

**ANALISIS DINAMIK SUDUT DEFLEKSI  
PADA MODEL VIBRASI DAWAI**

**SKRIPSI**

**OLEH  
IMAM MUFID  
NIM. 11610031**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**ANALISIS DINAMIK SUDUT DEFLEKSI  
PADA MODEL VIBRASI DAWAI**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh  
Imam Mufid  
NIM. 11610031**

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2015**

**ANALISIS DINAMIK SUDUT DEFLEKSI  
PADA MODEL VIBRASI DAWAI**

**SKRIPSI**

Oleh  
**Imam Mufid**  
**NIM. 11610031**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji  
Tanggal 13 April 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd  
NIP. 19770521 200501 2 004

Fachrur Rozi, M.Si  
NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**ANALISIS DINAMIK SUDUT DEFLEKSI  
PADA MODEL VIBRASI DAWAI**

**SKRIPSI**

**Oleh  
Imam Mufid  
NIM. 11610031**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 29 April 2015

Penguji Utama : Mohammad Jamhuri, M.Si .....

Ketua Penguji : Dr. Usman Pagalay, M.Si .....

Sekretaris Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd .....

Anggota Penguji : Fachrur Rozi, M.Si .....

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Imam Mufid  
NIM : 11610031  
Jurusan : Matematika  
Fakultas : Sains dan Teknologi  
Judul Skripsi : Analisis Dinamik Sudut Defleksi pada Model Vibrasi Dawai

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 April 2015  
Yang membuat pernyataan,

Imam Mufid  
NIM. 11610031

## MOTO

The formulas of a success are a hard work and never give up.



## **PERSEMBAHAN**

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Alm. Ayahanda, Almh. Ibunda tercinta, serta Kakak tersayang.

Venny Riana A. yang senantiasa memberikan semangat dan dukungan kepada penulis.



## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dalam berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd, selaku dosen pembimbing I yang banyak memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing II yang banyak memberikan bimbingan dan arahan kepada penulis.
6. Dosen Jurusan Matematika yang telah membantu dan membimbing penulis selama masa perkuliahan, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.

7. Kedua orang tua yang menjadi inspirasi penulis untuk selalu memberikan yang terbaik dalam segala hal.
8. Venny Riana Agustin, yang selalu memberikan motivasi, dukungan, doa, inspirasi, dan bantuan yang tak ternilai. Terima kasih atas segalanya.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

*Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh*

Malang, April 2015

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b>	
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b>	
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b>	
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b>	
<b>HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN</b>	
<b>HALAMAN MOTO</b>	
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b>	
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	x
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xiv
<b>ABSTRAK</b> .....	xv
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
<b>ملخص</b> .....	xvii
 <b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	5
1.3 Tujuan Penelitian.....	5
1.4 Batasan Masalah.....	6
1.5 Manfaat Penelitian.....	6
1.6 Metode Penelitian.....	7
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
 <b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Sistem Dinamik.....	9
2.2 Sistem Linier.....	9
2.3 Solusi Umum dari Sistem Persamaan Diferensial.....	11

2.4 Sistem Tak Homogen.....	17
2.5 Potret Fase dan Kestabilan .....	19
2.6 Linierisasi dengan Deret Taylor .....	23
2.7 Model Vibrasi Dawai McKenna.....	24
2.8 Kajian Vibrasi dalam Al-Quran.....	28

### **BAB III PEMBAHASAN**

3.1 Model Sudut Defleksi .....	31
3.2 Solusi Model Sudut Defleksi.....	36
3.2.1 Solusi Model Sudut Defleksi Tanpa Faktor Eksternal.....	36
3.2.2 Solusi Model Sudut Defleksi dengan Faktor Eksternal .....	47
3.3 Interpretasi Grafik dan Potret Fase .....	59
3.4 Perintah Mempelajari Fenomena Alam dalam Pandangan Islam.....	73

### **BaB IV PENUTUP**

4.1 Kesimpulan.....	75
4.2 Saran.....	77

<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	78
-----------------------------	----

### **RIWAYAT HIDUP**

### **LAMPIRAN-LAMPIRAN**

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Dinamik Linier .....	21
----------------------------------------------------------------------	----



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Gerak Vertikal pada Dawai .....	2
Gambar 2.1 Jenis-jenis Kestabilan .....	22
Gambar 2.2 Ilustrasi Linierisasi .....	23
Gambar 2.3 Partisi Bagian Balok Sebesar $dm$ .....	26
Gambar 3.1 Ilustrasi Model McKenna .....	31
Gambar 3.2 Grafik Solusi $\theta_1(t)$ Nilai Eigen Kompleks Homogen.....	60
Gambar 3.3 Grafik Solusi $\theta_2(t)$ Nilai Eigen Kompleks Homogen.....	60
Gambar 3.4 Grafik Solusi $\theta_1(t)$ Nilai Eigen Kompleks Tak Homogen.....	61
Gambar 3.5 Grafik Solusi $\theta_2(t)$ Nilai Eigen Kompleks Tak Homogen.....	62
Gambar 3.6 Grafik Solusi $\theta_1(t)$ Nilai Eigen Real Kembar Homogen .....	63
Gambar 3.7 Grafik Solusi $\theta_2(t)$ Nilai Eigen Real Kembar Homogen .....	63
Gambar 3.8 Grafik Solusi $\theta_1(t)$ Nilai Eigen Real Kembar Tak Homogen .....	64
Gambar 3.9 Grafik Solusi $\theta_2(t)$ Nilai Eigen Real Kembar Tak Homogen .....	65
Gambar 3.10 Grafik Solusi $\theta_1(t)$ Nilai Eigen Real Berbeda Homogen.....	66
Gambar 3.11 Grafik Solusi $\theta_2(t)$ Nilai Eigen Real Berbeda Homogen.....	66
Gambar 3.12 Grafik Solusi $\theta_1(t)$ Nilai Eigen Real Berbeda Tak Homogen.....	67
Gambar 3.13 Grafik Solusi $\theta_2(t)$ Nilai Eigen Real Berbeda Tak Homogen.....	67
Gambar 3.14 Potret Fase Nilai Eigen Kompleks Tanpa Faktor Eksternal .....	68
Gambar 3.15 Potret Fase Nilai Eigen Kompleks dengan Faktor Eksternal.....	69
Gambar 3.16 Potret Fase Nilai Eigen Real Kembar Tanpa Faktor Eksternal.....	69
Gambar 3.17 Potret Fase Nilai Eigen Real Kembar dengan Faktor Eksternal .....	70
Gambar 3.18 Potret Fase Nilai Eigen Real Berbeda Tanpa Faktor Eksternal.....	70
Gambar 3.19 Potret Fase Nilai Eigen Real Berbeda dengan Faktor Eksternal.....	71
Gambar 3.20 Grafik $\theta_1(t)$ dan $\theta_2(t)$ dengan Berbagai Nilai Awal .....	72

## DAFTAR SIMBOL

SIMBOL	KETERANGAN
$m$	: Massa per satuan panjang balok ( $\text{Kgs}^2/\text{m}$ ) dengan formula $\frac{W}{g}$ , $m = 657,3; 900000; 950000$
$K$	: Konstanta <i>spring</i> ( $\text{Kg}/\text{m}$ ), $K = 3,75$ (Stech, 2007)
$l$	: Panjang balok $l = 60$
$\delta$	: Kekentalan gesek ( <i>viscous dumping</i> ) bernilai 0,01 (Ohene, 2011)
$\mu$	: Konstanta antara 1,2 sampai 1,6 (Ohene, 2011)
$\beta$	: Amplitudo berkisar antara 0,02 sampai 0,06 (Ohene, 2011)
$\theta(t)$	: Besar sudut defleksi pada saat $t$
$y(t)$	: Besarnya perpanjangan dawai saat $t$



## ABSTRAK

Mufid, Imam. 2015. **Analisis Dinamik Sudut Defleksi pada Model Vibrasi Dawai**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

**Kata kunci:** sistem dinamik, model McKenna, sistem tak homogen, sudut defleksi

Model McKenna merupakan model yang merepresentasikan sistem gerak yang terjadi pada dua dawai yang menggantung balok. Model McKenna menggambarkan gerak vertikal dawai dan gerak torsi pada balok yang digantungnya. Sudut defleksi merupakan sudut yang terbentuk pada gerak torsi. Dengan mengasumsikan bahwa dawai tidak pernah kehilangan ketegangan, maka diperoleh  $K(y \pm l \sin(\theta))^+ = K(y \pm l \sin(\theta))$ , sehingga diperoleh sistem tak berpasangan yang dapat dianalisis secara terpisah. Dengan mereduksi persamaan gerak torsi dan melinierisasinya di sekitar titik tetap, maka diperoleh model sudut defleksi sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{6K}{m}\theta_1 - \delta\theta_2 + \beta \sin(\mu t). \end{cases}$$

Pada skripsi ini ditunjukkan pengaruh eksternal  $\beta \sin(\mu t)$  terhadap kestabilan dan perubahan besarnya sudut pada model sudut defleksi. Untuk mengetahui perilaku dari model baik kestabilan maupun perubahan besarnya sudut defleksi digunakan analisis sistem dinamik. Berdasarkan hasil analisis, dengan menambahkan massa pada balok yang digantung akan diperoleh tiga solusi yang berbeda berdasarkan nilai eigennya. Faktor eksternal  $\beta \sin(\mu t)$  memiliki pengaruh terhadap kestabilan dan perubahan besarnya sudut yang terbentuk pada model sudut defleksi, hal ini disebabkan setelah ditambahkan faktor eksternal medan vektor dari model bergerak secara tidak beraturan atau bersifat *chaotic*.

## ABSTRACT

Mufid, Imam. 2015. **Dynamical Analysis of Deflection Angle of String Vibration Model**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd. (II) Fachrur Rozi, M.Si.

**Keywords:** dynamical system, McKenna model, nonhomogeneous system, deflection angle

McKenna model represents the system of motion that occurs in two stringed hanging beams. The McKenna is model describes vertical motion on string and torque motion on the beam that is hunged by string. Deflection is an angle formed at the torque motion. Assuming that string never lost tension, we obtained  $K(y \pm l \sin(\theta))^+ = K(y \pm l \sin(\theta))$ . So an unpaired system that can be analyzed separately is obtained. By reducing the equation of torque motion and linearizing about a fixed point, we obtained a model of deflection angles as follow:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{6K}{m}\theta_1 - \delta\theta_2 + \beta \sin(\mu t) \end{cases}$$

In this thesis we show the influence of external factor  $\beta \sin(\mu t)$ , on stability and evolution of deflection angle of the models. To know the behaviour of the model both stability and deflection angle model, we used dynamic system analysis. Based on the analysis, by adding mass of the beam which is suspended will be obtained three different solutions based on it's eigenvalues. External factors  $\beta \sin(\mu t)$  have an influence on the stability and evolution of angle formed on the deflection angle models, this is due to external factors after adding the vector field of the model moves irregularly or is chaotic.

## ملخص

مفيد، إمام. ٢٠١٥. التحليل الديناميكي زاوية انحراف على نموذج اهتزاز سلاسل. أطروحة. شعبة الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) أري كسمستوتي الماجستير. (٢) فخرالرازي الماجستير.

**الكلمات الرئيسية:** الأنظمة الديناميكية، نموذج McKenna، نظام غير متجانس، زاوية انحراف

نموذج McKenna هو نموذج التي تمثل نظام الحركة التي تحدث على سلسلتين شققا الحزم. نموذج McKenna يصف سلاسل الحركة العمودية والحركة عزم الدوران على كتلة زاوية الانحراف هي الزاوية التي شكلتها الحركة من عزم الدوران. على افتراض أن السلسلة لم يفقد التوتر، ثم حصل على:

فحصل على نظام المفردة التي يمكن تحليلها بشكل منفصل. عن طريق الحد من المعادلة عزم الحركة وبتخطيط حول نقطة ثابتة، فنحصل على نموذج زاوية انحراف التالي:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{6K}{m}\theta_1 - \delta\theta_2 + \beta \sin(\mu t) \end{cases}$$

في هذا البحث أظهرت التأثيرات الخارجية  $\beta \sin(\mu t)$  على الاستقرار وتغيير زاوية في نموذج زاوية الانحراف ازاوية. لمعرفة السلوك من المعادلة يستخدم تحليل الأنظمة الديناميكية. استناداً إلى نتائج التحليل، بإضافة الوزن على شعاع ستحصل على ثلاثة حلول المختلفة استناداً إلى قيمة إيجين لها. العوامل الخارجية  $\beta \sin(\mu t)$  تأثير على الاستقرار وتغيير حجم الزاوية تشكلت على نموذج زاوية الانحراف. وهذا سبب بعد إضافة عامل خارجي حقل متجه من المعادلة تحركات غير منتظمة أو هي فوضوي.

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Saat ini tuntutan terhadap penguasaan matematika terapan semakin kuat. Kerja efektif, praktis, dan akurat diperlukan untuk menjalani kehidupan saat ini. Matematika terapan diperlukan khususnya dalam membantu menyelesaikan masalah-masalah yang berkaitan dengan model matematika (Rochmad, 2014:1). Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha merepresentasikan dan menjelaskan masalah-masalah nyata ke dalam pernyataan matematis (Widowati & Sutumin, 2007:1). Banyak fenomena alam yang terjadi yang dapat dianalisis dengan menggunakan model matematika, seperti perkembangbiakan bakteri, penyebaran penyakit, getaran, gelombang, dan masih banyak lagi.

Di dalam Islam juga terdapat perintah untuk terus mengembangkan ilmu pengetahuan dan memahami fenomena alam ciptaan Tuhan yang menarik untuk diteliti, diselidiki, dan dikembangkan. Hal ini dijelaskan dalam al-Quran surat Yunus/10:101, yaitu:

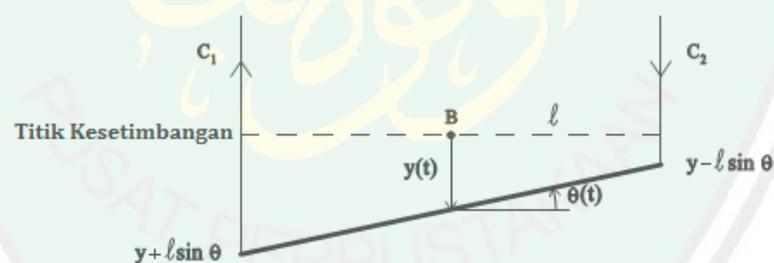
قُلْ أَنْظُرُوا مَاذَا فِي السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَمَا تُغْنِي الْآيَاتُ وَالنُّذُرُ عَنْ قَوْمٍ لَا يُؤْمِنُونَ ﴿١٠١﴾

*Katakanlah: "Perhatikanlah apa yang ada di langit dan di bumi, tidaklah bermanfaat tanda kekuasaan Allah dan Rasul-rasul yang memberi peringatan bagi orang-orang yang tidak beriman" (QS. Yunus/10:101).*

Ayat al-Quran di atas merupakan salah satu landasan dalam Islam untuk terus mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi. Sebagai bentuk pengamalan dari surat Yunus/10 ayat 101, skripsi ini mengkaji salah satu fenomena alam yaitu

vibrasi. Mengkaji fenomena vibrasi ini akan memberikan manfaat yang besar, karena fenomena ini sering terjadi di sekitar manusia. Hal ini menunjukkan betapa rapi, teratur dan menakjubkan penciptaan yang dilakukan oleh Allah Swt., yang sekaligus akan semakin menyadarkan manusia betapa Allah Maha Bijaksana dan Maha Luas Pengetahuan-Nya.

Salah satu cara memahami fenomena alam yang terjadi seperti yang diperintahkan dalam al-Quran adalah dengan merepresentasikan suatu fenomena alam yang terjadi ke dalam model matematika. Salah satu contoh model matematika tersebut adalah model vibrasi dawai. Menurut Halliday dan Resnick (1989:442), partikel yang bergerak bolak-balik melalui lintasan yang sama, gerakanya disebut vibrasi. Vibrasi dawai yang dimaksud dalam skripsi ini adalah gerakan dari dua buah dawai yang menggantung sebuah balok yang mengalami pembebanan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.1.



Gambar 1.1 Gerak Vertikal pada Dawai (Gazzola, 2013)

Gerak berulang-ulang yang terjadi pada dawai yang ditunjukkan pada Gambar 1.1 adalah gerak vertikal seperti yang terjadi pada pegas dan mengakibatkan terjadi puntiran (torsi) ke atas dan ke bawah pada balok yang digantungnya. Gerak vertikal itu terjadi dikarenakan balok diberi beban sebesar  $B$ , akibatnya balok bergeser dari posisi mula-mula. Perubahan posisi inilah yang disebut defleksi. Menurut Gere dan Timoshenko (1972:266) defleksi suatu balok di sebarang titik di sepanjang sumbunya merupakan peralihan titik tersebut dari

posisi semula, diukur dalam arah  $y$ . Sudut yang terbentuk akibat perubahan posisi tersebut disebut sudut defleksi.

Pada tahun 1999, Lazer dan McKenna berhasil merumuskan model matematika yang merepresentasikan fenomena di atas. Lazer dan McKenna menurunkan model matematika dalam sistem tak berpasangan persamaan diferensial tak linier dengan asumsi model tersebut merupakan model yang bergantung waktu. Kemudian Lazer dan McKenna menggunakan model matematika tersebut untuk menganalisis runtuhnya jembatan Tacoma pada tanggal 7 November 1940 yang diakibatkan besarnya gerakan puntiran pada jembatan karena hembusan angin. Lazer dan McKenna menggunakan laporan forensik dari jembatan yang kemudian digunakan sebagai parameter dari model tersebut. Sehingga masih memungkinkan model ini digunakan untuk menganalisis vibrasi yang terjadi pada objek lain yang memiliki kesamaan dengan kondisi yang ditunjukkan Gambar 1.1.

Berikut adalah model matematika yang diajukan oleh McKenna yang menggambarkan dinamika pergerakan torsi vertikal yang dinyatakan dalam  $\ddot{\theta} = \frac{3K}{ml} \cos \theta [(y - l \sin \theta)^+ - (y + l \sin \theta)^+] - \delta_1 \theta' + f(t)$  dan  $\ddot{y} = -\frac{K}{m} [(y - l \sin \theta)^+ + (y + l \sin \theta)^+] - \delta_2 y' + g$ , dengan  $\theta(t)$  merupakan sudut dari horizontal pada dawai pada waktu tertentu yang disebut dengan sudut defleksi. Sedangkan  $y(t)$  menyatakan dinamika pergerakan vertikal dawai. Sudut defleksi pada skripsi ini menggambarkan gerak torsi dari dawai yang dibebani balok. Model dari sudut defleksi adalah salah satu model dinamik karena modelnya bergantung waktu dan dapat merepresentasikan skenario yang dapat berubah

sepanjang waktu. Tujuan dari analisis dinamik adalah untuk menilai perilaku struktural dalam berbagai beban setiap waktu.

Berdasarkan teorema Hartman-Grobman, perilaku dari persamaan tak linier ekuivalen dengan persamaan hasil linierisasinya di sekitar titik kesetimbangan jika titik tetap tersebut *hyperbolic*. Titik kesetimbangan dikatakan *hyperbolic* jika nilai eigen dari hasil linierisasi di sekitar titik tersebut memiliki bagian real tak nol (Vries, dkk., 2006:93). Karena model McKenna adalah persamaan diferensial tak linier, maka untuk dapat menganalisis model tersebut dilakukan pendekatan dengan melinierisasi model tersebut disekitar titik kesetimbangannya. Pada Gambar 1.1 terlihat titik kesetimbangan dari balok adalah ketika balok berada pada posisi tepat horizontal, yaitu sudut horizontal dari balok adalah nol. Sehingga pada skripsi ini akan dianalisis perilaku dari model sudut defleksi di sekitar nol.

Skripsi ini merupakan upaya ilmiah untuk menganalisis perilaku dari perubahan sudut defleksi pada vibrasi dawai dalam kerangka penelitian pengembangan. Penelitian sebelumnya yang membahas tentang model McKenna ini ditulis oleh Kwofie Richard Ohene tahun 2012 dalam artikel berjudul *A Mathematical Model of Suspension Bridge-Case Study: Adomy Bridge, Atimpoku, Ghana*, membahas model vibrasi dawai yang diterapkan pada jembatan Adomi. Ohene meneliti respon jembatan dan besarnya vibrasi yang terjadi pada jembatan Adomi dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde empat. Semakin besar nilai konstanta pegas yang diberikan akan menghasilkan respon yang stabil terhadap nilai awal sudut defleksi. Karena pada penelitian sebelumnya hanya dibahas menggunakan metode numerik dan menyimpulkan respon dari model

menggunakan beberapa uji coba saja dan tidak ditunjukkan seberapa besar pengaruh faktor eksternal pada model, maka pada skripsi ini dilakukan analisis sistem dinamik terhadap model tersebut, sehingga dapat diketahui respon yang terjadi dengan berbagai parameter yang diberikan dan juga dapat diketahui seberapa besar pengaruh dari faktor eksternal.

Dari pemaparan latar belakang di atas, maka penulis memiliki gagasan dalam menyusun skripsi dengan judul "*Analisis Dinamik Sudut Defleksi pada Model Vibrasi Dawai*".

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang yang telah dipaparkan, masalah yang dapat dirumuskan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penurunan model sudut defleksi pada vibrasi?
2. Bagaimana solusi model sudut defleksi pada vibrasi dawai?
3. Bagaimana perilaku struktural dari model sudut defleksi dengan dan tanpa faktor eksternal?

## **1.3 Tujuan Penelitian**

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah, tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Mengetahui penurunan model sudut defleksi pada vibrasi.
2. Mengetahui solusi model sudut defleksi pada vibrasi dawai.
3. Memahami perilaku struktural dari model sudut defleksi dengan dan tanpa faktor eksternal.

#### 1.4 Batasan Masalah

Agar masalah dalam skripsi ini lebih jelas, maka perlu adanya batasan-batasan masalah sehingga diperoleh hasil yang sesuai dengan sasaran yang diharapkan. Adapun batasan-batasan masalah tersebut yaitu:

1. Dawai yang diteliti pada skripsi ini adalah dua dawai yang selalu mengalami tegangan karena menggantung sebuah balok.
2. Model sudut defleksi diambil dari sistem persamaan gerak torsi dari model McKenna yang telah dilinierisasi.
3. Penelitian pada skripsi ini ditekankan pada analisis sudut defleksi yang terbentuk pada gerak torsi, tanpa memperhatikan gerak vertikal yang terjadi.
4. Dawai mengikuti hukum Hooke yaitu dawai tidak menahan terjadinya pemampatan tetapi menahan terjadinya perpanjangan.

#### 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari skripsi ini diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Sebagai alternatif untuk menganalisis fenomena vibrasi tanpa melakukan penelitian eksperimental dan memberikan efisiensi waktu dan keakuratan hitungan, karena model dapat dikembangkan sesuai kebutuhan.
2. Memberi pemahaman perilaku dari model sudut defleksi pada vibrasi dawai di sekitar titik kesetimbangan.
3. Hasil dari skripsi ini dapat digunakan sebagai pembanding untuk menganalisis gerak sederhana lainnya seperti pendulum maupun pegas.
4. Memberi pengetahuan tentang stabilitas gerakan vertikal dan torsi pada dawai akibat besar kecilnya sudut defleksi.

## 1.6 Metode Penelitian

Pendekatan penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif. Pendekatan ini dipilih karena skripsi ini bertujuan membuat deskripsi, gambaran atau uraian secara sistematis dan akurat mengenai fakta-fakta atau fenomena yang diselidiki yaitu perilaku dari sudut defleksi. Jenis penelitian yang digunakan dalam skripsi ini adalah kepustakaan, karena skripsi ini terfokus pada pengkajian buku, jurnal ataupun artikel lain yang berhubungan dengan gerak torsi vertikal. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mereduksi sistem persamaan torsi vertikal menjadi sistem tak berpasangan.
2. Mereduksi persamaan torsi (sudut defleksi) menjadi sistem linier.
3. Menentukan solusi sistem homogen dari model sudut defleksi.
4. Menentukan solusi sistem tak homogen dari persamaan sudut defleksi.
5. Interpretasi grafik solusi dan potret fase serta menganalisis pengaruh faktor eksternal terhadap model.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

**Bab I** Pendahuluan, yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

**Bab II** Kajian Pustaka, yang berisikan tentang landasan teori yang menguatkan

analisis dari hasil penelitian.

Bab III Pembahasan, yang berisikan tentang hasil penelitian dan analisis data dari hasil penelitian.

Bab IV Penutup, yang meliputi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan pembahasan serta saran-saran untuk penelitian selanjutnya.



## BAB II

### KAJIAN PUSTAKA

#### 2.1 Sistem Dinamik

Suatu sistem dinamik terdiri dari satu himpunan dari variabel-variabel yang menggambarkan keadaan dan aturan yang menjelaskan perubahan keadaan dari suatu variabel-variabel terhadap waktu (yaitu, bagaimana keadaan dari sistem di saat berikutnya yang tergantung waktu dan keadaan yang ada pada waktu sebelumnya) (Izhikevich, 2007:8).

Sistem dinamik adalah formalisasi matematis untuk setiap aturan yang tetap (fungsi) yang menggambarkan ketergantungan posisi titik dalam beberapa ruang di sekitar parameter. Parameter di sini sering disebut dengan “waktu” dan dapat berbentuk diskrit yang dinyatakan dalam bilangan bulat dan kontinu yang dinyatakan dalam suatu interval di  $R$  (Tohaneanu, 2014:1). Jika dikaji secara geometri, sistem dinamik menggambarkan pergerakan titik-titik di dalam ruang fase sepanjang kurva-kurva solusi dari sistem persamaan diferensialnya (Roat, 2012:7).

#### 2.2 Sistem Linier

**Definisi 2.1** Suatu operator  $\mathcal{L}$  dikatakan linier jika memenuhi sifat *superposition* dan *homogeneity* yaitu:  $\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$  dan  $\mathcal{L}(cu) = c\mathcal{L}(u)$ .

Untuk setiap fungsi  $u$  dan  $v$ , dan konstanta  $c$ . Suatu persamaan diferensial berbentuk  $\mathcal{L}(u) = 0$  dikatakan linier jika operator  $\mathcal{L}$  linier (Hedrick & Girard, 2010:10).

Adapun contoh sistem linier adalah sebagai berikut. Diberikan persamaan diferensial linier orde dua:

$$\ddot{x} = -kx - b\dot{x}. \quad (2.1)$$

Persamaan tersebut adalah model linier dari fungsi pegas.  $\dot{x}$  mewakili  $\frac{dx}{dt}$  dan  $\ddot{x}$  mewakili  $\frac{d^2x}{dt^2}$ . Untuk menghitung pergerakannya, harus diketahui posisi dari  $x$  dan kecepatan  $\dot{x}$ . Diketahui posisi dan kecepatan adalah kuantitas untuk menghitung gerak, jadi dapat menggunakan koordinatnya. Misal  $x_1 = x$  dan  $x_2 = \dot{x}$ , sehingga persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai sistem persamaan diferensial linier orde satu.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -kx_1 - bx_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

atau dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.3)$$

Untuk melihat sistem (2.3) adalah linier, akan dibuktikan bahwa (2.3) memenuhi definisi 1. Dari sistem (2.3) diperoleh:  $\mathcal{L}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 + kx_1 + bx_2 \end{bmatrix}$ .

$$\begin{aligned} 1. \quad \mathcal{L}(u + v, p + q) &= \begin{bmatrix} (\dot{u} + \dot{v}) - (p + q) \\ (\dot{p} + \dot{q}) + k(u + v) + b(p + q) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\dot{u} - p) + (\dot{v} - q) \\ (\dot{p} + ku + bp) + (\dot{q} + kv + bq) \end{bmatrix} = \mathcal{L}(u, p) + \mathcal{L}(v, q) \end{aligned}$$

$$2. \quad \mathcal{L}(cu, cv) = \begin{bmatrix} c\dot{u} + cv \\ c\dot{v} + kcu + bcv \end{bmatrix} = c\mathcal{L}(u, v)$$

Terbukti bahwa sistem (2.3) merupakan sistem linier. Generalisasi dari sistem linier dengan  $n$  variabel dengan koefisien konstan dapat ditulis sebagai berikut:



Untuk kasus koefisien konstan persamaan (2.5), ada cara untuk memperoleh solusi dari matriks menggunakan eksponensial dari matriks yang akan sama dengan identitas ketika  $t$  sama dengan 0. Eksponensial ini biasanya tidak mudah untuk dihitung, tetapi sangat berguna sebagai solusi yang terkonsep.

Untuk suatu persamaan skalar  $\dot{x} = ax$ , solusinya adalah  $x(t) = x_0 e^{at}$  untuk  $x_0$  adalah sebarang konstanta. Untuk persamaan (2.5),  $e^{At}$  dipertimbangkan sebagai solusi dari matriks. Didefinisikan:

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{n!}A^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}A^n$$

Untuk membuktikan bahwa  $e^{At}$  adalah solusi dari matriks, substitusikan  $e^{At}$  ke persamaan (2.5), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= 0 + A + \frac{t}{1!}A^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \dots \\ &= A \left( I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1} + \dots \right) \\ &= A(e^{At}). \end{aligned}$$

Karena  $e^{A0} = I$ ,  $e^{At}$  adalah solusi utama dari matriks yang akan sama dengan identitas jika  $t$  sama dengan 0. Jika  $\mathbf{v}$  adalah sebarang vektor, maka  $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{v}$  adalah solusi dengan  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}$  (Robinson, 2004:17-18).

**Teorema 2.2** Jika nilai eigen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  dari suatu matriks  $\mathbf{A}$  berukuran  $n \times n$  adalah real dan berbeda, maka himpunan dari vektor-vektor eigen yang bersesuaian  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  membentuk basis untuk  $R^n$ , matriks  $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$  adalah *invertible* dan

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$$

(Perko, 2000:6).

**Bukti:** Misalkan matriks  $A$  mempunyai  $n$  vektor eigen bebas linier  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  dan  $\lambda_i$  adalah nilai eigen dari  $A$  yang bersesuaian dengan  $\mathbf{p}_i$  untuk setiap  $i$  (beberapa dari  $\lambda_i$  boleh sama). Misalkan  $P$  adalah matriks di mana vektor kolom ke- $j$  adalah  $\mathbf{p}_j$  untuk  $j = 1, 2, \dots, n$ , terlihat  $A\mathbf{p}_j = \lambda_j\mathbf{p}_j$  adalah vektor kolom ke- $j$  dari  $AP$ , maka

$$AP = [A\mathbf{p}_1 \ A\mathbf{p}_2 \ \dots \ A\mathbf{p}_n]$$

$$AP = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \ \lambda_2\mathbf{p}_2 \ \dots \ \lambda_n\mathbf{p}_n]$$

$$AP = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$AP = PD$$

$$P^{-1}AP = D.$$

**Definisi 2.3** Misalkan  $A$  adalah matriks  $n \times n$ , maka vektor  $\mathbf{x}$  yang tidak nol di  $R^n$  disebut vektor eigen (*eigen vector*) dari  $A$  jika  $A\mathbf{x}$  adalah kelipatan skalar dari  $\mathbf{x}$ , yaitu  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  untuk suatu skalar  $\lambda$ . Skalar  $\lambda$  dinamakan nilai eigen (*eigen value*) dari  $A$  (Karso, 2012:3).

**Teorema 2.4** Jika  $A$  adalah suatu matriks  $n \times n$  dan  $\lambda$  adalah suatu bilangan real, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen.

- $\lambda$  adalah nilai-nilai eigen dari matriks  $A$ .
- Sistem persamaan  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$  mempunyai penyelesaian tak trivial (non trivial).
- Ada vektor  $\mathbf{x}$  yang tidak nol dalam  $R^n$  sedemikian sehingga  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ .
- $\lambda$  adalah suatu penyelesaian real dari persamaan karakteristik  $|\lambda I - A| = 0$ .

**Bukti:** Akan diperlihatkan bahwa (a), (b), (c) dan (d) ekuivalen satu sama lainnya dengan membuktikan urutan implikasi  $(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (d) \rightarrow (a)$ .

$(a) \rightarrow (b)$ . Karena  $\lambda$  adalah nilai-nilai eigen dari matriks  $A$ , maka menurut definisi nilai eigen berlaku  $Ax = \lambda x$  dengan  $x$  tak nol.

$$\lambda Ix - Ax = 0$$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Karena  $x$  tak nol maka sistem persamaan linier homogen  $(\lambda I - A)x = 0$  harus mempunyai penyelesaian non trivial.

$(b) \rightarrow (c)$ . Karena  $(\lambda I - A)x = 0$  maka

$$Ax = \lambda Ix$$

$$Ax = \lambda x$$

$(c) \rightarrow (d)$ . Karena  $Ax = \lambda x$

$$Ax = \lambda Ix$$

$$(\lambda I - A)x = 0.$$

Karena ada  $x$  tidak nol, maka sistem persamaan linier homogen  $(\lambda I - A)x = 0$  haruslah  $\det(\lambda I - A) = 0$  dengan  $\lambda$  adalah suatu penyelesaian realnya.

$(d) \rightarrow (a)$ . Karena  $\lambda$  adalah penyelesaian real dari persamaan  $\det(\lambda I - A) = 0$ , maka  $\lambda$  adalah penyelesaian dari persamaan karakteristik  $\det(\lambda I - A) = 0$  atau dengan kata lain  $\lambda$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$  (Karso, 2012:8-9).

**Teorema 2.5** Misal matriks  $A$  dari sistem (2.5) merupakan matriks berukuran  $2 \times 2$  dan jika sistem (2.5) mempunyai nilai-nilai eigen yang berbeda, maka solusi umum sistem (2.5) adalah:

$$x(t) = C_1 v e^{\lambda_1 t} + C_2 u e^{\lambda_2 t} \quad (2.6)$$

dengan  $\mathbf{v}$  dan  $\mathbf{u}$  adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  (Boyce & DiPrima, 2009:487).

**Bukti:** Dari persamaan (2.6) maka diperoleh:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = C_1 \lambda_1 \mathbf{v} e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 \mathbf{u} e^{\lambda_2 t}$$

Diketahui bahwa  $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ , maka

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = C_1 A \mathbf{v} e^{\lambda_1 t} + C_2 A \mathbf{u} e^{\lambda_2 t}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(C_1 \mathbf{v} e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{u} e^{\lambda_2 t})$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t).$$

**Teorema 2.6** Misal matriks  $A$  dari sistem (2.5) merupakan matriks berukuran  $2 \times 2$  dan jika persamaan karakteristik dari sistem (2.5) mempunyai akar kembar  $\lambda_{1,2} = \lambda$ , dan diperoleh:

(a) Dua vektor eigen, maka solusinya adalah:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{v} e^{\lambda t} + C_2 \mathbf{u} e^{\lambda t}$$

(b) Satu vektor eigen, maka solusinya adalah:

$$\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{v} e^{\lambda t} + C_2 (\mathbf{v}t - \mathbf{w}) e^{\lambda t}$$

dengan  $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$ .

**Bukti:** (a) Bukti analog dengan teorema 2.4. (b) Pada situasi ini  $(A - \lambda I)(\lambda I) = (\lambda I)(A - \lambda I)$ ,  $\lambda I$  adalah perkalian skalar dengan identitas, sehingga

$$\begin{aligned} e^{At} \mathbf{w} &= e^{(\lambda I + (A - \lambda I))t} \mathbf{w} = e^{(\lambda I)t} e^{(A - \lambda I)t} \mathbf{w} \\ &= e^{(\lambda I)t} \mathbf{I} e^{(A - \lambda I)t} \mathbf{w} \\ &= e^{(\lambda I)t} \left( \mathbf{I} \mathbf{w} + t(A - \lambda I)\mathbf{w} + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda I)^2 \mathbf{w} + \dots \right). \end{aligned}$$

Misalkan  $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$ , dimana  $\mathbf{v}$  adalah vektor eigen dari  $\lambda$ , maka

$$(A - \lambda I)^2 \mathbf{w} = (A - \lambda I)\mathbf{v} \text{ jadi}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^n \mathbf{w} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^{n-1} \mathbf{v} \text{ untuk } n \geq 2$$

Sehingga diperoleh solusi kedua dari persamaan

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda t} (\mathbf{w} + t\mathbf{v})$$

(Boyce & DiPrima, 2009:488 dan Robinson, 2004:35).

**Teorema 2.7** Misalkan  $\mathbf{A}$  suatu matriks  $n \times n$  dengan entri-entri bilangan real.

(a) Asumsikan bahwa  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)$  adalah solusi kompleks dari  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}$ , dimana  $\mathbf{x}(t)$  dan  $\mathbf{y}(t)$  adalah real. Maka  $\mathbf{x}(t)$  dan  $\mathbf{y}(t)$  adalah solusi real dari persamaan.

(b) Jika  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$  adalah nilai eigen kompleks dengan vektor eigen kompleks  $\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w}$ , maka

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{at} (\cos(bt) \mathbf{u} - \sin(bt) \mathbf{w}) \text{ dan}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{at} (\sin(bt) \mathbf{u} + \cos(bt) \mathbf{w})$$

adalah masing-masing solusi dari  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ .

**Bukti:** (a) Dengan menggunakan aturan turunan dan perkalian matriks maka diperoleh:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) + i\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{z}}(t)$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{z}(t)$$

$$= \mathbf{A}(\mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t))$$

$$= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + i\mathbf{A}\mathbf{y}(t).$$

Dengan menghubungkan bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks maka diperoleh  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$  dan  $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$ .

(b) Untuk bagian kedua dari teorema mengikuti bagian pertama dan merupakan penjabaran dari  $e^{a+ib}(\mathbf{u} + i\mathbf{w})$  (Robinson, 2004:28).

## 2.4 Sistem Tak Homogen

Sistem persamaan diferensial linier tak homogen secara umum dapat dituliskan sebagai:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (2.7)$$

Karena  $\mathbf{g}(t)$  pada sistem persamaan (2.7) menyebabkan sistem tersebut menjadi tak homogen. Sehingga  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$  merupakan bagian homogen dari sistem persamaan (2.7). Teorema yang menyatakan hubungan antara bentuk homogen dan bentuk tak homogenya adalah sebagai berikut,

**Teorema 2.8** (a) Misalkan  $\mathbf{x}_1(t)$  dan  $\mathbf{x}_2(t)$  adalah dua solusi dari persamaan diferensial linier tak homogen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ . Maka,  $\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$  merupakan solusi dari persamaan linier diferensial homogen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ .

(b) Misalkan  $\mathbf{x}_p(t)$  adalah solusi dari persamaan diferensial linier tak homogen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$  dan  $\mathbf{x}_h(t)$  menjadi solusi dari persamaan diferensial linier homogen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ . Maka,  $\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t)$  adalah solusi dari persamaan diferensial linier tak homogen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ .

(c) Misalkan  $\mathbf{x}_p(t)$  adalah solusi dari persamaan diferensial linier tak homogen  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$  dan  $\mathbf{M}(t)$  adalah matriks pokok yang menjadi solusi dari persamaan diferensial linier homogen. Maka solusi dari persamaan diferensial linier tak homogen dapat ditulis sebagai  $\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{M}(t)\mathbf{c}$  dan  $\mathbf{c}$  merupakan vektor.

**Bukti:** (a) Gunakan  $\mathbf{x}_1(t)$  dan  $\mathbf{x}_2(t)$  sebagai pernyataan dari teorema,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{g}(t) - (\mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{g}(t)) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)) \end{aligned}$$

yang menunjukkan  $\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$  adalah solusi persamaan homogen.

(b) Misalkan  $\mathbf{x}_p(t)$  adalah solusi dari persamaan diferensial tak homogen dan  $\mathbf{x}_h(t)$  adalah solusi dari persamaan homogen, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{x}_p(t) - \mathbf{x}_h(t)) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{g}(t) + \mathbf{A}\mathbf{x}_h(t) \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t)) + \mathbf{g}(t)\end{aligned}$$

yang menunjukkan  $\mathbf{x}_p(t) + \mathbf{x}_h(t)$  merupakan solusi dari persamaan tak homogen.

(c) Misal  $\mathbf{x}_p(t)$  adalah solusi dari persamaan tak homogen dan  $\mathbf{M}(t)$  adalah matriks pokok yang merupakan solusi dari persamaan homogen. Misal  $\mathbf{x}(t)$  adalah sebarang solusi persamaan tak homogen. Maka  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(t)$  adalah solusi dari bagian (a), tetapi beberapa solusi dari persamaan homogen dapat ditulis sebagai  $\mathbf{M}(t)\mathbf{c}$  untuk suatu vektor  $\mathbf{c}$ . Sehingga,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_p(t) &= \mathbf{M}(t)\mathbf{c} \\ \mathbf{x}(t) &= \mathbf{M}(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)\end{aligned}$$

untuk suatu vektor  $\mathbf{c}$ .

Teorema di atas menyatakan bahwa cukup menentukan satu solusi partikular dari persamaan diferensial tak homogen dan menjumlahkannya dengan solusi umum dari persamaan diferensial homogen. Hanya dalam kasus pada orde kedua persamaan berupa skalar terkadang dapat ditebak solusinya (Metode ini sering disebut dengan koefisien tak tentu). Metode yang lebih umum disebut dengan variasi parameter. Metode ini lebih sulit digunakan, tetapi selalu berhasil.

**Teorema 2.9** (Variasi Parameter). Solusi  $\mathbf{x}(t)$  dari persamaan diferensial linier tak homogen dengan kondisi awal  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \left( \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-As} \mathbf{g}(s) ds \right).$$

**Bukti:** turunkan bentuk solusi  $\mathbf{x}(t)$  dari persamaan tak homogen. Solusi dari persamaan homogen dapat ditulis sebagai  $e^{At}\mathbf{c}$ . Untuk solusi persamaan tak homogen diselidiki kemungkinan dari penulisannya dari bentuk ini. Dimana  $\mathbf{c}$  berubah dengan  $t$ , dengan memperhatikan

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{y}(t).$$

Variasi  $\mathbf{y}(t)$  mengukur banyaknya variasi solusi dari solusi sistem homogen.

Dengan menyelesaikan  $\mathbf{y}(t) = e^{-At}\mathbf{x}(t)$ , diperoleh:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}}(t) &= -\mathbf{A}e^{-At}\mathbf{x}(t) + e^{-At}\dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= -\mathbf{A}e^{-At}\mathbf{x}(t) + e^{-At}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + e^{-At}\mathbf{g}(t) \\ &= e^{-At}\mathbf{g}(t)\end{aligned}$$

integrasikan dari  $t$  sama dengan 0 sampai  $t$  memberikan:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{-As}\mathbf{g}(s) ds \quad \text{atau} \quad \mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{y}(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As}\mathbf{g}(s) ds.$$

Persamaan pertama menunjukkan solusi umum dari persamaan homogen dan integralnya memberikan solusi partikular dari persamaan tak homogen, jika  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}(0)$  (Robinson, 2004: 44-46).

## 2.5 Potret Fase dan Kestabilan

**Definisi 2.10** Diberikan persamaan sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (2.8)$$

Titik  $\mathbf{x}_0 \in R^n$  dinamakan titik kesetimbangan atau titik kritis dari persamaan (2.8)

jika  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$  (Perko, 2000:102).

Diberikan sistem sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.9)$$

dengan  $A$  matriks  $2 \times 2$ , serta  $\lambda_1, \lambda_2$  merupakan nilai-nilai eigen dari  $A$  dan  $v_1, v_2$  merupakan vektor-vektor eigen yang bersesuaian, maka solusi dari sistem (2.9) adalah:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} C_1 + \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} C_2.$$

Solusi tersebut mendefinisikan sebuah gerakan di sepanjang kurva. Gerakan ini dapat digambarkan secara geometri dengan kurva solusinya pada bidang  $x_1, x_2$  yang disebut bidang fase dan panah-panah yang menunjukkan arah gerakan pada kurva bersamaan dengan meningkatnya waktu. Potret fase dari sistem persamaan diferensial seperti sistem di atas dengan  $\mathbf{x} \in R^2$  adalah himpunan dari semua kurva solusi dari sistem persamaan di atas dalam ruang fase  $R^n$  (Perko, 2000:2).

Pada kasus satu persamaan diferensial solusinya dapat digambarkan pada bidang  $y-t$ . Tetapi, hal ini akan sulit jika solusinya dalam bentuk vektor-vektor. Kemudian gambarkan solusi sebagai titik dalam bidang  $x_1-x_2$ . Titik ekuilibrium akan sama dengan titik asal dari bidang  $x_1-x_2$  dan bidang  $x_1-x_2$  disebut sebagai bidang fase. Untuk menggambarkan solusi dalam bidang fase dapat diambil nilai dari  $t$  dan letakan dalam solusi. Hal ini memberikan satu titik dalam bidang fase yang dapat digambar. Lakukan ini untuk semua nilai  $t$ . Gambar dari solusi partikular dalam bidang fase disebut trayektori dari solusi. Ketika didapatkan trayektori dari solusi dapat diketahui atau tidak solusi akan mendekati titik ekuilibrium seiring bertambahnya waktu  $t$ . Selain dengan menggunakan solusi, terdapat cara lain untuk menggambar trayektori. Cara tersebut adalah pilih nilai dari  $\mathbf{x}$  dan kemudian hitung  $A\mathbf{x}$ . Hal ini akan memberikan suatu vektor yang merepresentasikan  $\dot{\mathbf{x}}$  pada solusi partikular. Sebagai persamaan diferensial vektor ini menjadi tangen dari titik tersebut. Dengan menggambarkan garis yang

ditunjukkan oleh anak panah maka grafik tersebut disebut potret fase (Dawkins, 2007:274-276).

Cara tersebut hanya dapat digunakan untuk sistem *autonomous* karena sistem *autonomous* tidak bergantung variabel  $t$  secara eksplisit. Untuk menggambar persamaan diferensial *nonautonomous* harus dilakukan transformasi menjadi sistem *autonomous* terlebih dahulu. Seperti contoh berikut, diberikan persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = \sin(t) \quad (2.10)$$

Misalkan  $t = \tau$ , maka persamaan (2.10) dapat diubah menjadi:

$$\frac{dx}{d\tau} = \sin(\tau), \quad \frac{d\tau}{d\tau} = 1$$

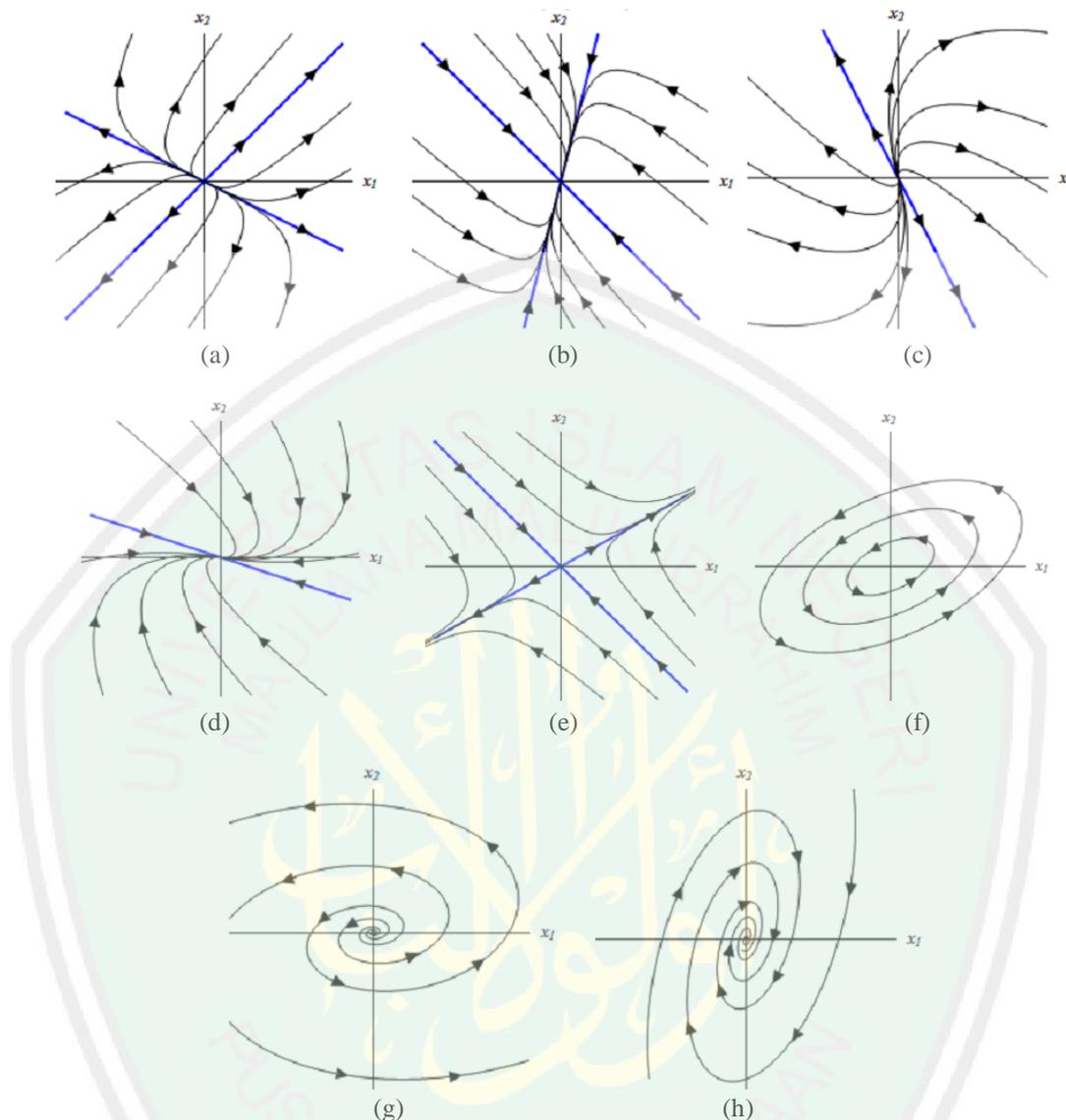
Sehingga diperoleh sistem *autonomous*, yang dapat digambarkan trayektorinya pada bidang  $x-t$  (Roussel, 2005:01).

Adapun kestabilan dari sistem adalah sebagai berikut:

Tabel 2.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Dinamik Linier (Boyce & DiPrima, 2009:494)

No.	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
1.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	-	-
2.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node/Simpul
3.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node/Simpul
4.	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak Stabil	Saddle/Pelana
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node/Simpul
6.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node/Simpul
7.	$\lambda_{1,2} = a \pm bi \in \mathbb{C}$	-	-
8.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
9.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
10.	$a = 0$	Stabil	Terpusat/Center

Sedangkan jenis kestabilan dari sistem yang disajikan dalam gambar adalah sebagai berikut:



**Gambar 2.1** (a) Node Tidak Stabil, (b) Node Stabil Asimtotik, (c) Node Tidak Stabil, (d) Node Stabil Asimtotik, (e) Saddle Tidak Stabil, (f) Center Stabil, (g) Spiral Tidak Stabil, (h) Spiral Stabil Asimtotik (Dawkins, 2007)

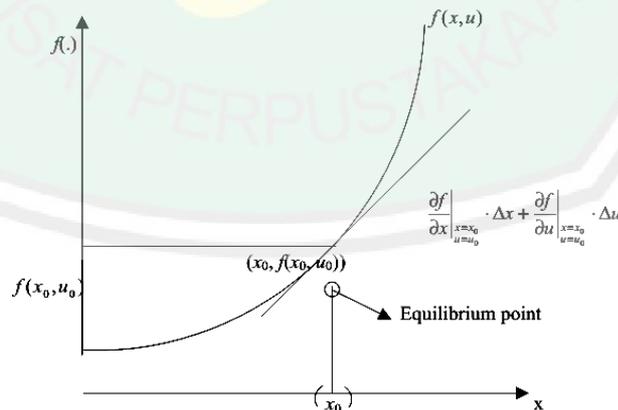
Perhatikan perbedaan antara stabil dan stabil asimtotik, Pada kestabilan jenis node stabil asimtotik atau spiral stabil asimtotik semua lintasan akan bergerak dalam menuju titik kesetimbangan seiring bertambahnya  $t$ , sedangkan center (selalu stabil) lintasan hanya akan bergerak di sekitar titik kesetimbangan tetapi tidak pernah benar-benar bergerak ke arahnya (Dawkins, 2007:278).

## 2.6 Linierisasi dengan Deret Taylor

Dalam proses linierisasi diperlukan titik kesetimbangan dari persamaan tak linier. Untuk memperoleh titik kesetimbangan, semua persamaan diferensial yang ada dalam sistem disamadengkan nol. Dari kalkulus diketahui jika fungsi  $f(x_1, x_2)$  dapat diekspansi dengan menggunakan deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan  $(x_{10}, x_{20})$ , maka ekspansi deret Taylor dari fungsi tersebut adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2) = & f(x_{10}, x_{20}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} \cdot (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} \cdot (x_2 - x_{20}) \\
 & + \frac{1}{2!} \left( \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} \cdot (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} \cdot (x_2 - x_{20})^2 \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} \cdot (x_1 - x_{10})(x_2 - x_{20}) \Big) + \dots
 \end{aligned}$$

Berikut adalah teknik linierisasi yang disajikan dalam gambar.



Gambar 2.2 Ilustrasi Linierisasi (Parlos, 2004)

Dari gambar di atas terlihat bahwa, kurva  $f(x, u)$  dilinierisasi di sekitar titik kesetimbangan  $(u_0, f(x_0, u_0))$  dan hasilnya adalah garis singgung kurva di titik kesetimbangan. Persamaan garis lurus diperoleh dari ekspansi deret Taylor.

Linierisasi valid untuk interval yang sangat kecil di sekitar titik kesetimbangan yang ditunjukkan pada gambar (Parlos, 2004:1-3).

## 2.7 Model Vibrasi Dawai McKenna

Pada tahun 1999, McKenna mengusulkan model persamaan diferensial biasa untuk gerakan torsional penampang. Dengan menggunakan konstanta-konstanta fisik dari laporan para insinyur tentang runtuhnya jembatan Tacoma Narrows, McKenna menyelidiki model ini secara numerik. McKenna, merumuskan suatu model mekanik untuk keseimbangan balok yang berfluktuasi secara torsional, dan ditanggihkan pada keduanya oleh dawai (kawat) (Ohene, 2012:49).

Untuk model gerakan jembatan gantung, McKenna menganggap penampang horizontal jembatan gantung sebagai balok (batang) dengan panjang  $2l$  dan massa  $m$  yang ditanggihkan oleh kawat tak linier,  $y(t)$  menunjukkan jarak ke bawah pusat gravitasi batang dan  $\theta(t)$  menunjukkan sudut batang dari horizontal pada waktu  $t$  (Ohene, 2012:50).

Persamaan diferensial tidak berpasangan yang diperoleh yaitu untuk gerak torsi dan vertikal balok dengan asumsi bahwa kawat vertikal tidak pernah kehilangan tegangan yang telah diberikan. McKenna menunjukkan bahwa besar kecilnya hasil akhir gerakan periodik amplitudo bergantung pada kondisi awal.

Gaya yang digunakan oleh dawai sebanding dengan pemanjangan pada dawai. Diketahui bahwa perpanjangan dawai bagian kanan adalah  $(y - l \sin(\theta))$  oleh karena itu gaya yang digunakan adalah:

$$-K(y - l \sin(\theta))^+ = \begin{cases} -K(y - l \sin(\theta)) & , y - l \sin(\theta) \geq 0 \\ 0 & , y - l \sin(\theta) < 0 \end{cases}$$

Dengan cara yang sama, gaya yang digunakan oleh dawai bagian kiri adalah:

$$-K(y + l \sin(\theta))^+ = \begin{cases} -K(y + l \sin(\theta)) & , y + l \sin(\theta) \geq 0 \\ 0 & , y + l \sin(\theta) < 0 \end{cases}$$

Penurunan persamaan vibrasi merambat pada dawai mengikuti energi potensial dari dawai dengan konstanta *spring*  $K$  dan merentang sejauh  $x$  dari titik kesetimbangan. Sehingga diperoleh:

$$EP_{dawai} = \int Kx dx = \frac{1}{2} Kx^2$$

Dengan demikian energi potensial total dari dawai kanan dan kiri adalah:

$$EP_{dawai\ total} = \frac{1}{2} K(((y - l \sin(\theta))^+)^2 - ((y + l \sin(\theta))^+)^2)$$

Energi potensial  $EP_{balok}$  karena beban dari balok dengan massa  $m$  yang mengalami perubahan posisi ke bawah dari titik kesetimbangan dengan jarak  $y$ , diberikan sebagai berikut:

$$EP_{balok} = -mgy$$

Dimana  $g$  adalah gaya gravitasi. Sehingga diperoleh energi potensial model dari dawai dan balok yaitu:

$$EP_m = EP_{dawai\ total} + EP_{balok}$$

$$EP_m = \frac{K}{2} ([(y - l \sin(\theta))^+]^2 - [(y + l \sin(\theta))^+]^2) - mgy$$

Kemudian dilanjutkan untuk menemukan energi kinetik total, untuk pergerakan vertikal energi kinetik dari pusat massa balok adalah:

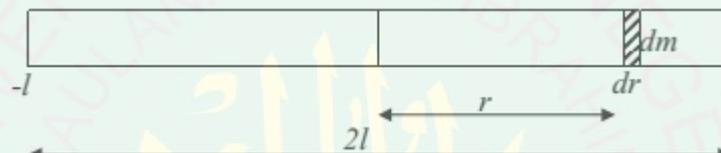
$$EK_{vertikal} = \frac{1}{2} m\dot{y}^2$$

Dimana  $\dot{y}$  adalah kecepatan dari berat balok, dan persamaan untuk energi kinetik dari gerak torsi yaitu:

$$EK_{torsi} = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

dimana  $\dot{\theta}$  adalah kecepatan dari perubahan sudut.

Untuk membuktikan persamaan  $EK_{balok}$  ingat bagian yang sangat kecil dari batang dengan massa  $dm$  yang berada sejauh  $r$  dari pusat balok yang telah ditunjukkan pada gambar berikut:



**Gambar 2.3** Partisi Bagian Balok Sebesar  $dm$  (Ohene, 2011)

Energi kinetik dari massa  $dm$  yaitu:

$$EK_{dm} = \frac{1}{2} dm (r\dot{\theta})^2$$

$r\dot{\theta}$  adalah kecepatan linier dari bagian yang sangat kecil  $dm$ . Massa dari balok adalah  $m$  dan panjangnya adalah  $2l$ , maka:

$$dm = \frac{m}{2l} dr. \quad (2.9)$$

Substitusi persamaan (2.9) ke dalam persamaan  $KE_{dm}$  dan integralkan dengan batas  $[-1,1]$ , maka diperoleh:

$$EK_{torsi} = \frac{m\dot{\theta}}{4l} \int_{-1}^1 r^2 dr = \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}.$$

Dengan demikian, energi kinetik total diberikan sebagai berikut:

$$EK_m = EK_{vertikal} + EK_{torsi}$$

$$EK_m = \frac{1}{2} m\dot{y}^2 + \frac{1}{6} ml^2 \dot{\theta}^2.$$

Sekarang diperoleh Lagrangian sebagai berikut:

$$L = EK_m - EP_m$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{K}{2}([(y - l \sin(\theta))^+]^2 + [(y + l \sin(\theta))^+]^2) + myg.$$

Berdasarkan pada asas *least action*, gerakan balok memenuhi persamaan Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Hasil diperoleh dengan mengevaluasi turunan yang diperlukan pada persamaan Euler-Lagrange. Pertama turunkan  $L$  terhadap  $\dot{\theta}$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ml^2\dot{\theta}}{3}$$

Kemudian turunkan  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$  terhadap  $t$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{ml^2\ddot{\theta}}{3}$$

Kemudian turunkan  $L$  terhadap  $\theta$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = Kl \cos \theta [(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+].$$

Maka  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$  menjadi:

$$\frac{ml^2\ddot{\theta}}{3} = Kl \cos(\theta) [(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+]. \quad (2.10)$$

Dengan cara yang sama, turunkan  $L$  terhadap  $\dot{y}$  sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$$

Kemudian turunkan  $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$  terhadap  $t$ .

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}$$

Kemudian turunkan  $L$  terhadap  $y$ , sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -K[(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+] + mg.$$

Maka  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$  menjadi

$$m\ddot{y} = -K[(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+] + mg. \quad (2.11)$$

Penyederhanaan dan penambahan redaman  $\delta_1 \dot{\theta}$  dan  $\delta_2 \dot{y}$  berturut-turut ke persamaan (2.10) dan (2.11), karena pasti ada faktor eksternal yang mempengaruhi gerakan torsi maka tambahkan fungsi gaya luar  $f(t)$  ke persamaan (2.10) diperoleh sistem persamaan diferensial orde dua sebagai berikut:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \frac{3K}{ml} \cos(\theta) [(y - l \sin(\theta))^+ - (y + l \sin(\theta))^+] - \delta_1 \dot{\theta}' + f(t) \\ \ddot{y} = -\frac{K}{m} [(y - l \sin(\theta))^+ + (y + l \sin(\theta))^+] - \delta_2 \dot{y}' + g. \end{cases} \quad (2.12)$$

Sistem persamaan (2.12) merupakan model vibrasi dawai yang diusulkan oleh McKenna (Ohene, 2011:22-28).

## 2.8 Kajian Vibrasi dalam Al-Quran

Getaran adalah suatu gerak bolak-balik di sekitar titik kesetimbangan. Benda dikatakan berada dalam kesetimbangan apabila benda tetap diam atau bergerak dengan kecepatan konstan. Apabila benda dalam kesetimbangan maka resultan dari semua gaya yang bekerja pada benda tersebut sama dengan nol. (Jonifan, dkk, 2008:155). Sehingga dapat disimpulkan benda tidak akan mengalami getaran tanpa adanya suatu gaya. Di dalam al-Quran juga dijelaskan

bahwa setiap ciptaan Allah Swt. tidak ada yang tidak seimbang. Hal ini dijelaskan dalam al-Quran surat al-Mulk/67:3 yang berbunyi:

الَّذِي خَلَقَ سَبْعَ سَمَاوَاتٍ طِبَاقًا ۗ مَا تَرَىٰ فِي خَلْقِ الرَّحْمَنِ مِن تَفَوتٍ ۗ فَأَرِجْ ٱلْبَصَرَ هَلْ تَرَىٰ مِن فُطُورٍ

*yang telah menciptakan tujuh langit berlapis-lapis. kamu sekali-kali tidak melihat pada ciptaan Tuhan yang Maha Pemurah sesuatu yang tidak seimbang. Maka lihatlah berulang-ulang, Adakah kamu Lihat sesuatu yang tidak seimbang? (QS. Al-Mulk/67:3).*

Langit seperti yang tampak disusun berlapis-lapis, dan astronomi dahulu kala sudah menjelaskan mengenai gerakan benda-benda langit itu dalam bagan yang cukup terperinci. Apa yang sekarang menjadi persoalan di sini ialah susunan dan keindahan ruang angkasa yang begitu luas serta benda-benda langit yang begitu menakjubkan, berjalan menurut hukum gerak dalam ruang-ruang yang luar biasa besarnya di dunia (Ali, 2009:1495). Kemudian Allah Swt. memerintahkan manusia memandang langit dan bumi beserta isinya, kemudian memperhatikan masing-masingnya dan mempelajari sifat-sifatnya. Perhatikanlah matahari bersinar dan bulan bercahaya mana guna dan faedah sinar dan cahaya itu bagi kehidupan seluruh makhluk yang ada. Perhatikanlah binatang, tumbuh-tumbuhan, gunung-gunung yang tinggi, laut yang terhampar luas membiru, langit dan segala isinya. Semuanya tumbuh, berkembang, tetap dalam kelangsungan hidupnya, serta berkesinambungan yang mempunyai sistem. Cobalah pikirkan dan renungkan, apakah ada sesuatu cacat atau ketidakseimbangan pada makhluk yang diciptakan Allah Swt., hal ini menunjukkan betapa seimbangnyanya setiap ciptaan Allah Swt. (Dasuki, dkk, 1990: 247-248). Selain itu dalam al-Quran surat al-Mulk/67:16 juga dijelaskan tentang peristiwa gempa bumi yang terjadi merupakan kehendak dari Allah Swt.. Jika dikaitkan al-Quran surat al-Mulk/67:3 dengan al-Mulk/67:16,

maka pada mulanya bumi yang berada pada kondisi seimbang bergetar dikarenakan kehendak dari Allah Swt.. Adapun bunyi surat al-Mulk/67:16 adalah sebagai berikut:

ءَأَمِنْتُمْ مَّن فِي السَّمَاءِ أَن يَخْسِفَ بِكُمُ الْأَرْضَ فَإِذَا هِيَ تَمُورٌ ﴿١٦﴾

*Apakah kamu merasa aman terhadap Allah yang (berkuasa) di langit bahwa Dia akan menjungkir-balikkan bumi bersama kamu, sehingga dengan tiba-tiba bumi itu bergoncang? (QS. Al-Mulk/67:16).*

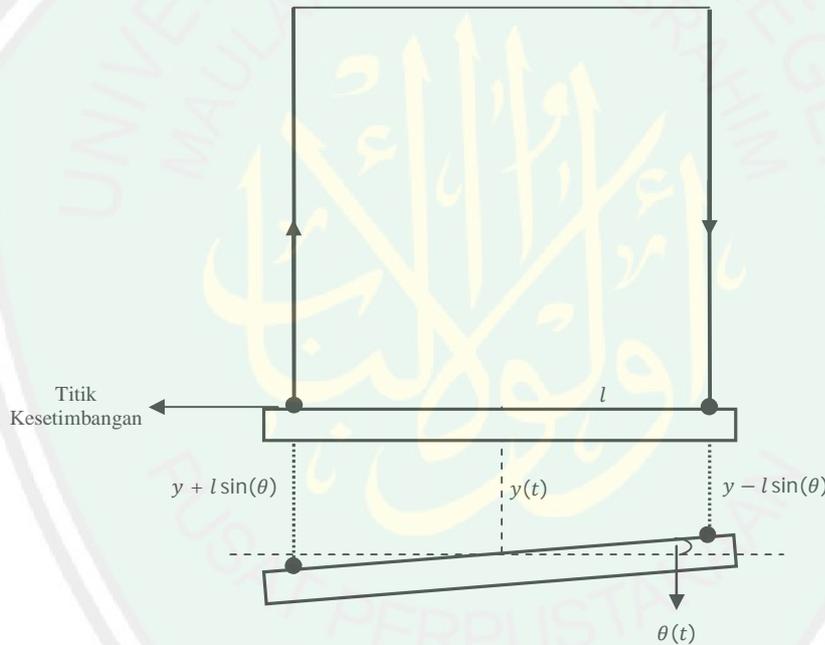
Dalam ayat ini Allah Swt. memperingatkan orang-orang kafir akan azab yang akan menimpa mereka, apabila mereka tetap dalam kekafiran. Peringatan ini diberikan Allah Swt. karena mereka seakan-akan merasa akan terhindar dari siksa Allah Swt. yang akan ditimpakan kepada mereka. Pada saat Allah akan membenamkan mereka ke dalam bumi, maka terjadilah gempa yang dahsyat yang mengguncangkan bumi (Dasuki, dkk, 1990:446).

Dari al-Quran surat al-Mulk ayat 3 dan ayat 16 dapat disimpulkan bahwa setiap ciptaan Allah Swt. pada mulanya merupakan ciptaan yang seimbang, tetapi atas kehendak Allah Swt. bumipun dapat terguncang. Hal ini merupakan tanda kebesaran Allah Swt. dan sebagai peringatan kepada manusia yang ingkar kepada Allah Swt..

**BAB III**  
**PEMBAHASAN**

**3.1 Model Sudut Defleksi**

Model sudut defleksi pada skripsi ini adalah model yang menggambarkan gerak torsi dari balok yang digantung oleh dua dawai. Model yang menggambarkan sistem gerak ini adalah model McKenna. Ilustrasi sistem gerak dari model McKenna akan ditunjukkan pada Gambar 3.1.



**Gambar 3. 1** Ilustrsi Model McKenna

Dengan mengasumsikan bahwa dawai tidak pernah kehilangan ketegangan, maka dimiliki  $y \pm l \sin(\theta) \geq 0$  dan  $(y \pm l \sin(\theta))^+ = y \pm l \sin(\theta)$ . Sehingga dengan mensubstitusikan  $(y \pm l \sin(\theta))^+ = y \pm l \sin(\theta)$  pada sistem persamaan (2.12) maka diperoleh sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{cases} \theta'' = \frac{3K}{ml} \cos(\theta) [(y - l \sin(\theta)) - (y + l \sin(\theta))] - \delta_1 \theta' + f(t) \\ y'' = -\frac{K}{m} [(y - l \sin(\theta)) + (y + l \sin(\theta))] - \delta_2 y' + g. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dari sistem persamaan (3.1) dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{6K}{m}\cos(\theta)\sin(\theta) - \delta_1\dot{\theta} + f(t) \\ \ddot{y} = -\frac{2K}{m}y - \delta_2\dot{y} + g. \end{cases} \quad (3.2)$$

Karena sistem persamaan (3.2) merupakan sistem tidak berpasangan maka sistem (3.2) dapat diselesaikan secara terpisah, sehingga dapat dilakukan analisis terhadap perilaku dari perubahan sudut defleksi saja maupun perilaku dari perubahan gerak vertikal pada dawai. Model sudut defleksi dari sistem persamaan (3.2) tersebut yang dianalisis dalam skripsi ini. Persamaan tersebut adalah:

$$\ddot{\theta} = -\frac{6K}{m}\cos(\theta)\sin(\theta) - \delta_1\dot{\theta} + f(t). \quad (3.3)$$

Karena pada persamaan (3.3) tidak lagi masuk dalam sistem, maka  $\delta_1$  ditulis dengan  $\delta$  dan  $f(t) = \beta \sin(\mu t)$  sehingga dari persamaan (3.3) menjadi:

$$\ddot{\theta} = -\frac{6K}{m}\cos(\theta)\sin(\theta) - \delta\dot{\theta} + \beta \sin(\mu t). \quad (3.4)$$

Pada persamaan (3.4) bentuk  $\cos(\theta)\sin(\theta)$  dapat disederhanakan menjadi bentuk sudut rangkap trigonometri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \cos \theta \sin \theta &= \frac{1}{2}(\sin(\theta + \theta) - \sin(\theta - \theta)) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(2\theta) - \sin(0)) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(2\theta) - 0) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2\theta). \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (3.4) dapat tulis sebagai:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3K}{m}\sin(2\theta) - \delta\dot{\theta} + \beta \sin(\mu t). \quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) adalah bentuk paling sederhana dari model matematika sudut defleksi pada dawai.

Pada dasarnya seluruh persamaan diferensial biasa atau sistem persamaan diferensial dapat ditransformasikan ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Tujuan dari transformasi ini adalah agar lebih mudah dalam penentuan solusi baik analitik maupun numerik. Persamaan (3.5) adalah persamaan diferensial biasa tak homogen orde dua yang selanjutnya akan ditransformasi ke dalam bentuk sistem persamaan diferensial. Diperlukan pemisalan untuk mereduksi persamaan diferensial biasa orde dua menjadi suatu sistem.

Misal :  $\theta_1 = \theta$  dan  $\theta_2 = \dot{\theta}$ , dengan menurunkan  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  terhadap  $t$  maka akan diperoleh  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}$  dan  $\dot{\theta}_2 = \ddot{\theta}$ . Akibatnya persamaan (3.5) berubah menjadi sistem sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{3K}{m}\sin(2\theta_1) - \delta\theta_2 + \beta\sin(\mu t). \end{cases} \quad (3.7)$$

$\theta_1$  menyatakan besarnya sudut defleksi dan  $\theta_2$  menyatakan kecepatan perubahan sudut defleksi. Sehingga sistem (3.7) merupakan suatu sistem gerak yang merepresentasikan gerak torsi dari balok. Karena bentuk dari model sudut defleksi pada dawai (3.7) adalah sistem tak linier maka untuk menganalisisnya perlu dilakukan linierisasi. Tahap pertama yang dilakukan adalah menentukan titik kesetimbangan dari bentuk homogennya. Titik kesetimbangan diperoleh jika  $\dot{\theta}_1(t) = 0$  dan  $\dot{\theta}_2(t) = 0$  sehingga dari sistem (3.7) akan diperoleh:

Jika  $\dot{\theta}_1(t) = 0$  maka  $\theta_2 = 0$ .

$$\text{Jika } \dot{\theta}_2(t) = 0 \text{ maka } -\frac{3K}{m}\sin(2\theta_1) - \delta\theta_2 = 0. \quad (3.8)$$

Karena  $\theta_2 = 0$  akibatnya persamaan (3.8) menjadi:

$$-\frac{3K}{m}\sin(2\theta_1) - \delta \cdot 0 = 0$$

$$-\frac{3K}{m}\sin(2\theta_1) = 0$$

$$\sin(2\theta_1) = 0$$

$$2\theta_1 = \arcsin(0)$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\arcsin(0)$$

maka diperoleh nilai  $\theta_1 = n\pi$  dengan  $n = 0,1,2, \dots$

Selanjutnya titik kesetimbangan akan ditulis dengan notasi  $(\theta_1^*, \theta_2^*)$ . Dari hasil perhitungan di atas diperoleh titik kesetimbangan  $(\theta_1^*, \theta_2^*) = (n\pi, 0)$  dengan  $n = 0,1,2,3, \dots$

Tahap selanjutnya setelah diketahui titik kesetimbangan adalah melinierisasi persamaan kedua dari sistem persamaan (3.7) yaitu  $\dot{\theta}_2(t)$  dengan menggunakan deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan. Untuk melakukan ekspansi Taylor cukup dibutuhkan satu titik kesetimbangan saja, maka dipilih  $(\theta_1^*, \theta_2^*) = (0,0)$ . Bentuk tak linier dari persamaan tersebut diakibatkan karena adanya bentuk trigonometri, sehingga linierisasi hanya dilakukan pada bentuk sinusnya saja. Didefinisikan:

$$1. \Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_1^* = \theta_1 - 0 = \theta_1.$$

$$2. \Delta\theta_2 = \theta_2 - \theta_2^* = \theta_2 - 0 = \theta_2.$$

Dari definisi di atas, selanjutnya bentuk  $\sin(2\theta_1)$  dilakukan ekspansi dengan menggunakan deret Taylor dan dipotong sampai suku kedua.

$$\sin(2\theta_1) \approx \sin(2\theta_1^*) + \frac{d}{d\theta}\sin(2\theta_1^*) \cdot (\theta_1 - \theta_1^*) + \dots$$

$$\approx \sin(2\theta_1^*) + 2 \cos(2\theta_1^*) \cdot (\theta_1 - \theta_1^*) + \dots$$

Karena nilai  $\theta_1^*$  untuk  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  adalah 0, maka:

$$\begin{aligned} \sin(2\theta_1) &\approx \sin(0) + 2 \cos(0) \cdot (\theta_1 - \theta_1^*) + \dots \\ &\approx 0 + 2 \cdot 1 \cdot (\theta_1 - \theta_1^*) + \dots \\ &\approx 2(\theta_1 - \theta_1^*) + \dots \end{aligned}$$

Dari definisi yang diberikan yaitu  $\Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_1^* = \theta_1$ , maka akan diperoleh:

$$\sin(2\theta_1) \approx 2\theta_1. \quad (3.9)$$

Selanjutnya substitusikan (3.9) ke dalam persamaan  $\dot{\theta}_2(t)$  dari sistem (3.7).

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_2 &= -\frac{3K}{m} 2\theta_1 - \delta\theta_2 + \beta \sin(\mu t) \\ &= -\frac{6K}{m} \theta_1 - \delta\theta_2 + \beta \sin(\mu t). \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh sistem untuk sudut defleksi yang baru sebagai berikut:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{6K}{m} \theta_1 - \delta\theta_2 + \beta \sin(\mu t). \end{cases} \quad (3.10)$$

Sistem persamaan (3.10) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta \end{bmatrix} \cdot \theta + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \sin(\mu t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

dimana:  $\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$  dan  $\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ .

## 3.2 Solusi Model Sudut Defleksi

### 3.2.1 Solusi Model Sudut Defleksi Tanpa Faktor Eksternal

Untuk menyelesaikan sistem tak homogen maka harus diselesaikan terlebih dahulu bentuk homogennya. Dari sistem (3.11) diabaikan  $\beta \sin(\mu t)$  yang merupakan bentuk tak homogennya. Sehingga akan diperoleh sistem homogen sebagai berikut:

$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta \end{bmatrix} \cdot \theta \quad (3.12)$$

Berdasarkan teorema 2.1 dapat dimisalkan solusi dari sistem persamaan (3.12) adalah  $\theta(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$  dengan  $\mathbf{v}$  suatu vektor, dan  $\lambda$  adalah suatu nilai skalar. Dari pemisalan diperoleh  $\theta'(t) = \lambda \mathbf{v}e^{\lambda t}$ . Selanjutnya substitusikan  $\theta$  dan  $\theta'$  ke dalam sistem (3.12).

Misalkan:  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta \end{bmatrix}$ ,

maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \mathbf{A}\theta \\ \lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} &= \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t} \\ \lambda \mathbf{v} &= \mathbf{A}\mathbf{v} \\ \lambda \mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dari pemisalan solusi sistem persamaan diferensial di atas, diperoleh persamaan (3.13) yang tidak lain adalah hubungan nilai eigen dan vektor eigen. Jadi untuk memenuhi persamaan (3.13) haruslah  $\lambda$  adalah nilai eigen dari  $\mathbf{A}$  dan  $\mathbf{v}$  adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda$ . Selanjutnya untuk mencari solusi

dari model sudut defleksi pada dawai, harus dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $\mathbf{A}$ .

$$\text{Diketahui: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta \end{bmatrix},$$

maka nilai eigennya adalah:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= 0 \\ \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ \det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta - \lambda \end{bmatrix}\right) &= 0 \\ (-\lambda(-\delta - \lambda)) - \left(-\frac{6K}{m}\right) &= 0 \\ (\delta\lambda + \lambda^2) + \frac{6K}{m} &= 0 \\ \lambda^2 + \delta\lambda + \frac{6K}{m} &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{6K}{m}}}{2}. \end{aligned}$$

Maka nilai eigen dari  $\mathbf{A}$  adalah:

$$\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2}.$$

Selanjutnya dapat dicari vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ .

Untuk  $\lambda_1 = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2}$ ,

maka

$$(A - \lambda I)v = \mathbf{0}$$

$$Av - \lambda_1 v = \mathbf{0}$$

$$Av = \lambda_1 v$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ -\frac{6K}{m}v_1 - \delta v_2 \end{bmatrix} = \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ -\frac{6K}{m}v_1 - \delta v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) v_1 \\ \left( \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ -\frac{6K}{m}v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) v_1 \\ \left( \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) v_2 + \delta v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ -\frac{6K}{m}v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) v_1 \\ \left( \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) v_2 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan letak elemen matriks maka diperoleh dua persamaan sebagai berikut:

$$v_2 = \left( \frac{-\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) v_1.$$

$$v_1 = -\frac{m}{12K} \left( \delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}} \right) v_2.$$

$$\text{Misalkan : } v_1 = -\frac{m}{12K} \left( \delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}} \right) v_2 = s$$

$$\text{maka: } v_2 = \frac{1}{2} \left( -\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}} \right) s.$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{2} \left( -\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}} \right) s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \left( -\delta + \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}} \right) \end{bmatrix} s. \end{aligned}$$

Misalkan:  $P = \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}$  maka,  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\delta + P \\ \frac{2}{2} \end{bmatrix}$ .

Untuk  $\lambda_2 = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2}$ .

maka:

$$(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \lambda_2 \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_2 \mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{6K}{m}u_1 - \delta u_2 \end{bmatrix} = \frac{-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{6K}{m}u_1 - \delta u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( -\frac{\delta}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) u_1 \\ \left( -\frac{\delta}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{6K}{m}u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( -\frac{\delta}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) u_1 \\ \left( -\frac{\delta}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2} \right) u_2 + \delta u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -\frac{6K}{m}u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{\delta}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2}\right)u_1 \\ \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}}{2}\right)u_2 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan kesamaan letak elemen matriks maka diperoleh dua persamaan sebagai berikut:

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}\right) u_1.$$

$$u_1 = -\frac{m}{12K} \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}\right) u_2.$$

$$\text{Misalkan : } u_1 = -\frac{m}{12K} \left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}\right) u_2 = s$$

$$\text{maka: } u_2 = \frac{1}{2} \left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}\right) s.$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s \\ \frac{1}{2} \left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}\right) s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \left(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}\right) \end{bmatrix} s. \end{aligned}$$

Misalkan:  $P = \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}$  maka,  $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\delta - P \\ 2 \end{bmatrix}$ .

Setelah diperoleh bentuk umum dari nilai-nilai eigen dan juga vektor-vektor eigen, terdapat tiga kemungkinan bentuk dari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen yang bersesuaian, hal ini mengakibatkan terdapat kemungkinan tiga bentuk solusi untuk sistem persamaan diferensial homogen sudut defleksi. Berikut kemungkinan-kemungkinan tersebut:

#### A. Nilai Eigen Real Berbeda

Nilai-nilai eigen dari model sudut defleksi akan bernilai real berbeda jika nilai dari  $\delta^2 - \frac{24K}{m} > 0$ , sehingga akan nilai eigen akan menjadi:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm P}{2}.$$

Berdasarkan teorema 2.5 solusi dari model sudut defleksi adalah sebagai berikut:

$$\theta(t) = \mathbf{v}C_1e^{\lambda_1 t} + \mathbf{u}C_2e^{\lambda_2 t}$$

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\delta + P \\ 2 \end{bmatrix} C_1 e^{\frac{-\delta+P}{2}t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\delta - P \\ 2 \end{bmatrix} C_2 e^{\frac{-\delta-P}{2}t} \quad (3.14)$$

dengan  $P = \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}$ .

Untuk mendapatkan nilai  $C_1$  dan  $C_2$  dari solusi diperlukan nilai awal dari  $\theta_1(t)$  dan  $\theta_2(t)$ . Misalkan diberikan nilai awal sebagai berikut,  $\theta_1(0)$  dan  $\theta_2(0)$ . Dengan mensubstitusikan nilai awal pada persamaan (3.14), maka diperoleh hasil berikut:

$$\begin{cases} \theta_1(0) = C_1 + C_2 \\ \theta_2(0) = \frac{P - \delta}{2} C_1 - \frac{P + \delta}{2} C_2. \end{cases} \quad (3.15)$$

Untuk memperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  digunakan metode eliminasi pada sistem (3.15) sehingga diperoleh:

$$C_1 = \frac{(P + \delta)\theta_1(0) + 2\theta_2(0)}{2P} \quad \text{Dan} \quad C_2 = \frac{(P - \delta)\theta_1(0) - 2\theta_2(0)}{2P}. \quad (3.16)$$

Dengan mensubstitusikan (3.16) ke dalam persamaan (3.14), maka akan diperoleh solusi partikular untuk model sudut defleksi homogen.

#### B. Nilai Eigen Real Kembar

Nilai-nilai eigen dari model sudut defleksi akan bernilai sama (kembar) jika nilai dari  $\delta^2 - \frac{24K}{m} = 0$ , hal ini berakibat hanya diperoleh satu vektor eigen yaitu:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \\ -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}.$$

Sehingga hanya akan diperoleh satu solusi untuk sistem persamaan diferensial model sudut defleksi yaitu:

$$\theta_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \\ -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} C_1 e^{-\frac{\delta}{2}t}.$$

Berdasarkan teorema 2.6, untuk memperoleh solusi yang kedua digunakan formula sebagai berikut,  $\theta_2(t) = C_2(\mathbf{u}t - \boldsymbol{\eta})e^{-\frac{\delta}{2}t}$ , sehingga harus ditemukan  $\boldsymbol{\eta}$  yang memenuhi persamaan  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}$ .

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\delta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\delta}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\delta}{2} & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{2} & 1 \\ -\frac{6K}{m} & -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\frac{\delta^2}{4} + \frac{6K}{m}} \begin{bmatrix} -\frac{\delta}{2} & -1 \\ \frac{6K}{m} & -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\frac{\delta^2}{4} + \frac{6K}{m}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{6K}{m} + \frac{\delta^2}{4} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh solusi yang kedua untuk model sudut defleksi yaitu:

$$\boldsymbol{\theta}_2(t) = C_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-\frac{\delta}{2}t}.$$

Karena kombinasi linier dari solusi merupakan solusi maka diperoleh solusi dari sistem persamaan diferensial model sudut defleksi yaitu:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_1(t) + \boldsymbol{\theta}_2(t)$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \\ -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} C_1 e^{-\frac{\delta}{2}t} + C_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \\ -\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) e^{-\frac{\delta}{2}t}. \quad (3.17)$$

Dengan nilai awal yaitu  $\theta_1(0)$  dan  $\theta_2(0)$ , dan diterapkan pada persamaan (3.16) sehingga akan diperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  dari solusi model sudut defleksi homogen kasus nilai eigen kembar.

$$\begin{aligned}\theta_1(0) &= C_1 \\ \theta_2(0) &= -\frac{\delta}{2}C_1 + C_2.\end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$C_2 = \theta_2(0) + \frac{\delta}{2}\theta_1(0).$$

Sehingga diperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  sebagai berikut:

$$C_1 = \theta_1(0) \quad \text{dan} \quad C_2 = \theta_2(0) + \frac{\delta}{2}\theta_1(0). \quad (3.18)$$

Dengan mensubstitusikan (3.18) ke persamaan (3.17), maka diperoleh solusi partikular untuk model sudut defleksi homogen kasus nilai eigen real kembar.

### C. Nilai Eigen Kompleks

Nilai-nilai eigen dari model sudut defleksi akan bernilai kompleks jika nilai dari  $\delta^2 - \frac{24K}{m} < 0$ , sehingga diperoleh nilai eigen kompleks dengan konjugatnya.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\delta \pm Qi}{2}.$$

Serta diperoleh vektor eigen kompleks yang bersesuaian adalah

$$\mathbf{u}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\delta \pm Qi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-\delta}{2} \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Q}{2} \end{bmatrix}$$

dengan  $Q = \sqrt{\frac{24K}{m} - \delta^2}$ .

Berdasarkan teorema 2.7 bagian real dan bagian imajiner merupakan solusi. Akibatnya diperoleh dua solusi yaitu:

$$\theta_1(t) = \operatorname{Re}(\theta(t)) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -\delta \\ 2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) - \begin{bmatrix} 0 \\ Q \\ 2 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \right)$$

dan

$$\theta_2(t) = \operatorname{Im}(\theta(t)) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -\delta \\ 2 \end{bmatrix} \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) + \begin{bmatrix} 0 \\ Q \\ 2 \end{bmatrix} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \right).$$

Karena kombinasi linier dari solusi merupakan solusi maka diperoleh solusi umum homogen untuk model sudut defleksi adalah sebagai berikut:

$$\theta(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \left( C_1 \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{Qt}{2}\right) \\ -\frac{\delta}{2} \cos\left(\frac{Qt}{2}\right) - \frac{Q}{2} \sin\left(\frac{Qt}{2}\right) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{Qt}{2}\right) \\ \frac{Q}{2} \cos\left(\frac{Qt}{2}\right) - \frac{\delta}{2} \sin\left(\frac{Qt}{2}\right) \end{bmatrix} \right) \quad (3.19)$$

dengan  $Q = \sqrt{\frac{24K}{m} - \delta^2}$ .

Dengan nilai awal yaitu  $\theta_1(0)$  dan  $\theta_2(0)$ , dan diterapkan pada persamaan (3.19) sehingga diperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  dari solusi model sudut defleksi homogen kasus nilai eigen kompleks.

$$\theta_1(0) = C_1$$

$$\theta_2(0) = -\frac{\delta}{2}C_1 + \frac{Q}{2}C_2.$$

Maka diperoleh

$$C_2 = \frac{2\theta_2(0) + \delta\theta_1(0)}{Q}.$$

Diperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  sebagai berikut:

$$C_1 = \theta_1(0) \quad \text{dan} \quad C_2 = \frac{2\theta_2(0) + \delta\theta_1(0)}{Q}. \quad (3.20)$$

Dengan mensubstitusikan (3.20) ke dalam persamaan (3.19), maka akan diperoleh solusi partikular untuk model sudut defleksi homogen kasus nilai eigen kompleks.

### 3.2.2 Solusi Model Sudut Defleksi dengan Faktor Eksternal

Model sudut defleksi jika ditambahkan faktor eksternal, maka model tersebut akan menjadi sistem persamaan diferensial tak homogen. Untuk menyelesaikan sistem persamaan ini, berdasarkan teorema 2.9, maka terlebih dahulu diselesaikan model homogennya. Karena terdapat tiga kemungkinan solusi pada bentuk homogennya, akibatnya solusi model sudut defleksi tak homogen juga memiliki tiga kemungkinan bentuk solusi, yaitu:

#### A. Nilai Eigen Real Berbeda

Solusi umum model sudut defleksi homogen dengan nilai eigen real berbeda telah diperoleh pada persamaan (3.14). Kemudian persamaan tersebut dapat dituliskan kembali dalam bentuk lain yaitu:

$$\theta_h(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\frac{P-\delta}{2}t} & e^{-\frac{P+\delta}{2}t} \\ \frac{P-\delta}{2}e^{\frac{P-\delta}{2}t} & -\frac{P+\delta}{2}e^{-\frac{P+\delta}{2}t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

dengan  $P = \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}$ .

Dari solusi homogennya diperoleh matriks  $\mathbf{M}$  yang kemudian akan dicari  $\mathbf{M}^{-1}$  dan  $\int \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(t)$  untuk menentukan solusi dari bentuk tak homogennya, dengan

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \sin(\mu t) \end{bmatrix}.$$

Diketahui bahwa untuk mendapatkan invers dari  $\mathbf{M}$  digunakan rumus sebagai berikut:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{M}} \text{adj } \mathbf{M}.$$

Akibatnya diperoleh matriks sebagai berikut:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{-Pe^{-\delta t}} \begin{bmatrix} -\frac{\delta + P}{2} e^{-\frac{\delta+P}{2}t} & -e^{-\frac{\delta+P}{2}t} \\ \frac{\delta - P}{2} e^{-\frac{\delta+P}{2}t} & e^{\frac{P-\delta}{2}t} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya kalikan  $\mathbf{M}^{-1}$  dengan  $\mathbf{f}(t)$ , sehingga diperoleh matriks berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) &= -\frac{e^{\delta t}}{P} \begin{bmatrix} -\frac{\delta + P}{2} e^{-\frac{\delta+P}{2}t} & -e^{-\frac{\delta+P}{2}t} \\ \frac{\delta - P}{2} e^{-\frac{\delta+P}{2}t} & e^{\frac{P-\delta}{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \sin(\mu t) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{e^{\delta t}}{P} \begin{bmatrix} -e^{-\frac{\delta+P}{2}t} \beta \sin(\mu t) \\ e^{\frac{P-\delta}{2}t} \beta \sin(\mu t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Setelah diperoleh matriks  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)$  selanjutnya hitung  $\int \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) dt$ .

$$\begin{aligned} \int \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) dt &= \int -\frac{e^{\delta t}}{P} \begin{bmatrix} -e^{-\frac{(\delta+P)}{2}t} \beta \sin(\mu t) \\ e^{\frac{P-\delta}{2}t} \beta \sin(\mu t) \end{bmatrix} dt \\ &= -\frac{1}{P} \int \begin{bmatrix} -e^{\frac{\delta-P}{2}t} \beta \sin(\mu t) \\ e^{\frac{P+\delta}{2}t} \beta \sin(\mu t) \end{bmatrix} dt. \end{aligned}$$

Karena integral dari matriks tidak lain adalah integral dari elemen-elemennya maka dapat dihitung secara terpisah dari tiap-tiap elemennya.

$$\int -e^{\frac{\delta-P}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt = \frac{\beta}{\mu} e^{\frac{\delta-P}{2}t} \cos(\mu t) - \frac{\beta(\delta-P)}{2\mu} \int \cos(\mu t) e^{\frac{\delta-P}{2}t} dt.$$

Hasil integral parsial dari perkalian eksponen dengan sinus masih terdapat perkalian eksponensial dan cosinus maka harus diintegrasikan lagi sampai kembali ke bentuk perkalian eksponen dan sinus.

$$\int -e^{\frac{\delta-P}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt = \frac{\beta}{\mu} e^{\frac{\delta-P}{2}t} \cos(\mu t) - \frac{\beta(\delta-P)}{2\mu} \left( \frac{1}{\mu} e^{\frac{\delta-P}{2}t} \sin(\mu t) - \frac{\delta-P}{2\mu} \int \sin(\mu t) e^{\frac{\delta-P}{2}t} dt \right).$$

Setelah dijabarkan bentuk di atas menjadi:

$$\int -e^{\frac{\delta-P}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt = \frac{\beta}{\mu} e^{\frac{\delta-P}{2}t} \cos(\mu t) - \frac{\beta(\delta-P)}{2\mu^2} e^{\frac{\delta-P}{2}t} \sin(\mu t) + \beta \left( \frac{\delta-P}{2\mu} \right)^2 \int \sin(\mu t) e^{\frac{-(\delta+P)}{2}t} dt.$$

Dengan mengumpulkan suku yang mengandung integral menjadi satu ruas maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\int -e^{\frac{\delta-P}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt - \beta \left( \frac{\delta-P}{2\mu} \right)^2 \int \sin(\mu t) e^{\frac{-(\delta+P)}{2}t} dt = \frac{\beta}{\mu} e^{\frac{\delta-P}{2}t} \cos(\mu t) - \frac{\beta(\delta-P)}{2\mu^2} e^{\frac{\delta-P}{2}t} \sin(\mu t).$$

Kemudian diterapkan sifat distributif, sehingga diperoleh:

$$\left( 1 + \left( \frac{\delta-P}{2\mu} \right)^2 \right) \int -e^{\frac{\delta-P}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt = \frac{\beta}{\mu} e^{\frac{\delta-P}{2}t} \left( \cos(\mu t) - \frac{\delta-P}{2\mu} \sin(\mu t) \right).$$

Hasil akhir dari integralnya adalah sebagai berikut:

$$\int -e^{\frac{\delta-P}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt = \frac{2\beta e^{\frac{\delta-P}{2}t}}{4\mu^2 + (\delta-P)^2} (2\mu \cos(\mu t) - (\delta-P) \sin(\mu t)).$$

Setelah diperoleh hasil integralnya, kemudian dikalikan dengan  $-\frac{1}{P}$ . Sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{P} \int e^{\frac{\delta-P}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt = \frac{2\beta e^{\frac{\delta-P}{2}t} ((\delta - P) \sin(\mu t) - 2\mu \cos(\mu t))}{(4\mu^2 + (\delta - P)^2)P}$$

$$\text{dengan } P = \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}.$$

Kemudian akan dihitung integral dari elemen kedua dari matriks  $M^{-1}f(t)$ , yaitu  $e^{\frac{P+\delta}{2}t} \beta \sin(\mu t)$ . Dengan cara yang sama pada pengintegralan elemen pertama, maka diperoleh:

$$\int e^{\frac{P+\delta}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt = \frac{2\beta e^{\frac{P+\delta}{2}t} ((P + \delta) \sin(\mu t) - 2\mu \cos(\mu t))}{4\mu^2 + (P + \delta)^2}.$$

Setelah diperoleh hasil integralnya, kalikan dengan  $-\frac{1}{\sqrt{P}}$ . Sehingga diperoleh:

$$-\frac{1}{P} \int e^{\frac{P+\delta}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt = \frac{2\beta e^{\frac{P+\delta}{2}t} (2\mu \cos(\mu t) - (P + \delta) \sin(\mu t))}{(4\mu^2 + (P + \delta)^2)P}.$$

Sehingga hasil integral  $\int M^{-1}f(t) dt$  adalah sebagai berikut:

$$\int M^{-1}f(t) dt = \begin{bmatrix} \frac{2\beta e^{\frac{\delta-P}{2}t} ((\delta - P) \sin(\mu t) - 2\mu \cos(\mu t))}{(4\mu^2 + (\delta - P)^2)P} \\ \frac{2\beta e^{\frac{P+\delta}{2}t} (2\mu \cos(\mu t) - (P + \delta) \sin(\mu t))}{(4\mu^2 + (P + \delta)^2)P} \end{bmatrix}$$

$$\text{dengan } P = \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}.$$

Berdasarkan teorema 2.9, untuk memperoleh solusi sistem tak homogen digunakan rumus berikut:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{M} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \mathbf{M} \int \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(t) dt$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_h(t) + \boldsymbol{\theta}_p(t).$$

Sehingga terlebih dahulu dicari hasil dari  $\boldsymbol{\theta}_p(t) = \mathbf{M} \int \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(t) dt$ .

$$\boldsymbol{\theta}_p = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\delta+P}{2}t} & e^{-\frac{\delta-P}{2}t} \\ \frac{-\delta+P}{2} e^{-\frac{\delta+P}{2}t} & \frac{-\delta-P}{2} e^{-\frac{\delta-P}{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2\beta e^{\frac{\delta-P}{2}t} ((\delta-P) \sin(\mu t) - 2\mu \cos(\mu t))}{(4\mu^2 + (\delta-P)^2)P} \\ \frac{2\beta e^{\frac{P+\delta}{2}t} (2\mu \cos(\mu t) - (P+\delta) \sin(\mu t))}{(4\mu^2 + (P+\delta)^2)P} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2\beta((\delta-P) \sin(\mu t) - 2\mu \cos(\mu t))}{(4\mu^2 + (\delta-P)^2)P} + \frac{2\beta(2\mu \cos(\mu t) - (P+\delta) \sin(\mu t))}{(4\mu^2 + (P+\delta)^2)P} \\ (P-\delta) \frac{\beta((\delta-P) \sin(\mu t) - 2\mu \cos(\mu t))}{(4\mu^2 + (\delta-P)^2)P} - \frac{\delta+P}{2} \cdot \frac{4\beta(\mu \cos(\mu t) - \frac{P+\delta}{2} \sin(\mu t))}{(4\mu^2 + (P+\delta)^2)P} \end{bmatrix}$$

Setelah menyamakan penyebut dan menyederhanakan bentuk di atas diperoleh matriks sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\theta}_p(t) = \begin{bmatrix} 4\beta \left( \frac{(\delta^2 - P^2 - 4\mu^2) \sin(\mu t) - 4\mu\delta \cos(\mu t)}{(4\mu^2 + (\delta-P)^2)(4\mu^2 + (P+\delta)^2)} \right) \\ 4\beta \left( \frac{(\delta^2 - P^2 - 4\mu^2)\mu \cos(\mu t) + 4\delta\mu^2 \sin(\mu t)}{(4\mu^2 + (\delta-P)^2)(4\mu^2 + (P+\delta)^2)} \right) \end{bmatrix}$$

Sehingga solusi umum untuk model sudut defleksi dengan faktor eksternal adalah:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_h(t) + \boldsymbol{\theta}_p(t)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{\delta+P}{2}t} & e^{-\frac{\delta-P}{2}t} \\ \frac{P-\delta}{2} e^{-\frac{\delta+P}{2}t} & \frac{-\delta-P}{2} e^{-\frac{\delta-P}{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\beta \left( \frac{(\delta^2 - P^2 - 4\mu^2) \sin(\mu t) - 4\mu\delta \cos(\mu t)}{(4\mu^2 + (\delta-P)^2)(4\mu^2 + (P+\delta)^2)} \right) \\ 4\beta \left( \frac{(\delta^2 - P^2 - 4\mu^2)\mu \cos(\mu t) + 4\delta\mu^2 \sin(\mu t)}{(4\mu^2 + (\delta-P)^2)(4\mu^2 + (P+\delta)^2)} \right) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\text{Dengan } P = \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}.$$

Dengan nilai awal yang sama yaitu  $\theta_1(0)$  dan  $\theta_2(0)$ , dan diterapkan pada persamaan (3.18) sehingga diperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  dari solusi model sudut defleksi tak homogen kasus nilai eigen real berbeda.

$$\begin{cases} \theta_1(0) = C_1 + C_2 + \frac{-16\beta\mu\delta}{(4\mu^2 + (\delta - P)^2)(4\mu^2 + (P + \delta)^2)} \\ \theta_2(0) = \frac{P - \delta}{2}C_1 - \frac{P + \delta}{2}C_2 + \frac{4\beta\mu\left(\frac{24K}{m} - 4\mu^2\right)}{(4\mu^2 + (\delta - P)^2)(4\mu^2 + (P + \delta)^2)} \end{cases} \quad (3.22)$$

Kemudian untuk memperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  eliminasi persamaan-persamaan dari sistem (3.22), maka diperoleh nilai dari  $C_1$  dan  $C_2$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(P + \delta)\theta_1(0) + 2\theta_2(0)}{2P} - \frac{4\beta\mu\left(\frac{24K}{m} - 4\mu^2\right) + 8\beta\mu\delta(P - \delta)}{P(4\mu^2 + (\delta - P)^2)(4\mu^2 + (P + \delta)^2)} \\ C_2 &= -\frac{2\theta_2(0) - (P - \delta)\theta_1(0)}{2P} + \frac{4\beta\mu\left(\frac{24K}{m} - 4\mu^2\right) + 8\beta\mu\delta(P - \delta)}{P(4\mu^2 + (\delta - P)^2)(4\mu^2 + (P + \delta)^2)}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $C_1$  dan  $C_2$  ke dalam persamaan (3.21), maka akan diperoleh solusi partikular untuk model sudut defleksi tak homogen kasus nilai eigen real berbeda.

#### B. Nilai Eigen Real Kembar

Adapun solusi untuk model tak homogen pada kasus nilai eigen kembar adalah sebagai berikut. Telah dimiliki solusi homogen persamaan (3.17) yang dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\theta_h(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t \\ -\frac{\delta}{2} & \left(\frac{-\delta}{2}t + 1\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga akan diperoleh  $\mathbf{M}^{-1}$  adalah:

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\left(e^{-\frac{\delta}{2}t}\right)^2} e^{-\frac{\delta}{2}t} \begin{bmatrix} \left(\frac{-\delta}{2}t + 1\right) & -t \\ \frac{\delta}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{e^{-\frac{\delta}{2}t}} \begin{bmatrix} \left(\frac{-\delta}{2}t + 1\right) & -t \\ \frac{\delta}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Maka dapat dihitung perkalian matriks  $\mathbf{M}^{-1}$  dengan  $\mathbf{f}(t)$ .

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) = \frac{1}{e^{-\frac{\delta}{2}t}} \begin{bmatrix} \left(\frac{-\delta}{2}t + 1\right) & -t \\ \frac{\delta}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \sin(\mu t) \end{bmatrix} = e^{\frac{\delta}{2}t} \begin{bmatrix} -t\beta \sin(\mu t) \\ \beta \sin(\mu t) \end{bmatrix}$$

Sehingga integral dari  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)$  terhadap  $t$  adalah:

$$\int \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) dt = \begin{bmatrix} -\int e^{\frac{\delta}{2}t} t\beta \sin(\mu t) dt \\ \int e^{\frac{\delta}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt \end{bmatrix}$$

Kemudian dihitung integral dari masing-masing elemen dari  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)$ .

$$-\int e^{\frac{\delta}{2}t} t\beta \sin(\mu t) dt = \frac{\beta e^{\frac{\delta}{2}t} t}{\mu} \cos(\mu t) - \beta \int \frac{\cos(\mu t)}{\mu} \left(\frac{\delta}{2}t e^{\frac{\delta}{2}t} + e^{\frac{\delta}{2}t}\right) dt$$

$$-\int e^{\frac{\delta}{2}t} t\beta \sin(\mu t) dt = \frac{\beta e^{\frac{\delta}{2}t} t}{\mu} \cos(\mu t) - \frac{\beta\delta}{2\mu} \int \cos(\mu t) t e^{\frac{\delta}{2}t} dt - \frac{\beta}{\mu} \int \cos(\mu t) e^{\frac{\delta}{2}t} dt$$

$$-\int e^{\frac{\delta}{2}t} t\beta \sin(\mu t) dt = \frac{\beta e^{\frac{\delta}{2}t} t}{\mu} \cos(\mu t) - \frac{\beta\delta}{2\mu} \left(\frac{t}{\mu} e^{\frac{\delta}{2}t} \sin(\mu t) - \int \frac{\sin(\mu t)}{\mu} \left(\frac{\delta}{2}t e^{\frac{\delta}{2}t} + e^{\frac{\delta}{2}t}\right) dt\right) - \frac{\beta}{\mu} \left(\frac{e^{\frac{\delta}{2}t}}{\frac{\delta^2}{4} + \mu^2}\right)$$

$$\left(\frac{\delta}{2} \cos(\mu t) + \mu \sin(\mu t)\right)$$

$$-\int e^{\frac{\delta}{2}t} t\beta \sin(\mu t) dt = \frac{\beta e^{\frac{\delta}{2}t} t}{\mu} \cos(\mu t) - \frac{\beta\delta}{2\mu^2} t e^{\frac{\delta}{2}t} \sin(\mu t) + \frac{\beta\delta^2}{4\mu^2} \int e^{\frac{\delta}{2}t} t \sin(\mu t) dt + \frac{\beta\delta}{2\mu^2} \int e^{\frac{\delta}{2}t} \sin(\mu t) dt -$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\beta}{\mu} \left( \frac{e^{\frac{\delta}{2}t}}{\frac{\delta^2}{4} + \mu^2} \right) \left( \frac{\delta}{2} \cos(\mu t) + \mu \sin(\mu t) \right) \\
- \left( 1 + \frac{\delta^2}{4\mu^2} \right) \int e^{\frac{\delta}{2}t} t \beta \sin(\mu t) dt &= \frac{\beta e^{\frac{\delta}{2}t} t}{\mu} \cos(\mu t) - \frac{\beta \delta t}{2\mu^2} e^{\frac{\delta}{2}t} \sin(\mu t) + \\
& \frac{\beta \delta e^{\frac{\delta}{2}t}}{2\mu^2 \left( \frac{\delta^2}{4} + \mu^2 \right)} \left( \frac{\delta}{2} \sin(\mu t) - \mu \cos(\mu t) \right) - \\
& \frac{\beta e^{\frac{\delta}{2}t}}{\mu \left( \frac{\delta^2}{4} + \mu^2 \right)} \left( \frac{\delta}{2} \cos(\mu t) + \mu \sin(\mu t) \right) \\
- \int e^{\frac{\delta}{2}t} t \beta \sin(\mu t) dt &= \frac{\left( \frac{t}{\mu} - \frac{\delta}{\mu \left( \frac{\delta^2}{4} + \mu^2 \right)} \right)}{\left( 1 + \frac{\delta^2}{4\mu^2} \right)} \beta e^{\frac{\delta}{2}t} \cos(\mu t) + \\
& \frac{\left( \frac{\delta^2 - 4\mu^2}{4\mu^2 \left( \frac{\delta^2}{4} + \mu^2 \right)} - \frac{\delta t}{2\mu^2} \right)}{\left( 1 + \frac{\delta^2}{4\mu^2} \right)} \beta e^{\frac{\delta}{2}t} \sin(\mu t).
\end{aligned}$$

Setelah disederhanakan maka diperoleh hasil dari integralnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
- \int e^{\frac{\delta}{2}t} t \beta \sin(\mu t) dt &= \left( \frac{4\mu t}{\delta^2 + 4\mu^2} - \frac{16\mu\delta}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} \right) \beta e^{\frac{\delta}{2}t} \cos(\mu t) + \\
& \left( \frac{4(\delta^2 - 4\mu^2)}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} - \frac{2\delta t}{\delta^2 + 4\mu^2} \right) \beta e^{\frac{\delta}{2}t} \sin(\mu t).
\end{aligned}$$

Kemudian integralkan elemen kedua dari vektor  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)$ , yaitu  $e^{\frac{\delta}{2}t}\beta \sin(\mu t)$ .

Dengan cara yang sama pada pengintegralan elemen pertama, maka diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\int e^{\frac{\delta}{2}t} \beta \sin(\mu t) dt = \frac{\beta e^{\frac{\delta}{2}t}}{\left(\mu^2 + \frac{\delta^2}{4}\right)} \left(\frac{\delta}{2} \sin(\mu t) - \mu \cos(\mu t)\right).$$

Sehingga hasil dari integral  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)$  adalah:

$$\int \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) dt = \beta e^{\frac{\delta}{2}t} \begin{bmatrix} \left(\frac{4\mu t}{\delta^2 + 4\mu^2} - \frac{16\mu\delta}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2}\right) \cos(\mu t) + \left(\frac{4(\delta^2 - 4\mu^2)}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} - \frac{2\delta t}{\delta^2 + 4\mu^2}\right) \sin(\mu t) \\ \frac{1}{\mu^2 + \frac{\delta^2}{4}} \left(\frac{\delta}{2} \sin(\mu t) - \mu \cos(\mu t)\right) \end{bmatrix}.$$

Setelah diperoleh integral dari  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)$ , hasilnya dikalikan dengan  $\mathbf{M}$ . Dimana hasil perkalian tersebut merupakan solusi untuk  $\boldsymbol{\theta}_p(t)$ .

$$\boldsymbol{\theta}_p(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ -\frac{\delta}{2} & \left(\frac{-\delta}{2}t + 1\right) \end{bmatrix} \cdot \beta \begin{bmatrix} \left(\frac{4\mu t}{\delta^2 + 4\mu^2} - \frac{16\mu\delta}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2}\right) \cos(\mu t) + \left(\frac{4(\delta^2 - 4\mu^2)}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} - \frac{2\delta t}{\delta^2 + 4\mu^2}\right) \sin(\mu t) \\ \frac{1}{\mu^2 + \frac{\delta^2}{4}} \left(\frac{\delta}{2} \sin(\mu t) - \mu \cos(\mu t)\right) \end{bmatrix}.$$

Maka solusi tak homogen untuk model sudut defleksi dengan nilai eigen berulang adalah:

$$\boldsymbol{\theta}(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -\frac{\delta}{2} & \left(\frac{-\delta}{2}t + 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & t \\ -\frac{\delta}{2} & \left(\frac{-\delta}{2}t + 1\right) \end{bmatrix} \cdot \beta \begin{bmatrix} \left(\frac{4\mu t}{\delta^2 + 4\mu^2} - \frac{16\mu\delta}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2}\right) \cos(\mu t) + \left(\frac{4(\delta^2 - 4\mu^2)}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} - \frac{2\delta t}{\delta^2 + 4\mu^2}\right) \sin(\mu t) \\ \frac{1}{\mu^2 + \frac{\delta^2}{4}} \left(\frac{\delta}{2} \sin(\mu t) - \mu \cos(\mu t)\right) \end{bmatrix}$$

(3.24)

Dengan nilai awal yaitu  $\theta_1(0)$  dan  $\theta_2(0)$ , dan diterapkan pada persamaan (3.24) sehingga akan diperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  dari solusi model sudut defleksi tak homogen kasus nilai eigen kembar.

$$\begin{aligned}\theta_1(0) &= C_1 + \left( -\frac{16\mu\delta}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} \right) \beta \\ \theta_2(0) &= -\frac{\delta}{2}C_1 + C_2 - \beta \left( \frac{4\mu}{\delta^2 + 4\mu^2} - \frac{8\mu\delta^2}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} \right).\end{aligned}$$

Kemudian dengan menggunakan metode substitusi akan diperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}C_1 &= \theta_1(0) + \left( \frac{16\mu\delta}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} \right) \beta \\ C_2 &= \theta_2(0) + \frac{\delta}{2}\theta_1(0) + \beta \left( \frac{4\mu}{\delta^2 + 4\mu^2} + \frac{8\mu\delta^2}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} \right).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $C_1$  dan  $C_2$  ke dalam persamaan (3.24), maka akan diperoleh solusi partikular untuk model sudut defleksi tak homogen kasus nilai eigen real kembar.

### C. Nilai Eigen Kompleks

Adapun solusi tak homogen pada kasus nilai eigen kompleks adalah analog dengan kasus nilai eigen real berbeda maupun nilai eigen berulang. Dari hasil solusi homogenya yang diperoleh pada persamaan (3.19), dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\theta_h(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) & \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \\ -\frac{\delta}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) - \frac{Q}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & -\frac{\delta}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) + \frac{Q}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

Sekarang dapat ditentukan hasil dari  $\mathbf{M}^{-1}$ .

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{e^{-\frac{\delta}{2}t}}{\frac{Q}{2}(e^{-\frac{\delta}{2}t})^2} \begin{bmatrix} -\frac{\delta}{2} \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) + \frac{Q}{2} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) & -\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \\ \frac{\delta}{2} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) + \frac{Q}{2} \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{e^{\frac{\delta}{2}t}}{Q} \begin{bmatrix} -\delta \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) + Q \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) & -2\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \\ \delta \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) + Q \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & 2\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \end{bmatrix}$$

Kemudian mengalikan  $\mathbf{M}^{-1}$  dengan  $\mathbf{f}(t)$ .

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) = \frac{e^{\frac{\delta}{2}t}}{Q} \begin{bmatrix} Q \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) - \delta \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & -2\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \\ \delta \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) + Q \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & 2\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \sin(\mu t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) = \frac{e^{\frac{\delta}{2}t}}{Q} \begin{bmatrix} -2\beta \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \sin(\mu t) \\ 2\beta \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \sin(\mu t) \end{bmatrix}$$

Kemudian mengintegrasikan  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)$  terhadap  $t$ .

$$\int \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) dt = \frac{\beta}{Q} \begin{bmatrix} \int -2e^{\frac{\delta}{2}s} \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \sin(\mu t) dt \\ \int 2e^{\frac{\delta}{2}s} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \sin(\mu t) dt \end{bmatrix}$$

$$\int \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) dt = \frac{\beta}{Q} \begin{bmatrix} \int e^{\frac{\delta}{2}t} \cos\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) - e^{\frac{\delta}{2}t} \cos\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) dt \\ \int e^{\frac{\delta}{2}t} \sin\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) - e^{\frac{\delta}{2}t} \sin\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) dt \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama dengan integral dari perkalian eksponen dengan trigonometri pada bagian nilai eigen real berbeda, maka akan diperoleh:

$$\int \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) dt = \frac{\beta e^{\frac{\delta}{2}t}}{Q} \begin{bmatrix} \frac{\frac{\delta}{2} \cos\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) + \left(\frac{Q}{2} + \mu\right) \sin\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)^2} - \frac{\left(\frac{\delta}{2} \cos\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) + \left(\frac{Q}{2} - \mu\right) \sin\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right)\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)^2} \\ \frac{\frac{\delta}{2} \sin\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) - \left(\frac{Q}{2} + \mu\right) \cos\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)^2} - \frac{\left(\frac{\delta}{2} \sin\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) - \left(\frac{Q}{2} - \mu\right) \cos\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right)\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)^2} \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh solusi partikular tak homogenya kalikan  $\mathbf{M}$  dengan hasil  $\int \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)dt$ .

$$\mathbf{M}(t) \int \mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{f}(t) = \frac{\beta}{Q} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) & \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \\ -\frac{\delta}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) - \frac{Q}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & -\frac{\delta}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) + \frac{Q}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\delta}{2}\cos\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) + \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)\sin\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) & \frac{\delta}{2}\cos\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) + \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)\sin\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) \\ \frac{\delta}{2}\sin\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) - \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)\cos\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) & \frac{\delta}{2}\sin\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) - \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)\cos\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh solusi tak homogen untuk model sudut defleksi sebagai berikut:

$$\theta(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) & \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \\ -\frac{\delta}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) - \frac{Q}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & -\frac{\delta}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) + \frac{Q}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \frac{\beta}{Q} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) & \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \\ -\frac{\delta}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) - \frac{Q}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & -\frac{\delta}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) + \frac{Q}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\delta}{2}\cos\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) + \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)\sin\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) & \frac{\delta}{2}\cos\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) + \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)\sin\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) \\ \frac{\delta}{2}\sin\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) - \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)\cos\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) & \frac{\delta}{2}\sin\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) - \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)\cos\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Dengan nilai awal yaitu  $\theta_1(0)$  dan  $\theta_2(0)$ , dan diterapkan pada persamaan (3.26) sehingga diperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  dari solusi model sudut defleksi tak homogen kasus nilai kompleks sebagai berikut:

$$\theta_1(0) = C_1 + \frac{\beta}{Q} \left( \frac{2\delta}{\delta^2 + (Q + 2\mu)^2} - \frac{2\delta}{\delta^2 + (Q - 2\mu)^2} \right)$$

$$\theta_2(0) = -\frac{\delta}{2}C_1 + \frac{Q}{2}C_2 - \frac{\beta\delta}{2Q} \left( \frac{2\delta}{\delta^2 + (Q + 2\mu)^2} - \frac{2\delta}{\delta^2 + (Q - 2\mu)^2} \right) - \frac{\beta}{2} \left( \frac{2Q + 4\mu}{\delta^2 + (Q + 2\mu)^2} + \frac{-2Q + 4\mu}{\delta^2 + (Q - 2\mu)^2} \right).$$

dengan  $Q = \sqrt{\frac{24K}{m} - \delta^2}$ .

Dengan menggunakan substitusi maka diperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  sebagai berikut:

$$C_1 = \theta_1(0) - \frac{\beta}{Q} \left( \frac{2\delta}{\delta^2 + (Q + 2\mu)^2} - \frac{2\delta}{\delta^2 + (Q - 2\mu)^2} \right) \quad (3.27)$$

$$C_2 = \frac{2\theta_2(0) + \delta\theta_1(0)}{Q} - \frac{\beta}{Q^2} \left( \frac{2Q^2 + 4\mu Q}{\delta^2 + (Q + 2\mu)^2} - \frac{2Q^2 - 4\mu Q}{\delta^2 + (Q - 2\mu)^2} \right).$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $C_1$  dan  $C_2$  ke dalam persamaan (3.26), maka diperoleh solusi partikular untuk model sudut defleksi tak homogen kasus nilai eigen kompleks.

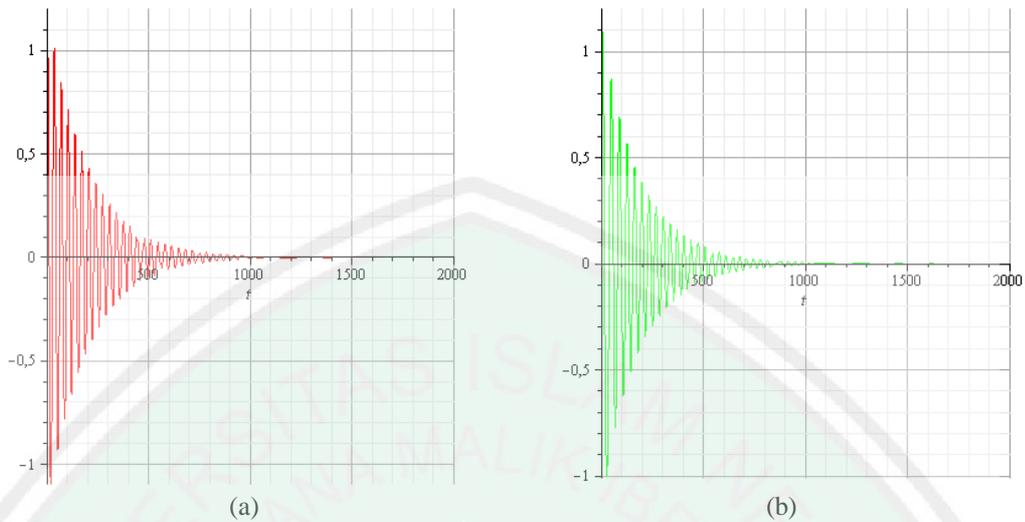
### 3.3 Interpretasi Grafik dan Potret Fase

Dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 657,3$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ; nilai awal  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$ ;  $t = [0,2000]$ . Akibatnya nilai  $\delta^2 - \frac{24K}{m} < 0$ . Sehingga solusi yang digunakan adalah solusi dengan nilai eigen kompleks persamaan (3.19) untuk solusi homogen dan persamaan (3.26) untuk solusi tak homogen, Untuk menggambar solusi homogennya substitusikan parameter-parameter yang diberikan pada solusi (3.19) dan untuk memperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$  substitusikan parameter-parameter pada persamaan (3.20), sehingga diperoleh solusi berikut:

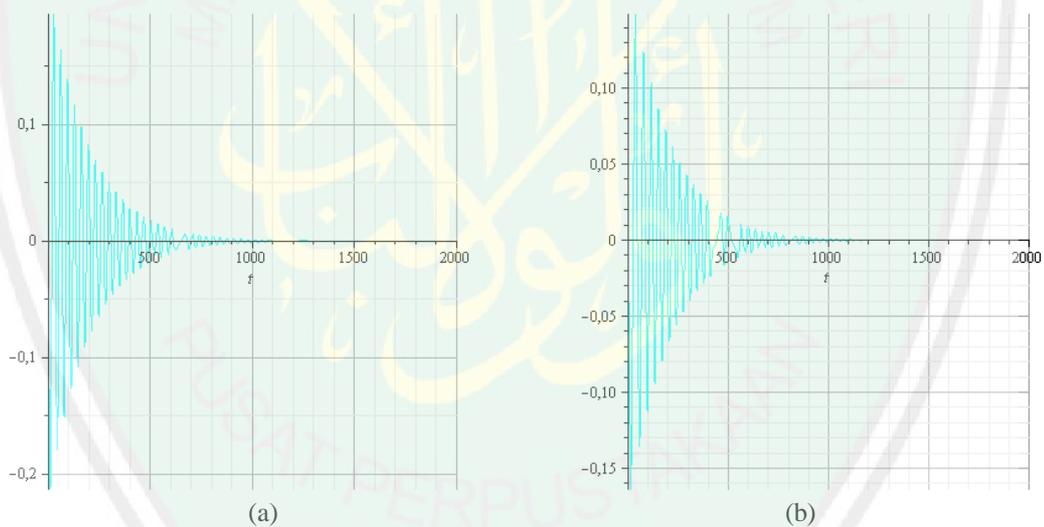
$$\theta_1(t) = e^{-0,005t} (1,2 \cos(0,18494t) + 0,03244 \sin(0,18494t))$$

$$\theta_2(t) = -0,2221e^{-0,005t} \sin(0,18494t). \quad (3.28)$$

Dengan  $t \in [0,2000]$ , maka diperoleh grafik solusi dari persamaan (3.28), yaitu:



**Gambar 3.2** (a) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  Nilai Eigen Kompleks Tanpa Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 657,3$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$ , (b) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  dengan Bantuan Program Maple

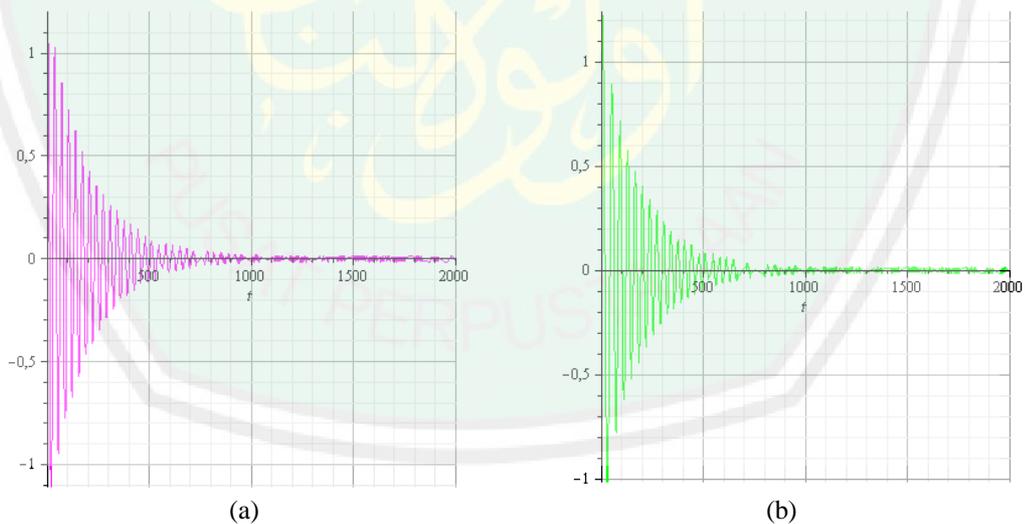


**Gambar 3.3** (a) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  Nilai Eigen Kompleks Tanpa Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 657,3$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$ , (b) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  dengan Bantuan Program Maple

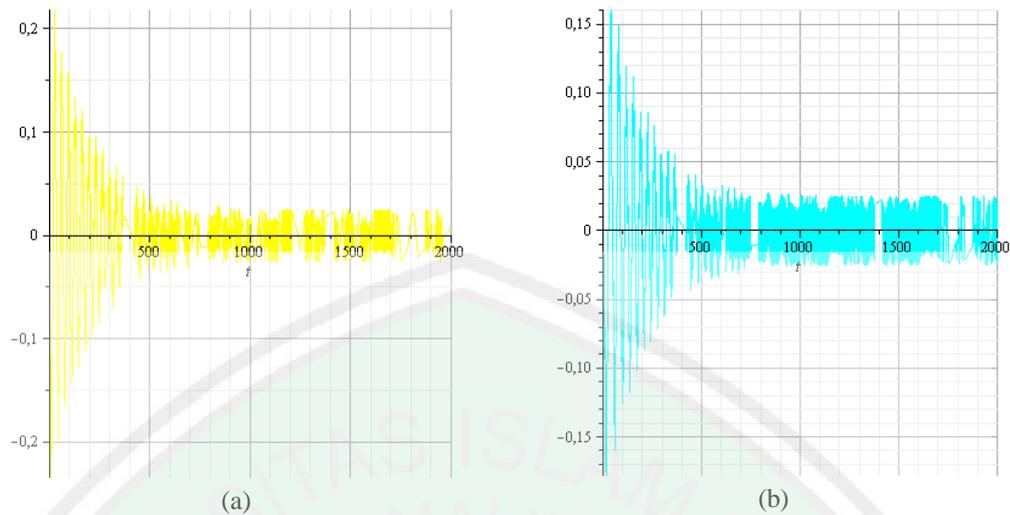
Kemudian untuk menggambar grafik solusi tak homogenya substitusikan parameter-parameter yang telah diberikan di atas ke dalam solusi (3.26) dan untuk nilai konstanta  $C_1$  dan  $C_2$  substitusikan parameter pada persamaan (3.27). sehingga diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\theta_1(t) &= e^{-0,005t}(1,2001 \cos(0,184t) + 0,1694 \sin(0,184t)) \\
&\quad + \cos(0,184t)(0,00016 \cos(1,784t) + 0,0605 \sin(1,784t)) \\
&\quad - 0,00027 \cos(1,415t) - 0,0764 \sin(1,415t)) \\
&\quad + \sin(0,184t)(0,00016 \sin(1,784t) - 0,0605 \cos(1,784t)) \\
&\quad + 0,00027 \sin(1,415t) - 0,0764 \cos(1,415t)) \\
\theta_2(t) &= e^{-0,005t}(0,025 \cos(0,184t) - 0,222 \sin(0,184t)) \\
&\quad + 0,01081(-0,005 \cos(0,184t) \\
&\quad - 0,184 \sin(0,184t))(0,0015 \cos(1,784t) + 0,560 \sin(1,784t)) \\
&\quad - 0,0024 \cos(1,415t) - 0,706 \sin(1,415t)) \\
&\quad + 0,01081(-0,005 \sin(0,184t) \\
&\quad + 0,184 \cos(0,184t))(0,0015 \sin(1,784t) - 0,560 \cos(1,784t)) \\
&\quad + 0,0024 \sin(1,415t) - 0,706 \cos(1,415t))
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Dengan  $t \in [0,2000]$  maka diperoleh grafik solusi dari persamaan (3.29) sebagai berikut:



**Gambar 3.4** (a) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  Nilai Eigen Kompleks dengan Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 657,3$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$   
(b) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  dengan Bantuan Program *Maple*



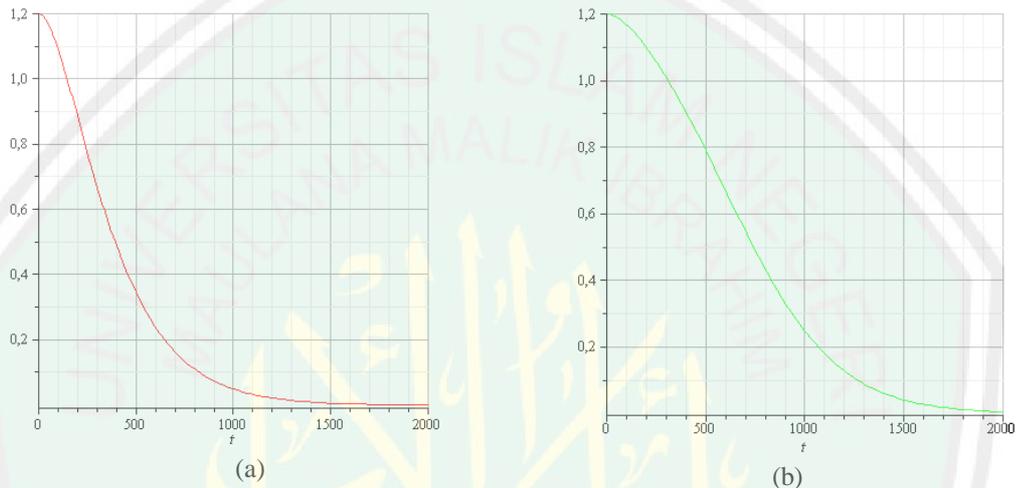
**Gambar 3.5** (a) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  Nilai Eigen Kompleks dengan Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 657,3$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$   
 (b) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  dengan Bantuan Program *Maple*

Dari grafik solusi Gambar 3.2 dan 3.4 serta Gambar 3.3 dan 3.5 terlihat bahwa pada kasus nilai eigen kompleks dengan faktor eksternal tidak memiliki pengaruh yang besar terhadap besarnya sudut defleksi pada model vibrasi dawai. Tetapi grafik dengan faktor eksternal setelah turun menuju ke nol, grafik masih berfluktuasi di sekitar nol. Pada Gambar 3.2 dan 3.4 yang menyatakan besar sudut defleksi pada saat  $t$ , titik maksimum dari keduanya tidak lebih dari 1,5 radian serta kecepatan perubahan sudut tiap satuan waktu  $t$  yang ditunjukkan Gambar 3.3 dan 3.5 nilai maksimumnya tidak lebih dari 0,3 radian per  $t$ . Pada kasus nilai eigen kompleks ini solusi dari model yang telah dilinierisasi memiliki eror yang tidak besar jika dibandingkan dengan grafik solusi dengan bantuan *maple*. Kemudian jika massa  $m$  ditambah menjadi 900000 kg sehingga nilai  $\delta^2 - \frac{24K}{m} = 0$  akibatnya solusi yang digunakan adalah solusi homogen untuk nilai eigen kembar persamaan (3.17) dan persamaan (3.24) untuk tak homogen. Dengan parameter-parameter yang tetap kecuali massa yang bertambah yaitu,  $K = 3,75$ ;  $m = 900000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ; dan nilai awal  $\theta_1(0) =$

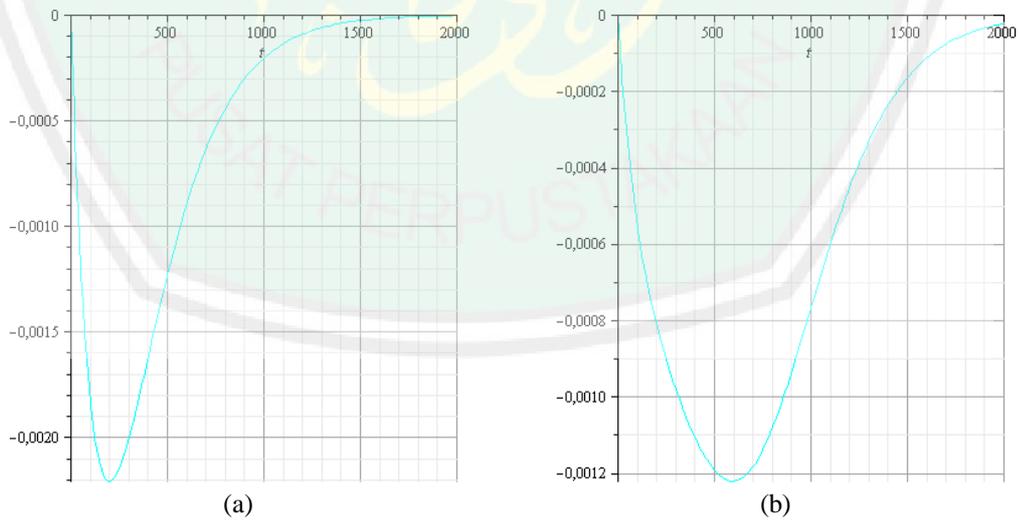
1,2 dan  $\theta_2(0) = 0$  substitusikan ke persamaan (3.17) untuk solusi homogen dan substitusi ke (3.18) untuk nilai  $C_1$  dan  $C_2$ nya. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= e^{-0,005t}(1,2 + 0,006t) \\ \theta_2(t) &= e^{-0,005t}(-0,006 + 0,006(-0,005t + 1)). \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dengan  $t \in [0,2000]$ , maka grafik solusi untuk persamaan (3.30) adalah:



**Gambar 3.6** (a) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  Nilai Eigen Real Kembar Tanpa Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 900000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$  (b) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  dengan Bantuan Progam Maple

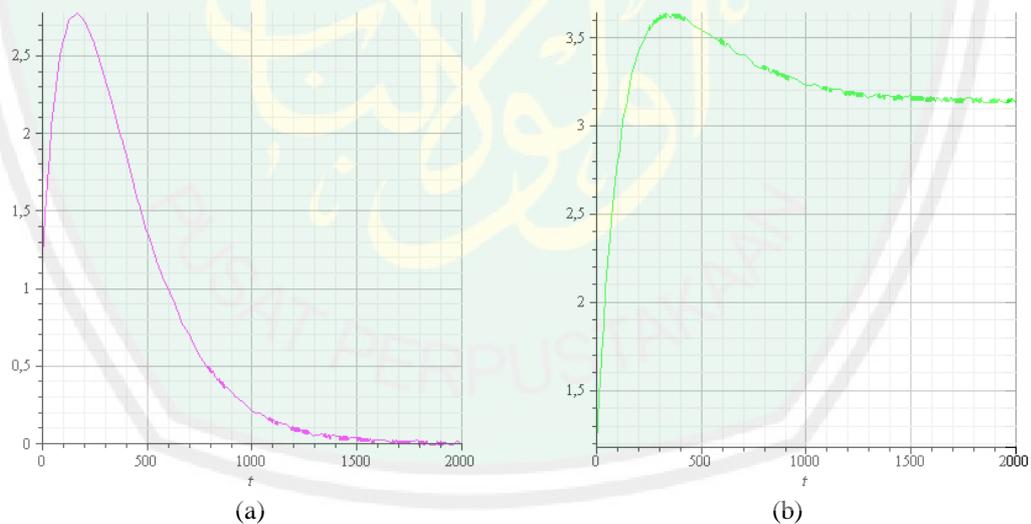


**Gambar 3.7** (a) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  Nilai Eigen Real Kembar Tanpa Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 900000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$  (b) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  dengan Bantuan Progam Maple

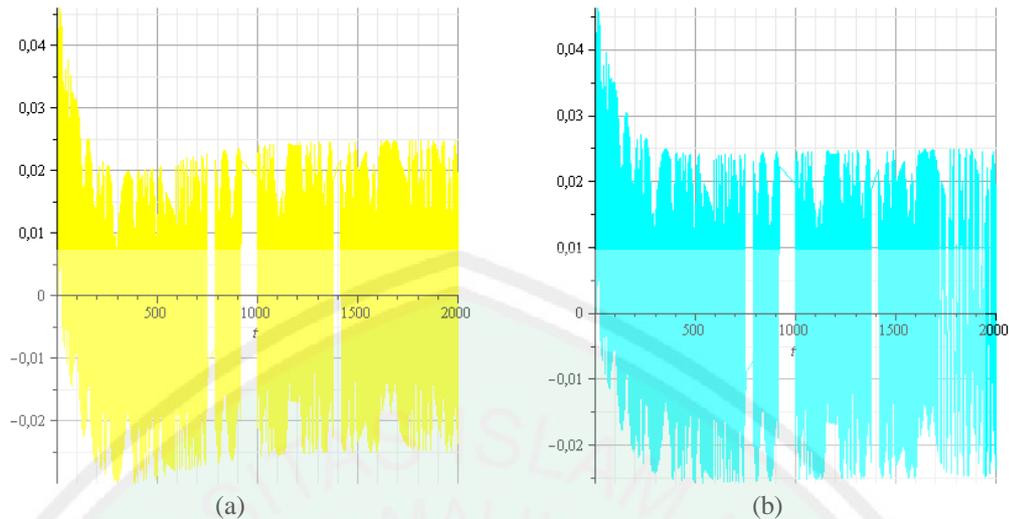
Untuk grafik solusi tak homogennya substitusikan parameter-parameter ke persamaan (3.24) dan substitusikan parameter ke persamaan (3.25) untuk memperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= e^{-0,005t}(1,2001 + 0,031t) + 0,04(0,625t - 0,00244) \cos(1,6t) \\ &\quad - 0,04(0,39 + 0,00195) \sin(1,6t) \\ &\quad + 0,0156t(0,005 \sin(1,6t) - 1,6 \cos(1,6t)) \\ \theta_2(t) &= e^{-0,005t}(0,025 - 1,5 \cdot 10^{-4}t) - 2 \\ &\quad \cdot 10^{-4}(0,625t - 0,0024) \cos(1,6t) \\ &\quad + 0,04(0,00195 + 9,76 \cdot 10^{-6}t) \sin(1,6t) \\ &\quad + 0,0156(1 - 0,05t)(0,05 \sin(1,6t) - 1,6 \cos(1,6t)).\end{aligned}\tag{3.31}$$

Dengan  $t \in [0,2000]$ , maka diperoleh grafik solusi untuk persamaan di atas sebagai berikut:



**Gambar 3.8** (a) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  Nilai Eigen Real Kembar dengan Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 900000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$   
(b) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  dengan Bantuan Program *Maple*



**Gambar 3.9** (a) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  Nilai Eigen Real Kembar dengan Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 900000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$   
 (b) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  dengan Bantuan Program Maple

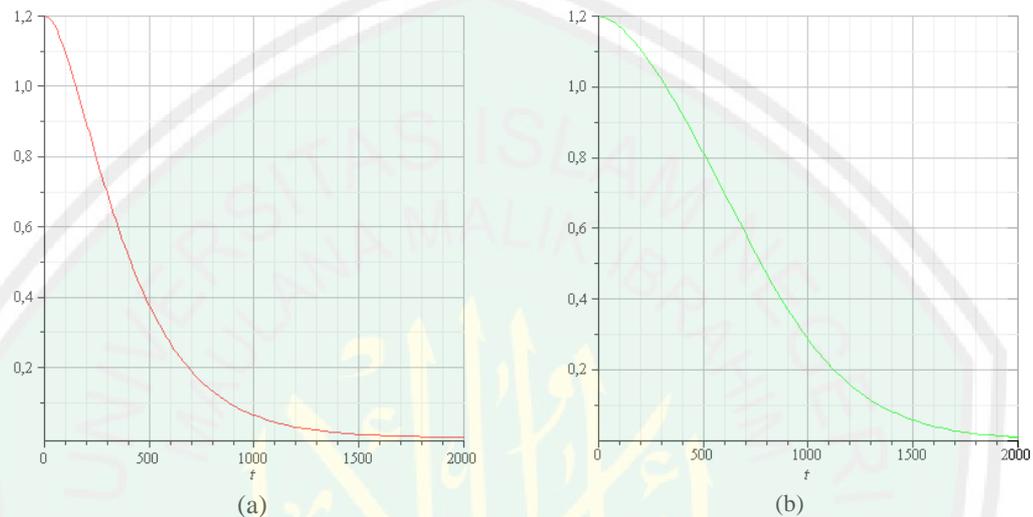
Setelah massa ditambah terlihat pada Gambar 3.6, grafik turun dan menuju nol, tetapi model dengan faktor eksternal yang ditunjukkan pada Gambar 3.8 grafik naik hingga dua kali nilai awal. Tetapi, grafik hasil linierisasi dan grafik hasil bantuan program maple memiliki perbedaan dimana grafik linierisasi berjalan menuju nol, sedangkan grafik dengan bantuan maple berjalan menuju nilai 3,1. Sedangkan kecepatan perubahan sudut yang ditunjukkan pada Gambar 3.7 dan 3.9 terlihat faktor eksternal memiliki pengaruh yang besar terhadap fluktuasi dari grafik, grafik  $\theta_2(t)$  hasil linierisasi dan hasil bantuan program maple tidak memiliki perbedaan yang besar. Kemudian jika  $m$  ditambah menjadi

9500000 mengakibatkan  $\delta^2 - \frac{24K}{m} > 0$ , dengan parameter-parameter yang tetap

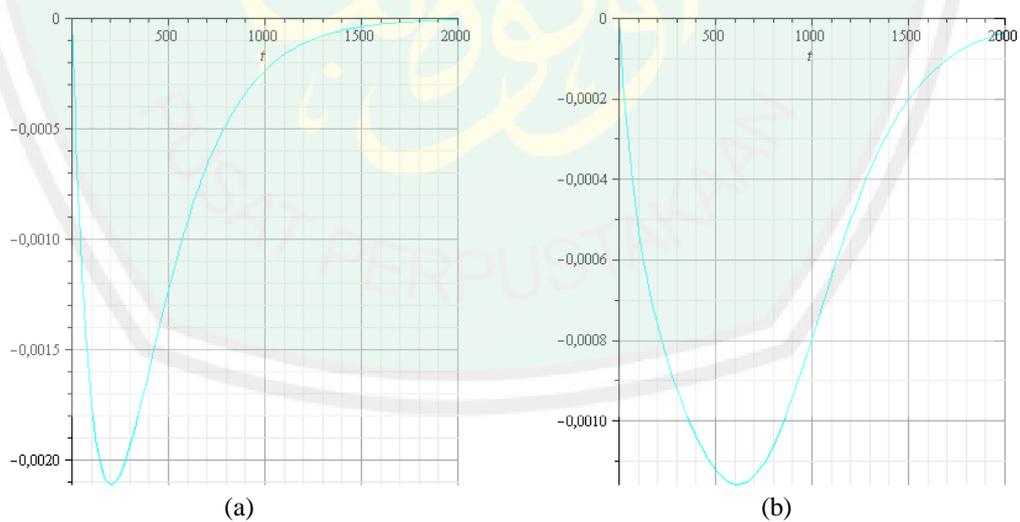
kecuali massa yang bertambah yaitu,  $K = 3,75$ ;  $m = 950000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ; dan nilai awal  $\theta_1(0) = 1,2$  dan  $\theta_2(0) = 0$  substitusikan ke persamaan (3.14) untuk solusi homogen dan substitusi ke persamaan (3.16) untuk nilai  $C_1$  dan  $C_2$ nya. Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= 3,215 e^{-0,0038t} - 2,015 e^{-0,0061t} \\ \theta_2(t) &= -0,0123 e^{-0,0038t} + 0,0123 e^{-0,0061t}\end{aligned}\quad (3.32)$$

Dengan  $t \in [0,2000]$ , maka diperoleh grafik solusi untuk persamaan di atas sebagai berikut:



**Gambar 3.10** (a) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  Nilai Eigen Real Berbeda Tanpa Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 950000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$ , (b) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  dengan Bantuan Program Maple

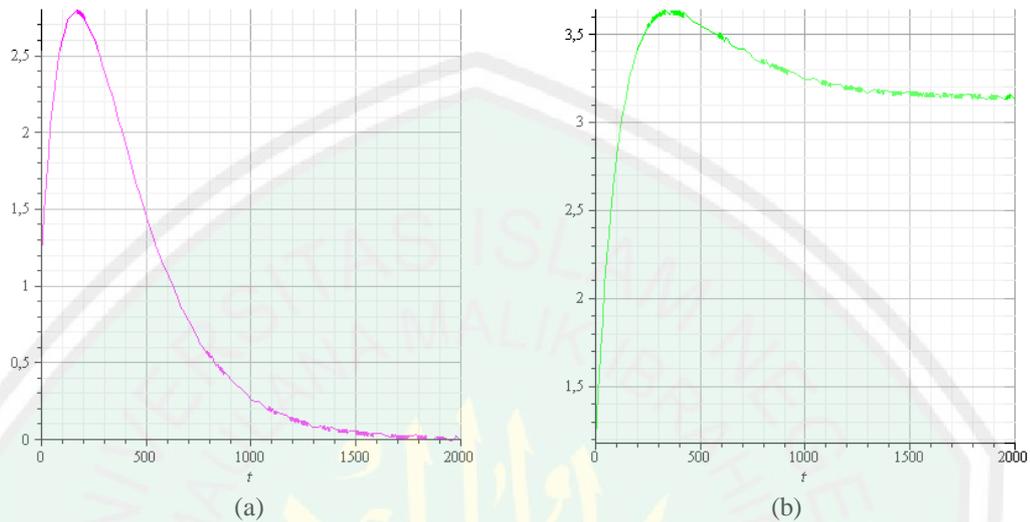


**Gambar 3.11** (a) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  Nilai Eigen Real Berbeda Tanpa Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 950000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$ , (b) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  dengan Bantuan Program Maple

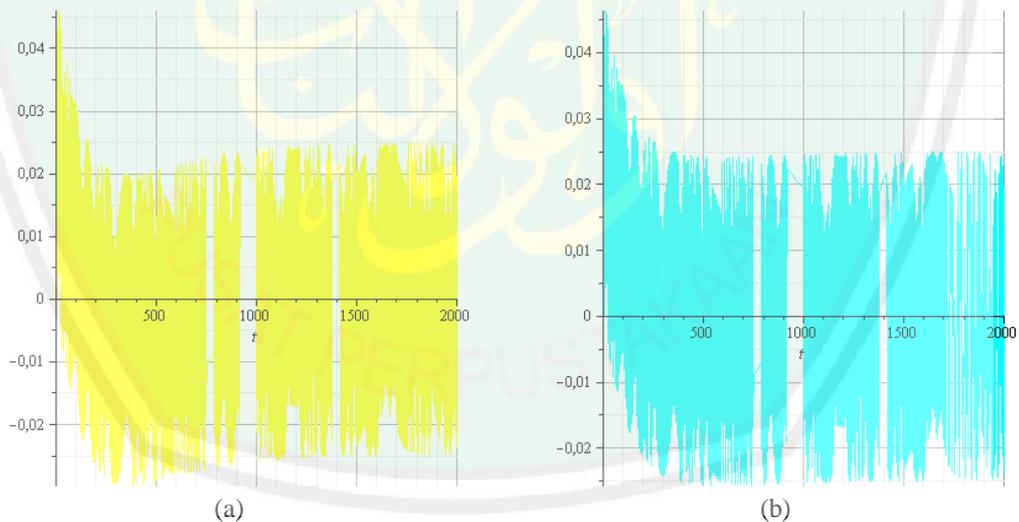
Untuk grafik solusi tak homogenya substitusikan parameter-parameter ke persamaan (3.21) dan substitusikan parameter ke persamaan (3.23) untuk memperoleh nilai  $C_1$  dan  $C_2$ , sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= 449,46e^{-0,0038t} - 448,46e^{-0,0061t} - 0,0156 \sin(1,6t) - 9,7 \cdot 10^{-5} \cos(1,6t) \\ \theta_2(t) &= -1,731e^{-0,00338t} + 2,756e^{-0,0061t} - 0,0249 \cos(1,6t) + 1,5 \cdot 10^{-4} \sin(1,6t)\end{aligned}\quad (3.33)$$

Dengan  $t \in [0,2000]$ , diperoleh grafik untuk persamaan (3.33) sebagai berikut:



**Gambar 3.12** (a) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  Nilai Eigen Real Berbeda dengan Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 950000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$ , (b) Grafik Solusi  $\theta_1(t)$  dengan Bantuan Program Maple



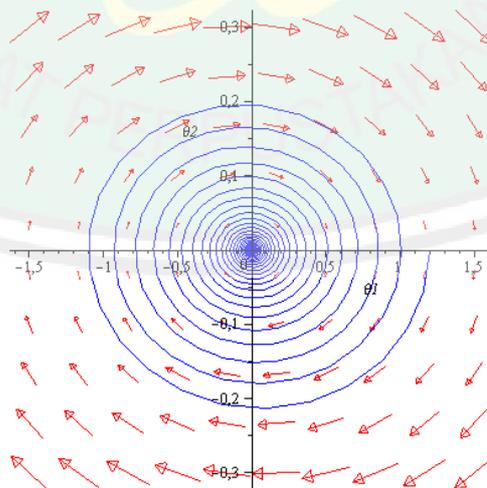
**Gambar 3.13** (a) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  Nilai Eigen Real Berbeda dengan Faktor Eksternal dengan  $K = 3,75$ ;  $m = 950000$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ;  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$ , (b) Grafik Solusi  $\theta_2(t)$  dengan Bantuan Program Maple

Pada kasus nilai eigen real ini grafik solusi yang ditunjukkan pada Gambar 3.10, 3.11, 3.12, 3.13 memiliki perilaku yang hampir sama dengan grafik solusi nilai eigen real kembar, Tetapi, besarnya nilai maksimum dari grafik solusi nilai eigen real berbeda lebih besar daripada solusi nilai eigen real kembar. Sedangkan

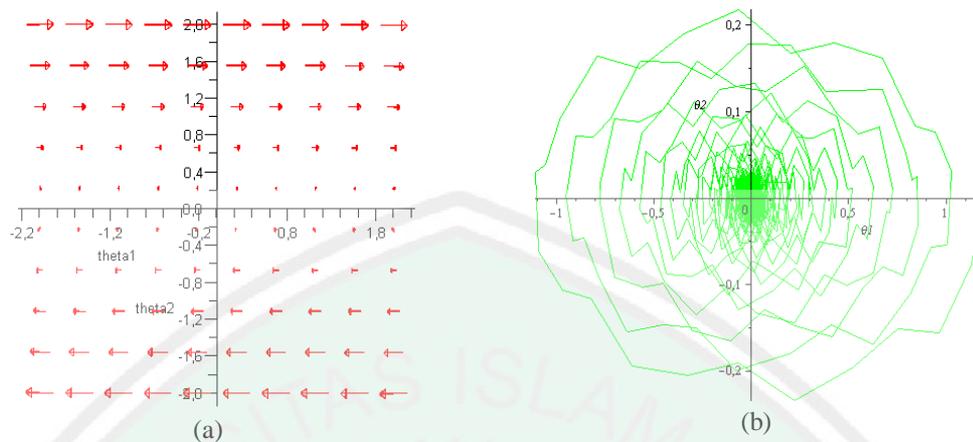
kestabilan dari solusi akan diperlihatkan dari potret fase dari model sudut defleksi. Untuk menggambar potret fase berikan nilai untuk  $(\theta_1, \theta_2)$  kemudian substitusikan ke persamaan diferensial maka akan diperoleh suatu vektor. Kemudian kan vektor tersebut dengan titik  $(\theta_1, \theta_2)$  sebagai titik pangkalnya. Dengan mengulangi proses tersebut dan memberikan nilai  $(\theta_1, \theta_2)$  yang berbeda maka akan diperoleh medan vektor untuk model sudut defleksi. kemudian gambarkan solusi  $\theta_1(t)$  dan  $\theta_2(t)$  dalam bidang  $\theta_1$ - $\theta_2$  untuk mendapatkan bidang fase. Sedangkan untuk menggambar sistem *nonautonomous* ubah sistem (3.10) menjadi sistem *autonomous*, dengan memisalkan  $\tau = t$  maka diperoleh:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{d\tau} = \theta_2 \\ \frac{d\theta_2}{d\tau} = -\frac{6K}{m}\theta_1 - \delta\theta_2 + \beta \sin(\mu t) \\ \frac{dt}{d\tau} = 1 \end{cases}$$

Dengan nilai  $K = 3,75$ ;  $m = 657,3$  kg;  $\delta = 0,01$ ;  $\beta = 0,04$ ;  $\mu = 1,6$ ; nilai awal  $\theta_1(0) = 1,2$ ;  $\theta_2(0) = 0$ ;  $t = [0,2000]$ . Berikut adalah potret fasenya:

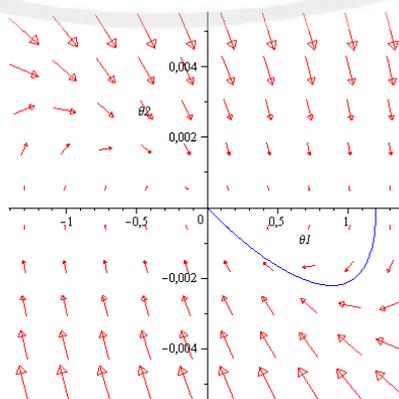


**Gambar 3.14** Potret Fase Nilai Eigen Kompleks Tanpa Faktor Eksternal

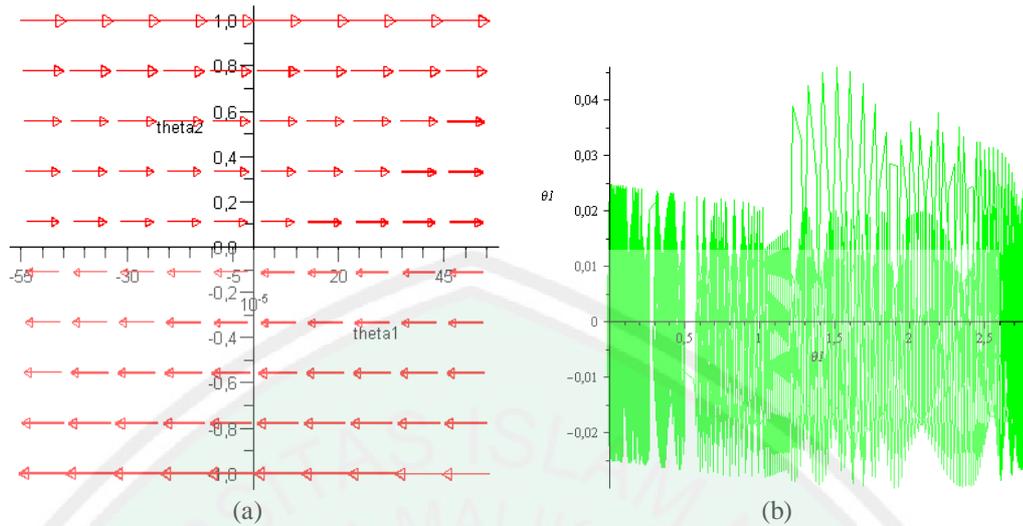


**Gambar 3.15** (a) Medan Vektor Solusi Nilai Eigen Kompleks dengan Faktor Eksternal, (b) Solusi Nilai Eigen Kompleks dengan Faktor Eksternal pada Bidang  $\theta_1$ - $\theta_2$

Pada Gambar 3.14 anak panah menunjukkan medan vektor dan grafik berwarna biru merupakan solusi khusus dari sistem. Dari Gambar 3.14 terlihat bahwa untuk nilai eigen kompleks stabil asimtotik dan berjenis spiral sink. Sedangkan pengaruh faktor eksternal ditunjukkan pada medan vektor Gambar 3.15 (a) dan grafik solusi khusus pada bidang  $\theta_1$ - $\theta_2$  pada Gambar 3.15 (b), karena medan vektor pada Gambar 3.15 (a) tidak menunjukkan menuju nol, dan grafik Gambar 3.15 (b) meskipun menuju nol, tetapi dari grafik bersifat acak atau *chaotic* sehingga tidak dapat disimpulkan bahwa model dengan faktor eksternal stabil. Dengan merubah  $m$  menjadi 900000 dan parameter yang lain tetap diperoleh potret fase sebagai berikut:

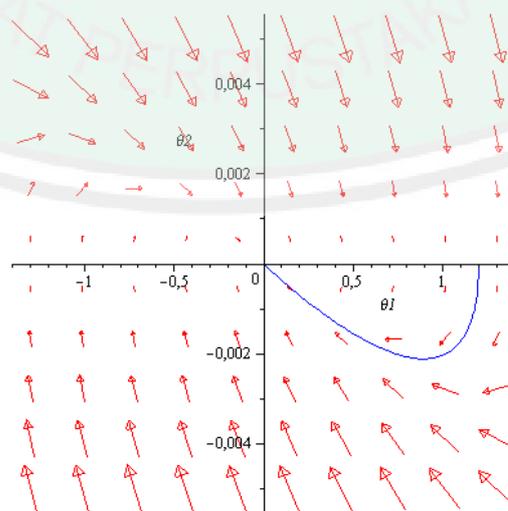


**Gambar 3.16** Potret Fase Nilai Eigen Real Kembar Tanpa Faktor Eksternal

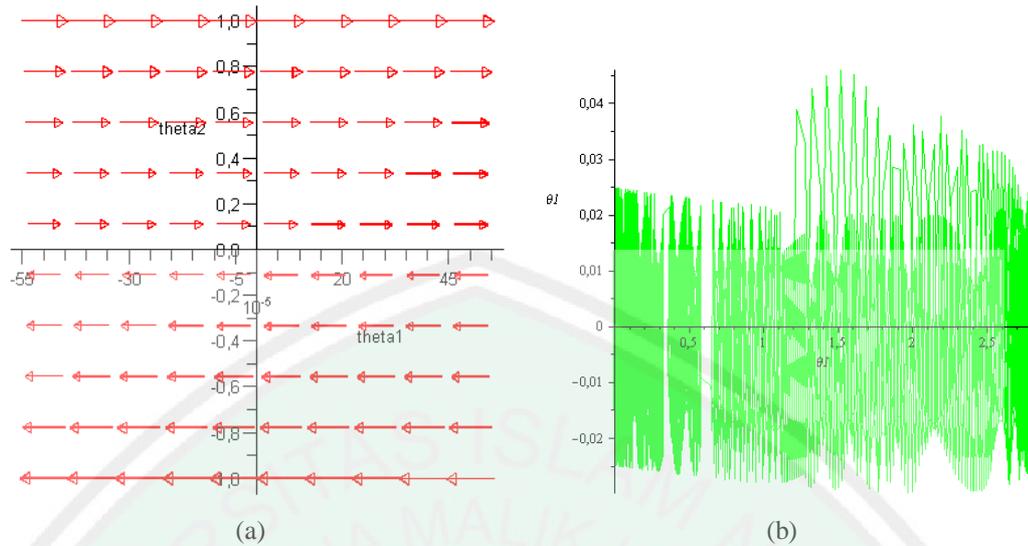


**Gambar 3.17** (a) Medan Vektor Solusi Nilai Eigen Real Kembar dengan Faktor Eksternal, (b) Solusi Nilai Eigen Real Kembar Dengan Faktor Eksternal pada Bidang  $\theta_1-\theta_2$

Seperti pada kasus nilai eigen kompleks pada kasus nilai eigen kembar ini, faktor eksternal berpengaruh terhadap kestabilan dari solusi, hal ini terlihat dari medan vektor Gambar 3.17 (a) di mana anak panah tidak menuju nol, begitu juga dengan grafik solusi khusus pada Gambar 3.17 (b) grafik tidak menuju nol. Sehingga dapat disimpulkan faktor eksternal berpengaruh terhadap kestabilan solusi. Dengan merubah  $m$  menjadi 950000 dan parameter yang lain tetap diperoleh potret fase sebagai berikut:



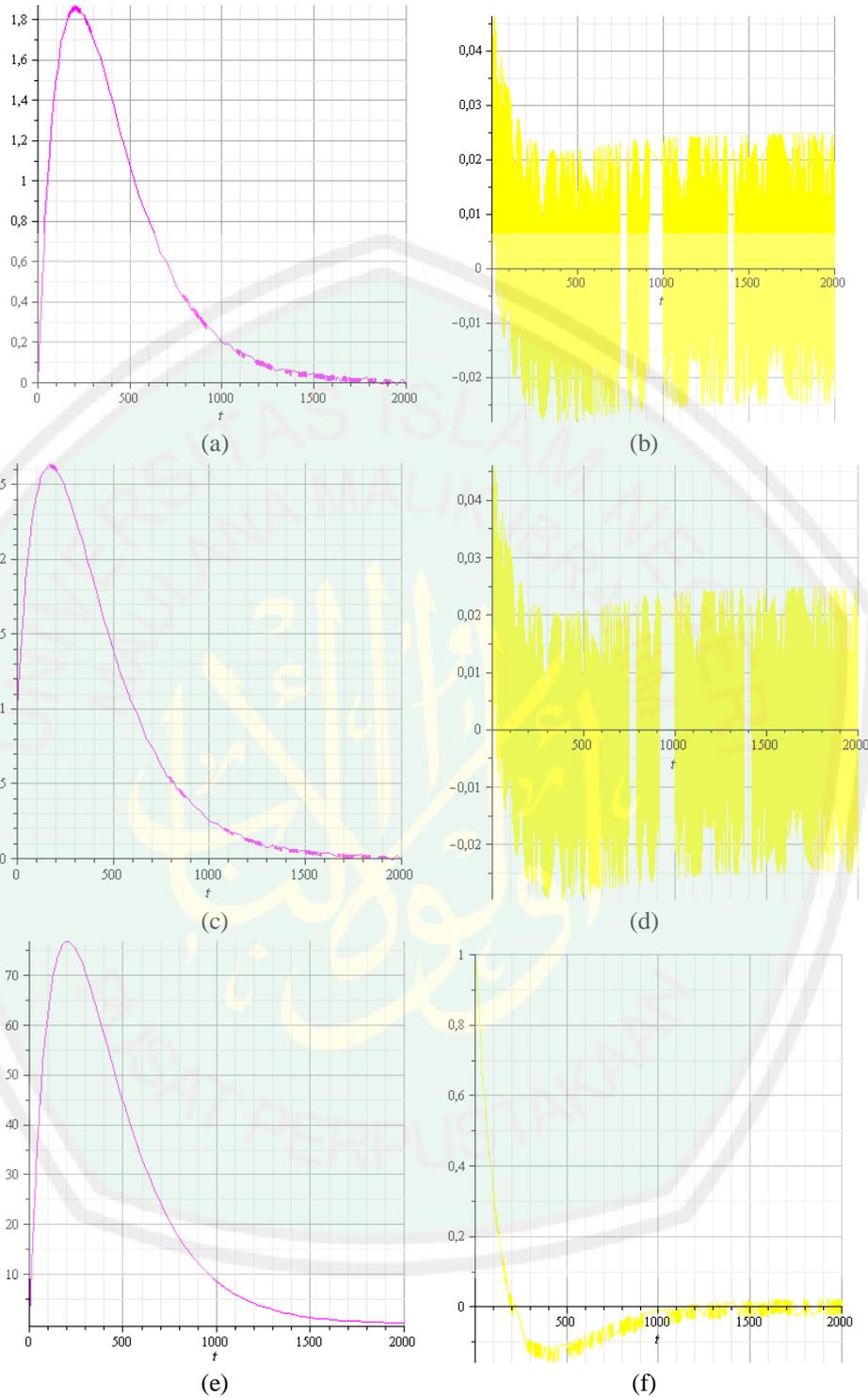
**Gambar 3.18** Potret Fase Nilai Eigen Berbeda Tanpa Faktor Eksternal



**Gambar 3.19** (a) Medan Vektor Solusi Nilai Eigen Real Berbeda dengan Faktor Eksternal, (b) Solusi Nilai Eigen Real Berbeda dengan Faktor Eksternal pada Bidang  $\theta_1$ - $\theta_2$

Gambar 3.18 adalah potret fase dari model sudut defleksi dengan nilai eigen real berbeda tanpa faktor eksternal, terlihat bahwa kestabilannya adalah stabil asimtotik dan berjenis simpul spink. Seperti pada kasus sebelumnya, faktor eksternal berpengaruh terhadap kestabilan dari nilai eigen real berbeda. Pada Gambar 3.19(a) medan vektor dari model dengan faktor eksternal tidak menuju ke titik pusat yang merupakan titik kesetimbangannya, sedangkan pada Gambar 3.19(b) yang merupakan solusi khusus pada bidang  $\theta_1$ - $\theta_2$  terlihat dengan jelas nilai  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  nol yang berarti solusi tidak stabil.

Sedangkan untuk melihat pengaruh nilai awal terhadap besar kecilnya sudut maksimal yang terbentuk diberikan nilai-nilai awal sebagai berikut,  $\{\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0\}$ ,  $\{\theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = 0\}$  dan  $\{\theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = 1\}$ . Sehingga diperoleh grafik sebagai berikut:



**Gambar 3.20** (a) Grafik  $\theta_1$  dengan  $\{\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0\}$ , (b) Grafik  $\theta_2$  dengan  $\{\theta_1(0) = 0, \theta_2(0) = 0\}$ , (c) Grafik  $\theta_1$  dengan  $\{\theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = 0\}$ , (d) Grafik  $\theta_2$  dengan  $\{\theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = 0\}$ , (e) Grafik  $\theta_1$  dengan  $\{\theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = 1\}$ , (f) Grafik  $\theta_2$  dengan  $\{\theta_1(0) = 1, \theta_2(0) = 1\}$ ,

Dari grafik-grafik yang ditunjukkan Tabel 3.1, nilai awal  $\theta_1(0)$  dan  $\theta_2(0)$  memiliki pengaruh yang besar terhadap grafik solusi. Semakin besar nilai awal yang diberikan semakin besar pula nilai maksimum dari grafik solusi, dan pada grafik  $\theta_2(t)$  perubahan nilai awal dari nol menjadi satu merubah pola dari grafiknya. Seperti pada perubahan nilai awal pada kasus nilai eigen berbeda dengan faktor eksternal perubahan nilai awal pada kasus lain memiliki pengaruh yang sama.

### 3.4 Perintah Mempelajari Fenomena Alam dalam Pandangan Islam

Berdasarkan al-Quran surat Yunus/10:101 yang pada awal ayatnya memerintahkan manusia untuk memperhatikan apa yang ada di langit dan bumi, sehingga manusia dapat melihat kebesaran dari penciptaan Allah Swt.. Alasan ayat ini diturunkan adalah untuk menunjukkan sarana untuk memperoleh iman. Sehingga dengan melakukan penelitian, mengembangkan ilmu, dan mengamati fenomena alam dapat memberikan manfaat langsung kepada manusia sekaligus meningkatkan keimanannya.

Salah satu fenomena alam yang sangat penting dan perlu untuk diamati adalah vibrasi. Vibrasi sangat erat kaitannya dengan keseimbangan dan gaya yang bekerja. Menara penyangga jembatan gantung, perangkat pendarat pesawat, pegas yang bekerja pada mobil merupakan salah satu contoh penerapan vibrasi yang sangat mempertimbangkan titik keseimbangan, sehingga diperoleh pengetahuan agar menara penyangga jembatan gantung cukup kuat untuk menahan beban jembatan. Manusia perlu melakukan penelitian untuk dapat membuat sesuatu dengan baik dan seimbang, tetapi seberapapun manusia berusaha pasti memiliki

cacat tidak seperti penciptaan Allah Swt. Oleh karena itu sebagai manusia tidak boleh sombong karena sebaik apapun ciptaan manusia tidak akan lebih baik dari ciptaan Allah Swt..



**BAB IV**  
**PENUTUP**

**4.1 Kesimpulan**

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, penelitian mengenai analisis dinamik sudut defleksi pada model vibrasi dawai diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dari model McKenna dapat diambil model sudut defleksi yang menggambarkan gerak torsi dari balok yaitu:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -\frac{6K}{m}\theta_1 - \delta\theta_2 + \beta \sin(\mu t) \end{cases}$$

2. Akibat massa  $m$  yang berubah terdapat tiga kemungkinan solusi dari model sudut defleksi pada vibrasi dawai.
  - a. Nilai Eigen Real Berbeda

$$\theta = \begin{bmatrix} e^{\frac{-\delta+P}{2}t} & e^{\frac{-\delta-P}{2}t} \\ \frac{P-\delta}{2}e^{\frac{P-\delta}{2}t} & \frac{-\delta-P}{2e^{\frac{\delta+P}{2}t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\beta \left( \frac{(\delta^2 - P^2 - 4\mu^2) \sin(\mu t) - 4\mu\delta \cos(\mu t)}{(4\mu^2 + (\delta - P)^2)(4\mu^2 + (P + \delta)^2)} \right) \\ 4\beta \left( \frac{(\delta^2 - P^2 - 4\mu^2)\mu \cos(\mu t) + 4\delta\mu^2 \sin(\mu t)}{(4\mu^2 + (\delta - P)^2)(4\mu^2 + (P + \delta)^2)} \right) \end{bmatrix}$$

dengan  $P = \sqrt{\delta^2 - \frac{24K}{m}}$ .

- b. Nilai Eigen Real Kembar

$$\theta = e^{\frac{-\delta}{2}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -\frac{\delta}{2} & \left(\frac{-\delta}{2}t + 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & t \\ -\frac{\delta}{2} & \left(\frac{-\delta}{2}t + 1\right) \end{bmatrix}.$$

$$\beta \left[ \begin{array}{c} \frac{4\mu t \cos(\mu t)}{\delta^2 + 4\mu^2} - \frac{16\mu\delta \cos(\mu t)}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} + \left( \frac{4(\delta^2 - 4\mu^2)}{(\delta^2 + 4\mu^2)^2} - \frac{2\delta t}{\delta^2 + 4\mu^2} \right) \sin(\mu t) \\ \frac{1}{\mu^2 + \frac{\delta^2}{4}} \left( \frac{\delta}{2} \sin(\mu t) - \mu \cos(\mu t) \right) \end{array} \right]$$

c. Nilai Eigen Kompleks

$$\theta(t) = e^{-\frac{\delta}{2}t} \left[ \begin{array}{cc} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) & \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \\ -\frac{\delta}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) - \frac{Q}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & -\frac{\delta}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) + \frac{Q}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \end{array} \right] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{\beta}{Q} \left[ \begin{array}{cc} \cos\left(\frac{Q}{2}t\right) & \sin\left(\frac{Q}{2}t\right) \\ -\frac{\delta}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) - \frac{Q}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) & -\frac{\delta}{2}\sin\left(\frac{Q}{2}t\right) + \frac{Q}{2}\cos\left(\frac{Q}{2}t\right) \end{array} \right].$$

$$\left[ \begin{array}{cc} \frac{\frac{\delta}{2}\cos\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) + \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)\sin\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)^2} & \frac{\frac{\delta}{2}\cos\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) + \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)\sin\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)^2} \\ \frac{\frac{\delta}{2}\sin\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right) - \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)\cos\left(\left(\frac{Q}{2} + \mu\right)t\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{2} + \mu\right)^2} & \frac{\frac{\delta}{2}\sin\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right) - \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)\cos\left(\left(\frac{Q}{2} - \mu\right)t\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q}{2} - \mu\right)^2} \end{array} \right]$$

$$\text{dengan } Q = \sqrt{\frac{24K}{m} - \delta^2}.$$

3. Faktor eksternal  $f(t)$  memiliki dampak yang lebih besar terhadap kasus nilai eigen real berbeda dan real kembar daripada pada kasus nilai eigen kompleks, hal ini terlihat dari potret fase model sudut defleksi dengan  $f(t)$  pada kasus nilai eigen real berbeda dan real kembar trayektori  $\theta_1(t)$  dan  $\theta_2(t)$  tidak mendekati titik kesetimbangan, sedangkan pada potret fase kasus nilai eigen kompleks trayektori  $\theta_1(t)$  dan  $\theta_2(t)$  meskipun bersifat *chaotic* tetapi masih mendekati nol, tetapi kasus nilai eigen kompleks dengan  $f(t)$  tidak bisa dikatakan stabil karena sifat grafik yang acak.

#### 4.2 Saran

Pada penulisan skripsi selanjutnya dapat dilakukan penelitian dengan model yang sama yaitu model vibrasi dawai tanpa mengabaikan gaya yang bekerja pada dawai yaitu  $-K(y \pm l \sin \theta)^+$  dan analisis sistem dinamik terhadap model tak liniernya tanpa linierisasi agar diperoleh interpretasi model yang lebih akurat, serta lebih diperdalam mengenai analisis kestabilan dari sistem *nonautonomous*.

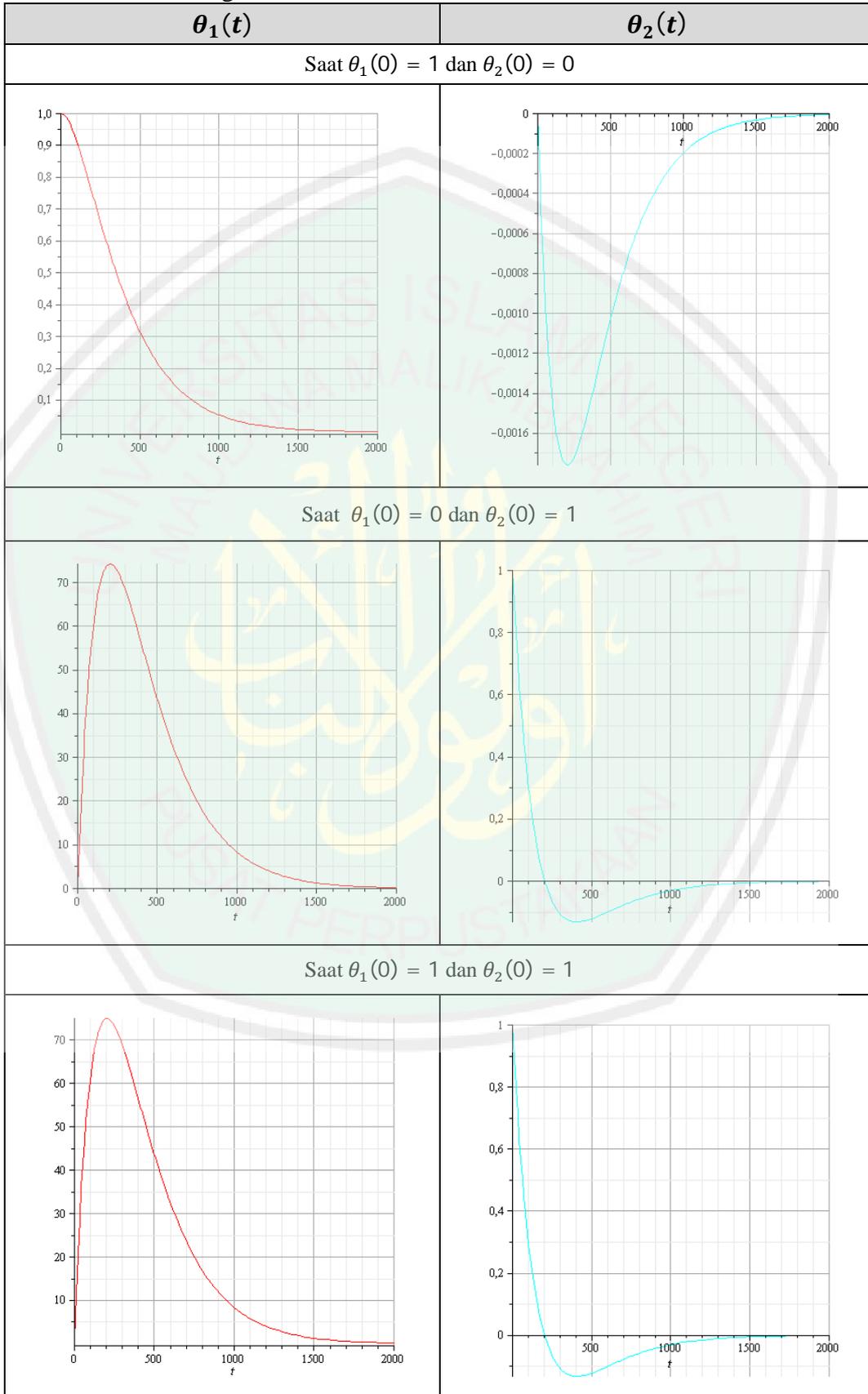


## DAFTAR PUSTAKA

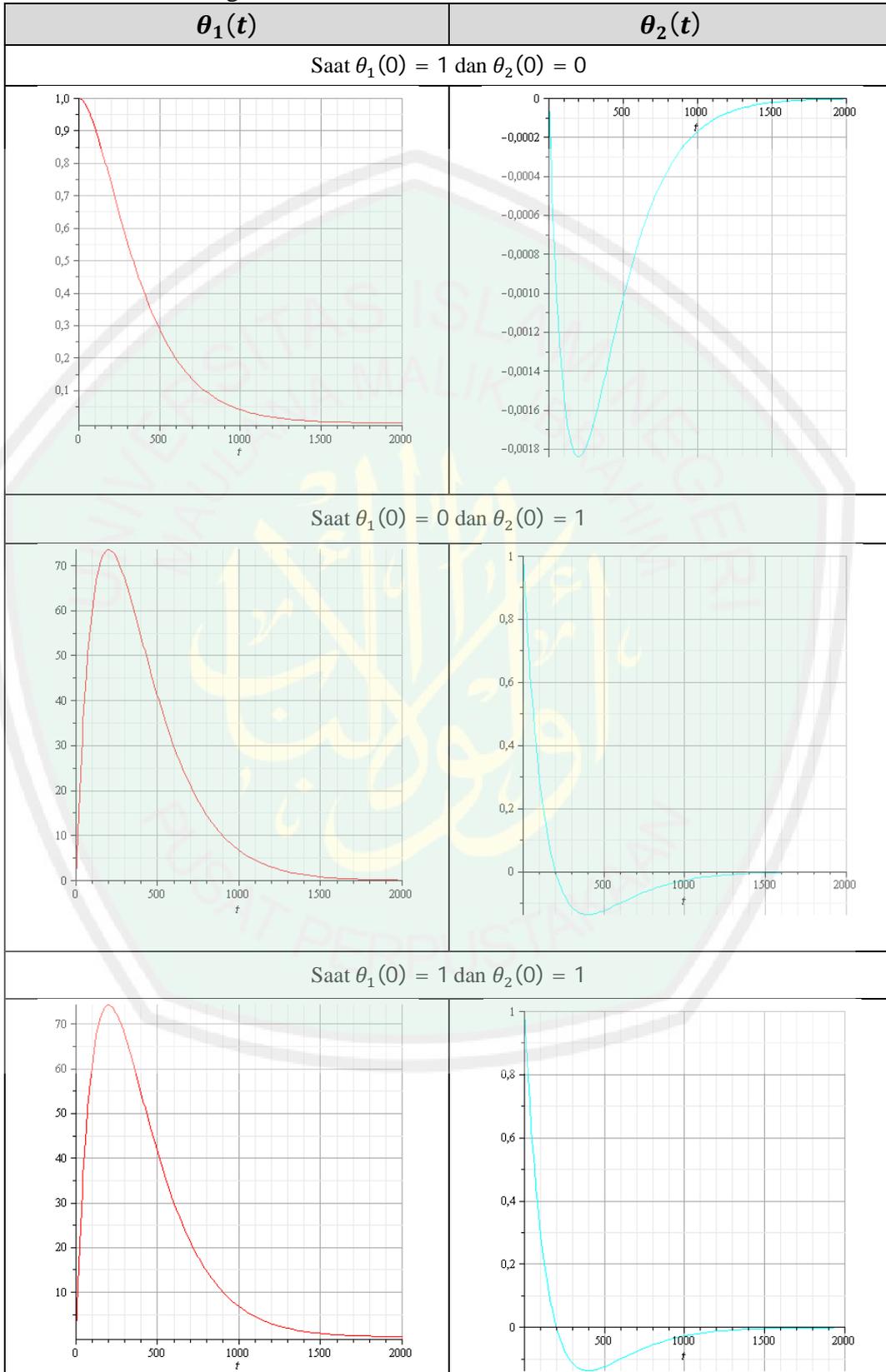
- Ali, A. Y. 2009. *Tafsir Yusuf Ali*. Terjemahan Ali Audah. Bogor: Pustaka Litera AntarNusa.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Dasuki, H., Alhumam, Yunardi, B., Syatibi, Tohar, M. S., Sya'roni, M., & Surur, B. 1995. *Al Qur'an dan Tafsirnya*. Yogyakarta: Universitas Islam Indonesia.
- Dawkins, P. 2007. *Differential Equations*. (Online), (<http://tutorial.math.lamar.edu/getfile.aspx?file=B,1,N>), diakses 2 Februari 2015.
- Gazzola, F. 2013. *Variational and Topological Methods in Nonlinear Phenomena*. (Online), (<http://www.dm.uniba.it/nonlinear2013/slides/gazzolaalghero2013.pdf>), diakses 23 Agustus 2014.
- Gere, J. M., & Timoshenko, S. P. 1972. *Mekanika Bahan, Jilid I*. Jakarta: Erlangga.
- Halliday, D., & Resnick, R. 1998. *Fisika Jilid 1 Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Hedrick, J. K., & Girard, A. 2010. *Control of Nonlinear Dynamic Systems: Theory and Applications*. (Online), (<http://www.me.berkeley.edu/ME237/ControlOfNonlinearDynamicSystems.pdf>), diakses 5 Mei 2015.
- Izhikevich, E. M. 2007. *Dynamical Systems in Neuroscience*. London: The MIT Press Cambridge.
- Jonifan, Lidya L., & Yasman. 2008. *Fisika Mekanika*. (Online), (<http://ermach.staff.gunadarma.ac.id/Downloads/files/16140/Bab+7++Kesetimbangan.pdf>), diakses 20 Februari 2015.
- Karso. 2012. *Nilai Eigen, Vektor Eigen Dan Diagonalisasi Metriks*. (Online). ([http://file.upi.edu/direktori/fpmipa/jur.\\_pend.\\_matematika/195509091980021-karso/modul\\_11\\_aljabar\\_linear\\_2006.pdf](http://file.upi.edu/direktori/fpmipa/jur._pend._matematika/195509091980021-karso/modul_11_aljabar_linear_2006.pdf)), diakses 14 Agustus 2014.
- Ohene, K. R. 2011. *A Mathematical Model Of A Suspension Bridge*. Disertasi tidak diterbitkan. Ghana: Kwame Nkrumah University of Science and Technology.
- Ohene, K. R. 2012. "A mathematical model of a suspension bridge – case study: Adomi bridge, Atimpoku, Ghana". *Global Advanced Research Journal of Engineering, Technology, and Innovation*. Vol. 1(3), 047-062.

- Ledder, G. 2005. *Differential Equations: A Modelling Approach*. New York: McGraw-Hill Companies, Inc.
- Parlos, A. G. 2004. *Linearization Of Nonlinear Dynamics*. (Online), (<http://parlos.tamu.edu/MEEN651/Linearization.pdf>), diakses 17 Agustus 2014.
- Perko, L. 2000. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Arizona: Springer.
- Roat, M. 2012. *Bifurkasi Hopf Pada Sistem Predator Prey Dengan Fungsi Respon Tipe II*. Skripsi tidak diterbitkan Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction Dynamical System Continuous and Discrete*. New Jersey: Pearson Education.
- Rochmad, 2014. *Persamaan Diferensial Bagian I*. (Online), (<http://maulana.lecture.ub.ac.id/files/2014/09/persamaandiferensial.pdf>), diakses 11 Januari 2015.
- Stech, H. 2007. *Modelling Issues Associated with Sensor technologies for the Nondestructive Evaluation of Timber Bridge*. Laporan Penelitian tidak diterbitkan. Duluth: University of Minnesota.
- Tohaneanu, M. 2014. *Math 421 Dynamical Systems*. (Online), ([www.math.jhu.edu/~mtohanea/M421L1.pdf](http://www.math.jhu.edu/~mtohanea/M421L1.pdf)), diakses pada 05 Maret 2015.
- Vries, G., Hillen, T., Lewis, M., Müller, J., Schönfisch, M. 2006. *A Course in Mathematical Biology: Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods*. Alberta:SIAM.
- Widowati, & Sutumin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. (Online). (<http://eprints.undip.ac.id/27446/1/184-BA-MIPA-2007.pdf>), diakses 10 Desember 2014.

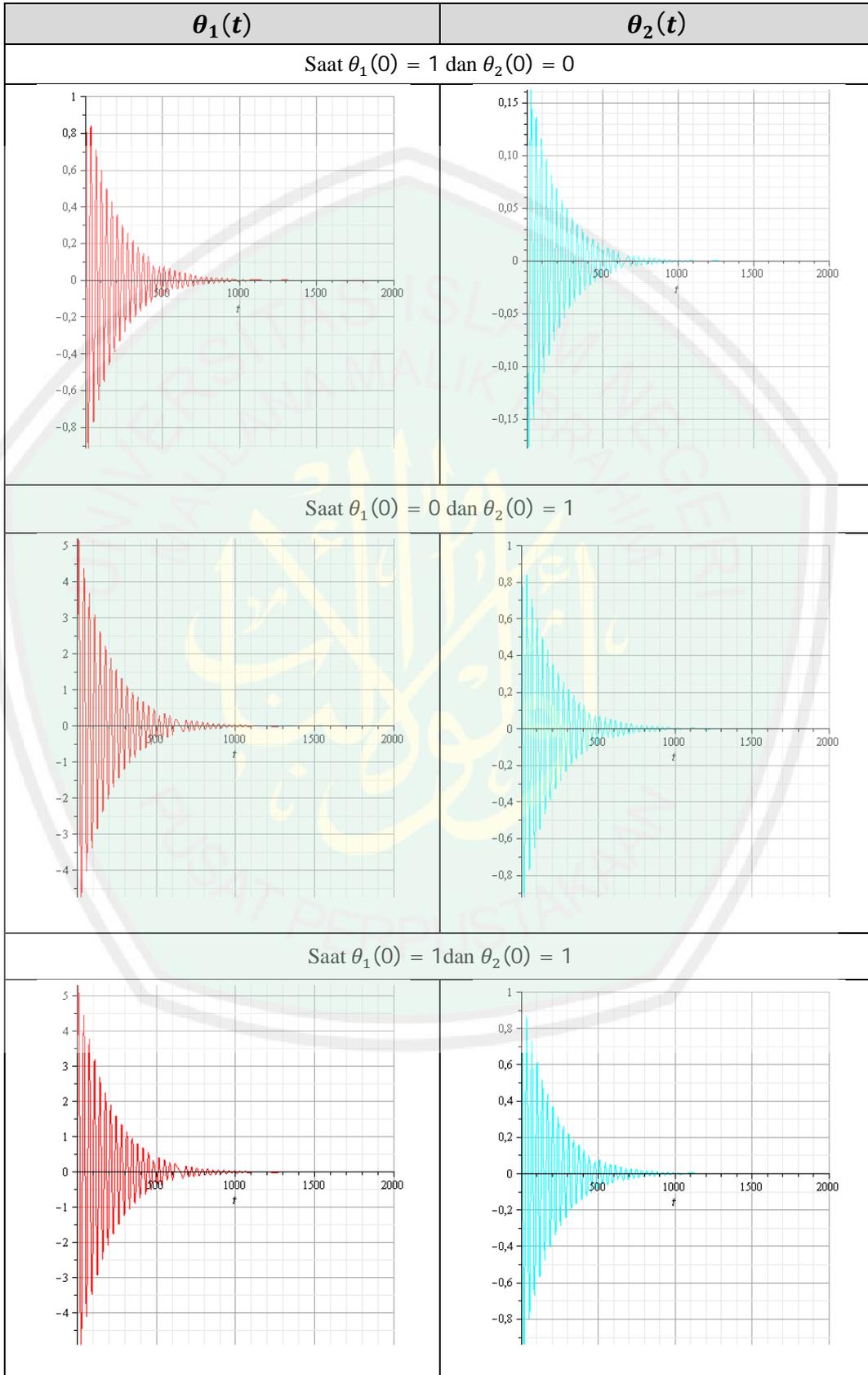
Lampiran 1: Grafik  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  Nilai Eigen Real Berbeda Homogen dengan Berbagai Nilai Awal



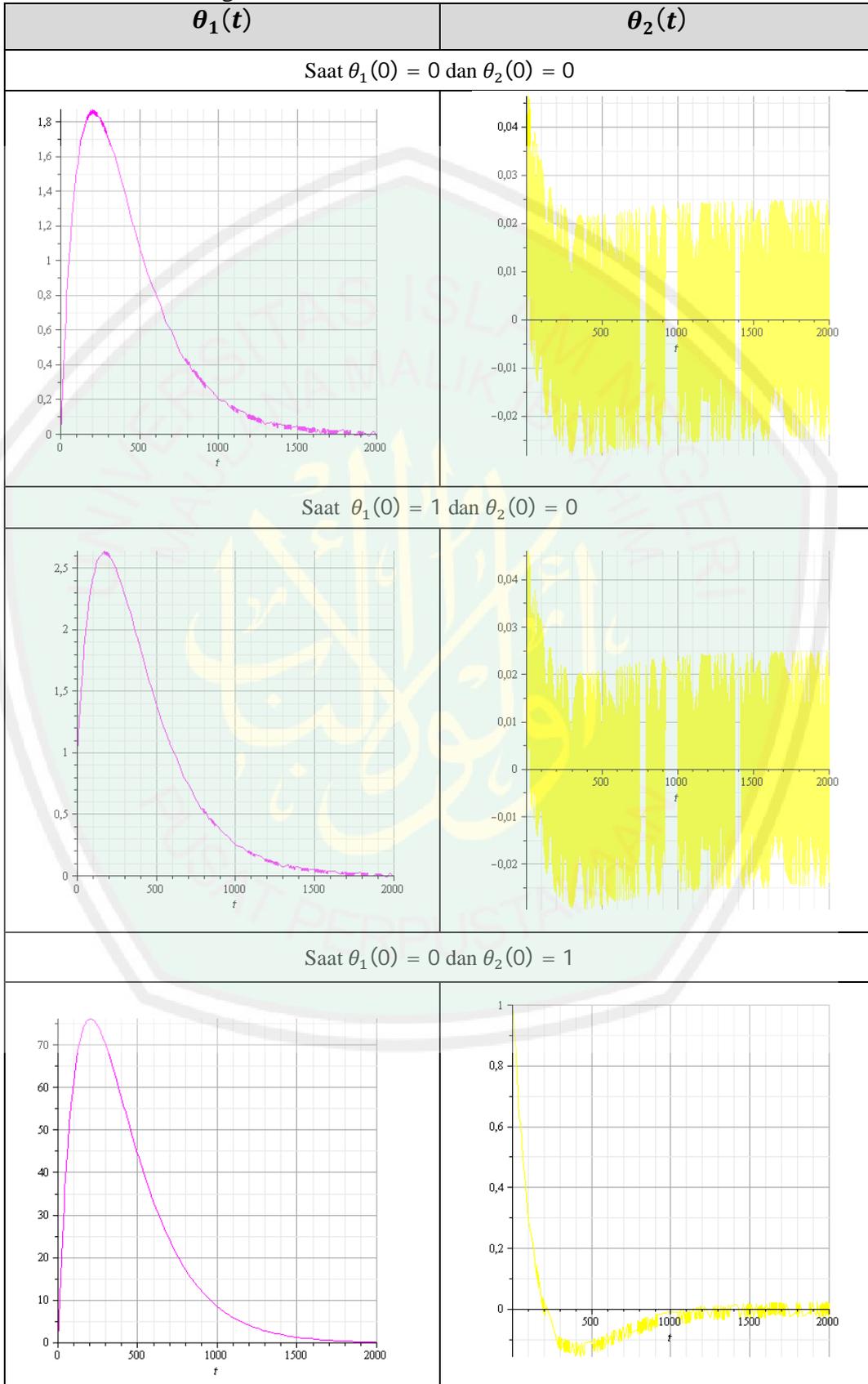
Lampiran 2: Grafik  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  Nilai Eigen Real Berulang Homogen dengan Berbagai Nilai Awal



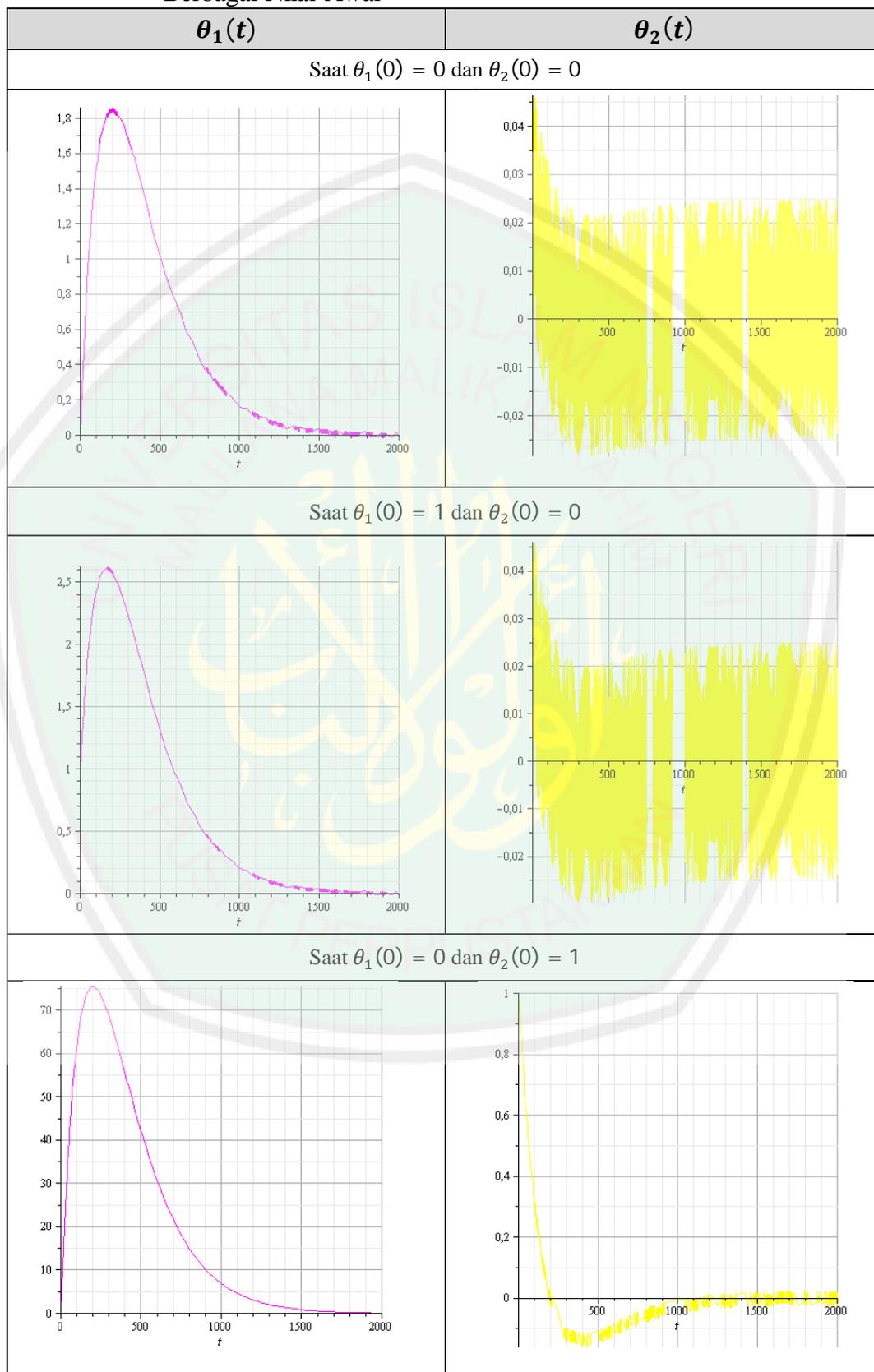
Lampiran 3: Grafik  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  Nilai Eigen Kompleks Homogen dengan Berbagai Nilai Awal



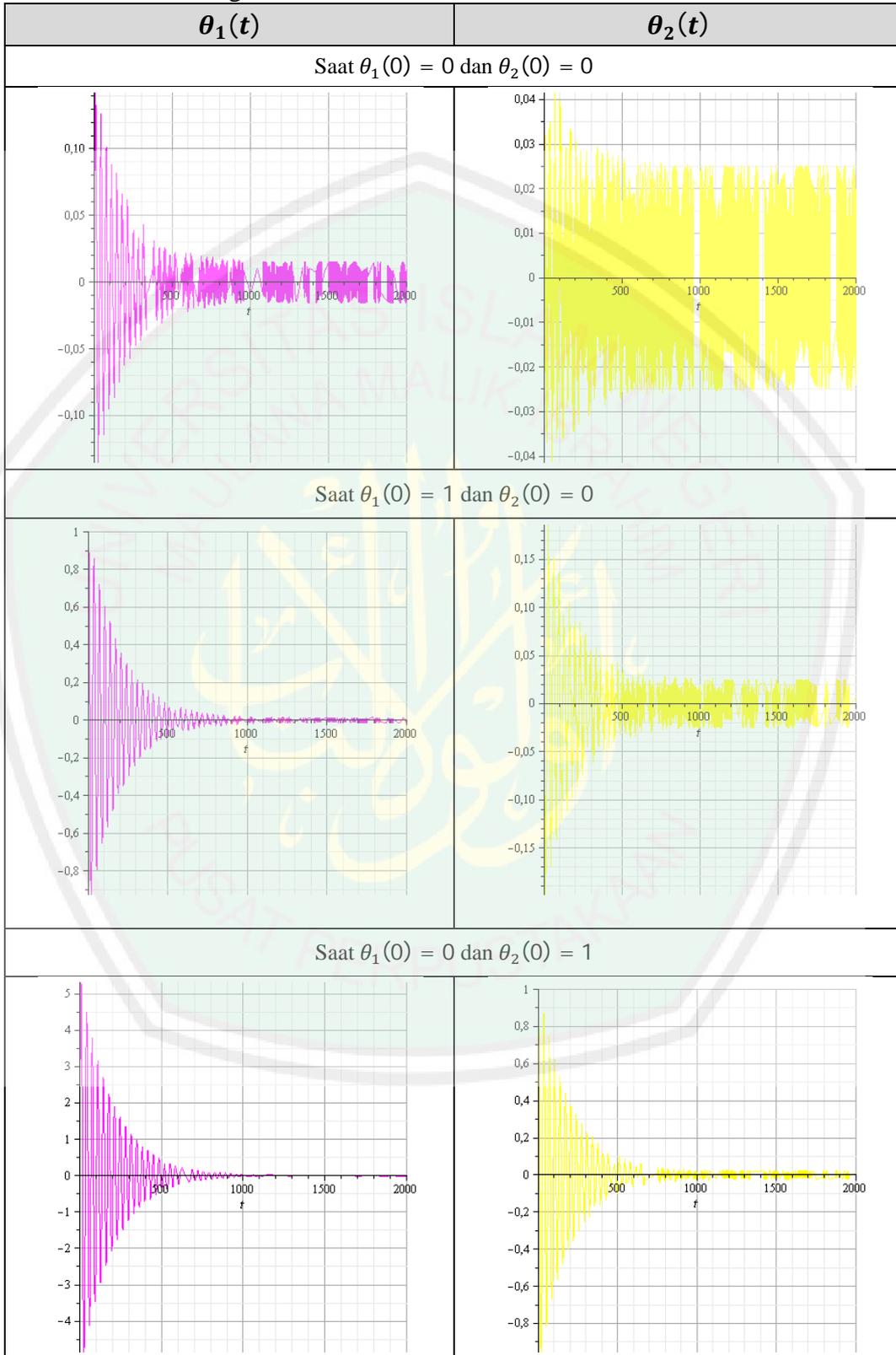
Lampiran 4: Grafik  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  Nilai Eigen Real Berbeda Tak Homogen dengan Berbagai Nilai Awal



Lampiran 5: Grafik  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  Nilai Eigen Real Berulang Tak Homogen dengan Berbagai Nilai Awal



Lampiran 6: Grafik  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  Nilai Eigen Kompleks Tak Homogen dengan Berbagai Nilai Awal



## Lampiran 7 : Progam *Maple* untuk Menggambar Grafik Solusi dan Potret Fase Kasus Nilai Eigen Real Berbeda

```

> restart : K := 3.75 : m := 757300000 : delta := 0.01 :
> theta_10 := 1.2 : theta_20 := 0 :
> C1 := (2 * theta_20 + (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) + delta) * theta_10) / (2 * sqrt(delta^2 - 24 * K / m)) :
> C2 := (2 * theta_20 - (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) - delta) * theta_10) / (2 * sqrt(delta^2 - 24 * K / m)) :
> P1 := C1 * exp(( -delta + (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * t) + C2 * exp(( -delta - (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * t) :
> P2 := ( -delta + (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * C1 * exp(( -delta + (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * t) + ( -delta - (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * C2 * exp(( -delta - (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * t) :
> with(plots) :
plot(P1, t = 0 .. 2000, color = red, thickness = 1, gridlines = true) : plot(P2, t = 0 .. 2000, color = cyan, thickness = 1, gridlines = true) :
#a := plot(P1, t = 0 .. 2000, color = magenta, thickness = 1) : b := plot(P2, t = 0 .. 2000, color = cyan, thickness = 3) : display([a, b], gridlines = true) :

> sys := [theta_2, -6 * K / m * theta_1 - delta * theta_2] :
> with(plots) :
a := fieldplot(sys, theta_1 = -1.3 .. 1.3, theta_2 = -0.005 .. 0.005, grid = [10, 10], arrows = SLIM, axes = normal, color = red) :
b := plot([P1, P2, t = 0 .. 2000], color = blue) :
display([a, b]) :

Grafik Solusi Nonhomogen Nilai Eigen Real Berbeda
> restart : K := 3.75 : m := 657300000 : delta := 0.01 : beta := 0.04 : mu := 1.6 :
> theta_10 := 1.2 : theta_20 := 0 :
> C1 := (2 * theta_20 + (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) + delta) * theta_10) / (2 * sqrt(delta^2 - 24 * K / m) * (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) * (4 * mu^2 + (delta - sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2) * (4 * mu^2 + (delta + sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2))) + (4 * beta * mu * (24 * K / m - 4 * mu^2) + delta * beta * mu * delta * (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) - delta)) / (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) * (4 * mu^2 + (delta - sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2) * (4 * mu^2 + (delta + sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2)) :
> C2 := (2 * theta_20 - (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) - delta) * theta_10) / (2 * sqrt(delta^2 - 24 * K / m) * (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) * (4 * mu^2 + (delta - sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2) * (4 * mu^2 + (delta + sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2))) + (4 * beta * mu * (24 * K / m - 4 * mu^2) + delta * beta * mu * delta * (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) - delta)) / (sqrt(delta^2 - 24 * K / m) * (4 * mu^2 + (delta - sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2) * (4 * mu^2 + (delta + sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2)) :
> P1 := C1 * exp(( -delta + (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * t) + C2 * exp(( -delta - (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * t) + (4 * beta * ((delta^2 - (delta^2 - 24 * K / m) - 4 * mu^2) * sin(mu * t) - 4 * mu * delta * cos(mu * t)) / ((4 * mu^2 + (delta - sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2) * (4 * mu^2 + (delta + sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2))) :
> P2 := ( -delta + (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * C1 * exp(( -delta + (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * t) + ( -delta - (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * C2 * exp(( -delta - (delta^2 - 24 * K / m)^(1/2) ) / 2 * t) + (4 * beta * ((delta^2 - (delta^2 - 24 * K / m) - 4 * mu^2) * mu * cos(mu * t) + 4 * mu^2 * delta * sin(mu * t)) / ((4 * mu^2 + (delta - sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2) * (4 * mu^2 + (delta + sqrt(delta^2 - 24 * K / m))^2))) :
> with(plots) :
plot(P1, t = 0 .. 2000, color = magenta, thickness = 1, gridlines = true) :
plot(P2, t = 0 .. 2000, color = yellow, thickness = 1, gridlines = true) :
> #a := plot(P1, t = 0 .. 4000, color = magenta, thickness = 2) : b := plot(P2, t = 0 .. 4000, color = cyan, thickness = 2) : display([a, b], gridlines = true) :
> sys := [theta_2, -6 * K / m * theta_1 - delta * theta_2 + beta * sin(mu * z), 1] :
> with(plots) :
A := array(1..2) : A1 := fieldplot3d(sys, theta_1 = -0.0005 .. 0.0005, theta_2 = -1 .. 1, z = 0 .. 1000, grid = [10, 10, 2], arrows = SLIM, axes = normal, color = red, orientation = [-90, 0]) : A2 := plot([P1, P2, t = 0 .. 1000], labels = [theta_1, theta_2], axes = normal, color = green) :
display(A) :

```

## Lampiran 8 : Progam *Maple* untuk Menggambar Grafik Solusi dan Potret Fase Kasus Nilai Eigen Real Kembar

```

> restart : K := 3.75 : m := 534456000 : delta := 0.01 :
> theta_10 := 1.2 : theta_20 := 0 :
> C_1 := theta_10 :
  C_2 := theta_20 + (delta/2) * theta_10 :
> P1 := C_1 * exp(-delta/2 * t) + C_2 * t * exp(-delta/2 * t) :
  P2 := -delta/2 * C_1 * exp(-delta/2 * t) + (-delta/2 * t + 1) * C_2 * exp(-delta/2 * t) :
> with(plots) :
  plot(P1, t = 0 .. 2000, color = red, thickness = 1, gridlines = true) : plot(P2, t = 0 .. 2000, color = cyan, thickness = 1, gridlines = true) :
> #a := plot(P1, t = 0 .. 2000, color = magenta, thickness = 1) : b := plot(P2, t = 0 .. 2000, color = cyan, thickness = 1) : display([a, b], gridlines = true) :
> sys := [theta_2, -6 * K / m * theta_1 - delta * theta_2] :
> with(plots) :
  a := fieldplot(sys, theta_1 = -1.3 .. 1.3, theta_2 = -0.005 .. 0.005, grid = [10, 10], arrows = SLIM, axes = normal, color = red) :
  b := plot([P1, P2], t = 0 .. 2000, color = blue) :
  display([a, b]) :

```

**Grafik Solusi Homogen Nilai Eigen Berulang**

```

> restart : K := 3.75 : m := 534456000 : delta := 0.01 : beta := 0.04 : mu := 1.6 :
> theta_10 := 1.2 : theta_20 := 0 :
> C_1 := theta_10 + beta * (16 * mu * delta / (delta^2 + 4 * mu^2)^2) :
  C_2 := theta_20 + (delta/2) * theta_10 + beta * (4 * mu / (delta^2 + 4 * mu^2) + (8 * mu * delta / (delta^2 + 4 * mu^2)^2)) :
> P1 := exp(-delta/2 * t) * (C_1 + C_2 * t) + beta * ( (4 * mu * t / (delta^2 + 4 * mu^2) - 16 * mu * delta / (delta^2 + 4 * mu^2)^2) * cos(mu * t) + (4 * (delta^2 - 4 * mu^2) / (delta^2 + 4 * mu^2)^2 - 2 * delta * t / (delta^2 + 4 * mu^2)) * sin(mu * t) + t / (mu^2 + 4) * (delta/2 * sin(mu * t) - mu * cos(mu * t)) ) :
  P2 := exp(-delta/2 * t) * (-delta/2 * C_1 + (-delta/2 * t + 1) * C_2) + beta * ( (4 * mu * t / (delta^2 + 4 * mu^2) - 16 * mu * delta / (delta^2 + 4 * mu^2)^2) * (-delta/2) * cos(mu * t) + (4 * (delta^2 - 4 * mu^2) / (delta^2 + 4 * mu^2)^2 - 2 * delta * t / (delta^2 + 4 * mu^2)) * (-delta/2) * sin(mu * t) + (-delta/2 * t + 1) / (mu^2 + 4) * (delta/2 * sin(mu * t) - mu * cos(mu * t)) ) :
> with(plots) :
  plot(P1, t = 0 .. 2000, color = magenta, thickness = 1, gridlines = true) :
  plot(P2, t = 0 .. 2000, color = yellow, thickness = 1, gridlines = true) :
> #a := plot(P1, t = 0 .. 4000, color = magenta, thickness = 2) : b := plot(P2, t = 0 .. 4000, color = cyan, thickness = 2) : display([a, b], gridlines = true) :
> sys := [theta_2, -6 * K / m * theta_1 - delta * theta_2 + beta * sin(mu * z), 1] :
> with(plots) :
  A := array(1..2) : A_1 := fieldplot3d(sys, theta_1 = -0.0005 .. 0.0005, theta_2 = -1 .. 1, z = 0 .. 1000, grid = [10, 10, 2], arrows = SLIM, axes = normal, color = red, orientation = [-90, 0]) : A_2 := plot([P1, P2], t = 0 .. 1000, labels = [theta_1, theta_2], axes = normal, color = green) :
  display(A) :

```

**Grafik Solusi Nonhomogen Nilai Eigen Berulang**

Lampiran 9 : Progam *Maple* untuk Menggambar Grafik Solusi dan Potret Fase Kasus Nilai Eigen Kompleks

```

> restart : K := 3.75 : m := 657.3 : delta := 0.01 :
> theta_10 := 1.2 : theta_20 := 0 :
> C1 := theta_10 :
C2 := (2 * theta_20 + delta * theta_10) /
sqrt((24 * K / m - delta^2)) :
> P1 := exp(-delta/2 * t) * (C1 * cos(sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) + C2 * sin(sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t)) :
P2 := exp(-delta/2 * t) * ((C2 * sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) - C1 * delta) * cos(sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) - (C1 * sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) + C2 * delta) * sin(sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t)) :
> with(plots) :
plot(P1, t = 0 .. 2000, color = red, thickness = 1, gridlines = true), plot(P2, t = 0 .. 2000, color = cyan, thickness = 1, gridlines = true);
#a := plot(P1, t = 0 .. 100, color = magenta) : b := plot(P2, t = 0 .. 100, color = cyan) : display([a, b], gridlines = true);

> sys := [theta_2, -delta * K / m * theta_1 - delta * theta_2] :
> with(plots) :
a := fieldplot(sys, theta_1 = -1.5 .. 1.5, theta_2 = -5 .. 5, grid = [10, 10], arrows = SLIM, axes = normal, color = red) :
b := plot([P1, P2], t = 0 .. 20, color = blue) :
display([a, b]);

```

**Grafik Solusi Nonhomogen Nilai Eigen Kompleks**

```

> restart : K := 3.75 : m := 657.3 : delta := 0.01 : beta := 0.04 : mu := 1.6 :
> theta_10 := 1.2 : theta_20 := 0 :
> Q := sqrt((24 * K / m - delta^2)) :
C1 := theta_10 - beta / Q * (2 * delta / (delta^2 + (Q + 2 * mu)^2) - 2 * delta / (delta^2 + (Q - 2 * mu)^2)) :
C2 := (2 * theta_20 + delta * theta_10) / Q + beta / Q^2 * (2 * Q^2 + 4 * Q * mu - 2 * Q^2 - 4 * Q * mu) / (delta^2 + (Q + 2 * mu)^2 * delta^2 + (Q - 2 * mu)^2 * delta^2) :
> P1 := exp(-delta/2 * t) * (C1 * cos(sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) + C2 * sin(sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t)) + beta / sqrt((24 * K / m - delta^2)) * cos(sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) *
( (delta/2 * cos((sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) + mu) * t) + (sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) + mu) * sin((sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) + mu) * t) /
( (delta/2)^2 + (sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) + mu)^2 )
- 1 / ( (delta/2)^2 + (sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) - mu)^2 ) * (delta/2 * cos((sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) - mu) * t) + (sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) - mu) * sin((sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) - mu) * t) +
beta / sqrt((24 * K / m - delta^2)) * sin(sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t)
( (delta/2 * sin((sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) + mu) * t) - (sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) + mu) * cos((sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) + mu) * t) /
( (delta/2)^2 + (sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) + mu)^2 )
- 1 / ( (delta/2)^2 + (sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) - mu)^2 ) * (delta/2 * sin((sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) - mu) * t) - (sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) - mu) * cos((sqrt((24 * K / m - delta^2) / 2) * t) - mu) * t) :

```

$$\begin{aligned}
 P2 := & \exp\left(-\frac{\delta}{2} \cdot t\right) \cdot \left( -\frac{C_1 \cdot \delta}{2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot t\right) - \frac{C_1 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot t\right) - \frac{C_2 \cdot \delta}{2} \right. \\
 & \left. \sin\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot t\right) + \frac{C_2 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot t\right) \right) + \left( -\frac{\delta}{2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot t\right) \right. \\
 & \left. - \frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot t\right) \right) \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}} \\
 & \left( \frac{\frac{\delta}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} + \mu\right) \cdot t\right) + \left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} + \mu\right) \cdot \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} + \mu\right) \cdot t\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} + \mu\right)^2} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} - \mu\right)^2} \cdot \left( \frac{\delta}{2} \cdot \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} - \mu\right) \cdot t\right) + \left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} - \mu\right) \cdot \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} - \mu\right) \cdot t\right) \right) \right. \\
 & \left. + \left( -\frac{\delta}{2} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot t\right) + \frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} \cdot t\right) \right) \cdot \frac{\beta}{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}} \right. \\
 & \left( \frac{\frac{\delta}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} + \mu\right) \cdot t\right) - \left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} + \mu\right) \cdot \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} + \mu\right) \cdot t\right)}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} + \mu\right)^2} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} - \mu\right)^2} \cdot \left( \frac{\delta}{2} \cdot \sin\left(\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} - \mu\right) \cdot t\right) - \left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} - \mu\right) \cdot \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\frac{24 \cdot K}{m} - \delta^2}}{2} - \mu\right) \cdot t\right) \right) \right. \\
 & \left. \left. \right) \right) :
 \end{aligned}$$

```

> with(plots):
  plot(P1, t = 0..2000, color = magenta, thickness = 1, gridlines = true); plot(P2, t = 0..2000, color = yellow, thickness = 1, gridlines = true);
  # a := plot(P1, t = 0..100, color = magenta); b := plot(P2, t = 0..100, color = cyan); display([b, a], gridlines = true);

> sys := [theta2, -delta*K/m * theta1 - delta*theta2 + beta * sin(mu*z), 1];

> with(plots):
  A := array(1..2): A1 := fieldplot3d(sys, theta1 = -1.5..1.5, theta2 = -5..5, z = 0..1, grid = [10, 10, 2], arrows = SLIM, axes = normal, color = red,
  orientation = [-90, 0]): A2 := plot([P1, P2, t = 0..20], labels = [theta1, theta2], axes = normal, color = green);
  display(A);
  
```