

Definisi 12

Invers ln disebut fungsi eksponen asli dan ditulis sebagai exp. Yaitu $x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x$ (Purcell dan Varberg, 1987:387).

Dari definisi ini diperoleh :

(i) exp(ln x) = x   x > 0;

(ii) ln(exp y) = y   untuk semua y

Sifat Fungsi Eksponen

Kita mulai dengan memperkenalkan bilangan baru, seperti bilangan π, yang dilambangkan dengan huruf e. Bilangan ini amat penting di dalam matematika

Definisi 13

Bilangan e adalah bilangan riil positif yang bersifat ln e = 1(Purcell dan Varberg, 1987:387).

Oleh karena ln e = 1, maka exp 1 = e. bilangan e adalah bilangan Irrasional. Orang telah menghitungnya sampai seribu angka di belakang koma. Misalnya $e \approx 2{,}718281828459045$

2.11 Fungsi Hiperbolik

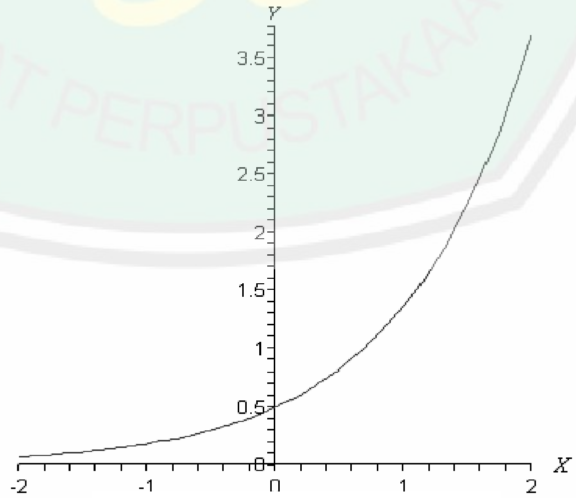
Definisi 14

Dalam masalah matematika terapan sering kita jumpai kombinasi-kombinasi tertentu dari fungsi eksponen e^x dan e^{-x} sehingga kombinasi fungsi-fungsi tersebut diberi nama fungsi hiperbolik (Susanto, 2007:34).

Sebagai contoh dibangun fungsi-fungsi p dan q

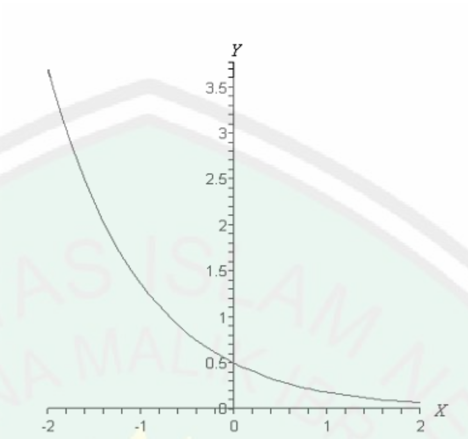
$$p : R \to R^+ ,\ p(x) = \frac{e^x}{2} \text{ dan } q : R \to R^+ , q(x) = \frac{e^{-x}}{2}$$

Grafik fungsi *p*



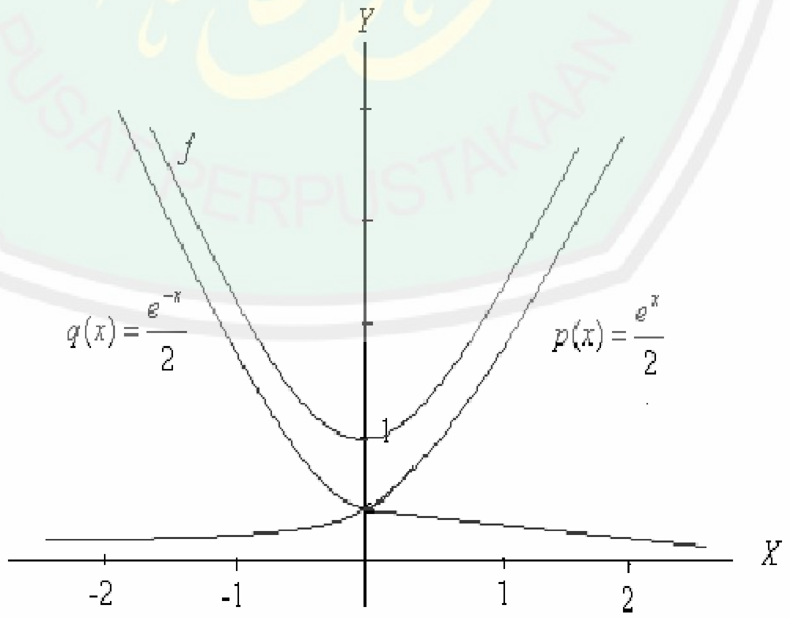
Gambar 8. Grafik Fungsi *p* naik
(susanto, 2007:34)

Grafik fungsi *q*



Gambar 9. Grafik Fungsi *q* turun
(susanto, 2007:35)

Selanjutnya dibangun fungsi *f* dan *g* yang didefinisikan sebagai jumlah fungsi-fungsi *p* dan *q*. Dengan demikian *f* (x) = *p* (x) + *q* (x)



Gambar 10. Grafik Fungsi *f(x)*= *p(x)*+*q(x)*
(susanto, 2007:35)

Dipunyai $f: R \rightarrow R^+$, $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Jelas $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} > 0 \quad \forall x > 0$ dan $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} < 0 \quad \forall x < 0$

Jadi grafik *f* naik pada $[0, \infty)$ dan turun pada $(-\infty, 0]$.

Jelas $f(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x) \quad \forall x \in R$

Jadi *f* suatu fungsi genap.

Jelas $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x) > 0$

Jadi grafik *f* cekung ke atas pada $(-\infty, \infty)$.

2.12 Definisi Ruang Topologi

Definisi 15:

Misal X adalah suatu set (himpunan) tidak kosong, suatu kelas *t* yang anggotanya subset-subset dari X disebut topologi pada X, jika dan hanya jika *t* memenuhi 3 aksioma :

1. X dan ϕ termasuk dalam *t*
2. Gabungan dari set-set anggota dari *t* adalah anggota *t*
3. Irisan dari dua set anggota *t* adalah anggota *t*

Anggota-anggota dari *t* disebut set-set buka dari *t*, dan X bersama *t* yaitu (X , *t)* disebut *ruang topolgi* (Wahyudin, 1992:60)

Contoh 8 : Buktikan (X, *t*) adalah ruang topologi dngan *t* ={X, ϕ, {a}} adalah topologi pada X = {a,b,c}.

Bukti :

1. Jelas X memuat semua titik limitnya. Jadi X tutup. Maka ϕ= X^c buka. Karena ϕ tidak memiliki titik limit, maka ϕ memuat semua titik limitnya. Jadi ϕ tutup. Maka X = ϕ^c buka. Jadi baik ϕ maupun X ada di *t*.
2. $\forall A_i \in t \;\;, \cup_i A_i \in t$
3. $\forall A_i \in t \;\;, \cap_i A_i \in t$

Catatan :

Aksioma-aksioma 1, 2, 3 adalah eqivalen dengan dua aksioma berikut :

1^*. Gabungan dari set-set dalam *t* termasuk dalam *t*

2^*. Irisan terhingga dari set-set dalam *t* termasuk dalam *t*

Untuk 1^* menyimpulkan bahwa ϕ termasuk dalam *t* karena

$$\cup\{G \in t : G \in \phi\} = \phi$$

yaitu gabungan dari set-set kosong adalah set kosong.

Untuk 2^* menyimpulkan bahwa X termasuk ke dalam *t* karena

$$\cap\{G \in t : G \in \phi\} = \mathrm{X}$$

yaitu irisan kosong dari subset-subset dari X adalah X sendiri (Wahyudin, 1992:62).

2.13 Definisi Ruang Topologi Homeomorphik

Definisi 16 : Dua ruang topologi X dan Y disebut Homeomorphik atau topologi equivalent, bila ada fungsi bijektif f : X → Y sedemikian hingga f dan f^{-1} adalah kontinu. Fungsi f seperti itu disebut homeomorphisme.

Suatu fungsi f disebut bikontinu atau topologi, bila f adalah buka dan kontinu, jadi f : X → Y adalah homeomorphisme bila dan hanya bila f bikontinu dan bijektif (Wahyudin, 1992:91).

Contoh 9 :

Misal X = (-1,1). Fungsi $f : X \to R$ yang didefinisikan oleh $f(x) = \tan \frac{1}{2}\pi x$ yang satu-satu, onto, dan kontinu. Selanjutnya, fungsi invers f^{-1} adalah kontinu. Jadi garis real R dan interval buka (-1,1) adalah homeomorphik (Wahyudin, 1992:92).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai pembuktian ruang topologi homeomorphik dengan fungsi hiperbolik dan aljabar :

Langkah-langkah dalam membuktikan ruang-ruang topologi homeomorphik :

1. Mengambil 4 ruang topologi yang akan dibuktikan.
2. Mendefinisikan fungsi hiperbolik dan fungsi aljabar.
3. Dengan menggunakan fungsi yang telah didefinisikan akan dibuktikan bahwa ruang-ruang topologi yang diambil adalah homeomorphik.

3.1. Ruang Topologi

Penulis akan mengambil 4 contoh ruang topologi yang nantinya akan dibuktikan bahwa ruang-ruang topologi tersebut homeomorphik.

Berikut uraian proses pengambilan ruang topologi :

1. Diberikan r adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (R)

   Maka untuk membuktikan bahwa (R,r) adalah ruang topologi dibutuhkan proses sebagai berikut :

   Ambil $a, b \subset R \to \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \in r$

   Maka :

   a) Jelas R memuat semua titik limitnya. Jadi R tutup. Maka $\phi = R^c$ buka. Karena tidak memiliki titik limit, maka ϕ memuat semua titik limitnya. Jadi $\phi = R^c$ tutup. Maka R = ϕ^c buka. Jadi baik ϕ maupun R ada di r

b) $\forall A_i \in r$, $\cup_i A_i \in r$

c) $\forall A_i \in r$, $\cap_i A_i \in r$

Jadi terbukti (R,r) adalah ruang topologi

Dengan proses yang sama maka proses ruang topologi lain akan diuraikan sebagai berikut :

2. Diberikan s adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (R)

   Maka untuk membuktikan bahwa (R,s) adalah ruang topologi dibutuhkan proses sebagai berikut :

   Ambil $c, d \subset R \rightarrow \{c\}, \{d\}, \{c, d\} \in s$

   Maka :

   a. Jelas R memuat semua titik limitnya. Jadi R tutup. Maka $\phi = R^c$ buka. Karena tidak memiliki titik limit, maka ϕ memuat semua titik limitnya. Jadi $\phi = R^c$ tutup. Maka R = ϕ^c buka. Jadi baik ϕ maupun R ada di r

   b. $\forall A_i \in s$, $\cup_i A_i \in s$

   c. $\forall A_i \in s$, $\cap_i A_i \in s$

   Jadi terbukti (R,s) adalah ruang topologi

3. Diberikan q adalah kelas dari semua subset dari set bilangan rasional (Q)

   Ambil $i, j \subset Q \rightarrow \{i\}, \{j\}, \{i, j\} \in q$

   Akan dibuktikan (Q,q) adalah ruang topologi

   a. Jelas Q memuat semua titik limitnya. Jadi Q tutup. Maka $\phi = Q^c$ buka. Karena tidak memiliki titik limit, maka ϕ memuat semua titik limitnya. Jadi $\phi = Q^c$ tutup. Maka Q = ϕ^c buka. Jadi baik ϕ maupun Q ada di q

b. $\forall A_i \in q$, $\cup_i A_i \in q$

c. $\forall A_i \in q$, $\cap_i A_i \in q$

Jadi terbukti (Q,q) adalah ruang topologi

4. Diberikan z adalah kelas dari semua subset dari set bilangan Bulat (Z)

Ambil $m, n \subset Z \rightarrow \{m\}, \{n\}, \{m, n\} \in z$

Akan dibuktikan (Z, z) adalah ruang topologi

a. Jelas Z memuat semua titik limitnya. Jadi Z tutup. Maka $\phi = Z^c$ buka. Karena tidak memiliki titik limit, maka ϕ memuat semua titik limitnya. Jadi $\phi = Z^c$ tutup. Maka Z = ϕ^c buka. Jadi baik ϕ maupun Z ada di z

b. $\forall A_i \in z$, $\cup_i A_i \in z$

c. $\forall A_i \in z$, $\cap_i A_i \in z$

Jadi terbukti (Z,z) adalah ruang topologi

Setelah diperoleh ruang topologi, berikutnya akan didefinisikan fungsi-fungsi hiperbolik dan aljabar

3.2. **Fungsi Hiperbolik dan Fungsi Aljabar**

Untuk membuktikan ruang-ruang topologi adalah homeomorphik maka dibutuhkan fungsi. Berikut fungsi hiperbolik dan aljabar yang didefinisikan oleh penulis :

Fungsi hiperbolik

1. Untuk ruang topologi (R,r) dimana *r* adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (*R*) dan (R,s) dimana s adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (*R*)

   Akan diberikan fungsi $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

   $$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; \forall y \in R \exists x \in R \ni f(x) = y, \; y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

   $$f(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \; \forall z \in R \exists a \in R \ni f(a) = z, \; z = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

   $$x=a$$

   $$2x=2a$$

   $$x - (-x) = a - (-a)$$

   $$\ln(e^x) - \ln(e^{-x}) = \ln(e^a) - \ln(e^{-a})$$

   $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot 2 = \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot 2$$

   $$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

   $$f(x) = f(a)$$

   $f(x) = f(a)$ well defined

2. Untuk ruang topologi (R,r) dimana *r* adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (*R*) dan (Q,q) dimana *q* adalah kelas dari semua subset dari set bilangan Rasional (*Q*)

   Akan diberikan fungsi $f : R \to Q$, $f(x) = e^x - e^{-x}$

$f(x) = e^x - e^{-x}$ $\forall y \in R \exists x \in R \ni f(x) = y$, y = $e^x - e^{-x}$

$f(b) = e^b - e^{-b}$ $\forall z \in R \exists b \in R \ni f(b) = z$, z = $e^b - e^{-b}$

$$x=b$$

$$2x=2b$$

$$x-(-x) = b-(-b)$$

$$\ln(e^x) - \ln(e^{-x}) = \ln(e^b) - \ln(e^{-b})$$

$$e^x - e^{-x} = e^b - e^{-b}$$

$$f(x) = f(b)$$

$f(x) = f(b)$ well defined

3. Untuk ruang topologi (R,r) dimana r adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (R) dan (Z,z) dimana z adalah kelas dari semua subset dari set bilangan bulat (Z)

   Akan diberikan fungsi $f : R \to Z$, $f(x) = 2e^x + e^{-x}$

   $f(x) = 2e^x + e^{-x}$ $\forall y \in R \exists x \in R \ni f(x) = y$, y = $2e^x + e^{-x}$

   $f(k) = 2e^k + e^{-k}$ $\forall z \in R \exists k \in R \ni f(k) = z$, z = $2e^k + e^{-k}$

$$x = k$$

$$3x = 3k$$

$$2x-(-x) = 2k-(-k)$$

$$2\ln(e^x) - \ln(e^{-x}) = 2\ln(e^k) - \ln(e^{-k})$$

$$2e^x - e^{-x} = 2e^k - e^{-k}$$

$$f(x) = f(k)$$

   $f(x) = f(k)$ well defined

Fungsi Aljabar

1. Untuk ruang topologi (R,r) dimana *r* adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (*R*) dan (R,s) dimana s adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (*R*)

   Akan diberikan fungsi $f: R \rightarrow R$, $f(x) = 2x\text{-}3$

   $f(x) = 2x\text{-}3, \forall y \in R \exists x \in R \ni f(x) = y$, y = 2x-3

   $f(a) = 2a\text{-}3, \forall z \in R \exists a \in R \ni f(x) = z$, z = 2a-3

   $$x = a$$

   $$2x = 2a$$

   $$2x + 3 = 2a + 3$$

   $$f(x) = f(a)$$

   $f(x) = f(a)$ well defined

2. Untuk ruang topologi (R,r) dimana *r* adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (*R*) dan (Q,q) dimana *q* adalah kelas dari semua subset dari set bilangan Rasional (*Q*)

   Akan diberikan fungsi $f: R \rightarrow Q$, $f(x) = \frac{2x-3}{2}$

   $f(x) = \frac{2x-3}{2}, \forall y \in R \exists x \in R \ni f(x) = y$, y = $\frac{2x-3}{2}$

   $f(b) = \frac{2b-3}{2}, \forall z \in R \exists b \in R \ni f(x) = z$, z = $\frac{2b-3}{2}$

   $$x = b$$

   $$2x = 2b$$

   $$2x - 3 = 2b - 3$$

$$\frac{2x-3}{2} = \frac{2b-3}{2}$$

$$f(x) = f(b)$$

$f(x) = f(b)$ well defined

3. Untuk ruang topologi (R,r) dimana r adalah kelas dari semua subset dari set bilangan real (R) dan (Z,z) dimana z adalah kelas dari semua subset dari set bilangan bulat (Z)

   Akan diberikan fungsi $f : R \rightarrow Z$, $f(x) = 4x + 2, \forall x \in R$

   $f(x) = 4x + 2, \forall y \in R \exists x \in R \ni f(x) = y$, y = $4x + 2$

   $f(c) = 4c + 2, \forall z \in R \exists c \in R \ni f(x) = z$, z = $4c + 2$

   $$x = c$$

   $$4x = 4c$$

   $$4x + 2 = 4c + 2$$

   $$f(x) = f(c)$$

   $f(x) = f(c)$ well defined

3.3. Ruang Topologi Homeomorphik

Setelah ruang topologi dan fungsi terdefinisi maka berikutnya penulis akan membuktikan ruang-ruang topologi yang diberikan adalah homeomorphik. Syarat bahwa ruang-ruang topologi adalah homeomorphik jika fungsinya bijektif dan bikontinu.

Berikut proses pembuktiannya :

Pembuktian dengan menggunakan fungsi hiperbolik

1. Untuk ruang topologi (R,r) dan (R,s) adalah $f : R \to R$,

$$f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}, \forall x \in R$$

akan ditunjukkan $f : R \to R$ adalah satu-satu (1-1)

ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$, dengan $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} = \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2}$$

$$\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} \cdot 2 = \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \cdot 2$$

$$e^{x_1} - e^{-x_1} = e^{x_2} - e^{-x_2}$$

$$\ln(e^{x_1}) - \ln(e^{-x_1}) = \ln(e^{x_2}) - \ln(e^{-x_2})$$

$$x_1 - (-x_1) = x_2 - (-x_2)$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Jadi fungsi f satu-satu.

Akan ditunjukkan f fungsi pada (onto).

$$\forall y \in R \ \exists \ x \in R \ni f(x) = y \to \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = y$$

Akan dibuktikan bahwa $f : R \to R$ kontinu di titik $a \in R$

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a - r, a + r) \cap R$ berakibat $\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$

jika dan hanya jika $x \in (a-r,a) \cap R$ berakibat $\left|\frac{e^a - e^{-a}}{2} - f(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk

$x \to a$ sehingga $\lim_{x \to a^-} \frac{e^a - e^{-a}}{2} = f(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat $\left|\frac{e^a - e^{-a}}{2} - f(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \to a$

sehingga $\lim_{x \to a^+} \frac{e^a - e^{-a}}{2} = f(a)$

Maka terbukti bahwa $f: R \to R$ kontinu di $a \in R$

Akan dicari invers dari $f: R \to R$

untuk $\forall$ y$\in R$ $\exists$ $x \in R \ni f(x) = y$

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2y = \ln e^x - \ln e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2y = x - (-x)$$

$$\Leftrightarrow \ln 2y = 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2y}{2} = x$$

Jadi $f: R \to R$, $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ memiliki invers $f^{-1}(x) = \frac{\ln 2x}{2}$

Akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(x) = \frac{\ln 2x}{2}$ kontinu di $a \in R$

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat $\left| f^{-1}(x) - f^{-1}(a) \right| < \varepsilon$ jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat $\left| \frac{\ln 2a}{2} - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \to a$ sehingga $\lim_{x \to a^-} \frac{\ln 2a}{2} = f^{-1}(a)$ dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat $\left| \frac{\ln 2a}{2} - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \to a$ sehingga

$\lim_{x \to a^+} \frac{\ln 2a}{2} = f^{-1}(a)$

Maka terbukti bahwa $f^{-1}(x) = \frac{\ln 2x}{2}$ kontinu di $a \in R$

Jadi terbukti bahwa (R,r) dan (R,s) ruang topologi yang homeomorphik karena memenuhi syarat fungsi $f : R \to R$ adalah fungsi bikontinu dan bijektif.

2. Untuk ruang topologi (R,r) dan (Q,q) adalah $f : R \to Q$, $f(x) = e^x - e^{-x}, \forall x \in R$

   akan ditunjukkan $f : R \to Q$ adalah satu-satu (1-1)

   ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$, dengan $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$e^{x_1} - e^{-x_1} = e^{x_2} - e^{-x_2}$$

$$\ln(e^{x_1}) - \ln(e^{-x_1}) = \ln(e^{x_2}) - \ln(e^{-x_2})$$

$$x_1 - (-x_1) = x_2 - (-x_2)$$

$$2\,x_1 = 2\,x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Jadi fungsi *f* satu-satu.

Akan ditunjukkan f fungsi pada (onto).

$\forall y \in Q \ \exists \ x \in R \ni f(x) = y \rightarrow e^x - e^{-x} = y$

Akan dibuktikan bahwa $f : R \rightarrow Q$ kontinu

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat $\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon$

jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat $\left| e^a - e^{-a} - f(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \rightarrow a$ sehingga $\lim\limits_{x \rightarrow a^-} e^a - e^{-a} = f(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat $\left| e^a - e^{-a} - f(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \rightarrow a$ sehingga $\lim\limits_{x \rightarrow a^+} e^a - e^{-a} = f(a)$

Maka terbukti bahwa $f : R \rightarrow Q$ kontinu di $a \in R$

Akan dicari invers dari $f : R \rightarrow Q$

untuk $\forall$ y$\in Q \ \exists \ x \in R \ni f(x) = y$

$f(x) = e^x - e^{-x}$

$\Leftrightarrow y = e^x - e^{-x}$

$\Leftrightarrow \ln y = \ln e^x - \ln e^{-x}$

$\Leftrightarrow \ln y = x - (-x)$

$\Leftrightarrow \ln y = 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln y}{2} = x$$

Jadi $f : R \rightarrow Q$, $f(x) = e^{x} - e^{-x}$ memiliki invers $f^{-1}(x) = \frac{\ln x}{2}$

Akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(x) = \frac{\ln y}{2}$ kontinu di $a \in R$.

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat $\left| f^{-1}(x) - f^{-1}(a) \right| < \varepsilon$

jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat

$\left| \frac{\ln a}{2} - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \to a$ sehingga $\lim_{x \to a^{-}} \frac{\ln a}{2} = f^{-1}(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat $\left| \frac{\ln a}{2} - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \to a$

sehingga $\lim_{x \to a^{+}} \frac{\ln a}{2} = f^{-1}(a)$

Maka terbukti bahwa $f^{-1} : R \to Q$ kontinu di $a \in R$

Terbukti bahwa (R,r) dan (Q,q) ruang topologi yang homeomorphik karena memenuhi syarat fungsi $f : R \to Q$ adalah fungsi bikontinu dan bijektif.

3. Untuk ruang topologi (R,r) dan (Z,z) adalah $f : R \to Z$, $f(x) = 2e^{x} + e^{-x}$

   akan ditunjukkan $f : R \to Z$ adalah satu-satu (1-1)

   ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$, dengan $f(x_1) = f(x_2)$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2e^{x_1} - e^{-x_1} = 2e^{x_2} - e^{-x_2}$$

$$2\ln(e^{x_1}) - \ln(e^{-x_1}) = 2\ln(e^{x_2}) - \ln(e^{-x_2})$$

$$2x_1 - (-x_1) = 2x_2 - (-x_2)$$

$$3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Jadi fungsi f satu-satu.

Akan ditunjukkan f fungsi pada(onto).

$\forall y \in Z \ \exists \ b \in R \ni f(b) = y \rightarrow 2e^{x} + e^{-x} = y$

Akan dibuktikan bahwa $f : R \rightarrow Z$ kontinu

mbil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat $|(2e^{a} + e^{-a}) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \rightarrow a$ sehingga $\lim_{x \to a^-} 2e^{a} + e^{-a} = f(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat $|(2e^{a} + e^{-a}) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \rightarrow a$ sehingga $\lim_{x \to a^+} 2e^{a} + e^{-a} = f(a)$

Maka terbukti bahwa $f : R \rightarrow Z$ kontinu di $a \in R$

Akan dicari invers dari $f : R \rightarrow Z$

untuk $\forall$ y$\in Z \ \exists \ x \in R \ni f(x) = y$

$f(x) = 2e^{x} + e^{-x}$

$\Leftrightarrow y = 2e^{x} + e^{-x}$

$\Leftrightarrow \ln y = \ln e^{x} + \ln e^{x} + \ln e^{-x}$

$\Leftrightarrow \ln y = x + x - x$

$\Leftrightarrow \ln y = x$

Jadi $f : R \rightarrow Z$, $f(x) = 2e^{x} + e^{-x}$ memiliki invers $f^{-1}(x) = \ln x$

Akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(x)$ kontinu $a \in R$

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat

$\left| f^{-1}(x) - f^{-1}(a) \right| < \varepsilon$ jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat

$\left| \ln a - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \to a$ sehingga $\lim_{x \to a^{-}} \ln a = f^{-1}(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat

$\left| \ln a - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \to a$ sehingga $\lim_{x \to a^{+}} a = f^{-1}(a)$

Maka $f^{-1} : R \to Z$ kontinu di $a \in R$

Jadi terbukti bahwa (R,r) dan (Z,z) ruang topologi yang homeomorphik karena memenuhi syarat fungsi $f : R \to Z$ bikontinu

Selanjtnya Pembuktian homeomorphik pada ruang topologi dengan menggunakan fungsi Aljabar :

1. Untuk ruang topologi (R,r) dan (R,s) adalah $f : R \to R$,

   $f(x) = 2x\text{-}3, \forall x \in R$

   Fungsi aljabar $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 2x\text{-}3, \forall x \in R$

   akan ditunjukkan $f : R \to R$ adalah satu-satu (1-1) ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$, dengan $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$

jelas $f(x_1) - f(x_2) = (2x-3)-(2x-3)$

$$\Leftrightarrow (2x_1-3)-(2x_2-3)$$

$$\Leftrightarrow (2x_1-3)-(2x_2-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (2x_1-3)=(2x_2-3)$$

$$f(x_1) = f(x_2)\ ,\ x_1=x_2$$

Jadi fungsi *f* satu-satu.

Akan ditunjukkan *f* fungsi pada(onto).

$\forall y \in R\ \exists\ x \in R \ni f(x) = y$

$\forall y \in R\ \exists\ b \in R \ni f(b) = y \rightarrow 2b-3 = y$

Jadi fungsi $f : R \rightarrow R$ adalah onto

Akan dibuktikan bahwa $f : R \rightarrow R$ kontinu di $a \in R$

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat $|2a-3- f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \rightarrow a$ sehingga $\lim_{x \to a^-} 2a-3 = f(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat $|2a-3- f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \rightarrow a$ sehingga $\lim_{x \to a^+} 2a-3 = f(a)$

Maka terbukti bahwa $f : R \rightarrow R$ kontinu di $a \in R$

Akan dicari invers dari $f : R \to R$

untuk $\forall$ y$\in R$ $\exists$ $x \in R \ni f(x) = y$

$f(x) = 2x - 3$

$\Leftrightarrow y = 2x - 3$

$\Leftrightarrow y + 3 = 2x - 3 + 3$

$\Leftrightarrow y + 3 = 2x - 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(y+3) = \frac{1}{2}(2x - 0)$

$\Leftrightarrow \frac{y}{2} + \frac{3}{2} = \frac{2x}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{y+3}{2} = x$

$f(y) = \frac{y+3}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

Jadi $f : R$ → R, $f(x)$= $2x - 3$ memiliki invers $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

Akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ kontinu di $a \in R$

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a - r, a + r) \cap R$ berakibat $\left| f^{-1}(x) - f^{-1}(a) \right| < \varepsilon$

jika dan hanya jika $x \in (a - r, a) \cap R$ berakibat

$$\left|\frac{a+3}{2}-f^{-1}(a)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } x \to a$$

sehingga $\lim_{x \to a^-} \frac{a+3}{2} = f^{-1}(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat

$$\left|\frac{a+3}{2}-f^{-1}(a)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } x \to a$$

sehingga $\lim_{x \to a^+} \frac{a+3}{2} = f^{-1}(a)$

Maka terbukti bahwa $f^{-1} : R \to R$ kontinu di $a \in R$

Jadi terbukti bahwa (R,r) dan (R,s) ruang topologi yang homeomorphik karena memenuhi syarat fungsi $f : R \to R$ adalah fungsi bikontinu dan bijektif.

2. Untuk ruang topologi (R,r) dan (Q,q) adalah $f : R \to Q$,

$f(x) = \frac{2x-3}{2}, \forall x \in R$.

Fungsi aljabar $f : R \to Q$, $f(x) = \frac{2x-3}{2}, \forall x \in R$

akan ditunjukkan $f : R \to Q$ adalah satu-satu (1-1)

ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$, dengan $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$

jelas $f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1-3}{2} - \frac{2x_2-3}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_1-3}{2} - \frac{2x_2-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_1-3}{2} - \frac{2x_2-3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_1-3}{2}=\frac{2x_2-3}{2}$$

$f(x_1) = f(x_2)$, $x_1=x_2$

Jadi fungsi f satu-satu.

Akan ditunjukkan f fungsi pada(onto).

$\forall y \in Q\ \exists\ b \in R \ni f(b) = y \rightarrow \frac{2b-3}{2} = y$

Jadi fungsi $f : R \rightarrow Q$ adalah onto

Akan dibuktikan bahwa $f : R \rightarrow Q$ kontinu di $a \in R$

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat $\left|\frac{2a-3}{2} - f(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \rightarrow a$ sehingga $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2a-3}{2} = f(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat $\left|\frac{2a-3}{2} - f(a)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \rightarrow a$ sehingga $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{2a-3}{2} = f(a)$

Maka terbukti bahwa $f : R \rightarrow Q$ kontinu di $a \in R$

Akan dicari invers dari $f : R \rightarrow Q$

Untuk $\forall$ y$\in Q\ \exists\ x \in R \ni f(x) = y$

$$f(x) = \frac{2x-3}{2}$$

$\Leftrightarrow 2y = 2x - 3$

$\Leftrightarrow 2y - 2x = 2x - 3 - 2x$

$\Leftrightarrow 2y - 2x = -3$

$\Leftrightarrow 2y - 2x - 2y = -3 - 2y$

$\Leftrightarrow -2x = -(2y + 3)$

$\Leftrightarrow 2x = 2y + 3$

$\Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{2y+3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2y+3}{2}$

$f(y) = \frac{2y+3}{2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{2}$

Jadi $f : R \rightarrow Q$, $f(x) = \frac{2x-3}{2}$ memiliki invers $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{2}$

Akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(x)$ kontinu di $a \in R$

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat

$\left| f^{-1}(x) - f^{-1}(a) \right| < \varepsilon$

jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat

$\left| \frac{2a+3}{2} - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \rightarrow a$

sehingga $\lim\limits_{x \rightarrow a^-} \frac{2a+3}{2} = f^{-1}(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat

$$\left| \frac{2a+3}{2} - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } x \to a$$

sehingga $\lim_{x \to a^+} \frac{2a+3}{2} = f^{-1}(a)$

Maka terbukti bahwa $f^{-1} : R \to Q$ kontinu di $a \in R$

Jadi terbukti bahwa (R,r) dan (Q,q) ruang topologi yang homeomorphik karena memenuhi syarat fungsi $f : R \to Q$ adalah fungsi bikontinu dan bijektif.

3. Untuk ruang topologi (R,r) dan (Z,z) adalah $f : R \to Z$,

   $f(x) = 4x + 2, \forall x \in R$.

   Fungsi aljabar $f : R \to Z$, $f(x) = 4x + 2, \forall x \in R$

   akan ditunjukkan $f : R \to Z$ adalah satu-satu (1-1)

   ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$, dengan $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$

   Jelas $f(x_1) - f(x_2) = (4x_1 + 2) - (4x_2 + 2)$

   $\Leftrightarrow 4x_1 - 4x_2 + 2 - 2 = 0$

   $\Leftrightarrow 4x_1 - 4x_2 = 0$

   $\Leftrightarrow 4x_1 = 4x_2$

   $\Leftrightarrow x_1 = x_2$

   $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 = x_2$

   Jadi fungsi f satu-satu.

   Akan ditunjukkan f fungsi pada(onto).

   $\forall y \in Z \; \exists \, b \in R \ni f(b) = y \to 4x + 2 = y$

Jadi fungsi $f: R \to Z$ adalah onto

Akan dibuktikan bahwa $f: R \to Z$ kontinu di $a \in R$

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat $|4a+2-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \to a$ sehingga $\lim_{x \to a^-} 4a+2 = f(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat $|4a+2-f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk $x \to a$ sehingga $\lim_{x \to a^+} 4a+2 = f(a)$

Maka terbukti bahwa $f: R \to Q$ kontinu di $a \in R$

Akan dicari invers dari $f: R \to Q$

untuk $\forall$ y$\in Z$ $\exists$ $x \in R \ni f(x) = y$

$f(x) = 4x+2$

$\Leftrightarrow y = 4x+2$

$\Leftrightarrow y-2 = 4x+2-2$

$\Leftrightarrow y-2 = 4x+0$

$\Leftrightarrow \frac{y-2}{4} = \frac{4x}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{y-2}{4} = x$

$\Leftrightarrow x = \frac{y-2}{4}$

$$f(y) = \frac{y-2}{4}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$$

Jadi $f : R \to Q$, $f(x) = 4x+2$ memiliki invers $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$

Akan dibuktikan bahwa $f^{-1}(x)$ kontinu di $a \in R$

Ambil $a \in R$, a adalah titik limit jika dan hanya jika $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan r > 0 sehingga untuk $x \in (a-r, a+r) \cap R$ berakibat

$$\left| f^{-1}(x) - f^{-1}(a) \right| < \varepsilon$$

jika dan hanya jika $x \in (a-r, a) \cap R$ berakibat

$$\left| \frac{a-2}{4} - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } x \to a$$

sehingga $\lim_{x \to a^-} \frac{a-2}{4} = f^{-1}(a)$

dan untuk $x \in (a, a+r) \cap R$ berakibat

$$\left| \frac{a-2}{4} - f^{-1}(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } x \to a$$

sehingga $\lim_{x \to a^+} \frac{a-2}{4} = f^{-1}(a)$

Maka terbukti bahwa $f^{-1} : R \to Z$ kontinu di $a \in R$

Jadi terbukti bahwa (R,r) dan (Z,z) ruang topologi yang homeomorphik karena memenuhi syarat fungsi $f : R \to Z$ adalah fungsi bikontinu dan bijektif

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan :

1. Fungsi hiperbolik merupakan kombinasi dari fungsi eksponen e^x dan e^{-x} , fungsi hiperbolik yang digunakan pada pembahasan adalah well define sehingga fungsi dapat digunakan untuk membuktikan homeomorphik pada ruang-ruang topologi, pada masing-masing pembuktian semuanya memenuhi sifat bijektif dan kontinu. Pada penggunaan fungsi hiperbolik yang pertama diperoleh inversnya $f^{-1}(x)=\dfrac{\ln 2x}{2}$ dan kontinu di $a\in R$, pada penggunaan fungsi hiperbolik yang kedua diperoleh inversnya $f^{-1}(x)=\dfrac{\ln y}{2}$ dan kontinu di $a\in R$. pada penggunaan fungsi hiperbolik yang ketiga diperoleh invers $f^{-1}(x)=\ln x$ dan kontinu di $a\in R$. Fungsi hiperbolik $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ berlaku untuk membuktikan dua ruang topologi (R,r) dan (R,s) homeomorphik dengan fungsi $f:R\to R$, $f(x)=e^x-e^{-x}$ berlaku untuk membuktikan dua ruang topologi (R,r) dan (Q,q) homeomorphik dengan fungsi $f:R\to Q$, dan $f(x)=2e^x+e^{-x}$ berlaku untuk membuktikan dua ruang topologi (R,r) dan (Z,z) homeomorphik dengan fungsi $f:R\to Z$.

2. Fungsi aljabar merupakan fungsi yang umum digunakan, fungsi – fungsi aljabar yang digunakan dalam pembahasan memenuhi sifat-sifat aljabar pada bilangan real. Masing-masing fungsi yang digunakan memenuhi sifat bijektif dan kontinu. Untuk fungsi *f*(*x*)=*2x-3* inversnya $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2}$ adalah kontinu di $a\in R$ pada ruang topologi (R,r) dengan (R,s). Untuk fungsi $f(x)=\frac{2x-3}{2}$ inversnya $f^{-1}(x)=\frac{2x+3}{2}$ kontinu di $a\in R$ pada ruang topologi (R,r) dengan (Q,q). Selanjutnya untuk fungsi $f(x)=4x+2$ inversnya $f^{-1}(x)=\frac{x-2}{4}$ kontinu di $a\in R$ pada ruang topologi (R,r) dengan (Z,z).

4.2. Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah dapat digunakan untuk mengetahui bagaimana cara menggunakan fungsi hiperbolik dan aljabar pada ruang topologi, selain itu dapat bermanfaat penulis maupun pembaca untuk mengetahui penggunaan fungsi hiperbolik dan aljbar pada ruang topologi. Hususnya dapat memahami masalah homeomorphik pada ruang topologi. Sehingga pembaca dapat membuktikan suatu ruang topologi homeomorphik dengan ruang topologi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007.*Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang : UIN-Malang Press

Abdussakir. 2009. Matematika 1 *Kajian Integratif Matematika & Alqur'an.* Malang : UIN-Malang Press

Arifin Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung : ITB

J. Purcell. Edwin dan Varberg. Dale. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analisis Jilid 1*. Jakarta : Erlangga.

Muftie, Arifin. 2004. *Matematika Alam Sesta Kodetifikasi Bilangan Prima Dalam Alqur'an*. Bandung : PT. Kiblat Buku Utama

Setiawan. 2008. *Pembelajaran Fungsi, Persamaan dan Pertidaksamaan Aljabar*. Yogyakarta : Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga KependidikanMatematika

Soebagio A. Suharti dan Sukirman. 1993. Struktur Aljabar. Jakarta : Universitas Terbuka

Susanto. 2007. *Fungsi Hiperbolik dan Inversnya*. Semarang : Universitas Negeri Semarang

Wahyudi.1992. *Dasar-dasar Topologi*. Bandung : Tarsito

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Moch. Lukmanul Chakim
NIM : 05510036
Fakultas / Jurusan : Sains Dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Penggunaan Fungsi Hiperbolik Dan Aljabar Dalam Pembuktian Homeomorphik Pada Ruang -Ruang Topologi
Pembimbing I : Wahyu Hengky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1.	4 Januari 2011	Proposal	1.	
2.	6 Januari 2011	Konsultasi Keagamaan		2.
3.	25 Januari 2011	Konsultasi Masalah	3.	
4.	1 Februari 2011	Konsultasi BAB III		4.
5.	9 Februari 2011	Revisi BAB III	5.	
6.	14 Februari 2011	Revisi BAB III		6.
7.	23 Februari 2011	Konsultasi BAB I,II,III	7.	
8.	28 Februari 2011	Konsultasi BAB I,II,III, IV		8.
9.	2 Maret 2011	Konsultasi keagamaan	9.	

Malang, 02 Maret 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001