ANALISIS MODEL ANTRIAN
SINGLE CHANNEL – MULTI PHASE

SKRIPSI

Oleh:
LILIK MASLAHAH
NIM. 06510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

ANALISIS MODEL ANTRIAN
SINGLE CHANNEL – MULTI PHASE

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
LILIK MASLAHAH
NIM. 06510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

ANALISIS MODEL ANTRIAN
SINGLE CHANNEL – MULTI PHASE

SKRIPSI

Oleh:
LILIK MASLAHAH
NIM. 06510006

Telah disetujui untuk diuji

Tanggal: 26 Maret 2011

Dosen Pembimbing I,	**Dosen Pembimbing II,**
Drs. H. Turmudzi, M.Si	**Abdul Aziz, M.Si**
NIP.19571005 198203 1 006	**NIP. 19760318 200604 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS MODEL ANTRIAN
SINGLE CHANNEL – MULTI PHASE

SKRIPSI

Oleh:
LILIK MASLAHAH
NIM. 06510006

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 02 April 2011

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
2. Ketua	: Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	( )
3. Sekretaris	: Drs. H. Turmudzi, M.Si NIP: 19571005 198203 1 006	( )
4. Anggota	: Abdul Aziz, M.Si NIP: 19760318 200604 1 002	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Lilik Maslahah

NIM : 06510006

Jurusan : Matematika

Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknolog

Judul Penelitian : Analisis Model Antrian *Single Channel – Multi Phase*

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 26 Maret 2011

Yang membuat pernyataan,

Lilik Maslahah
NIM. 06510006

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦

"Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, dan sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(QS: Alam Nasyrah: 5-6)

" Bersabar adalah cahaya "

"Kesuksesan yang diraih tergantung pada besarnya usaha yang dilakukan"

PERSEMBAHAN

Sebagai Bakti dan kasih sayang penulis,

skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Ayahanda dan ibunda tercinta:

Asan dan Sugianti yang telah Mengasuh, merawat, mendidik, dan

memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan tak

henti-hentinya mencurahkan kasih sayangnya.

dan,

Ayunda tersayang:

Luluk Mufidah, S.Si

yang selalu memberikan dukungan moril dan spirituil.

KATA PENGANTAR

ٱلرَّحِيمِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱللَّهِ بِسْمِ

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT. yang telah melimpahkan Rahmat, Taufik, Hidayah, dan Inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan maksimal. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan keharibaan junjungan nabi besar Muhammad SAW yang telah memberikan petunjuk dan bimbingan kepada umatnya ke jalan yang telah diridhoi oleh Allah SWT.

Dengan segala kerendahan hati, penulis ucapkan terima kasih yang tak terhingga dan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudzi, M.Si dan Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing, yang selalu meluangkan waktu, tenaga, dan fikiran untuk membimbing penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Ayahanda dan Ibunda tercinta dan tersayang, Asan dan Sugianti yang telah mengasuh, merawat, mendidik, dan memberikan kasih sayang penuh yang

selama ini belum dapat penulis balas, serta Ayunda Luluk Mufidah, S.Si. yang selalu menjadi motivasi bagi penulis.

6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah dengan ikhlas memberikan bekal ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Zainullah, Munif, Dedi Irfansyah, Hadi Nur Kholis dan Ahmad Rodhi Gibran Al-Farros terima kasih atas segala bantuan dan motivasinya.
8. Teman-teman terbaik penulis, Enbie Rahmania, Fahmi Abdul Halim, Ratna Tri Yuli Susanti, Lia Fitrotul Chusna, Faridatun Nasikah dan teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2006, terima kasih atas segala pengalaman dan kenangan yang telah kalian berikan.
9. Teman-teman Dahlia dan semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, syukron katsir atas keikhlasan dan bantuannya.

Semoga Allah SWT memberikan balasan kebaikan yang berlipat ganda atas segala kasih sayang, bantuan, dorongan, dan kebijaksanaan yang diberikan kepada penulis.

Akhirnya dengan mengharap ridha dari Allah SWT semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah khazanah ilmu pengetahuan bagi pembaca. Amin...

Malang, 26 Maret 2011

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

ABSTRAK

Maslahah, Lilik. 2011. *Analisis Model Antrian Single Channel – Multi Phase*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudzi, M.Si
(II) Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: Antrian, distribusi kedatangan, distribusi pelayanan

Salah satu topik permasalahan dalam teori riset operasi adalah masalah antrian. Mengantri atau menunggu merupakan hasil keacakan dalam operasional pelayanan fasilitas. Menunggu di dalam matematika terapan dapat di identikkan dengan suatu proses antrian. Proses antrian dapat ditemui pada beberapa fasilitas pelayanan umum dimana masyarakat atau barang akan mengalami proses antrian dari kedatangan, memasuki antrian, menunggu, hingga proses pelayanan berlangsung. Masalah yang sering timbul dari keadaan tersebut adalah ketidaknyamanan para pelanggan karena harus menghabiskan waktu yang cukup lama untuk mengantri. Oleh karena itu waktu merupakan sumber daya yang sangat berharga, maka efisiensi dalam pelayanan pada waktu-waktu tertentu merupakan topik penting untuk dianalisis.

Metode penelitian yang digunakan adalah *library research* yang meliputi mengkaji sumber-sumber yang membahas masalah antrian dan menganalisis model *Single Channel-Multi Phase* yakni mengalisis distribusi kedatangan dan distribusi pelayanan yang ada dalam model *Single Channel-Multi Phase*.

Model antrian *Single Channel-Multi Phase* adalah model antrian yang terdiri dari satu antrian dan beberapa pelayanan. Komponen model *Single Channel-Multi Phase* ini terdiri dari kedatangan, antrian, dan pelayanan. Pola kedatangan pada model ini adalah berdistribusi Poisson yakni $P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, untuk $x = 1,2,3,\ldots$. Sedangkan pola pelayanannya berdistribusi Eksponensial yaitu $P_i = \int_{x_{ai}}^{x_{bi}} \mu e^{-\mu t}\,dt = e^{-\mu x a_i} - e^{-\mu x b_i}$. Sistem antrian pada model *Single Channel-Multi Phase* ini menggunakan sistem saluran tunggal $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ dan tahapan untuk aplikasinya yaitu harus mempunyai sebuah data terlebih dahulu. Setelah data diperoleh, maka data tersebut ditabulasikan ke dalam tabel-tabel frekuensi sehingga dapat dihitung jumlah kejadian dalam berbagai katagori, kemudian mencari uji kecocokan untuk menguji distribusi kedatangan dan distribusi pelayanan dengan menggunakan uji Chi Kuadrat, dan yang terakhir adalah menganalisa sistem antrian dengan menggunakan karakteristik antrian sistem saluran tunggal $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$.

ABSTRACT

Maslahah, Lilik. 2011. *Analisis Model Antrian Single Channel–Multi Phase*. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Drs H Turmudzi, M.Si
(II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: queue, arrival distribution, service distribution.

One of the topics in the theory of operations research is the queue problems. Queuing is the result of randomness in the operation of service facilities.Waiting in applied mathematics can be identify with a process queue. Queues can be found in some public service facilities where people or goods will pass the queue process of arrival, entered the queue, waiting, until the last service. For example in motor vehicle service, customers who come directly to take a queue number, then waited until their vehicle serviced. Problems often arise from these circumstances is the customer's inconvenience of having to spend a long time to wait in line. Even the rejection and cancellation often occurs. Rejection occurs because the system queue is full-capacity. The cancellation occurred because customers leave the system due to certain reasons, such as the queue was too long, the internal necessity of customers and others. Therefore, time is a precious resources, the efficiency in service at certain times is an important topic for analyzed.

The research method used is a research library that includes to examine the references that discuss about queue and analyze the model of Single Channel - Multi Phase, namely to analyze the arrival distribution and services distribution that existing in model of Single Channel - Multi Phase.

Queues model of Single Channel Multi Phase is queues model that composed of a single queue and multiple services. The component of Single Channel-Multi Phase models consists of arrival, queuing, and service. The arrival patterns of this model are Poisson distributed, namely $P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$, for $x = 1,2,3,...$ and service patterns of this model are Exponential distributed $P_i = \int_{x_{ai}}^{x_{bi}} \mu e^{-\mu t}\,dt = e^{-\mu x a_i} - e^{-\mu x b_i}$. The service system on the model of Single Channel - Multi Phase uses a single channel system $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ and we must have a data to pass the steps to their appication. After we obtain the data, then we will tabulating the data into frequency tables that can be calculated the number of events in various categories, then look for a match test to examine the arrival distribution and service distribution by using Chi Square, and the last is to analyze queuing systems by using the characteristic queue of single-channel system $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu pengetahuan dan teknologi pada zaman sekarang ini semakin menguasai dunia, maka untuk dapat menguasai ilmu pengetahuan dan teknologi yang sempurna harus didasari dengan Al-Qur'an dan Hadits sebagai pegangan dalam kehidupan sehari-hari. Manusia diciptakan oleh Allah didunia salah satunya adalah sebagai khalifah. Sebagai seorang khalifah atau insan biasa jika hidupnya tidak berbekal ilmu pengetahuan baik agama maupun umum, maka akan mudah tersesat. Allah tidak hanya mengutus manusia menuntut ilmu berbasis agama yang hanya untuk kepentingan akhirat saja, akan tetapi ilmu-ilmu yang sifatnya umum juga sangat dibutuhkan guna keberhasilan dunia dan akhirat. Ini artinya menuntut ilmu yang sifatnya umum setara dengan ilmu yang berbasis agama. Sebagaimana hadits Rasulullah SAW:

مَنْ أَرَادَ الدُّنْيَا فَعَلَيْهِ بِا لْعِلْمِ وَ مَنْ أَرَادَ الْآخِرَةَ فَعَلَيْهِ بِا لْعِلْمِ وَمَنْ أَرَادَهُمَا فَعَلَيْهِ بِا لْعِلْمِ

Artinya: *"Barang siapa yang menghendaki kehidupan dunia maka dengan ilmu, barang siapa yang menghendaki kehidupan akhirat maka dengan ilmu, dan barang siapa yang menghendaki keduanya, maka dengan ilmu pula" (HR. Bukhori Muslim).*

Menurut Al-Qur'an, dalam bukunya Pasya (2004) ilmu pengetahuan dapat diperoleh melalui berbagai macam cara. Diantaranya melalui dua indra yang sangat mahal dan penting bagi manusia untuk mengetahui dan mendapatkan ilmu yang bermacam-macam. Kedua indra tersebut yaitu *sama'* (pendengaran) yang biasanya bersifat verbal, dan *bashar* (penglihatan) yang biasanya menghasilkan ilmu pengetahuan yang bersifat observasi atau eksperimen, sebagaimana tertulis pada Al-Qur'an surat Al-Mulk (67) : 23 sebagai berikut:

قُلْ هُوَ ٱلَّذِىٓ أَنشَأَكُمْ وَجَعَلَ لَكُمُ ٱلسَّمْعَ وَٱلْأَبْصَٰرَ وَٱلْأَفْـِٔدَةَ ۖ قَلِيلًا مَّا تَشْكُرُونَ ٢٣

Artinya: *"Katakanlah: "Dia-lah yang menciptakan kamu dan menjadikan bagi kamu pendengaran, penglihatan dan hati". (tetapi) amat sedikit kamu bersyukur."*

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan-persamaan yang seimbang dan rapi. Sungguh tidak salah jika dinyatakan bahwa Allah adalah Maha Matematis (Abdussakir, 2007: 79-80). Allah berfirman dalam surat Al-Qomar (54) ayat 49 dan surat Al-Furqon (25) ayat 2 yaitu sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَىْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ٤٩

Artinya: *"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".*

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ
فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ٢

Artinya: *"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak. Tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan-Nya, Dia telah menciptakan segala sesuatu dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya".*

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, hitungannya, dan rumus atau persamaannya. Menurut Abdussakir (2007), seorang ahli matematika atau fisika tidak membuat rumus sedikitpun, tetapi mereka hanya menemukan rumus atau persamaan tersebut. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan ciptaan manusia, tetapi telah disediakan oleh Allah dan manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika.

Menurut Abdussakir (2007), mempelajari matematika harus sesuai dengan paradigma *Ulul Albab*. Ulul Albab adalah orang-orang yang mau menggunakan fikirannya, mengambil faedah dan hidayah dari-Nya, menggambarkan keagungan Allah dan mau mengingat hikmah akal dan keutamaannya. Oleh karena itu manusia disuruh memikirkan tentang kejadian di langit dan di bumi beserta rahasia-rahasia dan manfaat-manfaat yang terkandung didalamnya yang menunjukkan pada ilmu yang sempurna, hikmah tertinggi dan kemampuan yang utuh. Sebagaimana firman Allah dalam surat Ali Imran (3) ayat 90:

إِنَّ ٱلَّذِينَ كَفَرُوا۟ بَعْدَ إِيمَـٰنِهِمْ ثُمَّ ٱزْدَادُوا۟ كُفْرًا لَّن تُقْبَلَ تَوْبَتُهُمْ وَأُو۟لَـٰٓئِكَ هُمُ ٱلضَّآلُّونَ ﴿٩٠﴾

Artinya: *"Sesungguhnya orang-orang kafir sesudah beriman, kemudian bertambah kekafirannya, sekali-kali tidak akan diterima taubatnya dan mereka itulah orang-orang yang sesat".*

Salah satu ciri seorang Ulul Albab adalah yang menguasai ilmu matematika, karena tidak mungkin kita mempelajari alam semesta secara detail tanpa menggunakan perhitungan matematis. Akan tetapi kemampuan intelektual semata tidak cukup untuk belajar matematika, karena itu perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdussakir, 2007: 24).

Matematika adalah ilmu pengetahuan yang diperoleh dengan cara berfikir dan bernalar. Dengan matematika memungkinkan ilmu pengetahuan mengalami perkembangan dari tahap kualitatif kepada tahap kuantitatif. Beberapa disiplin ilmu yang lain terutama ilmu sosial mengalami kesukaran dalam perkembangan yang bersumber pada problem teknis dalam pengukuran. Kesukaran tersebut teratasi dengan menggunakan tahap-tahap kuantitatif melalui matematika (Ekaningsih, 1998: 3).

Selain dalam bidang sosial, menurut Ekaningsih (1998: 3) matematika juga dapat diterapkan dalam bidang lain sehingga matematika dikatakan sebagai induk dari berbagai dimensi ilmu. Penggunaan matematika tersebut antara lain dalam bidang ekonomi dapat digunakan untuk mengetahui laba, rugi, diskon, pajak, dan komisi. Dalam bidang sosial digunakan untuk mengetahui laju pertumbuhan penduduk, angka kelahiran, angka kematian, dan jumlah penduduk. Dalam bidang teknik digunakan untuk mengetahui berat beton dan besarnya arus listrik pada suatu kumparan. Dalam bidang pertanian digunakan untuk mengetahui perbandingan pupuk yang dapat diberikan pada tanaman tertentu. Dan lain sebagainya.

Ilmu matematika menjadi induk dari berbagai dimensi ilmu ini disebabkan karena banyaknya cabang matematika. Salah satunya adalah Riset Operasi, yang mana didalamnya juga terdapat subbab tentang Teori Antrian. Teori Antrian ditemukan dan dikembangkan oleh A. K. Erlang, seorang insinyur dari Denmark yang bekerja pada perusahaan telepon di Kopenhagen pada tahun 1909. Erlang melakukan eksperimen tentang fluktuasi permintaan fasilitas telepon yang berhubungan dengan *automatic dialing equipment*, yaitu peralatan penyambungan telepon secara otomatis. Dalam waktu-waktu yang sibuk operator sangat kewalahan untuk melayani para penelepon secepatnya, sehingga para penelepon harus antri menunggu giliran (Aminuddin, 2005: 169). Menurut Supranto (1987), Persoalan aslinya Erlang hanya memperlakukan perhitungan keterlambatan (*delay*) dari seorang operator, kemudian pada tahun 1917 penelitian dilanjutkan untuk menghitung kesibukan beberapa operator. Setelah perang dunia kedua, hasil penelitian Erlang diperluas penggunaannya antara lain dalam teori antrian. Dalam teori antrian terdapat beberapa model, salah satunya adalah model *Single Channel - Multi Phase* (satu antrian beberapa pelayanan). Model seperti ini terjadi dibeberapa tempat antara lain di Samsat penetapan pajak kendaraan bermotor, di Bengkel Yamaha, dan lain-lain.

Salah satu fenomena dalam kehidupan sehari-hari yang sering tejadi adalah fenomena penungguan. Fenomena ini biasa terjadi apabila kebutuhan akan suatu pelayanan melebihi kapasitas yang tersedia untuk penyelenggaraan pelayanan itu. Hal ini dapat dilihat ketika terjadi baris tunggu dari konsumen, komponen atau mesin-mesin yang sedang menunggu pelayanan, karena pada saat itu bagian pelayanan sedang melayani yang lainnya, sehingga tidak mampu melayani pada saat tersebut. Suka atau tidak suka, menunggu adalah bagian dari kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu dianjurkan untuk selalu bersabar dalam menghadapi keadaan apapun, termasuk situasi seperti itu. Hal ini dijelaskan dalam firman Allah surat Al-Baqarah (2) ayat 155 dan Ali Imran (3) ayat 200, yaitu sebagai berikut:

وَلَنَبْلُوَنَّكُم بِشَيْءٍ مِّنَ ٱلْخَوْفِ وَٱلْجُوعِ وَنَقْصٍ مِّنَ ٱلْأَمْوَٰلِ وَٱلْأَنفُسِ وَٱلثَّمَرَٰتِ ۗ وَبَشِّرِ ٱلصَّٰبِرِينَ ﴿١٥٥﴾

Artinya: *"Dan sungguh akan kami berikan cobaan kepadamu, dengan sedikit ketakutan, kelaparan, kekurangan harta, jiwa dan buah-buahan. dan berikanlah berita gembira kepada orang-orang yang sabar.*

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱصْبِرُوا۟ وَصَابِرُوا۟ وَرَابِطُوا۟ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُفْلِحُونَ ﴿٢٠٠﴾

Artinya: *"Hai orang-orang yang beriman, Bersabarlah kamu dan kuatkanlah kesabaranmu dan tetaplah bersiap siaga (di perbatasan negerimu) dan bertakwalah kepada Allah, supaya kamu beruntung".*

Fenomena menunggu merupakan hasil keacakan dalam operasional pelayanan fasilitas. Secara umum kedatangan para pelanggan dan waktu pelayanan tidak diketahui secara pasti. Karena jika dapat diketahui, pengoperasian sarana tersebut dapat dijadwalkan sedemikian rupa sehingga akan mengurangi munculnya antrian pelayanan. Penjadwalan tersebut tidak dapat dilakukan karena kesibukan dan waktu luang dari para pelanggan berbeda-beda, sehingga terjadilah antrian.

Selain itu antrian juga dapat disebabkan oleh kebutuhan akan layanan yang melebihi kemampuan (kapasitas) pelayanan atau fasilitas layanan, sehingga pengguna fasilitas yang tiba tidak dapat segera mendapat layanan disebabkan kesibukan layanan. Pada banyak hal, tambahan fasilitas pelayanan dapat diberikan untuk mengurangi antrian atau untuk mencegah timbulnya antrian. Akan tetapi biaya karena memberikan pelayanan tambahan, akan menimbulkan pengurangan keuntungan mungkin sampai di bawah tingkat yang dapat diterima. Sebaliknya, sering timbulnya antrian yang panjang akan mengakibatkan hilangnya pelanggan.

Menunggu di dalam matematika terapan dapat diidentikkan dengan suatu proses antrian. Dalam kehidupan sehari-hari selalu dihadapkan pada persoalan tentang antrian, baik skala kecil maupun skala besar yang membutuhkan penyelesaian serta solusi yang optimal. Antrian dapat ditemui pada beberapa fasilitas pelayanan umum dimana masyarakat atau barang akan mengalami proses antrian dari kedatangan, memasuki antrian, menunggu, hingga proses pelayanan berlangsung. Pada sebuah tempat penservisan kendaraan bermotor misalnya, pelanggan yang datang langsung dapat mengambil nomor antrian, kemudian menunggu sampai kendaraannya diservis.

Masalah yang sering timbul dari keadaan tersebut adalah ketidaknyamanan para pelanggan karena harus menghabiskan waktu yang cukup lama untuk mengantri. Bahkan penolakan dan pembatalan sering terjadi. Penolakan terjadi karena pada sistem antrian kapasitasnya sudah penuh. Pembatalan terjadi karena pelanggan meninggalkan sistem akibat alasan tertentu, seperti terlalu panjangnya antrian, kepentingan intern pelanggan dan lain-lain. Oleh karena itu waktu merupakan sumber daya yang sangat berharga, maka efesiensi dalam pelayanan pada waktu-waktu tertentu merupakan topik penting untuk dianalisis.

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka penulis tertarik untuk mengadakan penelitian dengan judul: **"Analisis Model Antrian *Single Channel–Multi Phase*."**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diatas, maka diperoleh suatu rumusan masalah yaitu bagaimana analisis model antrian *Single Channel–Multi Phase*?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan analisis model antrian *Single Channel–Multi Phase.*

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Analisis sifat-sifat dalam model *Single Channel–Multi Phase*.
2. Model *Single Channel–Multi Phase* terdiri dari satu loket pendaftaran dan satu loket pelayanan yang disumsikan multi disiplin.
3. Untuk contoh penerapan adalah di Yamaha Blimbing Motor Malang.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini yaitu:

1. Bagi Penulis.

   Penelitian ini merupakan kesempatan bagi penulis untuk menambah informasi dan memperluas wawasan pengetahuan tentang teori-teori yang diterima di bangku kuliah khususnya tentang teori Antrian.

2. Bagi Mahasiswa Matematika.

   Sebagai motivasi untuk mengembangkan dan menerarapkan ilmu matematika ke berbagai bidang keilmuan lain.

3. Bagi Pembaca

   Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang aplikasi dan pengembangan ilmu matematika

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan sebuah penelitian kepustakaan (*library research*) yaitu melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi menggunakan teknik dokumenter, artinya data-data sumber penelitian dikumpulkan dari dokumen-dokumen, baik yang berupa buku, artikel, jurnal, majalah, maupun karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan topik atau permasalahan yang diteliti.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji sumber-sumber yang membahas masalah antrian.
2. Menganalisis model *Single Channel–Multi Phase* yang meliputi:
   a. Komponen-komponen dalam model *Single Channel–Multi Phase.*
   b. Analisis distribusi kedatangan dan distribusi pelayanan.
   c. Tahapan-tahapan dalam Model *Single Channel–Multi Phase* dan aplikasinya.

1.7 Sistematika Penulisan

Secara garis besar sistematika skripsi ini dibagi menjadi 3 bagian, yaiu bagian pendahuluan, bagian isi dan bagian akhir.

Bagian pendahuluan skripsi memuat halaman judul, halaman persetujuan, halaman pengesahan, halaman pernyataan keaslian tulisan, motto, halaman persembahan, kata pengantar, daftar isi, daftar gambar,daftar tabel dan abstrak.

Bagian isi dibagi menjadi 4 BAB, yaitu sebagai berikut:

1. BAB I Pendahuluan

   Pada bab pendahuluan ini dikemukakan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

2. BAB II Kajian Pustaka

   Kajian Pustaka berisi tentang teori-teori yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya seperti fungsi kepadatan peluang dan nilai harapan, beberapa fungsi distribusi, dan masalah antrian.

3. BAB III Pembahasan

   Bab ini membahas mengenai analisis model antrian *Single Channel–Multi Phase*.

4. BAB IV Penutup

   Penutup berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan dan saran.

Bagian akhir dari skripsi ini adalah daftar pustaka.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Kepadatan Peluang dan Nilai Harapan

Sebelum membahas tentang fungsi kepadatan peluang dan nilai harapan, akan diberikan terlebih dahulu definisi tentang ruang sampel dan variabel acak, yang menjadi dasar dalam memahami konsep fungsi kepadatan peluang.

Menurut Supranto (2000: 2), Sampel adalah sebagian dari populasi. Jika n adalah jumlah elemen sampel dan N adalah jumlah populasi, maka $n < N$ (n lebih kecil dari N). Dalam penelitian ini, sampel yang digunakan adalah orang yang mengantri. Variabel acak yang terjadi pada model Single Channel – Multi Phase adalah Variabel acak Diskrit dan kontinu, yakni pola kedatangan berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan mengikuti distribusi Eksponensial (Jay dan Barry, 2006: 660). Menurut Supramono dan Sugiarto (1993: 29), Variabel acak adalah suatu kondisi yang menunjukkan bahwa nilai terjadinya suatu peristiwa ditentukan oleh proses kebetulan, bukan dikendalikan oleh peneliti. Pada model Single Channel – Multi Phase dikatakan acak karena kedatangan para pelanggan dan waktu pelayanann tidak diketahui secara pasti, kesibukan dan waktu luang dari para pelanggan berbeda-beda.

Menurut Bain dan Engelhard (1992: 40), Jika himpunan semua kemungkinan nilai dari variabel random, X, adalah himpunan yang dapat dihitung (misalnya $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$) maka X disebut variabel random diskrit. Suatu fungsi

$$f(x) = P(X = x) \qquad x = x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{2.1}$$

dimana $P(X)$ didefinisikan sebagai peluang (probabilitas) dari kejadian X. Nilai dari $f(x)$ pada titik x menunjukkan peluang bahwa peristiwa kebetulan X terjadi sama dengan x. Yang menunjukkan peluang untuk masing-masing kemungkinan nilai x disebut fungsi kepadatan peluang diskrit. Pada model Single Channel – Multi Phase, fungsi kepadatan peluang diskrit digunakan pada pola kedatangan (Jay dan Barry, 2006: 660). Suatu fungsi, $f(x)$, adalah fungsi kepadatan peluang diskrit jika dan hanya jika memenuhi 2 syarat berikut:

1. $f(x) \geq 0$ (2.2)
2. $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$ (2.3)

maksudnya, nilai dari peluang x itu harus bernilai positif dan jumlah dari data diskrit harus sama dengan 1.

Suatu variabel random, X, disebut suatu variabel random kontinu jika terdapat suatu fungsi, $f(x)$, yang disebut fungsi kepadatan peluang dari X, sedemikian sehingga fungsi kepadatan kumulatif dapat ditunjukkan sebagai:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \tag{2.4}$$

pada model Single Channel – Multi Phase diterapkan pada waktu pelayanan (Jay dan Barry, 2006: 663).

Apabila X peubah acak kontinu, fungsi densitas peluang $f(x)$ mempunyai paling banyak sejumlah hingga diskontinuitas pada setiap interval hingganya. Artinya, (1) fungsi distribusi $F(x)$ selalu kontinu; (2) turunan dari

$F(x)$, dengan asumsi x ada, akan sama dengan $f(x)$ pada setiap titik dimana $f(x)$ kontinu. Dengan kata lain, $F'(x) = f(x)$ pada setiap titik kontinu dalam $f(x)$.

Menurut Rosenkrantz (1997: 43), Suatu variabel acak x dikatakan kontinu jika fungsi distribusinya adalah sebuah fungsi kontinu dimana:

1. $f(x) \geq 0$ (2.5)
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (2.6)

maksudnya, nilai dari peluang x itu harus bernilai positif dan jumlah dari peluang data kontinu harus sama dengan 1. Nilai harapan dari variabel acak diskrit X dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$, dinotasikan sebagai $E(x)$ dan didefinisikan sebagai

$$E(x) = \sum_{x} xf(x) \tag{2.7}$$

Nilai harapan dari variabel acak kontinu X dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$, dinotasikan sebagai $E(x)$ dan didefinisikan sebagai

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) \tag{2.8}$$

2.2 Beberapa Fungsi Distribusi

Telah diketahui bahwa veriabel acak dapat dibedakan menjadi 2 jenis yaitu diskrit dan kontinu. Berikut adalah contoh varibel acak diskrit dan kontinu:

1. Distribusi Poisson

Menurut Sjamsul (1994: 14), Suatu variabel acak X, dengan parameter $\lambda > 0$, dan mempunyai fungsi kepadatan peluang diskrit dengan bentuk:

$$f(x,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \; x = 1,2,3,\ldots \text{dan } \lambda > 0 \qquad (2.9)$$

dikatakan mempunyai fungsi peluang poisson. Suatu peristiwa dikatakan mengikuti distribusi poisson jika:

a. Kemungkinan terjadinya peristiwa dalam suatu waktu adalah rata-rata kedatangan yang dinotasikan sebagai λ.

b. Banyaknya peristiwa yang terjadi dalam suatu waktu tertentu adalah tidak tergantung pada banyaknya peristiwa yang terjadi dalam satuan waktu yang lain.

c. Jumlah peristiwa rata-rata yang terjadi pada suatu satuan waktu adalah sebanding terhadap ukuran satuan waktu tersebut.

Pada distribusi peluang poisson nilai $\mu = \sigma^2 = \lambda$. Sebaran ini berparameter tunggal yaitu λ. Peubah acak X yang mempunyai sebaran ini dilambangkan sebagai X ~Poisson (λ).

Menurut Walpole dan Myers, (1995: 152), distribusi Poisson adalah distribusi peluang peubah acak Poisson X yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam selang waktu tertentu yang dinyatakan dengan persamaan:

$$p(x;\mu) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!}, \qquad x = 0,1,2,\ldots\ldots \text{ dan } \mu > 0 \qquad (2.10)$$

dimana: μ = rata-rata banyaknya sukses dalam waktu tertentu

e = 2,71828

Dengan nilai tengah $E(X) = \mu$ dan $Var(X) = \mu$. Dapat dibuktikan sebagai berikut:

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$=\sum_{x=1}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

$Misalkan\ ,\ \ y=x-1\, maka\ diperoleh\ \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{e^{-\mu}\mu^{y}}{y!}=\mu$

$$E(X^{2})=\sum_{x=0}^{\infty} x^{2}\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}\{x(x-1)+x\}e^{-\mu}\frac{\mu^{x}}{x!}$$

$$=\sum_{x=2}^{\infty} e^{-\mu}\frac{\mu^{x}}{(x-2)!}+\mu=\mu^{2}+\mu$$

$$Var(X)=E(X^{2})-\{E(X)^{2}\}$$

$$=\mu^{2}+\mu-\mu^{2}$$

$$=\mu$$

Pendugaan parameter μ untuk sebaran poisson adalah

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (2.11)$$

dimana: x_i : data pengamatan ke-i

n : banyaknya pengamatan

$\bar{x}$: rata-rata pengamatan

2. Distribusi Eksponensial

Menurut Kakiay (2004: 22), Suatu variabel acak kontinu, X, dengan parameter $\lambda > 0$, dan X mempunyai fungsi kepadatan peluang (pdf) dengan bentuk:

$$f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \ \lambda > 0 \tag{2.12}$$

Jika variabel acak kontinu X, berdistribusi Eksponensial maka nilai $\mu = \frac{1}{\lambda}$ dan $\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

2.3 Masalah Antrian

2.3.1 Gambaran Umum Teori Antrian

Menurut Siagian (1987: 390), antrian adalah suatu garis tunggu dari pelanggan yang memerlukan layanan dari satu atau lebih fasilitas pelayanan. Dalam model *Single Channel–Multi Phase*, antrian yang terjadi dalam keadaan seimbang (*Steady State*). Sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan dan pemrosesan masalahnya. Unit yang memerlukan pelayanan disebut pelanggan (*customer*) dan yang melayani disebut pelayan (*server*) (Bronson, 1991: 308).

Pada dasarnya sistem antrian berpijak pada pelayanan dan pelanggan (*customer*) yang saling menunjang dan memenuhi keperluannya masing-masing. Suatu proses antrian adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan seorang pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam suatu barisan (antrian) jika semuanya sibuk, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tertentu. Sebuah sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan pada pelanggan dan pemrosesan masalahnya (Bronson, 1991: 308). Fenomena baris-baris penungguan ini merupakan suatu fenomena biasa yang terjadi apabila kebutuhan akan suatu pelayanan melebihi kapasitas yang tersedia untuk menyelenggarakan pelayanan (Dimyati dan Dimyati, 2004). Selanjutnya dikatakan bahwa studi matematis kejadian atau gejala garis tunggu tersebut di atas disebut teori antrian.

Secara umum komponen dasar antrian dapat dibagi dalam 5 kategori, yaitu:

1. Pola Kedatangan

   Pola kedatangan adalah cara individu-individu dari populasi memasuki sistem (Bronson, 1991: 308). Menurut Kakiay (2004), Pola kedatangan para pelanggan biasanya dicirikan oleh waktu antar kedatangan, yaitu antara kedatangan dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Para pelanggan datang dengan tingkat kedatangan yang konstan ataupun acak/random (yaitu berapa banyak pelanggan-pelanggan per periode waktu) (Subagyo, 1983: 257).

   Kedatangan pelanggan diasumsikan sebagai proses random (terjadi secara acak), artinya k.edatangan dapat terjadi setiap saat dan waktu kedatangan berikutnya tidak bergantung pada kedatangan sebelumnya. Menurut Levin, dkk (2002), variabel acak adalah suatu variabel yang nilainya bisa berapa saja sebagai hasil dari percobaan acak. Variabel acak dapat berupa diskrit atau kontinu. Bila variabel acak hanya dimungkinkan mempunyai beberapa nilai saja, maka ia berupa variabel diskrit. Sebaliknya nilainya dimungkinkan bervariasi pada rentang tertentu, ia dikenal sebagai variabel acak kontinu.

Pola kedatangan pelanggan mengikuti distribusi poisson, artinya banyaknya pelanggan yang datang (untuk memperoleh layanan) sampai pada waktu tertentu mengikuti distribusi poisson (Supranto, 1987). Distribusi poisson berkenaan dengan probabilitas terjadinya suatu kedatangan yang bebas terhadap kedatangan sebelumnya atau sesudahnya. Asumsi tentang poisson menunjukkan bahwa kedatangan pelanggan sifatnya acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar λ (lamda). Panjangnya interval waktu antar dua kedatangan pelanggan sebesar $\frac{1}{\lambda}$. Hal ini dikarenakan jika tingkat kedatangan mengikuti distribusi poisson dengan tingkat kedatangan rata-rata λ, maka waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial negatif dengan waktu antar kedatangan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$. Distribusi eksponensial negatif juga merupakan perwakilan dari distribusi Poisson, tetapi menjelaskan waktu antar kedatangan dan menentukan bahwa waktu antar kedatangan ini benar-benar acak (Jay dan Barry, 2006: 660).

Distribusi probabilitas poisson adalah salah satu dari pola-pola kedatangan yang paling umum bila kedatangan-kedatangan didistribusikan secara random. Hal ini terjadi karena distribusi poisson menggambarkan jumlah kedatangan per unit waktu bila sejumlah besar variabel-variabel random mempengaruhi tingkat kedatangan.

Apabila pola kedatangan individu-individu mengikuti suatu distribusi poisson, maka waktu antar kedatangan atau *interval time* adalah random dan mengikuti suatu distribusi eksponensial (Subagyo, dkk., 1988). Menurut Dimyati (1999) dalam sistem antrian terdapat unit-unit yang memerlukan pelayanan menolak memasuki sistem antrian jika antrian itu terlalu panjang yang lebih dikenal dengan istilah b*alking* (penolakan). Menurut Mulyono (2002: 276) pelanggan yang tak sabar dan memutuskan untuk meninggalkan sistem sebelum dilayani dinamakan *reneging*.

2. Pola Pelayanan

Pola pelayanan digambarkan sebagai kecepatan (jumlah) pelanggan yang dilayani tiap unit satuan waktu atau sebagai satuan waktu yang dibutuhkan untuk melayani pelanggan. Dalam model *Single Channel – Multi Phase*, setiap pelayanan diasumsikan mempunyai mutu pelayanan dan fasilitas yang sama.

Menurut Kakiay (2004: 11), Pola pelayanan biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan (*service time*), yaitu waktu yang dibutuhkan seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan pada fasilitas pelayanan. Sedangkan menurut Bronson (1991: 310), waktu pelayanan dapat bersifat deterministik (diketahui secara pasti), atau berupa variabel acak yang distribusi probabilitasnya dianggap telah diketahui dan pelayanan dapat dilakukan dengan satu atau lebih fasilitas pelayanan yang masing-masing dapat mempunyai satu atau lebih saluran atau tempat pelayanan.

3. Mekanisme Pelayanan

Mekanisme pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih pelayan dan satu atau lebih fasilitas pelayanan. Selain itu cara pelayanan yang diselesaikan terkadang merupakan proses random (Mulyono, 2004: 272).

Menurut Siagian (1987: 392), ada 3 aspek yang harus diperhatikan dalam mekanisme palayanan:

a. Tersedianya Pelayanan

Mekanisme pelayanan tidak selalu tersedia setiap saat. Misalnya dalam pertunjukan bioskop, loket penjualan tiket masuk hanya di buka pada waktu tertentu antara satu pertunjukan dengan pertunjukan berikutnya. Sehingga pada saat loket di tutup, mekanisme pelayanan terhenti.

b. Kapasitas Sistem

Kapasitas sistem adalah jumlah maksimum pelanggan, mencakup yang sedang dilayani dan yang berada dalam antrian, yang dapat ditampung oleh fasilitas pelayanan pada saat yang sama. Sebuah sistem yang tidak membatasi jumlah pelanggan di dalam fasilitas pelayanannya memiliki kapasitas tak terhingga, sedangkan suatu sistem yang membatasi jumlah pelanggan memiliki kapasitas berhingga.

Kapasitas dari mekanisme pelayanan diukur berdasarkan jumlah langganan yang dapat dilayani secara bersama-sama. Kapasitas pelayanan tidak selalu sama untuk setiap saat, ada yang tetap, tetapi ada juga yang berubah-rubah. Karena itu fasilitas yang mempunyai satu saluran disebut saluran tunggal atau sistem pelayanan tunggal dan fasilitas yang mempunyai lebih dari satu saluran ganda atau pelayanan ganda.

c. Lamanya Pelayanan

Lamanya pelayanan adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang langganan atau satuan-satuan. Ini harus dinyatakan secara pasti. Oleh karena itu, waktu pelayanan boleh tetap dari waktu ke waktu untuk semua pelanggan atau boleh juga juga berupa variabel acak.

Menurut Subagyo, dkk. (1988: 260), waktu yang digunakan untuk melayani individu-individu dalam suatu sistem disebut waktu pelayanan. Waktu ini mungkin konstan, tetapi juga sering acak. Bila waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial atau distribusi acaknya, maka tingkat pelayanan (yaitu unit/jam) akan mengikuti suatu distribusi poisson.

4. Kapasitas Sistem

Kapasitas sistem adalah jumlah maksimum pelanggan, mencakup yang sedang dilayani dan yang berada dalam antrian,yang dapat ditampung oleh fasilitas pelayanan pada saat yang sama. Sebuah sistem yang tak membatasi jumlah pelanggan didalam fasilitas pelayanannya memiliki kapasitas tak terhingga, sedangkan suatu sistem yang membatasi jumlah pelanggan memiliki kapasitas terbatas (Bronson, 1991: 310).

5. Disiplin Antrian

Menurut Fien (2004: 185), disiplin antrian merupakan pedoman keputusan yang digunakan untuk menyeleksi individu-individu yang memasuki antrian untuk dilayani terlebih dahulu. Sedangkan menurut Kakiay

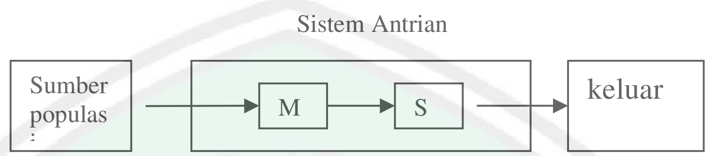
(2004: 12), disiplin antrian adalah aturan dimana para pelanggan dilayani, atau disiplin antrian yang memuat urutan para pelanggan menerima pelayanan. Dalam model *Single Channel – Multi Phase* ini, displin pelayanannya diasumsikan menggunakan disiplin pelayanan *First-Come First-Served (FCFS)* atau *First-In First-Out (FIFO)* artinya, lebih dulu datang, lebih dulu dilayani (keluar). Menurut Siagian (1987), ada 4 bentuk disiplin pelayanan yang biasa digunakan, yaitu:

a. *First-Come First-Served (FCFS)* atau *First-In First-Out (FIFO)* artinya, lebih dulu datang, lebih dulu dilayani (keluar).
b. *Last-Come First-Served (LCFS)* atau *Last-In First-Out (LIFO)* artinya, yang tiba terakhir yang lebih dulu keluar.
c. *Service* I*n Random Order (SIRO)* artinya, panggilan didasarkan pada peluang secara random, tidak soal siapa yang lebih dulu tiba.
d. *Priority Service (PS)* artinya, prioritas pelayanan diberikan kepada pelanggan yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan pelanggan yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu.

Menurut Subagyo (1983: 262), empat model antrian yang umum terjadi, adalah:

1. *Single Channel - Single Phase* atau satu antrian satu pelayanan

Seperti yang ditunjukkan dalam gambar 2.1, sistem ini adalah yang paling sederhana. *Single Channel* berarti bahwa hanya ada satu jalur untuk memasuki sistem pelayanan atau ada satu fasilitas pelayanan. *Single Phase* berarti bahwa hanya ada satu pelayanan atau sekumpulan tunggal operasi yang dilaksanakan. Setelah menerima pelayanan, individu keluar dari sistem. Contoh model struktur ini adalah tempat praktik umum seorang dokter.

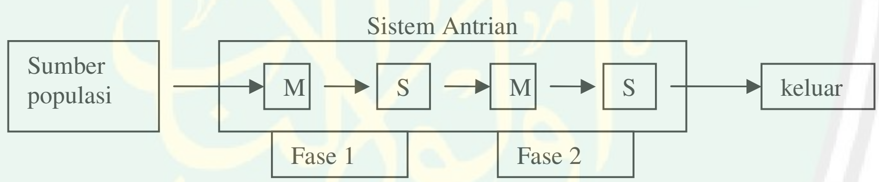


Keterangan: M = Antrian
S = Fasilitas Pelayanan

Gambar 2.1 Model *Single Channel – Single Phase*

2. *Single Channel – Multi Phase* atau satu antrian beberapa pelayanan seri

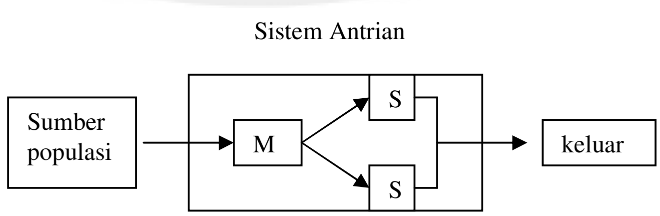
   Model ini ditunjukkan dalam gambar 2.2. Istilah *MultiPhase* menunjukkan ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan (dalam phase-phase). Sebagai contoh : pencucian mobil.



Gambar 2.2 Model *Single Channel – MultiPhase*

3. *Multi Channel - Single Phase* atau satu antrian beberapa pelayanan tunggal

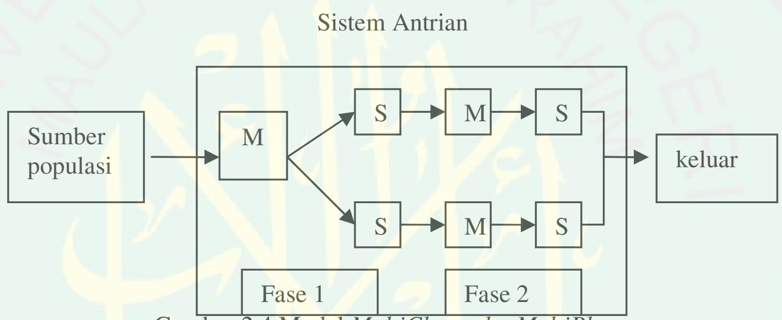
   Sistem ini terjadi jika dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal, seperti yang ditunjukkan dalam gambar 2.3. Sebagai contoh model ini adalah pelayanan potong rambut oleh beberapa tukang potong.



Gambar 2.3 Model *MultiChannel – Single Phase*

4. *Multi Channel – Multi phase* atau beberapa antrian beberapa pelayanan parallel.

Sistem ini ditunjukkan dalam gambar 2.4. Sebagai contoh, herregistrasi para mahasiswa di Universitas. Setiap sistem-sistem ini mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap, sehingga lebih dari satu individu dapat dilayani pada suatu waktu. Pada umumnya, jaringan antrian ini terlalu kompleks untuk dianalisa dengan teori antrian, sehingga simulasi lebih sering digunakan untuk menganalisa sistem ini.



Gambar 2.4 Model *MultiChannel – MultiPhase*

Banyaknya saluran (*channel*) dalam sistem antrian adalah jumlah pelayanan paralel yang tersedia. Banyaknya tahap (*phase*) menunjukkan jumlah pelayanan berurutan yang harus dilalui oleh setiap kedatangan.

Subagyo (1983: 264), mengatakan bahwa model antrian dapat dinotasikan dengan notasi Kendall-Lee, notasi ini sering dipergunakan karena beberapa alasan. Diantaranya, karena notasi tersebut merupakan alat yang efisien untuk mengidentifikasi tidak hanya model-model antrian, tetapi juga asumsi-asumsi yang harus dipenuhi. Bentuk umum notasi Kendall, (a / b / c):(d / e / f) dengan:

$a \equiv$ distribusi kedatangan (*arrival distribution*), yaitu jumlah kedatangan pertambahan waktu.

$b \equiv$ distribusi waktu pelayanan atau keberangkatan, yaitu selang waktu antara satuan – satuan yang dilayani (berangkat).

$c \equiv$ jumlah saluran pelayanan paralel dalam sistem (dimana c = 1, 2, 3, ..., ∞).

$d \equiv$ disiplin pelayanan, seperti FCFS, LCFS, SIRO.

$e \equiv$ jumlah maksimum yang diizinkan dalam sistem.

$f \equiv$ jumlah pelanggan yang ingin memasuki sistem sebagai sumber.

Keterangan :

1. Untuk huruf a dan b, dapat digunakan kode – kode berikut sebagai pengganti :

   $M \equiv$ Distribusi kedatangan atau keberangkatan dari proses Poisson. Dapat juga distribusi kedatangan dan keberangkatan dari distribusi Eksponensial.

   $D \equiv$ konstanta atau *deterministic inter arrival* atau *service time* (waktu pelayanan).

   $G \equiv$ Distribusi umum dari keberangkatan atau waktu pelayanan.

2. Untuk huruf c, dipergunakan bilangan bulat positif yang menyatakan jumlah pelayanan paralel.

3. Untuk huruf d, dipakai kode – kode pengganti :

   FIFO atau *FCFS* = *First – In, First – Out* atau *First – Come, First –Served.*

   LIFO atau *LCFS* = *Last – In, First – Out* atau *Last – Come, First –Served.*

   SIRO = *Service In Random Order.*

   G D = *General Service Disciplint.*

4. Untuk huruf e dan f, dipergunakan kode N (menyatakan jumlah terbatas atau tak berhingga satuan – satuan dalam sistem antrian dan populasi masukan).

2.3.2 Keadaan *Steady-State* dalam Teori Antrian

Suatu hal yang sangat penting dalam teori antrian adalah apakah sistem mencapai suatu keadaan seimbang atau dinamakan *Steady-State*. Ini berarti diasumsikan bahwa ciri-ciri operasi seperti panjang antrian dan rata-rata waktu menunggu akan memiliki nilai konstan setelah sistem berjalan selama suatu periode waktu.

Analisa antrian meliputi studi perilaku sistem sepanjang waktu. Jika suatu sistem antrian mulai berjalan, maka keadaan atau jumlah unit dalam sistem akan sangat dipengaruhi oleh keadaan (*state*) awal dan waktu yang telah dilalui. Tetapi bila berlangsung terus menerus keadaan akan independen terhadap state awal tersebut dan juga terhadap waktu yang dilaluinya. Teori antrian cenderung memusatkan pada keadaan *steady-state* (Dimyati dan Dimyati, 2004).

Kondisi *steady-state* dalam suatu sistem antrian dapat tercapai apabila sistem antrian tersebut *independent* terhadap keadaan awal, dan juga terhadap waktu yang telah dilaluinya. Ukuran-ukuran kinerja yang terpenting dari situasi antrian setelah tercapai kondisi *steady-state* yang dipergunakan untuk menganalisis situasi antrian adalah rata-rata banyaknya pelanggan yang menunggu dalam antrian dan rata-rata waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian (W_q).

Elemen-elemen dasar dalam sistem antrian antara lain yaitu:

1. Sumber Masukan (*Input*)

   Menurut Fien (2004:), Sumber masukan adalah pelanggan potensial yang berupa populasi orang, barang, komponen atau kertas kerja yang datang pada sistem untuk dilayani. Sedangkan menurut Dimyati dan Dimyati (2004), suatu karakteristik yang perlu diketahui dari sumber masukan adalah ukurannya (jumlahnya), yaitu jumlah total unit yang memerlukan pelayanan dari waktu ke waktu.

2. Sistem Antrian

   Pada sistem antrian pola kedatangan individu-individu diasumsikan sebagai waktu antar kedatangan, yaitu waktu kedatangannya antara dua individu yang berurutan dan memasuki sistem. Bila sumber masukan yang datang dapat langsung masuk pada fasilitas pelayanan, maka segera ia lakukan. Tetapi, bila harus menunggu maka mereka akan membentuk suatu antrian sampai waktunya untuk dilayani.

3. Keluaran (*Exit*)

   Keluaran (*Exit*) adalah aktivitas individu/barang setelah dilayani dari sistem. Setelah mendapatkan pelayanan dengan baik, pelanggan akan segera meninggalkan fasilitas pelayanan. Sesudah keluar, dia mungkin bergabung pada satu diantara kategori populasi. Dia mungkin bergabung dengan populasi asal dan mempunyai probabilitas yang sama untuk memasuki sistem kembali, atau dia mungkin bergabung dengan populasi lain yang mempunyai probabilitas lebih kecil dalam hal kebutuhan pelayanan tersebut kembali (Subagyo, 1983: 265).

Sistem saluran dalam antrian ada dua macam yaitu Sistem saluaran tunggal $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$ dan Sistem saluran ganda $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$. Dalam model Single Channel – Multi Phase ini, sistem saluran yang digunakan adalah sistem saluran tunggal.

1) Sistem saluaran tunggal $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$;

Model $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, berarti bahwa *M pertama* menunjukkan distribusi kedatangan, *M kedua* menunjukkan distribusi pelayanan, 1 menunjukkan jumlah fasilitas pelayanan dalam sistem atau satu saluran, dan *GD* menunjukkan disiplin antriannya.

Pertama-tama diasumsikan bahwa proses kedatangan dengan pelaksanaan pelayanan adalah independent (tidak ada kaitan dalam perhitungannya). Ini berarti rata-rata kedatangan tidak akan berubah-ubah dalam waktu tertentu dan tidak mempengaruhi jumlah satuan dalam antrian pertama pada penguraian pelayanan (Kakiay, 2004: 48).

Menurut Supranto (1987: 397), asumsi yang juga diperlukan didalam pengembangan model antrian adalah bahwa rata-rata kedatangan lebih kecil dari rata-rata pelayanan artinya $\lambda < \mu$ yang berarti $\frac{\lambda}{\mu} < 1$. Sedangkan menurut Sablin dan Stevens (1974), dapat diasumsikan bahwa periode waktu Δt adalah sangat kecil, sehingga $(\Delta t)^2 \to 0$. hal ini berarti yang tidak memenuhi syarat, tidak akan digunakan.

2) Sistem saluran ganda $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$

Model $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$, berarti bahwa *M pertama* menunjukkan distribusi kedatangan, *M kedua* menunjukkan distribusi pelayanan, *c* menunjukkan jumlah fasilitas pelayanan dalam sistem atau saluran ganda, dan *GD* menunjukkan disiplin antriannya.

2.4 Sistem Antrian pada Al-Qur'an

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan hitung menghitung sehingga tidak salah jika kemudian ada yang menyebut ilmu hitung atau *ilmu hisab*. Dalam urusan hitung menghitung ini, Allah SWT adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti. Allah SWT menyebutkan kecepatan perhitungan dan ketelitiannya dalam surat Ali Imran (3) ayat 199:

وَإِنَّ مِنْ أَهْلِ ٱلْكِتَـٰبِ لَمَن يُؤْمِنُ بِٱللَّهِ وَمَآ أُنزِلَ إِلَيْكُمْ وَمَآ أُنزِلَ إِلَيْهِمْ خَـٰشِعِينَ لِلَّهِ لَا يَشْتَرُونَ بِـَٔايَـٰتِ ٱللَّهِ ثَمَنًا قَلِيلًا ۗ أُو۟لَـٰٓئِكَ لَهُمْ أَجْرُهُمْ عِندَ رَبِّهِمْ ۗ إِنَّ ٱللَّهَ سَرِيعُ ٱلْحِسَابِ ﴿١٩٩﴾

Artinya: *"Dan Sesungguhnya diantara ahli Kitab ada orang yang beriman kepada Allah dan kepada apa yang diturunkan kepada kamu dan yang diturunkan kepada mereka sedang mereka berendah hati kepada Allah dan mereka tidak menukarkan ayat-ayat Allah dengan harga yang sedikit. mereka memperoleh pahala di sisi Tuhannya. Sesungguhnya Allah amat cepat perhitungan-Nya."*

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan oleh Allah SWT dengan ukuran –ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 207:79). Ukuran dalam Al-Qur'an dijelaskan dalam surat Al-Qomar (54) ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَىْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: *"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."*

Selain itu juga terdapat dalam surat Al-Furqan (25) ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ
فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."*

Oleh karena itu, sangat penting sekali bagi manusia untuk belajar matematika karena matematika memang ada dalam Al-Qur'an, misalnya tentang penjumlahan, pengurangan, persamaan, ilmu faraidh, dan lain sebagainya. Dengan belajar matematika, selain untuk melatih dan menumbuhkan cara berfikir secara sistematis, logis, analitis, kritis, kreatif, dan konsisten, juga diharapkan dapat menumbuhkan sikap teliti. Dalam hal ini, Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Al-Mukminun (23) ayat 112-114:

قَٰلَ كَمۡ لَبِثۡتُمۡ فِي ٱلۡأَرۡضِ عَدَدَ سِنِينَ ١١٢ قَالُواْ لَبِثۡنَا يَوۡمًا أَوۡ بَعۡضَ يَوۡمٖ فَسۡـَٔلِ
ٱلۡعَآدِّينَ ١١٣ قَٰلَ إِن لَّبِثۡتُمۡ إِلَّا قَلِيلٗاۖ لَّوۡ أَنَّكُمۡ كُنتُمۡ تَعۡلَمُونَ ١١٤

Artinya: *“Allah bertanya: "Berapa tahunkah lamanya kamu tinggal di bumi?" Mereka menjawab: "Kami tinggal (di bumi) sehari atau setengah hari, Maka tanyakanlah kepada orang-orang yang menghitung." Allah berfirman: "Kamu tidak tinggal (di bumi) melainkan sebentar saja, kalau kamu Sesungguhnya mengetahui."*

Ilmu dunia banyak sekali macamnya, salah satunya adalah ilmu maematika. Matematika mempunyai banyak cabang ilmu, diantaranya adalah kalkulus, graf, statistik, riset operasi dan masih banyak lagi. Pada Statistik dijelaskan tentang Peluang, Sebaran, Distribusi, Regresi, dan lain-lain. Sedangkan pada Riset Operasi dijelaskan tentang Simpleks Dual, Antrian dan masih banyak lagi. Pada penelitian ini membahas tentang Antrian yang didalamnya juga terdapat Statistik.

Statistika merupakan cabang matematika yang bekerja pada pengumpulan data, pengolahan data, analisis data, dan penarikan kesimpulan. Kegiatan utama dalam statistik adalah pengumpulan data (Abdussakir, 2007: 147). Dalam hal ini tercantum dalam Al-Qur’an surat *Al-Qamar(54): 52*, yang berbunyi:

وَكُلُّ شَيۡءٖ فَعَلُوهُ فِي ٱلزُّبُرِ ٥٢

Artinya: *“Dan segala sesuatu yang Telah mereka perbuat tercatat dalam buku-buku catatan”*

Mengantri atau menunggu erat kaitannya dengan kehidupan manusia di dunia. Sebagai makhluk ciptaan Allah SWT setiap manusia di dunia pasti mengharapkan kehidupan yang sempurna serta kebahagiaan di dunia dan di akhirat. Akan tetapi kebahagiaan tersebut dapat diraih seseorang melalui proses kehidupan dan ujian serta cobaan dari Allah SWT. Kebahagiaan tersebut akan sangat mendukung kehidupan manusia jika seseorang mensyukuri segala nikmat yang diberikan Allah SWT dan tidak kufur kepada-Nya.

Ujian atau cobaan adalah salah satu ketentuan Allah SWT bagi makhluk-Nya. Cobaan atau ujian ada karena tabiat kehidupan dunia dan hasrat manusia yang tidak akan pernah terlepas dari bencana dan kekejaman yang menimpanya. Cobaan atau ujian dari Allah SWT bisa saja berupa ujian kesabaran dan ketabahan, misalnya ketika kita menunggu giliran dilayani dalam menserviskan motor kita. Sabar berarti menahan diri untuk tidak berkeluh kesah (Al-Qayyim, 2006: 1). Sabar dijelaskan dalam Firman Allah surat Al-Kahfi (18) ayat 28 yang berbunyi:

وَٱصْبِرْ نَفْسَكَ مَعَ ٱلَّذِينَ يَدْعُونَ رَبَّهُم بِٱلْغَدَوٰةِ وَٱلْعَشِيِّ يُرِيدُونَ وَجْهَهُۥ ۖ وَلَا
تَعْدُ عَيْنَاكَ عَنْهُمْ تُرِيدُ زِينَةَ ٱلْحَيَوٰةِ ٱلدُّنْيَا ۖ وَلَا تُطِعْ مَنْ أَغْفَلْنَا قَلْبَهُۥ عَن ذِكْرِنَا
وَٱتَّبَعَ هَوَىٰهُ وَكَانَ أَمْرُهُۥ فُرُطًا ﴿٢٨﴾

Artinya: *"Dan Bersabarlah kamu bersama-sama dengan orang-orang yang menyeru Tuhannya di pagi dan senja hari dengan mengharap keridhaan-Nya; dan janganlah kedua matamu berpaling dari mereka (karena) mengharapkan perhiasan dunia ini; dan janganlah kamu mengikuti orang yang hatinya telah kami lalaikan dari mengingati kami, serta menuruti hawa nafsunya dan adalah keadaannya itu melewati batas."*

Sabar itu membentuk jiwa manusia menjadi kuat dan teguh tatkala menghadapi segala macam ujian atau cobaan. Jiwanya tidak bergoncang, tidak gelisah, dan tidak hilang keseimbangan. Menurut Ummu Asma (2010), kesabaran menjadi kunci dalam menghadapi berbagai masalah kehidupan yang silih berganti. Meski kadang pahit dan getir dalam menjalaninya, tetapi satu hal yang memacu kita untuk terus bersabar adalah buah kesabaran itu sangat manis. Ingatlah bahwa mendung tidak akan selamanya, perlahan matahari akan bersinar lagi. Hujan pun tidak akan selamanya, ada saatnya berhenti dan muncul mentari. Begitu pula dengan kesulitan yang kita hadapi tidak akan selamanya, akan ada kemudahan menyertai karena sesungguhnya janji Allah adalah benar. Hal ini sesuai dengan firman Allah SWT dalam surat Al-Insyirah (94) ayat 5-6 dan surat Al-Baqarah (2) ayat 153:

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ٦

Artinya: *"Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, dan sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"*

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱسۡتَعِينُواْ بِٱلصَّبۡرِ وَٱلصَّلَوٰةِۚ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَ ٱلصَّـٰبِرِينَ ١٥٣

Artinya: *"Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, Sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar."*

Selain kita harus bersabar, kita juga dianjurkan untuk melapangkan buat orang lain. Karena kalau kita melapangkan diri buat orang lain maka Allah juga akan melapangkan jalan buat kita. Hal ini berdasarkan firman Allah SWT dalam surat Al-Mujaadilah (58) ayat 11 yaitu:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَـٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَـٰتٍۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٌ ١١

Artinya: "Hai orang-orang yang beriman apabila kamu dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", Maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", Maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan" (Q.S. Al-Mujaadalah: 11).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Komponen-komponen dalam Model *Single Channel – Multi Phase*

Menurut Kakiay (2004: 10), ada tiga komponen dan tahapan dalam model *Single Channel – Multi Phase*. Masing-masing komponen dalam sistem antrian ini mempunyai karakteristik sendiri-sendiri. Karakteristik dari masing-masing komponen tersebut adalah terdapat kedatangan, antrian dan pelayanan.

1. Kedatangan populasi yang akan dilayani (*calling population*).

Bentuk kedatangan para pelanggan diperhitungkan melalui waktu kedatangan antar kedatangan, yaitu waktu antar dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dalam distribusi poisson, dimana kedatangan bersifat bebas, tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum atau sesudahnya. Kedatangan pelanggan sifatnya acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar *lamda* (λ).

2. Antrian.

Inti dari analisis antrian adalah antri itu sendiri. Timbulnya antrian ini terutama tergantung dari sifat kedatangan dan proses pelayanan. Dalam antrian ini biasanya terdapat beberapa kendala antara lain yaitu masalah waktu, antrian yang panjang, banyaknya loket, dan lain-lain.

3. Fasilitas Pelayanan.

Karakteristik dari fasilitas pelayanan dapat dilihat dari tiga hal yaitu tata letak secara fisik dari sistem antrian, displin antrian, dan waktu pelayanan. Dalam model single channel – multi phase ini, letak fisik dari sistem antrian digambarkan dengan jumlah saluran (jumlah pelayanan) yang lebih dari satu saluran yang beroperasi secara bersamaan. Disiplin antrian dalam model ini adalah first come first server, yakni orang yang lebih dahulu datang akan dilayani terlebih dahulu. Sedangkan waktu pelayanan dalam model ini adalah waktu pelayanan acak, yakni waktu yang dibutuhkan untuk melayani berbeda-beda untuk setiap pelanggan. Pada suatu fasilitas pelayanan, pelanggan akan masuk dalam suatu tempat pelayanan secara tuntas dari servers.

3.2 Analisis Distribusi Kedatangan dan Distribusi Pelayanan

3.2.1 Analisis Distribusi Kedatangan

Distribusi probabilitas variabel acak menggambarkan bagaimana suatu probabilitas didistribusikan terhadap nilai-nilai dari variabel acak tersebut. Menurut Djauhari (1990), misal S merupakan ruang sampel, dan S himpunan bagian dari R. Fungsi X dari S ke dalam R dinamakan peubah acak. Range dari X yakni $A_x = \{x \mid x = X(c), c \in S$ dinamakan ruang peubah acak X atau ruang dari X. Peubah acak X dikatakan diskrit, apabila ruang dari X terbilang. Jika ruang X berupa interval maka peubah acak X dikatakan kontinu.

Menurut Jay dan Barry (2006: 660), distribusi poisson merupakan sebuah distribusi probabilitas diskrit yang sering menjelaskan tingkat kedatangan pada teori antrian. Kedatangan dianggap sebagai kedatangan yang acak apabila kedatangan tersebut tidak terikat satu sama lain dan kejadian kedatangan tersebut tidak dapat diramalkan secara tepat. Banyaknya kedatangan pada setiap unit waktu dapat diperkirakan oleh sebuah disribusi probabilitas yang dikenal sebagai distribusi Poisson (*Poisson distribution*). Hal ini dikarenakan jika tingkat kedatangan mengikuti distribusi poisson dengan tingkat kedatangan rata-rata λ, maka waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial negatif dengan waktu antar kedatangan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$. Distribusi eksponensial negatif juga merupakan perwakilan dari distribusi Poisson, tetapi menjelaskan waktu antar kedatangan dan menentukan bahwa waktu antar kedatangan ini benar-benar acak. Untuk setiap waktu kedatangan, sebuah distribusi poisson yang diskrit dapat ditetapkan dengan menggunakan rumus:

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \text{ untuk } x = 0,1,2,3,4,...$$

dimana $P(x)$ = probabilitas kedatangan sejumlah x

x = jumlah kedatangan per satuan waktu

λ = tingkat kedatangan rata-rata

e = 2,7183 (dasar logaritma)

Hubungan antara λ dengan $\frac{1}{\lambda}$ dijelaskan dalam teorema berikut ini yaitu jika kedatangan mengikuti distribusi poisson maka suatu variabel random waktu antar kedatangan mengikuti distribusi eksponensial negatif. Pembuktiannya yaitu:

$f(t)$ = fungsi densitas probabilitas dari interval waktu t antar pemunculan kejadian yang berturut-turut, $t \geq 0$.

$F(t)$ = fungsi distribusi kuimulatif dari *t*.

jika suatu kumpulan variabel random waktu antar kedatangan berurutan dimisalkan T, maka

$P\{T > t\} = P$ {tidak ada kedatangan dalam waktu t}= $P_0(t) = e^{-\lambda t}$

$$\int_T^\infty f(t)dt = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

atau menggunakan F(t) sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T diperoleh:

$$F(t) = P\{T \le t\} = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (3.1)$$

maka fungsi densitasnya adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{d(1 - e^{-\lambda t})}{dt} = \lambda e^{-\lambda t} \quad (3.2)$$

yang merupakan fungsi densitas dari distribusi eksponensial negatif.

Dengan parameter λ maka fungsi pembangkit momennya diperoleh rata-rata, yaitu:

$$M_T(x) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} f(t)dt \text{ ; } t \text{ kontinu}$$

dan $$M_T(x) = E(e^{tx}) = \sum e^{tx} f(t)dt \text{ ; } t \text{ diskrit}$$

$$M_T(x) = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \lambda e^{tx - \lambda t} dt = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda - x)t} dt$$

$$= \left. \frac{-\lambda e^{-(\lambda - x)t}}{\lambda - x} \right|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - x}$$

$$M_T^{'} = \frac{\lambda}{(\lambda - x)^2} \text{ dan } M_T^{''} = \frac{2\lambda}{(\lambda - x)^3}$$

$E(T)$ diperoleh dari:

$$E(T) = M_{T'}(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(T^2) = M_{T^{"}}(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2}{\lambda^2}$$

sehingga

$$Var(T) = E(T^2) - (E(T))^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \text{ dan } E(T) = \frac{1}{\lambda}$$

Jadi, waktu antar kedatangan yang berurutan mengikuti distribusi eksponensial negatif dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$. Jika waktu antar kedatangan $\frac{1}{\lambda}$ maka jumlah kejadian dalam satu periode waktu tertentu pastilah distribusi Poisson dengan rata-rata kedatangan adalah λ.

Alasan distribusi eksponensial negatif digunakan dalam distribusi waktu antar kedatangan dijelaskan dalam lemma berikut ini yaitu jika A adalah distribusi eksponensial dan semua nilai *t* dan h tidak negatif maka:

$$P(A > t + h \mid A \geq t) = P(A > h) \tag{3.3}$$

Bukti:

$$P(A > h) = \int_h^{\sim} \lambda e^{-\lambda t} = [-e^{-\lambda t}]_h^{\sim} = e^{-\lambda h} \tag{3.4}$$

Kemudian:

$$P(A > t + h \mid A \geq t) = \frac{P(A > t + h \cap A \geq t)}{P(A \geq t)} \tag{3.5}$$

Dari 3.4 maka:

$$P(A > t + h \cap A \geq t) = e^{-\lambda(t+h)} \tag{3.6}$$

dan

$$P(A \geq t) = e^{-\lambda t} \tag{3.7}$$

Sehingga:

$$P(A > t + h \mid A \geq t) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(A > h) \tag{3.8}$$

Hubungan antara distribusi eksponensial dengan distribusi poisson yaitu jika waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial, distribusi probabilitas waktu antar kedatangan terjadi dengan interval sepanjang t dengan teorema berikut yaitu waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial dengan parameter λ, jika dan hanya jika angka kedatangan terjadi sepanjang t diikuti dengan distribusi poisson dengan parameter λt.

Variabel random N mempunyai distribusi poisson dengan parameter λ, untuk $n = 1,2,3,\ldots$

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,3,.. \tag{3.9}$$

jika N adalah variabel random poisson, dapat ditunjukkan bahwa $E(N) = Var(N) = \lambda$. Jika kita mendefinisikan N_t adalah angka kedatangan yang terjadi pada waktu sepanjang t, maka teorema diatas menjadi:

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, \qquad n = 0,1,2,.. \tag{3.10}$$

sejak N_t adalah distribusi poisson dengan parameter λt, $E(N_t) = Var(N_t) = \lambda t$. Rata-rata kedatangan λt selama interval sepanjang t, sehingga λ adalah rata-rata angka per unit waktu atau disebut ukuran kedatangan. Perhatikan asumsi berikut:

1. Kedatangan didefinisikan sebagai interval waktu yang tidak bersamaan dan independen (sebagai contoh angka kedatangan 1-10 tidak akan memberikan kita informasi untuk kedatangan 30-50)
2. Untuk Δt yang kecil, peluang satu kedatangan yang terjadi antara waktu t dan $t + \Delta t$ adalah $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, dimana $o(\Delta t)$ adalah kwantitas memuaskan.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \tag{3.11}$$

probabilitas tidak ada kedatangan selama t dan $t + \Delta t$ adalah 1-$\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ dan probababilitas terjadi lebih dari satu kedatangan selama $t + \Delta t$ adalah o(Δt).

Menurut Sjamsul (1994), Jika X suatu peubah acak dengan distribusi diskret, dan apabila nilai X harus bilangan bulat positif, dikatakan bahwa X berdistribusi poisson dengan rataan λ $(\lambda > 0)$ apabila fungsi peluang X : $f(\frac{x}{\lambda}) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2,...,n$ dan $f(\frac{x}{\lambda}) = 0, x$ yang lainnya. Jadi, $f(\frac{x}{\lambda}) \geq 0$ untuk setiap nilai x. Distribusi poisson sebagai distribusi densitas peluang harus dapat dibuktikan bahwa: $\sum_{x=0}^{\infty} f(\frac{x}{\lambda}) = 1$. Telah diketahui bahwa $e^{\lambda} = \frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + ... + \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$. Sehingga $\sum_{x=0} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}.e^{\lambda} = 1$

Distribusi poisson merupakan hal khusus dari distribusi binomial, dengan ketentuan $\lambda = np$. Fungsi densitas peluang distribusi binomial adalah:

$$f(x \mid n; p) = \binom{n}{p} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{n(n-1)...(n-x+1)}{x! n^x} \lambda^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{x-1}{n})}{x!} \lambda^n \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

Jika $n \to \infty$, maka:

a) $1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{x-1}{1}) \to 1.$

b) $(1-\frac{\lambda}{n})^{-x} \to 1.$

c) $(1-\frac{\lambda}{n})^{\frac{-n}{\lambda}} \to e.$

Sehingga $f(x \mid n; p) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

$$f(\frac{x}{\lambda}) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Dalam model antrian *Single Channel – Multi Phase* untuk mencari distribusi kedatangan, kita menggunakan Probabilitas Poisson ke-i, $P_i = P(x) = P_i = \frac{e^{-\lambda}\lambda_i^{x_i}}{x_i!}$. Variabel acak distribusi X dikatakan mempunyai distribusi poisson jika fungsi peluangnya berbentuk: $P(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, sehingga untuk $P_i(x)$: $P(x_i) = P(X = x_i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda_i^{x_i}}{x_i!}$.

3.2.2 Analisis Distribusi Pelayanan

Distribusi waktu pelayanan, pola pelayanannya serupa dengan pola kedatangan dimana pola ini bisa konstan ataupun acak. Jika waktu pelayanan konstan, maka waktu yang diperlukan untuk melayani setiap pelanggan sama. Kasus ini terjadi dalam operasi pelayanan yang menggunakan mesin, seperti sebuah mesin cuci mobil otomatis. Menurut Jay dan Barry (2006), yang lebih sering terjadi adalah waktu pelayanan yang berdistribusi acak, misalnya pada model antrian *Single Channel – Multi Phase* ini. Dalam model ini diasumsikan bahwa waktu pelayanan acak dijelaskan oleh distribusi probabilitas eksponensial negatif (*negative exponential probability distribution*).

Distribusi probabilitas eksponensial negatif merupakan sebuah distribusi probabilitas yang kontinu yang sering digunakan untuk menjelaskan waktu pelayanan dalam sebuah sistem antrian. Rumus yang digunakan untuk setiap waktu pelayanan dalam model *Single Channel – Multi Phase* ini adalah probabilitas eksponensial ke-i yaitu:

$$P_i = \int_{x_{ai}}^{x_{bi}} \mu e^{-\mu t} dt = e^{-\mu xa_i} - e^{-\mu xb_i}$$

Variabel acak distribusi X dikatakan mempunyai distribusi eksponensial dengan parameter $\theta > 0$ jika fungsi peluangnya berbentuk: $P(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}; x > 0$.

Dengan begini dibuktikan bahwa $P_i = \int_{x_{ai}}^{x_{bi}} \mu e^{-\mu t} dt = e^{-\mu xa_i} - e^{-\mu xb_i}$.

Bukti: $P_i(x;\theta) = \int_{xai}^{xb_i} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$

$$= \frac{1}{\theta}(-\theta) \int_{xa_i}^{xb_i} e^{-\frac{x}{\theta}} d(-\frac{x}{\theta})$$

$$= -e^{-\frac{x}{\theta}} \Big|_{xa_i}^{xbi}$$

$$= -e^{-\frac{xb_i}{\theta}} - \left(-e^{-\frac{xa_i}{\theta}} \right)$$

$$= -e^{-\frac{xb_i}{\theta}} + e^{-\frac{xa_i}{\theta}} = e^{-\frac{xa_i}{\theta}} - e^{-\frac{xb_i}{\theta}}$$

Misal $\frac{1}{\theta}=\mu$ sehingga: $P_i = e^{-\mu x a_i} - e^{-\mu x b_i}$.

Model antrian *Single Channel – Multi Phase* pola kedatangannya berdistribusi Poisson dan pola pelayanannya berdistribusi Eksponensial, sehingga karakteristik antriannya menggunakan karakteristik antrian sistem saluran tunggal $(M/M/1):(FCFS/\infty/\infty)$. Selanjutnya untuk penguraian saluran tunggal perlu diperhatikan hal-hal berikut ini, yaitu:

1. Diberikan n = jumlah satuan dalam sistem.
2. Berati $P_n(t)$ adalah peluang dari n unit dalam sistem dalam periode waktu t. Agar dapt menghitung $P_n(t)$ atau P_n, harus dicari rumusnya, artinya menyatakan $P_n(t)$ dalam λ, μ dan P_0 (Samblin Stevens, 1974).

Menurut Supranto (1987) apabila $n > 0$, kejadian bahwa akan ada n pelanggan dalam antrian pada waktu $(t+\Delta t)$ dapat terjadi dalam empat cara yang *mutually exclusive*, atau saling meniadakan. Kalau yang satu telah terjadi, maka lainnya tidak akan terjadi. Hal ini dapat diuraikan pada Tabel 3.1 berikut ini:

Tabel 3.1 kejadian ada n pelanggan dalam sistem antrian pada waktu $(t+\Delta t)$

Kejadian	Prob. Adanya n pelanggan dalam antrian pada waktu t	Kedatangan dalam selang t s/d $t+\Delta t$	Pelanggan yang dilayani dalam selang t s/d $t+\Delta t$	Pelanggan dalam antrian pada waktu t s/d $t+\Delta t$
1	P_n	0	0	N
2	P_{n+1}	0	1	N
3	P_{n-1}	1	0	N
4	P_n	1	1	N

Oleh karena hanya ada satu kejadian dari kemungkinan empat kejadian yang harus terjadi, diperoleh ekspresi untuk $P_n(t+\Delta t)$, dimana $n>0$ dengan menjumlahkan nilai probabilita untuk setiap kejadian yang terpisah, yaitu:

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t)(1-\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t$$

$$+ P_{n-1}(1-\mu\Delta t)\lambda\Delta t + P_n(\lambda\Delta t)(\mu\Delta t)$$

$$= P_n(t)(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t-\lambda\mu(\Delta t)^2) + P_{n+1}(t)(\mu\Delta t-\lambda\mu(\Delta t)^2)$$
$$+ P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t-\lambda\mu(\Delta t)^2) + P_n(t)\lambda\mu(\Delta t)^2$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda\Delta t-\mu\Delta t) + P_{n+1}(t)\mu\Delta t + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t$$

Setelah dibagi dengan Δt, diperoleh bentuk:

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n+1}(t) \tag{3.12}$$

Berdasarkan definisi turunan P_n terhadap t

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}$$

Persamaan (3.12) menjadi:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), n\ge 0 \tag{3.13}$$

Apabila $n=0$, akan terjadi dua kejadian yang saling meniadakan, yaitu:

Kejadian I = nol pelanggan pada waktu *t*, tidak ada kedatangan selama waktu t sampai dengan $t+\Delta t$.

Kejadian II = satu pelanggan pada waktu t, tidak ada kedatangan selama waktu *t* sampai dengan $t+\Delta t$ dan satu pelanggan dilayani dalam waktu *t* sampai dengan $t+\Delta t$ dan nol pelanggan dalam waktu *t* sampai dengan $t+\Delta t$.

Kejadian diatas dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$P_0(t+\Delta t) = P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)(1-\lambda\Delta t)\mu\Delta t$$

$$= P_0(t)(1-\lambda\Delta t) + P_1(t)\mu\Delta t$$

$$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda\Delta t P_0(t) + \mu\Delta t P_1(t)$$

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0 + \mu P_1(t)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \qquad (3.14)$$

Persamaan diferensial ini menghubungkan P_0, P_1, λ dan μ untuk $n = 0$.

Persamaan (3.12) dan (3.14) memberikan hubungan untuk fungsi kepadatan probabilita (pdf) $P_n(t)$ untuk semua nilai n. Pada penelitian ini, hanya akan membicarakan keadaan yang terjadi ketika antrian *steady-state*. Persamaan (3.13) menjadi:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

$$0 = -(\lambda+\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1}, untuk \quad n > 0 \qquad (3.15)$$

Untuk $n = 0$, menjadi:

$$0 = -\lambda P_0 + \mu P_1$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

Hubungan dibawah ini dapat diperoleh dari persamaan (3.15).

Kalau $n = 1$ maka

$$0 = -(\lambda + \mu)P_1 + \lambda P_0 + \mu P_2$$
$$\mu P_2 = (\lambda + \mu)P_1 - \lambda P_0$$
$$P_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}(\frac{\lambda}{\mu}P_0) - \frac{\lambda}{\mu}P_0$$
$$= \frac{\lambda}{\mu}P_0(\frac{\lambda}{\mu} + 1 - 1) = (\frac{\lambda}{\mu})^2 P_0$$

Kalau n = 2 maka

$$0 = -(\lambda + \mu)P_2 + \lambda P_1 + \mu P_3$$
$$\mu P_3 = (\lambda + \mu)P_2 - \lambda P_1$$
$$P_3 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}(\frac{\lambda}{\mu})^2 P_0 - \frac{\lambda}{\mu}(\frac{\lambda}{\mu}P_0)$$
$$= (\frac{\lambda}{\mu})^2 P_0(\frac{\lambda}{\mu} + 1 - 1) = (\frac{\lambda}{\mu})^3 P_0$$

Pada umumnya, diperoleh persamaan berikut:

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 \tag{3.16}$$

Oleh karena $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n}$$

Karena $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n$ merupakan deret geometri dengan jumlahan suku yang tak hingga, sehingga dapat diselesaikan dengan rumus:

$$S = \frac{a}{1-r},\ a \text{ suku pertama, } r \neq 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}},\ a = 1, r = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = 1 \text{ atau } P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.17}$$

merupakan probabilita bahwa fasilitas pelayanan sedang menganggur, tidak ada yang dilayani. Dengan memasukkan P_0 dalam persamaan (3.16), diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \frac{\lambda}{\mu}) \qquad n \geq 0 \tag{3.18}$$

Menurut Siagian (1987), berikut ini adalah beberapa karakteristik dari sistem antrian untuk model $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$:

1. *Intensitas Lalu – Lintas*

Untuk sebuah sistem $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, maka didefinisikan Intensitas lalu – lintas sebagai $\rho \equiv \frac{\lambda}{\mu}$ yakni ρ adalah hasil bagi antara laju kedatangan dan laju pelayanan. Makin besar harga ρ makin panjang antrian dan sebaliknya.

2. *Periode Sibuk*

Kalau mekanisme pelayanan sibuk, kita katakan bahwa sistem antrian sedang dalam periode sibuk. Peluang bahwa sistem antrian sedang dalam keadaan sibuk pada saat sebarang, kita namakan peluang periode sibuk.

Peluang periode sibuk dari sistem antrian dengan pelayanan tunggal sama dengan intensitas lalu – lintas. Karena itu, bila f (b) merupakan fungsi peluang periode sibuk, maka:

$$= 1 - P_0 \rightarrow P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{\mu - \lambda}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\mu}$$

$$f(b) = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

3. Distribusi Peluang dari pelanggan dalam Sistem

Bila ρ merupakan peluang bahwa sistem antrian adalah sibuk, maka tentu $1-\rho$ merupakan peluang bahwa sistem tidak dalam keadaan sibuk pada sebarang waktu. Misalnya P_n merupakan peluang adanya n langganan dalam antrian, maka untuk $n = 0$ dari persamaan (3.17):

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \text{ atau } P_0 = 1 - \rho$$

Karena persamaan (3.16): $P_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n P_0$, maka:

$$P_n = \rho^n P_0$$
$$P_n = \rho^n (1 - \rho)$$

4. Jumlah Rata – rata pelanggan dalam Sistem

Misalkan $E(n_t)$ adalah jumlah rata – rata pelanggan dalam sistem antrian, mencakup pelanggan yang menunggu dan yang sedang dilayani. Maka:

$$E(n_t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

$$E(n_t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{\lambda}{\mu})^n (1-\frac{\lambda}{\mu})$$

$$= (1-\frac{\lambda}{\mu})\sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{\lambda}{\mu})^n$$

Urutan suku-suku dari $\sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{\lambda}{\mu})^n$ mempunyai bentuk $0, a, 2a^2, 3a^3, ..., na^n, ...$ Dalam hal ini a konstan dan kurang dari 1, deret ini akan konvergen menjadi suatu jumlah dengan rumus

$$S = \frac{a}{(1-a)^2}, a = \frac{\lambda}{\mu}$$

Jadi $E(n_t) = (1-\frac{\lambda}{\mu})\frac{\lambda/\mu}{(1-\lambda/\mu)^2}$

$$= \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \tag{3.19}$$

Bila $\rho \to 1$ atau jumlah laju kedatangan λ mendekati jumlah laju pelayanan μ, maka jumlah rata-rata dalam sistem, $E(n_t)$ berkembang menjadi lebih besar. Bila $\lambda = \mu$ atau $\rho = 1$, maka $E(n_t) = \infty$ atau jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem antrian menjadi besar tak berhingga.

5. Jumlah Rata – rata Pelanggan dalam Antrian

Misalkan $E(n_w)$ sebagai jumlah rata – rata pelanggan dalam antrian, maka :

$$E(n_w) = E(n_t) - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (3.20)$$

6. *Waktu Menunggu Rata – rata dalam Sistem*

Misalkan $E(T_t)$ merupakan waktu rata – rata bahwa seorang pelanggan akan menghabiskan waktunya dalam sistem, maka $E(T_t) = \frac{E(n_t)}{\lambda}$ dimana $E(n_t)$ adalah jumlah rata – rata pelanggan dalam sistem.

Jadi, $E(T_t) = \frac{\lambda / \mu-\lambda}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$ (3.21)

7. *Waktu Menunggu Rata – rata dalam Antrian*

Misalkan $E(T_w)$ merupakan waktu rata – rata yang dihabiskan oleh seorang pelanggan dalam antrian.

Maka $E(T_w) = \frac{E(n_w)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} . \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

$$= \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right) \qquad (3.22)$$

3.3 Tahapan-tahapan dalam Model *Single Channel – Multi Phase*

Setelah kita mengetahui komponen diatas, maka tahapan untuk aplikasinya yaitu kita harus mempunyai sebuah data. Setelah data kita peroleh, maka kita akan mentabulasikan data tersebut ke dalam tabel-tabel frekuensi sehingga dapat dihitung jumlah kejadian dalam berbagai katagori, kemudian mencari uji kecocokan untuk menguji distribusi kedatangan dan distribusi pelayanan dengan menggunakan uji Chi Kuadrat, dan yang terakhir adalah menganalisa sistem antrian dengan menggunakan karakteristik antrian sistem saluran tunggal $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$, yaitu yang terdiri dari jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem, jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian, waktu menunggu rata-rata dalam sistem, waktu menunggu rata-rata dalam antrian, dan tingkat kegunaan fasilitas.

3.4 Aplikasi Model *Single Channel – Multi Phase* pada Penservisan Kendaraan Bermotor

Data yang digunakan dalam aplikasi ini meliputi data kedatangan dan waktu pelayanan pelanggan. Data kedatangan pelanggan yang didapat dari penelitian, dapat diubah dalam bentuk tabel distribusi frekuensi sebagai berikut:

Tabel 3.2 Tabel distribusi frekuensi data jumlah kedatangan pelanggan per 15 menit pada loket pertama selama 8 hari pengamatan.

Jumlah kedatangan pelanggan per 15 menit	Jumlah frekuensi kedatangan per 15 menit
1	5
2	7
3	12
4	12
5	17
6	18
7	15
8	14
9	12
10	8
11	4
12	4
13	1
Total	129

Sumber: Data Primer (2010)

Tabel 3.3 Tabel distribusi frekuensi data jumlah kedatangan pelanggan per 15 menit pada loket kedua selama 8 hari pengamatan.

Jumlah kedatangan pelanggan per 15 menit	Jumlah frekuensi kedatangan per 15 menit
1	4
2	9
3	11
4	12
5	13
6	15
7	14
8	14
9	12
10	10
11	7
12	3
13	1
Total	125

Sumber: Data Primer (2010)

Data pelayanan pelanggan yang didapat dari penelitian, dapat dibuat tabel distribusi frekuensi dari masing-masing loket pelayanan. Berikut adalah tabel lama pelayanan pelanggan untuk tiap loket.

Tabel 3.4 Tabel distribusi frekuensi data lama pelayanan loket pertama selama 8 hari pengamatan.

Interval Kelas (menit)	Titik Tengah (X_i)	Frekuensi Pengamatan (O_i)	O_i*X_i
0,333-0,43	0,3815	34	12,971
0,431-0,528	0,4795	28	13,426
0,529-0,626	0,5775	20	11,55
0,627-0,724	0,6755	19	12,8345
0,725-0,822	0,7735	16	12,376
0,823-0,92	0,8715	7	6,1005
0,921-1,018	0,9695	3	2,9085
1,019-1,116	1,0675	2	2,135
Total		129	74,3015

Sumber: Hasil Pengolahan Data (2010)

Tabel 3.5 Tabel distribusi frekuensi data lama pelayanan loket kedua selama 8 hari pengamatan.

Interval Kelas (menit)	Titik Tengah (X_i)	Frekuensi Pengamatan (O_i)	O_i*X_i
0,422-0,517	0,4695	29	13,6155
0,518-0,613	0,5655	24	13,572
0,614-0,709	0,6615	21	13,8915
0,71-0,805	0,7575	15	11,3625
0,806-0,901	0,8535	15	12,8025
0,902-,997	0,9495	11	10,4445
0,998-1,093	1,0445	6	6,267
1,094-1,189	1,1415	4	4,566
Total		125	86,5215

Sumber: Hasil Pengolahan Data

3.4.1 Pengujian Distribusi pada loket pertama

1. Pengujian Distribusi Kedatangan

Dari distribusi frekuensi pada tabel 3.2 akan diuji apakah sesuai dengan distribusi poisson dengan menggunakan perhitungan Uji Chi Kuadrat (*Goodness of Fit*) sebagai berikut:

Tabel 3.6 Tabel Hasil Uji Chi Kuadrat dari jumlah kedatangan pelanggan per 15 menit pada loket pertama.

X	O_i	O_i.x	P(x)	E_i	(O_i-E_i)^2/E_i
1	5	5	0,012085	1,558964	7,595251
2	7	14	0,037754	4,870253	0,931332
3	12	36	0,07863	10,14321	0,339898
4	12	48	0,122821	15,84386	0,932553
5	17	85	0,153478	19,79868	0,395613
6	18	108	0,159823	20,61723	0,332242
7	15	105	0,142655	18,49253	0,629111
8	14	112	0,111415	14,37252	0,009655
9	12	108	0,077347	9,977823	0,409829
10	8	80	0,048327	6,234206	0,500149
11	4	44	0,02745	3,541064	0,05948
12	4	48	0,014292	1,843732	2,521782
13	1	13	0,006869	0,886135	0,014631
Total	129	806			14,65689

Sumber: Hasil Pengolahan Data (2010)

Selanjutnya dengan *level significance* 0,05 dan *degree of freedom* (df) 12. maka pada tabel χ^2 nilai χ^2 adalah 21,026. Dari tabel dapat dilihat bahwa χ^2 hitungnya adalah 14,65689. Jadi dapat disimpulkan bahwa χ^2 hitung lebih kecil daripada χ^2 tabel atau dapat dikatakan uji Chi Kuadrat tersebut menunjukkan jumlah kedatangan pada loket pertama sesuai dengan Distribusi Poisson.

2. Pengujian Distribusi Pelayanan

Dengan Uji Chi Kuadrat dapat diuji apakah waktu pelayanan penservisan di loket pertama sesuai dengan Distribusi Eksponensial. Berikut adalah tabel pengujian waktu pelayanan pelanggan:

Tabel 3.7 Tabel Hasil Uji Chi Kuadrat dari data waktu pelayanan loket pertama.

Interval Pelayanan (menit)	O_i	$f(x_i)$	E_i	$(O_i-E_i)^2/E_i$
0,367-1,5273	28	0,249244	32,15242	0,536276
1,5274-2,6877	27	0,180433	23,27586	0,595862
2,6878-3,8481	22	0,13062	16,84992	1,57409
3,8482-5,0085	19	0,094558	12,19804	3,792958
5,0086-6,1689	14	0,068453	8,830437	3,026394
6,169-7,3293	8	0,049555	6,392553	0,404202
7,3294-8,4897	7	0,035874	4,627714	1,216095
8,4898-9,6501	4	0,02597	3,350107	0,126074
Total	129			9,929782

Sumber: Hasil Pengolahan Data (2010)

Selanjutnya dengan *level significance* 0,05 dan *degree of freedom* (df) 7. maka pada tabel χ^2 nilai χ^2 adalah 14,067. Dari tabel dapat dilihat bahwa χ^2 hitungnya adalah 9,929782. Jadi dapat disimpulkan bahwa χ^2 hitung lebih kecil daripada χ^2 tabel atau dapat dikatakan uji Chi Kuadrat tersebut menunjukkan waktu pelayanan pelanggan pada loket pertama sesuai dengan Distribusi Eksponensial.

3.4.2 Pengujian Distribusi pada loket kedua

1. Pengujian Distribusi Kedatangan

Dari distribusi frekuensi yang ada pada tabel 3.3 akan diuji apakah sesuai dengan distribusi poisson dengan menggunakan perhitungan Uji Chi Kuadrat (*Goodness of Fit*) sebagai berikut:

Tabel 3.8 Tabel Hasil Uji Chi Kuadrat dari jumlah kedatangan pelanggan per 15 menit pada loket kedua.

X	O_i	$O_i.x$	P(x)	E_i	$(O_i-E_i)^2/E_i$
1	4	4	0,010491	1,311417	5,511956
2	9	18	0,033656	4,207027	5,460527
3	11	33	0,071979	8,997429	0,445715
4	12	48	0,115455	14,43188	0,409789
5	13	65	0,148152	18,51898	1,644754
6	15	90	0,158424	19,80297	1,164901
7	14	98	0,145207	18,15083	0,949236
8	14	112	0,116456	14,55697	0,02131
9	12	108	0,08302	10,3775	0,253674
10	10	100	0,053266	6,658205	1,677268
11	7	77	0,031068	3,883549	2,500874
12	3	36	0,016611	2,076404	0,41082
13	1	13	0,008198	1,024785	0,000599
Total	125	802			20,45082

Sumber: Hasil Pengolahan Data (2010)

Pada tabel dapat dilihat bahwa χ^2 hitungnya adalah 20,45082. Selanjutnya dengan *level significance* 0,05 dan *degree of freedom* (df) 12. maka pada tabel χ^2 nilai χ^2 adalah 21,026. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa χ^2 hitung lebih kecil daripada χ^2 tabel atau dapat dikatakan uji Chi Kuadrat tersebut menunjukkan jumlah kedatangan pada loket kedua sesuai dengan Distribusi Poisson.

2. Pengujian Distribusi Pelayanan

Dengan Uji Chi Kuadrat dapat diuji apakah waktu pelayanan penservisan di loket kedua sesuai dengan Distribusi Eksponensial. Berikut adalah tabel pengujian waktu pelayanan pelanggan:

Tabel 3.9 Tabel Hasil Uji Chi Kuadrat dari data waktu pelayanan loket kedua.

Interval Pelayanan (menit)	O_i	$f(x_i)$	E_i	(O_i-E_i)^2/E_i
0,333-2,0013	31	0,294035	36,75437	0,90092187
2,0014-3,6697	30	0,200729	25,09112	0,96038266
3,6698-5,3381	22	0,137032	17,12897	1,38519576
5,3382-7,0065	18	0,093548	11,69344	3,40128603
7,0066-8,6749	13	0,063862	7,982764	3,15337668
8,675-10,3433	7	0,043597	5,449596	0,44108802
10,3434-12,0117	3	0,029762	3,720278	0,13945204
12,0118-13,6801	1	0,020318	2,539724	0,93346722
Total	125			10,242251

Sumber: Hasil Pengolahan Data (2010)

Selanjutnya dengan *level significance* 0,05 dan *degree of freedom* (df) 7. maka pada tabel χ^2 nilai χ^2 adalah 10,242251. Dari tabel dapat dilihat bahwa χ^2 hitungnya adalah 14,067. Jadi dapat disimpulkan bahwa χ^2 hitung lebih kecil daripada χ^2 tabel atau dapat dikatakan uji Chi Kuadrat tersebut menunjukkan waktu pelayanan pelanggan pada loket kedua sesuai dengan Distribusi Eksponensial.

3.4.3 Perhitungan Karakteristik Antrian pada Loket Pertama

Seperti telah dietahui, pola kedatangan pelanggan dan pola pelayanan penservisan pada loket pertama mengikuti Distribusi Poisson dan Distribusi Eksponensial. Sehingga dapat dihitung karakteristik antrian loket pertama yang model antriannya $(M/M/1):(FCFS/\infty/\infty)$. Dari data yang diperoleh selama pengamatan, diketahui bahwa:

1. Total kedatangan loket pertama selama 8 hari pengamatan pelayanan adalah 806 orang.
2. Jumlah frekuensi yang diamati selama 8 hari pengamatan adaah 129.
3. Selama 8 hari, loket pertama telah melayani pelanggan selama 517,56.
4. Laju kedatangan/rata-rata kedatangan pelanggan per periode waktu (λ) adalah

$$\lambda = \frac{806}{129} = 6{,}248 \text{ orang tiap 15 menit}$$

$$= 0{,}417 \text{ orang}$$

5. Laju pelayanan/rata-rata keberangkatan pelanggan per periode waktu (μ) adalah

$$\mu = \frac{806}{517{,}56} = 1{,}557 \text{ orang}$$

Laju kedatangan dan pelayanan pada loket pertama ini akan menentukan karakteristik loket pertama yang dihitung antara lain:

1. Tingkat kegunaan fasilitas pelayanan (ρ)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}417}{1{,}557} = 0{,}268$$

2. Jumlah rata-rata dalam sistem $(E(n_t))$

$$E(n_t) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0{,}417}{1{,}557 - 0{,}417} = 0{,}366$$

3. Jumlah rata-rata dalam antrian $(E(n_w))$

$$E(n_w) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(0{,}417)^2}{1{,}557(1{,}557 - 0{,}417)} = 0{,}098$$

4. Waktu rata-rata dalam sistem $(E(T_t))$

$$E(T_t) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1{,}557 - 0{,}417} = 0{,}877$$

5. Waktu rata-rata dalam antrian $(E(T_w))$

$$E(T_w) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0{,}417}{1{,}557(1{,}557 - 0{,}417)} = 0{,}235$$

3.4.4 Perhitungan Karakteristik Antrian pada Loket Kedua

Seperti telah dietahui, pola kedatangan pelanggan dan pola pelayanan penservisan pada loket kedua mengikuti Distribusi Poisson dan Distribusi Eksponensial. Sehingga dapat dihitung karakteristik antrian loket kedua yang model antriannya $(M / M / 1) : (FCFS / \infty / \infty)$. Dari data yang diperoleh selama pengamatan, diketahui bahwa:

1. Total kedatangan loket kedua selama 8 hari pengamatan pelayanan adalah 802 orang.
2. Jumlah frekuensi yang diamati selama 8 hari pengamatan adaah 125.
3. Selama 8 hari, loket kedua telah melayani pelanggan selama 563,94.
4. Laju kedatangan/rata-rata kedatangan pelanggan per periode waktu (λ) adalah

$$\lambda = \frac{802}{125} = 6{,}448 \text{ orang tiap 15 menit}$$

$$= 0{,}43 \text{ orang}$$

5. Laju pelayanan/rata-rata keberangkatan pelanggan per periode waktu (μ) adalah

$$\mu = \frac{802}{563{,}94} = 1{,}429 \text{ orang}$$

Laju kedatangan dan pelayanan pada loket pertama ini akan menentukan karakteristik loket pertama yang dihitung antara lain:

1. Tingkat kegunaan fasilitas pelayanan (ρ)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}43}{1{,}429} = 0{,}301$$

2. Jumlah rata-rata dalam sistem $(E(n_t))$

$$E(n_t) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0{,}43}{1{,}429 - 0{,}43} = 0{,}43$$

3. Jumlah rata-rata dalam antrian $(E(n_w))$

$$E(n_w) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(0{,}43)^2}{1{,}429(1{,}429 - 0{,}43)} = 0{,}13$$

4. Waktu rata-rata dalam sistem $(E(T_t))$

$$E(T_t) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1{,}429 - 0{,}43} = 1{,}001$$

5. Waktu rata-rata dalam antrian $(E(T_w))$

$$E(T_w) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{0{,}43}{1{,}429(1{,}429 - 0{,}43)} = 0{,}301$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan di atas, maka dapat diambil kesimpulan bahwa model antrian *Single Channel-Multi Phase* adalah model antrian yang terdiri dari satu antrian dan beberapa pelayanan. Komponen model *Single Channel-Multi Phase* ini terdiri dari kedatangan, antrian, dan pelayanan. Pola kedatangan pada model antrian *Single Channel–Multi Phase* berdistribusi Poisson, yakni $P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, untuk $x = 1,2,3,\ldots$. Sedangkan pola pelayanannya berdistribusi Eksponensial, yaitu $P_i = \int_{x_{ai}}^{x_{bi}} \mu e^{-\mu t} dt = e^{-\mu x a_i} - e^{-\mu x b_i}$. Sistem antrian yang digunakan adalah sistem saluran tunggal $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$. Tahapan model *Single Channel–Multi Phase* untuk aplikasinya yaitu harus mempunyai sebuah data terlebih dahulu. Setelah data diperoleh, maka data tersebut ditabulasikan ke dalam tabel-tabel frekuensi sehingga dapat dihitung jumlah kejadian dalam berbagai katagori, kemudian mencari uji kecocokan untuk menguji distribusi kedatangan dan distribusi pelayanan dengan menggunakan uji Chi Kuadrat, dan yang terakhir adalah menganalisa sistem antrian dengan menggunakan karakteristik antrian sistem saluran tunggal $(M/M/1):(GD/\infty/\infty)$.

4.2 Saran

Pembahasan pada skripsi ini hanya difokuskan pada Analisis Model Antrian *Single Channel–Multi Phase*, maka dari itu untuk skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengembangkannya dengan model yang lain.

Daftar Pustaka

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Jauziyah, I. A. 2006. *Kemuliaan sabar dan Keagungan Syukur*. Yogyakarta: Mitra Pustaka.

Aminuddin. 2005. *Prinsip-prinsip Riset Operasi*. Jakarta: Erlangga.

Asma, U. 2010. *Dahsyatnya Kekuatan Sabar*. Jakarta: Belanoor.

Bain, L. J. dan Engelhard, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistic, 2nd Edition*. California: Duxury Press.

Bronson, R. 1991. *Teori dan Soal-soal Operations Research,* (Alih Bahasa: Hans J. Wospakrik). Jakarta: Erlangga.

Dimyati, t. T. dan A., Dimyati. 2004. *Operations Research: Model-model Pengambilan Keputusan*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Heizer, J. dan Render, B. 2006. *Manajemen Operasi,edisi 7*. Jakarta: Salemba Empat.

Kakiay, T. J. 2004. *Dasar Teori Antrian untuk Kehidupan Nyata*. Yogyakarta: ANDI.

Kislam, S. 1994. *Seri: Statistika Matematika Jilid 2*. Malang: IKIP Malang.

Levin, R. I, dkk. 2002. *Quantitative Approaches to Management (Seventh Edition)*. New Jersey: McGraw – Hill, Inc.

Mulyono, S. 2004. *Riset Operasi*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia.

Nasution, A. H. dan Rambe, A. 1984. *Teori Statistika, Edisi ke-2*. Jakarta: PT. Bhatara Karya Aksara.

Paimin, J. E. 1998. *Agar Anak Pintar Matematika*. Puspa Suara.

Pasya, A. F. 2004. *Dimensi SAINS Al-Qur'an*. Solo: PT. Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.

Rosenkrantz, W. A. 1997. *Introduction to probability and Statistic for Scientists and Engineers*. Singapore: Mcgraw Hill.

Samblin, J. E and G. T., Stevens. 1974. *Operations Research: A Fundamental Approach*. New York: mc Graw-Hill Inc.

Siagian, P. 1987. *Penelitian Operasional: Teori dan Praktek*. Jakarta: Universitas Indonesia Press.

Spiegel, M. R. 1988. *Teori dan Soal-soal Statistik versi SI (metrik)*, (Alih bahasa: I Nyoman S. dan Ellen G.). Jakarta: Erlangga.

Subagyo, P. 1983. *Dasar-dasar Operations Risearch*. Yogyakarta: BPFE.

Subagyo, P., dkk. 1988. *Dasar-dasar Operations Risearch, edisi ke-3*. Yogyakarta: BPFE

Supramono dan Sugiarto. 1993. *Statistika*. Yogyakarta: Andi Offset

Supranto, J. 1987. *Riset Operasi: Untuk Pengambilan Keputusan*. Jakarta: Universitas Indonesia Press.

Supranto, J. 2000. *Statistik Teori dan Aplikasi, edisi ke-6*. Jakarta: Erlangga.

Walpole, R. E. 1995. *Pengantar Statistik edisi ke-3*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama

Zulfikarijah, F. 2004. *Operatons Research*. Malang: UMM press.

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lilik Maslahah
NIM : 06510006
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Model Antrian *Single Channel – Multi Phase*
Pembimbing I : Drs. H. Turmudzi, M.Si
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal yang dikonsultasikan	Tanda Tangan	
1	15 Maret 2010	Judul	1.	
2	04 Juni 2010	BAB 1		2.
3	17 Juli 2010	Revisi BAB I	3.	
4	18 Agustus 2010	BAB I dan II		4.
5	28 Februari 2011	Revisi BAB I & II BAB III	5.	
6	01 Maret 2011	Kajian Agama		6.
7	10 Maret 2011	Revisi Keagamaan	7.	
8	10 Maret 2011	Revisi BAB I & II		8.
9	18 Maret 2011	Revisi BAB 1, II, & III	9.	
10	26 Maret 2011	ACC Keseluruhan		10.
11	26 Maret 2011	ACC Keagamaan	11.	

Malang, 26 Maret 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001