APLIKASI RESIDU UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL CAUCHY - EULER ORDE-n

SKRIPSI

Oleh:
IKE NORMA YUNITA
NIM. 06510030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

APLIKASI RESIDU UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL CAUCHY - EULER ORDE-n

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IKE NORMA YUNITA
NIM. 06510030

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

APLIKASI RESIDU UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL CAUCHY - EULER ORDE-n

SKRIPSI

Oleh:
IKE NORMA YUNITA
NIM. 06510030

Telah Disetujui Oleh:

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	**Ach. Nashichuddin, M.A**
NIP. 19800429 200604 1 003	**NIP. 19730705 200031 1 002**

Tanggal: 15 Desember 2010

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

APLIKASI RESIDU UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN DIFERENSIAL CAUCHY - EULER ORDE-n

SKRIPSI

Oleh:
IKE NORMA YUNITA
NIM. 06510030

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 15 Desember 2010

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. **Penguji Utama**	: **Drs. Usman Pagalay, M. Si** **NIP. 19650414 200312 1 001**	( )
2. **Ketua**	: **Wahyu H. Irawan, M. Pd** **NIP. 19710420 200003 1 003**	( )
3. **Sekretaris**	: **Hairur Rahman, S.Pd, M.Si** **NIP. 19800429 200604 1 003**	( )
4. **Anggota**	: **Achmad Nashichuddin, MA** **NIP. 19730705 200031 1 002**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Ike Norma Yunita
NIM	: 06510030
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 19 November 2010

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

8964EAAF289756741

ENAM RIBU RUPIAH

6000 DJP

Ike Norma Yunita

NIM. 06510030

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Motto

وَسَخَّرَ لَكُم مَّا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِي ٱلْأَرْضِ جَمِيعًا مِّنْهُ ۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَأَيَٰتٍ لِّقَوْمٍ

يَتَفَكَّرُونَ ﴿١٣﴾

Dan Dia telah menundukkan untukmu apa yang di langit dan apa yang di bumi semuanya, (sebagai rahmat) daripada-Nya. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berfikir
(QS Al-Jatsiyah: 13)

Ilmu adalah media untuk beribadah pada ALLAH SWT

semata

Doa, usaha, ikhlas, sabar, tawakkal, dan optimis dalam tiap tindakan;

Adalah motivasi dalam hidupku.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas segala karunia dan hidayahnya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Dengan hati yang tulus ikhlas dan penuh dengan rasa syukur kupersembahkan karyaku ini sebagai karya bakti untuk orang-orang tercinta yang selalu mendampingiku dan selalu dihatiku:

Kedua orang tuaku Bapak **SAHUR HANDAYANTO** dan Ibu **WIDYAWATI** terima kasih yang tak terhingga atas segala jerih payah, pengorbanan, do'a, kasih sayang, dan motivasi yang selalu diberikan demi terwujudnya cita-cita anakmu.

Buat **ABA, UMI dan nenek** tercinta., terimakasih atas dukungan yang membangkitkan semangat serta doa yang tiada henti tercurah padaku.

Adik-adikku tersayang **(ADE, IFAN, dan BELLA)** selalu semangat dan motivasi.

Buat mb ike dan mas wid makasih dukungan dan semangatnya.

Buat teman terdekatku **(HAIRUL FATAH)** terimakasih slama ini sudah banyak membantu dan meluangkan waktunya dan juga memberikan dukungan, doa dan semangatnya.

Teman-teman yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu khususnya matematika 2006 terimakasih kerja sama, bantuannya dan semangatnya selama ini

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puji syukur Penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah- Nya, sehingga Penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Kajian Teorema Residu pada Persamaan Diferensial Cauchy Euler Orde-n*" untuk memenuhi salah satu persyaratan menyelesaikan Program Sarjana Sains dan Teknologi Universitas islam, negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Dalam penyusunan skripsi ini banyak pihak yang telah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung, untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. DR. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang beserta seluruh staf Dharma Bakti Bapak dan Ibu sekalian terhadap Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang turut membesarkan dan mencerdaskan penulis.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang beserta staf Bapak dan Ibu sekalian sangat berjasa memupuk dan menumbuhkan semangat untuk maju kepada penulis.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memotivasi, membantu, dan mengarahkan penulis menyelesaikan penulisan skripsi ini.
4. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi di Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Ach. Nashichuddin, M.A selaku dosen pembimbing Integrasi Sains dan Islam, beliau yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyusun skripsi ini sehingga tiada dikotomi antara teknologi dan agama.
6. Seluruh Dosen Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya Dosen Matematika dan Staf yang telah memberikan ilmu kepada penulis selama empat tahun, dan dukungan untuk menyelesaikan penulisan skripsi ini.
7. Bapak dan Ibuku tersayang, adik-adikku dan seluruh keluarga besar di Probolinggo yang telah banyak memberikan do'a, motivasi, dan dorongan dalam penyelesaian skripsi ini baik materiil maupun spiritual.
8. Teman- teman jurusan Matematika khususnya angkatan 2006.
9. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu, yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran semua pihak yang bersifat membangun sangat Penulis harapkan dalam penyempurnaan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi Pembaca.

Wassalamu'alaikum Warohmatullahi Wabarakatuh

Malang, 19 November 2010

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Yunita, Ike Norma. 2010. **Aplikasi Residu Untuk Menyelesaikan Persamaan Cauchy-Euler Orde-n.** Pembimbing: Hairur Rahman, M.Si; Ach. Nasichuddin, M.A

Kata kunci: Persamaan Differensial Cauchy-Euler, Teorema Residu, Fungsi Kompleks

Persamaan diferensial merupakan sebuah persamaan yang mempunyai derivative dari satu variabel terikat dan satu atau lebih variabel bebas. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial kita perlu mengetahui terlebih dahulu klasifikasinya.

Tidak semua persoalan persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan mudah, ada beberapa kesulitan dalam mencari penyelesaiannya. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang perlu kita perhatikan adalah bentuk umum dari persamaan diferensial tersebut. Dalam skripsi ini penulis bertujuan untuk mendeskripsikan cara menyelesaikan persamaan diferensial Cauchy-euler orde-n dengan menggunakan teorema residu.

Penyelesaian persamaan diferensial Cauchy-euler homogen orde-n dengan menggunakan Teorema Residu, persamaan diferensial tersebut harus dapat ditulis dalam bentuk:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

mempunyai penyelesaian berbentuk:

$$y = \sum \operatorname{Re} s \frac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)}$$

dengan $g(z) = A^n z(z-1)\ldots(z-n-1) + a_1 A^{n-1} z(z-1)\ldots(z-n+2) + \ldots + a_{n-1} Az + a_n$ disebut persamaan polynomial karakteristik dan $f(z)$ adalah fungsi regular.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAC

Yunita, Ike Norma. 2010. **Aplication Residues for Solving Cauchy-Euler Differential Equation of Orde-n.** Pembimbing: Hairur Rahman, M.Si; Ach. Nasichuddin, M.A

Kata kunci: Cauchy-Euler Differential Equation, Teorema of Residues, Complex Function

Differential Equation of represent a equation having derivative the than one variable tied and one or more free variable. To finish we need differential equation shall have knowledge beforehand its classification.

Not all problem of differential equation can be finished easily, there are some difficulty in searching its solution. To finish equation of differential which need we pay attention is public form of equation of differential. In this thesis the writer having a purpose to depicting of way of finishing equation of order- n Cauchy-euler differential- by using theorem of residues.

Solving of homogeneous Cauchy-euler differential equation of order- n by using Theorem of Residues, the differential equation have to earn to be written in form:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$$

having the solution in form of

$$y = \sum \operatorname{Re} s \frac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)}$$

Referred $g(z) = A^n z(z-1)\ldots(z-n-1) + a_1 A^{n-1} z(z-1)\ldots(z-n+2) + \ldots + a_{n-1}Az + a_n$ is equation of characteristic polynomial and $f(z)$ is function of regular.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah ilmu pasti yang kebanyakan orang beranggapan, bahwa matematika merupakan suatu kajian yang rumit dengan angka-angka dan simbolnya. Anggapan-anggapan tersebut sebenarnya kurang tepat sebab ilmu matematika sejatinya telah kita pergunakan setiap hari tanpa kita sadari, misalkan saja dalam berbelanja, meramalkan pengeluaran dan pemasukan penghasilan tiap bulan, yang sebenarnya kita telah memiliki kemampuan matematika secara alamiah.

Persamaan Diferensial adalah sebuah persamaan yang mempunyai derivative dari satu variabel terikat dan satu atau lebih variabel bebas. Jika hanya satu variabel bebasnya, maka disebut persamaan diferensial linear. Sedangkan jika variabel bebasnya lebih dari satu, maka persamaan tersebut adalah persamaan differensial parsial (Baiduri, 2001: 2). Dipersamaan diferensial dikenal juga istilah orde (tingkat) dan derajat (degree). Orde (tingkat) dari suatu persamaan diferensial merupakan turunan tertinggi yang terdapat pada persamaan diferensial tersebut dan derajat (degree) merupakan pangkat dari suatu persamaan diferensial.

Persamaan differensial biasa orde-n dengan variabel terikat y dan variabel bebas x dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x)$$

Dari persamaan diferensial biasa orde-n dikatakan linear jika mempunyai ciri-ciri sebagai berikut :

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. Variabel terikat y dan derivatifnya hanya berderajat satu.
2. Tidak ada perkalian antara y dan derivatifnya serta antara derivatifnya.
3. Variabel terikat y bukan fungsi transenden.

Semakin berkembang dan tumbuhnya suatu teknologi, sebenarnya tidak terlepas dari kajian ilmu matematika, baik dalam hal biologi, informatika, ekonomi dan lain sebagainya.

salah satu persamaan diferensial yang harus dikembangkan dan perlu diteliti lebih lanjut adalah persamaan diferensial Cauchy-Euler $ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=h(x)$, Persamaan tersebut tampaknya sederhana, tetapi untuk menyelesaikan persamaan diferensial bukanlah sesuatu yang mudah, bahkan dapat dikatakan dengan menggunakan cara analitik, tidak dapat ditemukan penyelesaian. Sehingga pemakaian metode-metode pendekatan dalam bilangan kompleks menjadi suatu alternatif yang dapat digunakan. Bilangan kompleks merupakan bilangan yang berbentuk $x + yi$, dengan x dan y bilangan real. Teorema Residu merupakan salah satu item dalam bilangan kompleks yang saat ini mendapat perhatian cukup banyak dari para peneliti. Teorema Residu adalah salah satu metode sangat penting untuk menyelesaikan persamaan diferensial Cauchy-Euler dan persamaan diferensial parsial.

Berdasarkan uraian diatas peneliti berinisiatif melakukan penelitian terhadap persamaan Cauchy-Euler. Selain itu peneliti juga termotifasi oleh Penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Ike Febri H.P, tahun 2009 yang berjudul aplikasi teorema residu pada persamaan differensial Linier Orde-n, dalam penelitian tersebut bagi peneliti yang ingin melanjutkan disarankan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

mengaplikasikan Teorema Residu pada persamaan yang lain. Dari saran tersebut peneliti mencoba meneliti tentang pengaplikasian teorama residu dalam menyelesaikan persamaan differensial Cauchy Euler. Oleh karena itu persamaan yang ada merupakan suatu kajian yang menarik untuk di selesaikan dengan beberapa konsep dalam matematika, yang kini menjadi alat analisis yang penting dalam menyelesaikan masalah, misalkan penggunaan metode residu yang akan kami teliti guna menyelesaikan suatu persamaan Cauchy-Euler. Maka dari itu peneliti tertarik untuk menyelasaikan persamaan differensial Cauchy-Euler dengan menggunakan teorema residu.

Berdasarkan kajian tersebut kami sebagai penulis juga yakin bahwa dalam kesulitan pasti ada kemudahan, dan semua itu diperuntukan bagi orang-orang yang berfikir dan semoga Allah SWT memberikan kemudahan dalam menyelesaikan berbagai persoalan. Hal ini juga tersirat dalam Al-Quran, surah Alam Nasyroh ayat 5-6 yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

(5. Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, 6. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.)

1.2 Rumusan Masalah

Pada penelitian ini mempunyai permasalahan yang akan kami kaji yaitu, bagaimana cara mengaplikasikan residu untuk menyelesaikan persamaan diferensial cauchy - euler orde-n.

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka penulis bertujuan untuk mendeskripsikan cara mengaplikasikan residu untuk menyelesaikan persamaan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

diferensial cauchy - euler orde-n

1.4 Batasan Masalah

Untuk lebih mengarah pada pembahasan dan memperoleh pendalaman materi yang lebih relevan dengan konteks permasalahan, maka dalam penyusunan tugas akhir ini penulis membatasi permasalahan pada penyelesaian persamaan diferensial Cauchy-Euler orde-n dengan koefisien konstanta homogen.

1.5 Manfaat Penelitian

1.5.1 Bagi Pembaca

1. Sebagai referensi bagi pembaca untuk penelitian lebih lanjut, selain itu diharapkan dapat membantu dalam penyelesain suatu permasalahan
2. Sebagai motivasi kepada pembaca agar dapat mempelajari dan megembangkan Matematika
3. Sebagai sebuah informasi kepada para pembaca bahwa suatu permasalahan bisa diselesaikan dengan menggunakan konsep Matematika.

1.5.2 Bagi Mahasiswa

1. Melatih untuk mengola dan menggabungkan beberapa sumber teori dan menuangkanya ke dalam bentuk pemikiran yang lebih matang untuk diterapkan.
2. Memperoleh kepuasan intelektual, karena dapat meningkatkan keterampilan dalam mengorganisasikan serta mneyajikan fakta secara jelas dan sistematis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Mampu mengkaji dan menganalisis tentang masalah euler sehingga dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari.

1.6 Metode Peneltian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah metode penelitian "*kajian kepustakaan*" atau "*literature study*". Pembahasan yang dilakukan dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan masalah penelitian ini.

Dalam penelitian ini, langkah-langkah umum yang dilakukan penulis adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan dan mempelajari literatur yang berupa buku-buku, makalah, dan dokumentasi yang berkaitan dengan masalah penelitian yang akan digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial Cauchy-euler.
2. Menentukan pokok permasalahan dari literatur utama berupa cara mencari solusi dan karakteristik dari residu kompleks pada persamaan diferensial homogen Cauchy-euler orde-n.
3. Menentukan nilai g (z).
4. Menentukan persamaan karakteristik.
5. Memberikan contoh.
6. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

1.7 Sistematika Penelitian

BAB I: Pendahuluan, yang terdiri atas latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penelitian.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II: Kajian Pustaka**,** yang terdiri atas berbagai landasan teori yang mendasari pembahasan tentang permasalahan yang diteliti. Adapun teori yang digunakan adalah pengertian persamaan differensial, persamaan differensial euler dan teorema residu.

BAB III: Metode Penelitian, berisi tentang prosedur atau langkah-langkah yang digunakan untuk mencari solusi persamaan differensial euler orde-n dengan menggunakan teorema residu. Pembahasan, pada bagian ini akan dibahas bagaimana hasil dari penelitian ini.

BAB IV: Penutup, terdiri atas kesimpulan dan saran-saran yang berkaitan dengan permasalahan yang dikaji.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Sistem Bilangan Kompleks

Bilangan Kompleks z didefenisikan oleh $z = a + bi$, dengan a dan b adalah bilangan real dan i adalah satuan imajiner yang mempunyai nilai $\sqrt{-1}$, di mana a dinamakan bagian real dan b merupakan bagian imajiner. Diperkenalkannya bilangan kompleks karena tidak ada bilangan real x yang memenuhi persamaan polynomial $x^2 + 1 = 0$ atau persamaan yang serupa dengan persamaan tersebut. Dengan adanya bilangan kompleks, maka semua persamaan kuadrat akan mempunyai penyelesaian.

Dua bilangan kompleks $a + bi$ dan $c + di$ dikatakan sama jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$. Nilai absolute dari suatu bilangan kompleks $a + bi$ didefinisikan sebagai $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Kompleks sekawannya dari suatu bilangan kompleks $a+bi$ adalah bilangan $a - bi$ dinyatakan dengan z^* atau $\bar{z}$.

Dalam mengoperasikan bilangan kompleks dilakukan seperti operasi dalam aljabar bilangan real dengan menggantikan i^2 dengan -1. Sistem bilangan kompleks diperkenalkan dengan menggunakan konsep pasangan terurut bilangan nyata (a, b). Jadi sistem bilangan kompleks didefinisikan sebagai himpunan semua pasangan dengan operasi tertentu yang sesuai (Murray R. Spiegel, 1965:136).

Operasi-operasi dasar dalam bilangan kompleks:

1. Penjumlahan $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$
2. Pengurangan $(a + bi) - (c + di) = a + bi - c + di = (a - c) + (b - d)i$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Perkalian $(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$m(a+bi) = (ma + mbi)$$

4. Pembagian $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2 i^2}$

$$= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Pengertian bilangan kompleks z sudah dikenalkan, supaya dapat memecahkan beberapa persamaan secara aljabar. Sekarang akan belajar mendefinisikan fungsi $f(z)$ pada variabel kompleks (Mitrinovie, dan Keekie, 1983).

2.2 Fungsi Kompleks

Jika $f(z)$ yang bernilaikan bilangan kompleks maka disebut fungsi kompleks. Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal atau daerah domain dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Jika $D \subset C$ maka $f : D \to C$ jika untuk setiap $z \in D$ maka diperoleh $f(z) \in C$. Jika setiap himpunan bilangan kompleks yang dapat menyatakan nilai sebuah variabel z terdapat satu atau lebih variabel w, maka w dinamakan fungsi dari variabel kompleks z yang ditulis sebagai $w = f(z)$.

Suatu fungsi bernilai tunggal jika untuk setiap nilai z terdapat hanya satu nilai w dan jika lebih dari satu nilai w untuk setiap nilai z, maka dinamakan suatu fungsi bernilai banyak. Jika $w = u + iv$ (di mana u dan v real) adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari $z = x + iy$ (di mana x dan y real), maka dapat ditulis $u + iv = f(x + iy)$. Dengan menyamakan bagian real dan imajiner, maka ini dapat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dilihat setara dengan

$$u = u(x, y),\ \ v = v(x, y)$$

Dengan demikian diperoleh pernyataan berikut:

Jika diberikan fungsi bernilai kompleks dari variabel kompleks $f(z)$ maka $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dengan u dan v fungsi real dari dua variabel real x dan y. Fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ berturut-turut dinamakan bagian real dan bagian imajiner fungsi $f(z)$. (R.Soemantri,1994: 41)

Contoh 2.2.1

Jika $z = x + iy$ maka $w = f(z) = z^2$

$$w = f(z) = z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$w = f(z) = (x^2 - y^2) - 2ixy = u - iv$$

dengan $u(x, y) = x^2 - y^2$

$$v(x, y) = 2xy$$

Diberikan fungsi kompleks f dengan domain definisi daerah D. Dalam hal ini dibahas pengertian **limit** fungsi f untuk variabel z mendekati titik z_0.

Definisi 2.2.1.

Diberikan fungsi f dengan domain D dan z_0 titik limit D. Bilangan L disebut limit f untuk z mendekati z_0, dan ditulis

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan , terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk semua $z \in D$ dan $0 < |z - z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - L| < \varepsilon$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 2.2.2

Jika $f(z) = z^2$. Buktikan bahwa $\lim_{z \to z_0} f(z) = z_0^{\,2}$

Penyelesaian:

Kita harus menunjukkan bahwa jika diberikan $\varepsilon > 0$ kita dapat menentukan δ (yang secara umum bergantung pada ε) sehingga $\left|z^2 - z_0^{\,2}\right| < \varepsilon$ bilamana $0 < |z - z_0| < \delta$

Jika $\delta \leq 1$ maka $0 < |z - z_0| < \delta$ mengakibatkan

$$\left|z^2 - z_0^{\,2}\right| = |z - z_0||z + z_0| < \delta|z - z_0 + 2z_0| < \delta\{|z - z_0| + |2z_0|\} < \delta(1 + 2|z_0|)$$

Ambil δ yang terkecil diantara 1 dan $\varepsilon/(1 + 2|z_0|)$, maka kita mempunyai

$\left|z^2 - z_0^{\,2}\right| < \varepsilon$ bilamana $|z - z_0| < \delta$

Setelah kita bahas pengertian limit fungsi di atas, maka dalam hal ini akan kita bahas pengertian kekontinuan suatu fungsi.

Definisi 2.2.2.

Diberikan fungsi f dengan domain definisi suatu daerah D dan titik $z_0 \in D$. Fungsi f dikatakan kontinu di z_0 jika

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Dengan kata lain, jika f "kontinu" pada z_0, maka harus memiliki sebuah nilai limit pada z_0 dan nilai limit tersebut seharusnya $f(z_0)$

Sebuah fungsi f dikatakan "kontinu" pada sebuah himpunan S jika fungsi tersebut kontinu pada tiap-tiap titik S (Saff Snider, 1993: 47-48).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 2.2.3

Buktikan bahwa $f(z) = z^2$ kontinu di $z = z_0$

Menurut contoh 2.2.2 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = z_0{}^2$ sehingga $f(z)$ kontinu di

$z = z_0$.

Cara lain

Kita harus menunjukkan bahwa jika $\varepsilon > 0$, diberikan maka terdapat $\delta > 0$ (bergantung pada ε) sehingga $|f(z) - f(z_0)| = |z^2 - z_0{}^2| < \varepsilon$ bilamana

$|z - z_0| < \delta$

Kontinuitas telah dibicarakan secara singkat pada hal di atas, sebagian besar sebagai bagian dari latar belakang yang diperlukan untuk membicarakan turunan (derivative) fungsi kompleks.

Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada daerah D dan z_0 suatu titik di dalam D. Jika diketahui bahwa nilai limit:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Jika limitnya ada, maka nilai limit ini dinamakan **turunan** atau **derivative** fungsi f di titik z_0, dan diberikan cara tulis $f'(z_0)$. Jika nilai limit $f'(z_0)$ ini ada, fungsi f dikatakan terdiferensial di z_0. Kerap kali nilai $f(z) - f(z_0)$ dinyatakan dengan Δf dan $z - z_0$ dengan Δz sehingga $z = z_0 + \Delta z$ dan

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Jika f terdiferensial di semua titik di dalam D maka f dikatakan terdiferensial pada D (R.Soemantri,1994: 60).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 2.2.4

Tentukan turunan dari $w = f(z) = z^3 - 2z$ dititik $z = z_0$

Penyelesaian:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^3 - 2(z_0 + \Delta z) - \{z_0^{\ 3} - 2z_0\}}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0^{\ 3} + 3z_0^{\ 2}\Delta z + 3z_0(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3 - 2z_0 - 2\Delta z - z_0^{\ 3} + 2z_0}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} 3z_0^{\ 3} + 3z_0\Delta z + (\Delta z)^2 - 2 = 3z_0^{\ 2} - 2$$

Disamping kekontinuan, syarat yang diperlukan agar fungsi f terdiferensial di $z_0 = x_0 + iy_0$ adalah apa yang di namakan syarat **Cauchy-Riemann.**

Jika fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ terdiferensial di $z_0 = x_0 + iy_0$, maka:

1. Misal $\Delta z = (\Delta x, 0) = \Delta x$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

2. Sedangkan untuk $\Delta z = (0, \Delta y) = i\Delta y$, maka

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y)] - [u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{i\Delta y}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}\right]$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i\frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}\right]$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Dari dua hasil penurunan fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ di $z_0 = x_0 + iy_0$ untuk $\Delta z = (\Delta x, 0) = \Delta x$ dan $\Delta z = (0, \Delta y) = i\Delta y$, maka didapatkan persamaan:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.2.1.1)$$

Bentuk persamaan diatas dinamakan **Persamaan Cauchy Riemann (Persamaan C-R).** Jadi dapat disimpulkan, fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ akan diferensial di $z_0 = x_0 + iy_0$ bila dan hanya bila bagian real dan bagian imajiner dari $f(z)$, u dan v berlaku Persamaan C-R (Danang Mursita, 2005: 52-53).

Syarat agar $f(z)$ analitik disuatu daerah, selain $f(z)$ berhingga dan diferensiabel, persamaan Cauchy-Riemann harus berlaku di daerah itu.

Jika turunan $f'(z)$ ada disemua titik z dari suatu daerah R, maka $f(z)$ dikatakan analitik dalam R dan ditanyakan sebagai fungsi analitik dalam R. Suatu fungsi $f(z)$ dikatakan analitik disuatu titik z_0 jika terdapat suatu lingkungan $|z - z_0| < \delta$ sehingga $f'(z)$ ada disetiap titik pada lingkungan tersebut.

Contoh 2.2.5

$f(z) = z^4$ dengan $z = x + iy$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$z^4 = x^4 + 4x^3iy + 6x^2i^2y^2 + 4x^2i^3y^3 + i^4y^4$$
$$z^4 = x^4 + 4x^3iy - 6x^2y^2 - 4x^2iy^3 + y^4$$
$$z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3)$$
$$u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$
$$v = 4x^3y - 4xy^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -12y + 4y^3 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12y^2x$$

Karena $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 4x^3 - 12xy^2$ dan $\frac{\partial v}{\partial x} = 12x^2y - 4y^3 = -\frac{\partial u}{\partial y}$ maka $f(z) = z^4$ adalah analitik di $z = x + iy$, untuk setiap $x, y \in R$

Contoh 2.2.6

$f(z) = z\bar{z}$ dimana $z = x + iy$ dan $\bar{z} = x - iy$

$$f(z) = z\bar{z} = (x+iy)(x-iy)$$
$$= x^2 - xyi + xyi - y^2 = x^2 - y^2$$
$$u = x^2 + y^2 \ dan \ \ v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Jadi $f(z) = z\bar{z}$ tidak analitik di $z \neq 0$

Jika $f(z)$ analitik disemua titik pada suatu daerah R dan C suatu kurva yang terletak dalam R, maka $f(z)$ tentunya dapat diintegralkan sepanjang C.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3 Integral Kompleks

Definisi integral kompleks adalah sama dengan definisi integral fungsi nyata dengan mengganti interval integrasi dengan suatu lintasan. Integral fungsi kompleks $f(z)$ sepanjang C didefenisikan dengan $\int_C f(z)dz$, dengan C adalah lintasan integrasi.

Definisi 2.3.1.

Jika $f(z)$ berharga tunggal dan kontinu di dalam sebuah R maka integral dari $f(z)$ sepanjang lintasan C dalam R dari titik z_1 ke titik z_2 di mana $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ adalah

$$\int_C f(z)dz = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u+iv)(dx+idy)$$

$$= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} udx + i^2 vdy + i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} vdx + udy$$

$$= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} udx - vdy + i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} vdx + udy$$

(Murray R Spigel, 1964:104)

Contoh 2.3.1

Hitunglah $\int_{(1+i)}^{(2+4i)} z^2 dz$ sepanjang garis lurus $1+i$ dan $2+4i$

Penyelesaian:

$$\int_{(1+i)}^{(2+4i)} z^2 dz = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x+iy)^2 (dx+idy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2 - y^2 + 2ixy)(dx+idy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2 - y^2)dx - 2xydy + i\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xydx + (x^2 - y^2)dy$$

Garis yang menghubungksn (1,1) dan (2,4) mempunyai persamaan

$$y - 1 = \frac{4-1}{2-1}(x-1) \text{ atau } y = 3x - 2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka kita mendapatkan

$$\int_{x=1}^{2}\{[x^2-(3x-2)^2]dx-2x(3x-2)3dx\}+\int_{x=1}^{2}\{2x(3x-2)dx+[x^2-(3x-2)^2 3dx]\}=-\frac{86}{3}-6i$$

Jadi $\int_{(1+i)}^{(2+4i)} z^2 dz=-\frac{86}{3}-6i$

Dalam sub bab 2.2 telah disebutkan bahwa penyelidikan tentang fungsi kompleks sangat tergantung pada turunan kompleks. Dibawah ini akan disajikan nilai fungsi analitik disuatu titik ke dalam bentuk integral lintasan tertutup tunggal.

Rumus Integral Cauchy:

Jika fungsi f didefinisikan dan analitik di dalam dan pada lintasan tertutup tunggal C dan z_0 sembarang titik di dalam C maka:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Turunan ke n dari $f(z)$ di $z=z_0$ diberikan

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \quad \text{atau}$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i f^{n}(z_0)}{n!}$$

(Murray R Spigel, 1965:141)

Contoh 2.3.2

Hitunglah $\oint_C \frac{z^2}{z-i}dz$

Penyelesaian

$$f(z)=z^2,\ z_0=i,\ f(z_0)=-1$$

$$\oint_C \frac{z^2}{z-i}dz=2\pi i[f(z_0)]=-2\pi i$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Titik z_0 dikatakan titik singular jika $f(z)$ tidak bersifat analitik di z_0. Kesingularitasan dari suatu fungsi kompleks dapat dilihat dari deret Laurentnya.

Teorema 2.3.1 (Teorema Laurent)

Jika f analitik dalam domain $D=\{z: r_2<|z-z_0|<r_1\}$ dan z titik sembarang di dalam domain ini, maka:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{1}$$

Dengan

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad n=0,1,2,... \tag{2}$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz \qquad n=1,2,... \tag{3}$$

Dan C sembarang lintasan tertutup tunggal di dalam domain tersebut yang mengelilingi z_0 dan berarah positif.

Penulisan deret Laurent dapat disederhanakan menjadi:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{4}$$

Dimana $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad ,n=0,\pm1,\pm2,\pm3,...$ (5)

Deret ruas kanan (1) dinamakan deret Laurent untuk fungsi $f(z)$ dan juga dikatakan ekspansi Laurent dari f dalam pangkat $(z-z_0)$. Deret (1) dinamakan deret Laurent dengan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ dinamakan bagian utama dan bagian $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ dinamakan bagian analitik.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 2.3.3

1. Untuk $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$, tentukan deret Laurentnya untuk $1<|z|<2$. Fungsi

   $f(z)$ dapat dipisahkan menjadi $f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$

   Penyelesaian:

   Untuk $1<|z|<2$ maka $|1/z|<1$ dan $|z/2|<1$, jadi

$$\frac{1}{z-2}=\frac{-1}{2(1-z/2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad dan \qquad \frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-1/z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

   Dengan demikian:

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \qquad (1<|z|<2)$$

2. Tentukan deret Laurent dari fungsi $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$

   Penyelesaian:

   $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z=1$ misalkan $z-1=u$, maka $z=1+u$

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^2}{u^3}e^{2u}=\frac{e^2}{u^3}\left\{1+2u+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\frac{(2u)^4}{4!}+\ldots\right\}$$

$$=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{z-1}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+\ldots$$

Dengan deret Laurent ini, maka kesingularan dari suatu fungsi dapat ditentukan dengan jenis-jenisnya.

Suatu titik z_0 dinamakan singularitas atau titik singular bagi fungsi f jika dan hanya jika f tidak analitik pada z_0 dan setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik yang membuat f tersebut analitik.

Jenis-jenis Singularitas:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. Singularitas Kutub

Jika bagian utama yaitu $\frac{a_{-1}}{z-z_0}+\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}+...+\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ dengan $a_{-n}\neq 0$ dan n adalah bilangan bulat positif, maka $z=z_0$ dinamakan suatu kutub bertingkat n.

Contoh 2.3.4

$f(z)=\frac{1}{z^3}$ memiliki kutub bertingkat 3 di $z=0$

2. Titik Cabang

Suatu titik $z=z_0$ dinamakan titik cabang dari fungsi bernilai banyak $f(z)$. Jika cabang $f(z)$ bertukar bilamana z menggambarkan suatu lintasan tertutup disekitar z_0. Jika z_0 adalah *titik cabang*, maka sembarang lingkaran dengan pusat z dan berjari-jari cukup kecil yang dapat kita lukis mulai dari suatu titik pada satu cabang fungsi bernilai ganda akan berakhir pada suatu titik pada cabang yang lain.

Contoh 2.3.5

$$\begin{aligned} w &= f(z)=\left(z^2+1\right)^{1/2} \\ &= \{(z-i)(z+i)\}^{1/2} \end{aligned}$$

Titik $z=\pm i$ merupakan titik cabang dari $f(z)$, bilamana suatu titik z bergerak mengelilingi c

Dari definisi singularitas di atas, suatu titik z_0 merupakan singularitas fungsi $f(z)$, bila f gagal menjadi analitik di z_0 sementara setiap lingkungan z_0 memuat paling sedikit satu titik dimana f analitik. Titik z_0 dinamakan titik singular terasing dari fungsi f, jika z_0 titik singular terasing dari fungsi f, maka terdapat

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$r > 0$, sehingga $f(z)$ dapat dituliskan kedalam deret Laurent dengan domain $0 < |z - z_0| < r$.

Contoh 2.3.6

Tentukan titik singularitas dari $f(z) = 1/z$ dan nyatakan dalam deret Laurent

Penyelesaian:

Titik $z = 0$ adalah titik singularitas terasing dari fungsi $f(z) = 1/z$, sebab untuk $r = r > 0$, jika diuraikan ke dalam deret Laurent maka berbentuk $f(z) = 1 - (z-1) + (z-1)^2 + \ldots$ dalam domain $0 < z < 1$.

2.4 Residu

Dengan melihat koefisien dari deret Laurent untuk $n = -1$ pada persamaan (5) yaitu a_{-1} yang diberikan rumus:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

Dengan C sembarang jalur tertutup sederhana, yang mengelilingi z_0 berorientasi positif dan seluruhnya terletak di dalam sekitar z_0 tersebut.

Selanjutnya nilai a_{-1} yang merupakan koefisien pada deret Laurent dari $\frac{1}{z - z_0}$ dinamakan residu f di titik singularitas terasing z_0.

Residu fungsi f di titik singularitas terasing z_0 diberikan dengan notasi $\operatorname{Re} s[f, z_0]$, dari definisi tersebut diperoleh:

$$a_{-1} = \operatorname{Re} s[f, z_0]$$

$$\operatorname{Re} s[f, z_0] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka $\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Re} s[f, z_0]$

Contoh 2.4.1

Hitung $\int_C \frac{e^z}{z^2} dz$, dimana C adalah lingkaran satuan $|z| = 1$, dengan orientasi

positif. Dari $\frac{1}{z^2} e^z = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \ldots$

Didapatkan bahwa $\operatorname{Re} s\left[\frac{e^z}{z^2}, 0\right] = 1$. Maka,

$$\int_C \frac{e^z}{z^2} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Re} s\left[\frac{e^z}{z^2}, 0\right] = 2\pi i$$

Untuk singularitas yang banyaknya berhingga, maka residu dapat dicari dengan menggunakan teorema dibawah ini.

Teorema 2.4.1.

Jika fungsi f analitik di dalam dan pada lintasan tertutup tunggal yang berorientasi positif C kecuali di titik-titik singular yang berhingga banyaknya di dalam C maka:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum \operatorname{Re} s$$

Dengan $\sum \operatorname{Re} s$ merupakan jumlah residu fungsi f di titik singular di dalam C.

Jika singular dari fungsi $f(z)$ merupakan kutub berorde n maka residu dapat dicari dengan menggunakan teorema dibawah ini:

Teorema 2.4.2.

Jika fungsi analitik di semua titik dalam dan pada kurva tertutup sederhana kecuali di $z = z_0$ yang merupakan kutub berorde n, sehingga

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots$$

$$= \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Maka $a_{-1} = \operatorname{Re} s[f, z_0]$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right]$$ (J.D.Poliouras, 1975: 259)

Untuk berturut-turut $n = 1,2,3$ dari rumus tersebut didapat:

$$\operatorname{Re} s[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0) f(z)]$$

$$\operatorname{Re} s[f, z_0] = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[(z - z_0)^2 f(z) \right]$$

$$\operatorname{Re} s[f, z_0] = \frac{1}{2} \lim_{z \to z_0} \frac{d^2}{dz^2} \left[(z - z_0)^3 f(z) \right]$$

Contoh 2.4.2

Hitung $\oint_C \frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2} dz$, dimana C diberikan dengan $|z| = 5$

Penyelesaian:

Singularitas kutub dari $\frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}$ adalah $z = 2$ dan $z = -4$ untuk kutub di $z = 2$ orde 1

$$\operatorname{Re} s[f, 2] = \lim_{z \to 2} \frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2} (z - 2)$$

$$= \lim_{z \to 2} \frac{e^z}{(z+4)^2} = \frac{e^2}{36}$$

Untuk kutub di $z = -4$ orde 2

$$\operatorname{Re} s[f, -4] = \lim_{z \to -4} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2} (z+4)^2 dz$$

$$= \lim_{z \to -4} \frac{d}{dz} \frac{e^z}{(z-2)} dz$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$= \lim_{z \to -4} \frac{(z-2)e^{z} - e^{z}}{(z-2)^{2}} = \frac{-7e^{-4}}{36}$$

Jadi diperoleh

$$\oint_C \frac{e^{z}}{(z-2)(z+4)^{2}}\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Re} s[f,2] + \operatorname{Re} s[f,-4]\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{2}}{36} + \frac{-7e^{-4}}{36}\right)$$

Teorema 2.4.3.

Jika titik a *adalah titik reguler* f *, maka* $\operatorname{Re}_{z=a} s\, f(z) = 0$

(D.S Mitinovie and J.D Keekie,1983:7)

2.5 Persamaan Diferensial

Definisi 2.5.1 *Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang mengandung derivative atau deferensial dari suatu atau lebih variabel terikat satu atau lebih variabel bebas. Jika hanya satu variabel bebasnya, maka persamaannya disebut persamaan diferensial biasa. Sedangkan jika variabel bebasnya lebih dari satu maka persamaannya disebut persamaan diferensial parsial* (Baiduri, 2001: 2). Sedangkan menurut Vinizio (1998: 1) *persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui.*

Contoh 2.5.1

1. $\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x - 3e^{-x}$ persamaan diferensial orde-1

2. $\frac{d^{3}y}{dx^{3}} + 2xy = e^{x}$ persamaan diferensial orde-3

3. $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + 2u = 0$ persamaan parsial orde-1

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Orde dari persamaan diferensial adalah derivative/turunan tertinggi yang terdapat/termuat dalam persamaan diferensial tersebut. Sedangkan derajat dari persamaan diferensial ditentukan oleh pangkat tertinggi dari turunan yang tertinggi yang ada dalam persamaan diferensial tersebut (Baiduri, 2001: 4).

Contoh 2.5.2

1. $\frac{dy}{dx} - y = x$ persamaan diferensial orde-1 berderajat 1
2. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y - 3x = 0$ persamaan diferensial orde-3 berderajat 2

Persamaan diferensial biasa dapat digolongkan sebagai persamaan linear maupun tak linear, sebagai contoh :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ persamaan diferensial linear
2. $y'' + 5y' + 6y^2 = 0$ persamaan diferensial tak linear
3. $y'' - 3yy' + 2y = 0$ persamaan diferensial tak linear

Suatu persamaan diferensial biasa berorde n akan mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$y^{(n)} = F\left(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \qquad (2.5.1.1)$$

dengan $y_1, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ nilainya ditentukan oleh x. Penyelesaian umum dari persamaan (2.5.1.1) biasanya akan mengandung tetapan n sebarang.

Secara umum persamaan diferensial mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \qquad (2.5.1.2)$$

Suatu persamaan diferensial biasa orde n linear mempunyai ciri-ciri sebagai

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berikut :

1. variabel terikat y dan derivatifnya hanya berderajat satu.
2. tidak ada perkalian antara y dan derivatifnya serta antara derivatifnya.
3. variabel terikat y bukan fungsi transenden.

Jika persamaan diferensial orde n bukan dalam bentuk (2.5.1.2), maka disebut persamaan diferensial biasa orde n tak linear. Jika $b(x)=0$, maka (2.5.1.2) merupakan persamaan diferensial homogen. Jika $a_n(x)=a_n$ $(n=0,1,2,...)$, maka (2.5.1.2) disebut persamaan diferensial dengan koefisien konstanta. Jika $a_n(x)$ berupa variabel, maka persamaan (2.5.1.2) merupakan persamaan diferensial dengan koefisien variabel (Baiduri, 2001:05).

Definisi 2.5.2.

Misalkan $y_1, y_2,..., y_n$ *merupakan penyelesaian-penyelesaian persamaan diferensial, Wronski (W) didefenisikan sebagai determinan matrik dengan elemen-elemen matrik berupa* $y_1, y_2,..., y_n$ *yang diferensiabel sampai* $n-1$ *dan kontinu pada selang* $[a,b]$. *Wronski (W) ditulis sebagai berikut :*

$$W(y_1, y_2,..., y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & \cdots & y_n \\ y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Persamaan diferensial linear mempunyai sifat pentingnya yaitu $y_1, y_2,..., y_n$ merupakan penyelesaian dari (2.5.1.1), maka $c_1.y_1+c_2.y_2+...+c_n y_n$ juga merupakan penyelesaian dengan tetapan c_i sebarang.

Teorema 2.5.1.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jika $y_1, y_2,..., y_n$ *merupakan* n *penyelesaian yang bebas linear satu sama lain dari persamaan diferensial homogen.*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

maka untuk setiap pilihan-pilihan konstanta $c_1, c_2,..., c_n$ *kombinasi linear*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

suatu penyelesaian juga (Finizio,1982: 67-68).

Contoh 2.5.3

Tentukan solusi umum homogen jika diketahui solusi basis dari

$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$ adalah $\{e^x, \cos 2x, \sin 2x\}$

Jawab:

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$$

Solusi basis: $Y_1 = e^x,\ Y_2 = \cos 2x,\ Y_3 = \sin 2x$

Maka Solusi umum homogen: $Y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$

Teorema 2.5.2.

Jika $y_1, y_2,..., y_n$ *merupakan persamaan diferensial orde* n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

yang didefenisikan pada selang $[a, b]$, *dikatakan bebas linear jika* $W(y_1, y_2,..., y_n) \neq 0$ *untuk setiap* x *dalam selang* $[a, b]$ *dimana W adalah Wronski* (Finizio: 1982: 69).

Contoh 2.5.4

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tunjukkan bahwa $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ adalah solusi umum homogen dari

$y'' - y' - 2y = 0$

Jawab:

$$Y_1 = e^{-x},\ Y_2 = e^{2x}$$

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = \left(e^{-x} \cdot 2e^{2x}\right) - \left(-e^{-x} \cdot e^{2x}\right)$$
$$= 3e^{x} \neq 0$$

Karena $Y_1 = e^{-x}$ dan $Y_2 = e^{2x}$ bebas linear maka $Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$ solusi umum homogen $y'' - y' - 2y = 0$

2.6 Persamaan Diferensial Linear Homogen dengan Koefisien Konstanta

Misalkan persamaan diferensial linear homogen orde ke n adalah

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (2.6.1.1)$$

Menurut Kartono (1994) Dengan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah konstanta real. Ini adalah wajar untuk memperkirakan dari pengetahuan tentang persamaan diferensial linear orde 2 dengan koefisien konstanta dan bahwa $y = e^{rx}$ adalah selesaian persamaan (2.6.1.1) untuk nilai r yang bersesuaian.

Bukti: jika $y = e^{rx}$

Maka

$$y' = re^{rx}$$

$$y'' = r^2 e^{rx}$$

$$y''' = r^3 e^{rx}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Substitusi kepersamaan (2.6.1.1)

$$L\left[e^{rx}\right] = a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \ldots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx}$$

$$= e^{rx}\left[a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n\right] = e^{rx} Z(r) \qquad (2.6.1.2)$$

Untuk semua r

Untuk nilai-nilai r sehingga $Z(r) = 0$, selanjutnya $L\left[e^{rx}\right] = 0$ dan $y = e^{rx}$ adalah selesaian persamaan (2.6.1.1). Polynomial $Z(r)$ disebut polynomial karakteristik dari persamaan diferensial (2.6.1.1). Berdasarkan suatu polynomial berderajat n mempunyai n buah akar, misalkan $r_1, r_2, \ldots, r_n$ dengan demikian polynomial karakteristiknya dapat ditulis :

$$Z(r) = a_0 (r - r_1)(r - r_2) \ldots (r - r_n) \qquad (2.6.1.3)$$

Menurut Baiduri (2001) Berdasarkan jenis akar-akar dari persamaan karakteristik ada 3 kasus yang perlu diperhatikan didalam menentukan solusi umum:

1. Akar-akarnya real dan berbeda

   $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \ldots, r_{n-1} \neq r_n$

   Maka solusi basis:

   $y_i = e^{r_i x}, \; i = 1, 2, \ldots, n$

   Dan solusi umumnya :

   $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$, c_i konstanta

Contoh 2.6.1

Tentukan solusi umum $y''' - y'' - 12y' = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$$r^3 - r^2 - 12r = 0$$
$$r(r-4)(r+3) = 0$$
$$r_1 = 0, r_2 = 4, r_3 = -3$$

Solusi basisnya:

$$y_1 = e^0 = 1,\ y_2 = e^{4x},\ y_3 = e^{-3x}$$

Solusi umumnya:

$$y = c_1 + c_2 e^{4x} + c_3 e^{-3x}$$

2. Akar-akarnya real dan sama

$$r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n$$

Solusi basisnya:

$$y_i = x^{i-1} e^{rx} \quad i = 1,2,3,\ldots,n$$

Solusi umumnya: $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$

Contoh 2.6.2

Tentukan solusi umum $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya;

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$
$$(r-1)^3 = 0$$
$$r_1 = r_2 = r_3 = 1$$

Solusi basisnya: $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2 e^x$

Solusi umumnya:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Akar kompleks

Jika $r_i = \alpha \pm \beta i$ (kompleks), maka salah satu solusi basisnya

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ dan } y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Jika $r = \alpha \pm \beta i$ sebanyak m, maka solusi basisnya

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{n-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Contoh 2.6.3

Tentukan solusi umum $y''' - y'' + 9y' - 9 = 0$

Jawab:

Persamaan karakteristikanya:

$$r^3 - r^2 + 9r - 9 = 0$$
$$(r-1)(r^2 - 9) = 0$$
$$r_1 = 1, r_2 = r_3 = \pm 3i$$

Solusi basisnya:

$$y_1 = e^x, y_2 = \cos 3x, y_3 = \sin 3x$$

Solusi umumnya:

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x$$

2.7 Persamaan Cauchy-Euler

Definisi 2.7.1

Suatu persamaan linier orde-2 bisa ditunjukkan dalam persamaan berikut:

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = h(x), \qquad (2.7.1.1)$$

Dimana a,b, dan c adalah konstanta yang disebut persamaan Cauchy-Euler.

Contoh pada persamaan diferensial

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$3x^2 y'' - 2xy' + 7y = \sin x$$

Adalah persamaan Cauchy-Euler, sedangkan persamaan $2y'' - 3xy' + 11y = 3x - 1$ bukan persamaan Cauchy-Euler, karena koefisien dari y'' adalah 2, yang mana bukan konstanta dari x^2.

Untuk menyelesaikan persamaan Cauchy-Euler homogen, kita substitusikan $x = e^t$, dengan menstransformasikan persamaan (2.7.1.1) ke suatu persamaan dengan koefisien konstan.

Contoh (2.7.1):

Carilah solusi umum dari persamaan

$$3x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 11x \frac{dy}{dx} - 3y = 0, \qquad x > 0.$$

Jawab :

Kita subsitusikan $x = e^t$ untuk di trasformasikan ke persamaan di atas dengan variabel bebasnya adalah t.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t = x\frac{dy}{dx};$$

Maka

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2 y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2 y}{dx^2}e^t$$

$$= \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$x^2\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Substitusikan

$$3\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+11x\frac{dy}{dx}-3y=0$$

$$3\frac{d^2y}{dt^2}+8\frac{dy}{dt}-3y=0.$$

Misal $dy/dt = r$

$$3r^2+8r-3=0.$$

$$(3r-1)(r+3)=0$$

$$r_1=\frac{1}{3} \quad \vee \quad r_2=-3$$

$$y(t)=c_1e^{t/3}+c_2e^{-3t}=c_1\left(e^t\right)^{1/3}+c_2\left(e^t\right)^{-3}$$

$$y(x)=c_1x^{1/3}+c_2x^{-3} \qquad \textit{untuk } x>0$$

Untuk mencari solusi umum seperti pada persamaan dengan koefisien konstanta, maka harus mencari solusi persamaan homogen dan solusi partikulir, y_p. Solusi y_p ini dapat dicari dengan metode koefisien tak tentu atau metode variasi parameter. Sedangkan solusi homogen y_h, dapat dilakukan dengan substitusi $ax+b=e^t$ atau $y=(ax+b)^r$, disini kita akan menggunakan substitusi atau $y=(ax+b)^r$ sebagai solusi

$$(ax+b)^n\ y^n+a_1(ax+b)^{n-1}\ y^{n-1}+\ldots+a_ny=0 \qquad (2.7.1.2)$$

Sehingga diperoleh:

$$y'=r(ax+b)^{r-1},\ y''=r(r-1)(ax+b)^{r-2},\ldots,\ y^n=r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)(ax+b)^{r-n}$$

Selanjutnya $y, y',\ldots, y^n$ disubstitusikan ke (2.7.1.2) dan diperoleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$(ax+b)^r\left[r(r-1)(r-2)...(r-n+1)+a_1r(r-1)...(r-n+2)+...+a_n\right]=0$ karena

$ax+b>0$, maka

$$r(r-1)(r-2)...(r-n+1)+a_1r(r-1)...(r-n+2)+...+a_n=0 \qquad (2.7.1.3)$$

Persamaan (2.7.1.3) disebut persamaan karakteristik (2.7.1.2). sebagai ilustrasi (2.7.1.3) kita ambil beberapa nilai n. misal n = 2, maka (2.7.1.3) berbentuk:

$r(r-1)+a_1r+a_2$

Untuk n = 3, maka (2.7.1.3) berbentuk:

$r(r-1)(r-2)+a_1r(r-1)+ra_2+a_3=0$ dan seterusnya.

Seperti pada persamaan orde-n debgan koefisien konstanta, solusi umum (2.7.1.2) tergantung dari jenis akar-akar persamaan karakteristik (2.7.1.3) sebagai berikut:

1. Akar-akarnya real dan berbeda; $r_1, r_2, ..., r_n$

   Solusi barisnya adalah

   $y' = r(ax+b)^{r-1}, y'' = r(r-1)(ax+b)^{r-2}, ..., y^n = r(r-1)(r-2)...(r-n+1)(ax+b)^{r-n}$

   Dan solusi umumnya

   $$y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i \qquad dengan \quad c_i \in R$$

2. Akar-akarnya real dan kembar yang berkelipatan n

   Solusi barisnya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y_1 = (ax+b)^r,$$
$$y_2 = (ax+b)^r \ln(ax+b),$$
$$y_3 = (ax+b)^r \ln^2(ax+b),$$
$$\vdots$$
$$y_n = (ax+b)^r \ln^{n-1}(ax+b),$$

dan solusi umumnya

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

3. Akar-akarnya kompleks,

Solusi barisnya

$$y_{11} = (ax+b)^\alpha \cos\left[\beta \ln(ax+b)\right],$$
$$y_{12} = (ax+b)^\alpha \sin\left[\beta \ln(ax+b)\right],$$
$$y_{21} = (ax+b)^\alpha \ln(ax+b)\cos\left[\beta \ln(ax+b)\right],$$
$$y_{22} = (ax+b)^r \ln^2(ax+b)\sin\left[\beta \ln(ax+b)\right],$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$y_{n1} = (ax+b)^\alpha \ln^{n-1}(ax+b)\cos\left[\beta \ln(ax+b)\right],$$
$$y_{n2} = (ax+b)^\alpha \ln^{n-1}(ax+b)\sin\left[\beta \ln(ax+b)\right]$$

Sedangkan solusi umumnya merupakan kombinasi linear solusi barisnya.

Contoh (2.7.2):

Tentukan solusi masalah syarat awal $x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0, x > 0$

Dengan syarat awal $y(1) = -1, y'(1) = 3\, dan\; y''(1) = 4$

Jawab:

Persamaan karakteristik

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$R(r-1)(r-2)-2r+4=0 \quad atau$$
$$r^3-r^2+4=0 \quad atau$$
$$(r+1)(r-2)^2=0$$

Akar-akarnya $r_1=-1, r_2=r_3=2$

Sehingga solusi barisnya

$$y_1=x^{-1}, y_2=x^2, y_3=x^2\ln(x)$$

Dan solusi umumnya

$$y\ =c_1x^{-1}+c_2x^2+c_3x^3\ln x$$
$$y'=-c_1x^{-2}+2c_2x+2c_3x\ln x+c_3x$$
$$\ =-c_1x^{-2}+2(c_2x+c_3x\ln x)+c_3x$$
$$y''=2c_1x^{-3}+2(c_2x+c_3x\ln x)+2x\left(\frac{c_3}{x}\right)+c_3$$
$$=2c_1x^{-3}+2c_3\ln x+2c_2+3c_3$$

Selanjutnya syarat awal didistribusikan ke y, y', y'', dan diperoleh

$$y(1)=c_1+c_2=1 \qquad (*)$$
$$y'(1)=-c_1+2c_2+c_3=3 \qquad (**)$$
$$y''(1)=2c_1+2c_2+3c_3=4 \qquad (***)$$

Dengan menyelesaikan (*), (**), (***), maka diperoleh

$$c_1=-1, c_2=0, c_3=2$$

Sehingga solusi masalah syarat awal:

$$y=-x^{-1}+2x^2\ln x$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.8 Solusi umum dari persamaan diferensial linear dengan koefisien konstanta

Teorema 2.8.1 *Persamaan diferensial dengan koefisien konstanta*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \qquad (2.8.1)$$

Misalkan f sebarang fungsi regular dengan variabel kompleks z, yang mana 0 tidak sama dengan 0 pada polynomial z sehingga berlaku

$$g(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$$

Maka solusi umum dari persamaan (2.8.1) *diberikan oleh*

$$\sum \mathrm{Re}\, s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \qquad (2.8.2)$$

Dimana penjumlahan itu diambil atas semua fungsi singularitas dari

$$z \mapsto \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

Yaitu atas semua nilai 0 dari polynomial g

Bukti : Jika

$$\begin{aligned} y &= \sum \mathrm{Re}\, s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ y' &= \sum \mathrm{Re}\, s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \cdot z \\ y'' &= \sum \mathrm{Re}\, s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \cdot z^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Maka

$$y^{(k)} = \sum \mathrm{Re}\, s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \cdot z^{(k)} \quad (k = 1,...,n)$$

Oleh karena itu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny$$
$$=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\left(z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n\right)=\sum \operatorname{Re}sf(z)e^{zx}=0$$

Karena fungsi $z\mapsto f(z)e^{zx}$ diasumsikan regular, maka menurut teorema 2.4.3 $\operatorname{Re}sf(z)=0$ sehingga $\sum \operatorname{Re}sf(z)e^{zx}=0$

Jadi persamaan (2.8.2) adalah solusi dari persamaan (2.8.1). Akan diberikan bukti bahwa solusi ini adalah umum. Jika r adalah suatu akar sederhana dari persamaan $g(z)=0$, yaitu suatu kutub sederhana dari fungsi

$$z\mapsto \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

Maka

$$\operatorname*{Re}_{z=r}s\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}=\lim_{z\to r}(z-r)\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}=\lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g'(z)}=\frac{f(r)}{g'(r)}e^{rx}$$

Ketika f suatu fungsi sebarang, sehingga $f(r)/g'(r)$ adalah suatu konstanta yang sebarang yang mana akar sederhana dari persamaan karakteristik $g(z)=0$ sesuai dengan suku Ce^{rx} (C adalah konstanta yang sebarang). Sehingga ada tiga kasus yaitu:

1. Jika r adalah akar rangkap, berorder s dari persamaan $g(z)=0$, menurut teorema 2.4.2 maka diperoleh persamaan berikut:

$$\operatorname*{Re}_{z=r}s\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \tag{2.8.3}$$

Dimana $(z-r)^s=g(z)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $s = 1$

$$\underset{z=r}{\mathrm{Re}\,s}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \frac{f(r)e^{rx}}{g(r)} = C_1 e^{rx}$$

Untuk $s=2$

$$\underset{z=r}{\mathrm{Re}\,s}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d}{dz}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\cdot x$$
$$= \frac{f(r)e^{rx}}{g(r)}\cdot x = C_2 x e^{rx}$$
$$\vdots$$

Untuk $s = s$

$$\underset{z=r}{\mathrm{Re}\,s}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{rx}}{g(z)}\cdot x^{s-1}$$
$$= \frac{f(r)e^{rx}}{g(r)}\cdot x^{s-1} = C_s x^{s-1} e^{rx}$$

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r), f'(r),..., f^{(s-1)}(r)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (2.8.3) menjadi

$$\left(C_1 + C_2 x + ... + C_s x^{s-1}\right)e^{rx} \qquad (2.8.4)$$

Dimana $C_1,..., C_s$ adalah konstanta yang sebarang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Jika r adalah akar berbeda, maka

$$\operatorname*{Re}_{z=r} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \tag{2.8.5}$$

Dimana $(z-r_1)(z-r_2)...(z-r_s) = g(z)$

Untuk $z = r_1$

$$\begin{aligned}\operatorname*{Re}_{z=r_1} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r_1} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \lim_{z\to r_1} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \frac{f(r_1)e^{r_1 x}}{g(r_1)} = C_1 e^{r_1 x}\end{aligned}$$

Untuk $z = r_2$

$$\begin{aligned}\operatorname*{Re}_{z=r_2} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r_2} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \lim_{z\to r_2} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \frac{f(r_2)e^{r_2 x}}{g(r_2)} = C_2 e^{r_2 x} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Untuk $z = r_s$

$$\begin{aligned}\operatorname*{Re}_{z=r_s} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r_s} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \lim_{z\to r_s} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \frac{f(r_s)e^{r_s x}}{g(r_s)} = C_s e^{r_s x}\end{aligned}$$

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r_1 = C_1), f(r_2 = C_2),..., f(r_s = C_s)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (2.8.5) menjadi

$$\left(C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} ... + C_s e^{r_s x}\right) \tag{2.8.6}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dimana $C_1,\ldots,C_s$ adalah konstanta yang sebarang

3. Jika r adalah akar kompleks, maka

$$\operatorname*{Re}_{z=r} s\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \qquad (2.8.7)$$

Dimana $(z-r_i)=g(z)$

$$r_i = \alpha+\beta i \qquad ,i=1,2,\ldots,s$$

$$\begin{aligned} Y_i &= e^{(\alpha\pm\beta i)x} \\ &= e^{\alpha x}\pm e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x) \end{aligned}$$

Solusi umumnya yang berkaitan dengan akar kompleks ini adalah:

$$\begin{aligned} Y &= C_1e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)+C_2e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x) \\ &= e^{\alpha x}((C_1+C_2)\cos\beta x+i(C_1-C_2)\sin\beta x) \\ Y &= e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x) \end{aligned}$$

Dimana $A=C_1+C_2,\ B=i(C_1-C_2)$

Untuk $\alpha+i\beta$

$$\begin{aligned} \operatorname*{Re}_{z=r} s\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\ &= \frac{f(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}}{g(\alpha+\beta i)} = C_1e^{(\alpha+\beta i)x} = C_1e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x) \end{aligned}$$

Untuk $\alpha-i\beta$

$$C_2e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

$$\begin{aligned} \textit{maka}\ \ y &= e^{\alpha x}((C_1+C_2)\cos\beta x+(C_1-C_2)i\sin\beta x) \\ &= e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x) \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $\alpha + i\beta$

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\
&= \lim_{z\to r}\frac{d}{dz}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\
&= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\cdot x \\
&= \frac{f(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}}{g(\alpha+\beta i)}\cdot x = C_2 x e^{(\alpha+\beta i)x} = C_2 x e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)
\end{aligned}
$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$
\begin{aligned}
&C_3 x e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \\
&maka\ \ y = xe^{\alpha x}((C_2 + C_3)\cos\beta x + (C_2 - C_3)i\sin\beta x) \\
&\qquad\quad = xe^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

Untuk $\alpha + i\beta$

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\
&= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\
&= \lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\
&= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\cdot x^{s-1} \\
&= \frac{f(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}}{g(\alpha+\beta i)}\cdot x^{s-1} = C_s x^{s-1} e^{(\alpha+\beta i)x} \\
&= C_s x^{s-1} e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)
\end{aligned}
$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$
\begin{aligned}
&C_s x^{s-1} e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x) \\
&maka\ \ y = x^{s-1}e^{\alpha x}((C_s + C_s)\cos\beta x + (C_s - C_s)i\sin\beta x) \\
&\qquad\quad = x^{s-1}e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)
\end{aligned}
$$

Sehingga solusi persamaan (2.8.7) menjadi:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dengan kata lain untuk akar r yang berorder s dari persamaan karakteristik $g(z)=0$ sesuai dengan suku pada persamaan (2.8.4)

Oleh karena itu persamaan (2.8.2) adalah solusi dari persamaan (2.8.1) mengandung n konstanta yang sebarang, yang mengakibatkan persamaan (2.8.2) adalah solusi umum dari persamaan (2.8.1)

Contoh 2.8.2

Diberikan persamaan $y''-2y'+y=0$

Mempunyai

$$y''-2y'+y=0$$
$$r^2-2r+1=0$$
$$(r-1)(r-1)=0$$

$$g(z)=(z-1)^2$$

$$y=\operatorname*{Res}_{z\to 1}\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}$$
$$y'=\operatorname*{Res}_{z\to 1}\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}\cdot z$$
$$y''=\operatorname*{Res}_{z\to 1}\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}\cdot z^2$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y = \sum \operatorname{Re}s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \operatorname*{Re}_{z\to1}s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}\cdot z^2 - 2\operatorname*{Re}_{z\to1}s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}\cdot z + \operatorname*{Re}_{z\to1}s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}$$
$$= \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}\cdot z^2\right) - 2\lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}\cdot z\right) + \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}\right)$$
$$= \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}(z^2-2z+1)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}\right)$$
$$= \lim_{z\to1}(2z-2)\left(\frac{(f'(z)e^{zx}+xf(z)e^{zx})(z-1)^2-2(z-1)f(z)e^{zx}}{(z-1)^4}\right)$$
$$= \lim_{z\to1}(2z-2)\left(\frac{(f'(z)e^{zx}+xf(z)e^{zx})(z-1)^2}{(z-1)^4}-\frac{2(z-1)f(z)e^{zx}}{(z-1)^4}\right)$$
$$= \lim_{z\to1}(2z-2)\left(\frac{(f'(z)+xf(z))e^{zx}}{(z-1)^2}-\frac{2f(z)e^{zx}}{(z-1)^3}\right)$$
$$= (2-2)\left(\frac{f'(1)+xf(1)e^{x}}{(1-1)^2}-\frac{2f(z)e^{x}}{(1-1)^3}\right)$$
$$= 0$$

$$y = \operatorname*{Re}_{z=1}s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \operatorname*{Re}_{z\to1}s \frac{f(z)e^{zx}}{(z-1)^2}$$
$$= \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(f(z)e^{zx}\right)$$
$$= \lim_{z\to1}\left(f'(z)e^{zx}+f(z)xe^{zx}\right)$$
$$= \lim_{z\to1}\left(f'(z)+f(z)\right)e^{zx}$$
$$= \left(f'(1)+xf(1)\right)e^{zx}$$
$$= (C_1+C_2x)e^{zx}$$

Ce^{rx} (C adalah konstanta yang sebarang)

Contoh 2.8.3

Diberikan persamaan $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$

Mempunyai

$$y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$$
$$r^3 + 2r^2 - 5r - 6 = 0$$
$$(r-2)(r+1)(r+3) = 0$$
$$g(z) = (z-2)(z+1)(r+3)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)} + \operatorname*{Res}_{z=-3} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)}$$

$$y' = \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)} \cdot z + \operatorname*{Res}_{z=-3} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)} \cdot z$$
$$y'' = \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z^2 + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)} \cdot z^2 + \operatorname*{Res}_{z=-3} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)} \cdot z^2$$
$$y''' = \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z^3 + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)} \cdot z^3 + \operatorname*{Res}_{z=-3} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)} \cdot z^3$$

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \left(\operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z^3 + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)} \cdot z^3 + \operatorname*{Res}_{z+-3} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)} \cdot z^3 \right) +$$
$$2\left(\operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z^2 + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)} \cdot z^2 + \operatorname*{Res}_{z=-3} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)} \cdot z^2 \right) -$$
$$5\left(\operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} \cdot z + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)} \cdot z + \operatorname*{Res}_{z=-3} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)} \cdot z \right) -$$
$$6\left(\operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)} + \operatorname*{Res}_{z=-3} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)} \right)$$
$$= \lim_{z\to 2}\left(z^3 + 2z^2 - 5z - 6\right)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)}\right) + \lim_{z\to -1}\left(z^3 + 2z^2 - 5z - 6\right)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)}\right)$$
$$\lim_{z\to -3}\left(z^3 + 2z^2 - 5z - 6\right)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)}\right)$$
$$= \left(2^3 + 2(2)^2 - 5.2 - 6\right)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)}\right) + \left(-1^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6\right)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)}\right)$$
$$\left(-3^3 + 2(-3)^2 - 5(-3)6\right)\left(\frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)}\right)$$
$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

$$y = \sum \operatorname{Res} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{f(z)e^{zx}}{(z-2)} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+1)} + \operatorname*{Res}_{z=-3} \frac{f(z)e^{zx}}{(z+3)}$$
$$= \lim_{z\to 2} f(z)e^{zx} + \lim_{z\to -1} f(z)e^{zx} + \lim_{z\to -3} f(z)e^{zx}$$
$$= f(2)e^{2x} + f(-1)e^{-x} + f(-3)e^{-3x}$$
$$= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ce^{rx} (C adalah konstanta yang sebarang)

2.9 Tafsir Al-Qur'an Surah Al-Insyirah ayat 5-6

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥ إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦

"5. Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, 6. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.:"

Menurut Alamah Kamal Faqih Imani (2006) dalam tafsirnya yang berjudul tafsir Nurul Qur'an; meskipun banyak sejumlah mufasir telah memasukkan maksud kesulitan dalam ayat-ayat tersebut kedalam kesengsaraan finansial umum kaum muslim di permulaan Islam, tapi keluasan makna dari ayat tersebut sebenarnya mencakup segala kesulitan. Dua ayat ini dinyatakan dalam suatu gaya yang memperlihatkan bahwa keduanya tidak hanya ditujukan kepada Nabi saw dan umat dizamannya. Aturan ini bersifat umum dan berlaku bagi semua generasi manusia. Kedua ayat ini membesarkan hati kaum mukmin yang ikhlas untuk mengenal dan meyakini, bahwa kesulitan atau kesuakaran apapun yang dihadapinya dijalan Allah, maka Allah senantiasa memberikan solusi, jalan keluar. Allah pasti akan memberikan kunci pembebasan pada suatu jalan yang mengantarkan mereka pada kemudahan dan kebahagiaan. Lebih lanjut dapat diartikan, solusi atau penyingkapan masalah tidak semata-mata datang SETELAH "kesulitan". Tapi ia (kemudahan itu memang disertakan DENGAN-nya (kesulitan). Atau dengan kata lain dalam setiap kesulitan yang dihadapi selalu *disertakan* kemudahan di dalamnya (Alamah Kamal Faqih Imani, 2006:158).

Sayyid Quthb dalam tafsir Fi Zhilalil Qur'an mengatakan "sesungguhnya dalam kesulitan itu tidak terlepas dari kemudahan yang menyertai dan mengiringinya. Hal ini sudah menyertaimu secara praktis. Maka, ketika terasa

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berat beban tugasmu, kami lapangkan dadamu, sehingga terasa ringan beban yang memberatkan punggungmu. Kemudahan akan selalu mengiringi kesulitan, menghilangkan beban dan rasa beratnya. Persoalan tersebut serius hingga diulang 2 kali penyebutan kalimatnya. Arti ayat tersebut juga mengisyaratkan bahwa Rasul saw. Berada dalam kesulitan, kesempitan dan penderitaan yang, memerlukan perhatian seperti ini (Sayyid Quthb, 2001:296).

Sedangkan menurut Dr Aisyah dalam Tafsir Bintusy-Syathi' mengatakan bahwa 2 ayat tersebut terjadi pengulangan untuk meniadakan keraguan dan mengukuhkan kesenangan. Para ahli *balaghah* (gaya bahasa) menganggap pengulangan tersebut termasuk *ithn'ab* yang berlebihan *mus'aw'ah*. Dan ia memalingkan kita dari *bayan Qur'ni* (keterangan Al-Qur'an) bahwa pengulangan juga terjadi di dalam surah-surah yang pendek di antaranya surah Al-Qadr, Al-tak'atsur, Al-Kafirun, dan Al-Nas, di mana dalam keadaan yang seperti tak ada pengulangan kata atau kalimat. Konteks ayat-ayat "pertanyaan-penetapan' dan 'pengukuhan penyampaian' dengan *laka* dan *'angka* merintis jalan bagi ketetapan pasti dan tegas untuk mengahadapi segala keraguan.

Di antara para mufasir ada yang berpaling kepada penggunaan ma'a (bersama atau beserta), atau yang serupa dengannya, menunjukkan perbedaan waktu. Al-Zamakhsyari mengatakan" sesungguhnya Ma'a adalah shuhbah (kebersamaan dalam berkawan). Dan maknanya adalah kemudahan menyertai kesulitan, bahwa Allah akan menimpakan kepada mereka-yakni orang-orang beriman kemudahan, sesudah kesulitan. Maka didekatkanlah kemudahan sehingga ia seakan dijadikan sebagai rangkaian dari kesulitan, untuk hiburan dan menguatkan hati.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Tertulis dalam *Al-Bahr Al-muh'ith:"* konon di dalam setiap kesulitan ada kemudahan, yakni bahwa *Al'usr* (kesulitan) diketahui sebagai janji dan *Al-yusr* sebagai suatu ketunggalan dan keduanya berbeda. Begitu juga kemudahan kedua itupun satu. Apabila ia kalimat baru, maka iapun dua. Dan bila tidak, tentulah menyalahi aturan. Dan apabila yang dijanjikan itu dua, maka menurut lahirnya kedua kemudahan itu berbeda. Bila tidak , maka seharusnya sebaiknya di ulang '*al-yusr*' yang kedua dengan pengertian suatu janji. Sehingga, ia adalah satu. Pengulangan pertama adalah untuk memantapkannya di dalam jiwa. Namun sebaiknya, kemudahan di dalamnya berbeda dengan yang pertama karena tidak ada pengertian janji (Dr Aisyah, 1996:116).

Kita memandang bahwa urusan itu lebih jelas dari pada sekedar memaksakan penjelasan-penjelasan rumit yang mengesampingkan aspek *bayan*. Kita sampai pada kesimpulan urusan tersebut bahwa dua kemudahan tidak dikalahkan oleh satu kesulitan. Atau bahwa ayat yang kedua adalah kalimat baru, "sehingga maknanya lebih penting dari mendahuluinya".

Kita lebih cenderung bahwa ayat kedua merupakan pengukuhan ayat pertama untuk memperkuat keyakinan jiwa dan mengukuhkan karunia Allah kepada hamba-Nya, misalnya kelapangan dada dan pelepasan beban. Pendapat yang kuat bahwa *al* didalam *al-u'sr* adalah untuk *'ahd* (perjanjian), bukan sekedar penghamburan ungkapan. Maksudnya, Rasul tak merasakan kesempitan dada, beban yang berat, serta problem berat. Adapun penunggalan *yusr*, kemudahan, adalah agar terbentang didalamnya medan konsepsi dan kebebasan, sehingga ada gambaran yang lebih luas, seperti dikatan oleh mufasir. Sebab pembatasan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pemahaman *yusr* disini menghiraukan informasi Qurani dan lebih menyukai "kebebasan" tanpa batas (Dr Aisyah, 1996:118).

Firman-Nya, "*karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,"* ayat ini merupakan kabar gembira akan datangya kemudahan untuk beliau dan para sahabatnya setelah 17merasakan pahit getirnya hidup, maka Rasulullah saw mengabarkan kabar gembira ini kepada para sahabatnya dengan mengatakan, "sesuatu kesulitan tidak akan mengalahkan dua kemudahan, suatu kesulitan tidak akan mengalahkan dua kemudahan". Dari ayat tersebut para mufasir menjelaskan, misalnya ketika engkau telah selesai dari shalat dan berzikir, maka bersegeralah untuk menyelesaikan pekerjaan dunianmu. Karena engkau telah selesai berjihad, maka lanjutkanlah dengan ibadah haji. Maksudnya bahwa setiap muslim hidup dengan penuh kesungguhan dan susah payah, tidak ada waktu yang sia-sia dan untuk bermain atau untuk bermalas-malasan dan melakukan kebatilan (Jabir Al-jazair, 2009: 967).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang bagaimana cara menyelesaikan persamaan diferensial Cauchy-Euler orde-*n* dengan Teorema Residu.

3.1 Solusi umum dari persamaan diferensial Cauchy-Euler Homogen

Teorema 3.1.1 *Persamaan diferensial Cauchy-Euler Homogen*

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (3.1.1)$$

Misalkan f sebarang fungsi regular, dan dimana jumlah yang diambil semuanya adalah nol dari polynomial g sehingga berlaku

$$g(z) = A^n z(z-1)\ldots(z-n-1) + a_1 A^{n-1} z(z-1)\ldots(z-n+2) + \ldots + a_{n-1} A z + a_n$$

Maka solusi umum dari persamaan (3.1.1) *diberikan oleh*

$$y = \sum \operatorname{Re} s \frac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)} \qquad (3.1.2)$$

Dimana penjumlahan itu diambil atas semua fungsi singularitas dari

$$z \mapsto \frac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)}$$

Yaitu atas semua nilai 0 dari polynomial g

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti : Jika

$$y=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)(Ax+B)^{z}}{g(z)}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}\left(\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)(Ax+B)^{z}}{g(z)}\right)$$

$$=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)(Ax+B)^{z-1}}{g(z)}.z.A$$

$$=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)(Ax+B)^{z-1}}{g(z)}.z$$

$$y''=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)(Ax+B)^{z-2}}{g(z)}.z(z-1)$$

$$y'''=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)(Ax+B)^{z-3}}{g(z)}.z(z-1)(z-2)$$

$$\vdots$$

$$y^{n-1}=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)(Ax+B)^{z-(n-1)}}{g(z)}.z(z-1)(z-2)...(z-n+1)$$

Maka

$$y^{k}=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)(Ax+B)^{z-k}}{g(z)}.z(z-1)(z-2)...(z-(k-1)),\ (k=1,...,n)$$

Oleh karena itu

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny$$

$$=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)(Ax+B)^{z}}{g(z)}\left(A^{n}z(z-1)...(z-n-1)+a_1A^{n-1}z(z-1)...(z-n+2)+...+a_{n-1}Az+a_n\right)$$

$$=\sum \operatorname{Re}sf(z)(Ax+B)^{z}=0$$

Karena fungsi $z\mapsto f(z)(Ax+B)^{z}$ diasumsikan regular, maka menurut teorema 2.4.3 $\operatorname{Re}s\, f(z)=0$ sehingga $\sum \operatorname{Re}sf(z)(Ax+B)^{z}=0$

Jadi persamaan (3.1.2) adalah solusi dari persamaan (3.1.1). Akan diberikan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

bukti bahwa solusi ini adalah umum. Jika r adalah suatu akar sederhana dari persamaan $g(z)=0$, yaitu suatu kutub sederhana dari fungsi

$$z \mapsto \frac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)}$$

Maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)}$$

$$= \lim_{z\to r}(z-r)\frac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)}$$

$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)(Ax+B)^z}{g'(z)} = \frac{f(r)}{g'(r)}(Ax+B)^{zr}$$

Ketika f suatu fungsi sebarang, sehingga $f(r)/g'(r)$ adalah suatu konstanta yang sebarang yang mana akar sederhana dari persamaan karakteristik $g(z)=0$ sesuai dengan suku Ce^r (C adalah konstanta yang sebarang). Sehingga ada tiga kasus yaitu:

1. Jika r adalah akar rangkap, berorder s dari persamaan $g(z)=0$, menurut teorema 2.4.2 maka diperoleh persamaan berikut:

   Misal $(Ax+B)=e^z \to z=\ln(Ax+B)$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^z}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^z}{g(z)} \qquad (3.1.3)$$

   Dimana $(z-r)^s = g(z)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $s = 1$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} s \frac{f(z)e^z}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^z}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^z}{g(z)}$$
$$= \frac{f(r)e^r}{g(r)} = C_1 e^r$$

Untuk $s = 2$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} s \frac{f(z)e^z}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^z}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d}{dz}\frac{f(z)e^z}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^z}{g(z)}\cdot z$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^z}{g(z)}\cdot\ln(Ax+B)$$
$$= \frac{f(r)e^r}{g(r)}\cdot\ln(Ax+B) = C_2 e^r \ln(Ax+B)$$
$$\vdots$$

Untuk $s = s$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} s \frac{f(z)e^z}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^z}{g(z)}$$
$$= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^z}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^z}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^z}{g(z)}\cdot z^{s-1}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^z}{g(z)}\cdot\ln^{s-1}(Ax+B)$$
$$= \frac{f(r)e^r}{g(r)}\cdot\ln^{s-1}(Ax+B) = C_s e^r \ln^{s-1}(Ax+B)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r), f'(r), ..., f^{(s-1)}(r)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (3.1.3) menjadi

$$\left(C_1 + C_2 \ln\left(Ax+B\right) + ... + C_s \ln\left(Ax+B\right)^{s-1}\right)e^r \quad (3.1.4)$$

Dimana $C_1, ..., C_s$ adalah konstanta yang sebarang

2. Jika r adalah akar berbeda, maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} s \frac{f(z)e^z}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^z}{g(z)} \quad (3.1.5)$$

Dimana $(z-r_1)(z-r_2)...(z-r_s) = g(z)$

Untuk $z = r_1$

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=r_1} s \frac{f(z)e^z}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r_1} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^z}{g(z)} \\ &= \lim_{z\to r_1} \frac{f(z)e^{z-1}}{g(z)} z \\ &= \frac{f(r_1)e^{r_1-1}}{g(r_1)} r_1 = C_1 r_1 e^{r_1-1} \end{aligned}$$

Untuk $z = r_2$

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=r_2} s \frac{f(z)e^z}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r_2} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^z}{g(z)} \\ &= \lim_{z\to r_2} \frac{f(z)e^{z-2}}{g(z)} z(z-1) \\ &= \frac{f(r_2)e^{r_2-2}}{g(r_2)} r_2 = C_2 r_2 (r_2-1) e^{r_2-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $z = r_s$

$$\operatorname*{Re}_{z=r_s} s\frac{f(z)e^{z}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r_s}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{z}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r_s}\frac{f(z)e^{z-n}}{g(z)}.z(z-1)(z-2)...(z-(n-1))$$
$$= \frac{f(r_s)e^{r_s-n}}{g(r_s)}.r_1(r_2-1)(r_3-2)...(r_n-n+1)$$
$$= C_s e^{r_s-n} r_1(r_2-1)(r_3-2)...(r_n-n+1)$$

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r_1 = C_1), f(r_2 = C_2),..., f(r_s = C_s)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (3.1.5) menjadi

$$\left(C_1 r_1 e^{r_1-1} + C_2 r_2(r_2-1)e^{r_2-2} + ... + C_s e^{r_s-n} r_1(r_2-1)(r_3-2)...(r_n-n+1)\right) \quad (3.1.6)$$

Dimana $C_1,...,C_s$ adalah konstanta yang sebarang

3. Jika r adalah akar kompleks, maka

$$\operatorname*{Re}_{z=r} s\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \quad (3.1.7)$$

Dimana $(z - r_i) = g(z)$

$r_i = \alpha + \beta i \qquad ,i = 1,2,...,s$

$$Y_i = e^{(\alpha\pm\beta i)x}$$
$$= e^{\alpha x} \pm e^{i\beta x}$$
$$= e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x}$$
$$= e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm i\sin\beta x)$$

Solusi umumnya yang berkaitan dengan akar kompleks ini adalah:

$$Y = C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$
$$= e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x)$$
$$Y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dimana $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$

Untuk $\alpha + i\beta$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \frac{f(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}}{g(\alpha+\beta i)} = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} = C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$
$$maka\ \ y = e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)i\sin\beta x)$$
$$= e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

Untuk $\alpha + i\beta$

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d}{dz}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\cdot x$$
$$= \frac{f(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}}{g(\alpha+\beta i)}\cdot x = C_2 x e^{(\alpha+\beta i)x} = C_2 x e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$C_3 x e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$
$$maka\ \ y = x e^{\alpha x}((C_2 + C_3)\cos\beta x + (C_2 - C_3)i\sin\beta x)$$
$$= x e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$
$$\vdots$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $\alpha + i\beta$

$$\operatorname*{Re}_{z=r} s \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \cdot x^{s-1}$$
$$= \frac{f(\alpha+\beta i)e^{(\alpha+\beta i)x}}{g(\alpha+\beta i)} \cdot x^{s-1} = C_s x^{s-1} e^{(\alpha+\beta i)x}$$
$$= C_s x^{s-1} e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$C_s x^{s-1} e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$
$$maka\ \ y = x^{s-1}e^{\alpha x}((C_s + C_s)\cos\beta x + (C_s - C_s)i\sin\beta x)$$
$$= x^{s-1}e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

Sehingga solusi persamaan (3.1.7) menjadi:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Dengan kata lain untuk akar r yang berorder s dari persamaan karakteristik $g(z)=0$ sesuai dengan suku pada persamaan (3.1.4)

Oleh karena itu persamaan (3.1.2) adalah solusi dari persamaan (3.1.1) mengandung n konstanta yang sebarang, yang mengakibatkan persamaan (3.1.2) adalah solusi umum dari persamaan (3.1.1)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 3.1.1

Diberikan persamaan $x^3 \dfrac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 3x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

Jawab :

Kita subsitusikan $x = e^t$ untuk di trasformasikan ke persamaan di atas dengan variabel bebasnya adalah t.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t = x\frac{dy}{dx};$$

Maka

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2 y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2 y}{dx^2}e^t$$

$$= \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$x^2\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{d^3y}{dt^3}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$=\left(\frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)+x\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{d}{dt}x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+x^2\frac{d}{dt}\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$=\left(x\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}\right)+\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$=\left(x\frac{dy}{dx}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\left(x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x^3\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$=\frac{dy}{dt}+2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x^3\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$=\frac{dy}{dt}+2\frac{d^2y}{dt^2}+x^3\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}=\frac{dy}{dt}+2x^2\frac{d^2y}{dt^2}+x^3\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx}{dt}$$

Maka $\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{dy}{dt}+x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dt}=x\frac{dy}{dx}$$

Substitusikan

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2x^2\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+3\frac{dy}{dt}-y=0$$

Misal $dy/dt = r$

$$r^3-3r^2+3r-1=0$$
$$(r-1)(r-1)(r-1)=0$$

$$g(z)=(z-1)^3$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y = \operatorname*{Re\,s}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3}$$

$$y' = \operatorname*{Re\,s}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \cdot z$$

$$y'' = \operatorname*{Re\,s}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \cdot z^2$$

$$y''' = \operatorname*{Re\,s}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \cdot z^3$$

$$\begin{aligned}
y &= \sum \operatorname{Re\,s} \frac{f(z)e^{zt}}{g(z)} \\
&= \operatorname*{Re\,s}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \cdot z^3 - 3\operatorname*{Re\,s}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \cdot z^2 + 3\operatorname*{Re\,s}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \cdot z + \operatorname*{Re\,s}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \cdot z^3\right) - 3\lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \cdot z^2\right) + 3\lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3} \cdot z\right) + \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3}\right) \\
&= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(z^3 - 3z^2 + 3z + 1\right)\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3}\right) \\
&= \lim_{z\to 1} \left(3z^2 - 6z + 3\right)\left(\frac{(f'(z)e^{zt} + tf(z)e^{zt})(z-1)^3 - 3(z-1)^2 f(z)e^{zt}}{(z-1)^6}\right) \\
&= \lim_{z\to 1} \left(3z^2 - 6z + 3\right)\left(\frac{(f'(z)e^{zt} + tf(z)e^{zt})(z-1)^3}{(z-1)^6} - \frac{3(z-1)^2 f(z)e^{zt}}{(z-1)^6}\right) \\
&= \lim_{z\to 1} \left(3z^2 - 6z + 3\right)\left(\frac{(f'(z) + tf(z))e^{zt}}{(z-1)^3} - \frac{3f(z)e^{zt}}{(z-1)^4}\right) \\
&= (3 - 6 + 3)\left(\frac{f'(1) + tf(1)e^{t}}{(1-1)^3} - \frac{3f(z)e^{t}}{(1-1)^4}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y = \operatorname*{Re\,s}_{z=1} \frac{f(z)e^{zt}}{g(z)} = \operatorname*{Re\,s}_{z\to 1} \frac{f(z)e^{zt}}{(z-1)^3}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz}\left(f(z)e^{zt}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(f'(z)e^{zt} + f(z)te^{zt}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(f'(z) + f(z)\right)e^{zt}$$

$$= \left(f'(1) + f(1)\right)e^{z}$$

$$= \left(C_1 + C_2\right)e^{z}$$

$$= \left(C_1 + C_2\right)x^{z}$$

Cx^{rt} (C adalah konstanta yang sebarang)

Contoh 3.1.2

Diberikan persamaan $x^4 \dfrac{d^4 y}{dx^4} - x^3 \dfrac{d^3 y}{dx^3} - 7x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

Jawab :

Kita subsitusikan $x = e^t$ untuk di trasformasikan ke persamaan di atas dengan variabel bebasnya adalah *t*.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t = x\frac{dy}{dx};$$

Maka

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2 y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2 y}{dx^2}e^t$$

$$= \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$$x^2\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) + x\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{d}{dt}x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x^2\frac{d}{dt}\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$= \left(x\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}\right) + \left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \left(x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^3\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

$$= x\frac{dy}{dx} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^3\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$= \frac{dy}{dt} + 2\frac{d^2y}{dt^2} + x^3\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\frac{d^4y}{dt^4} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x^3\frac{d^3y}{dt^3}\right)$$

$$= \left(\frac{dx}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) + x\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}\right) + \left(\frac{d}{dt}2x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 2x^2\frac{d}{dt}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dx^3}{dt}\left(\frac{d^3y}{d^3x}\right) + x^3\frac{d}{dt}\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

$$= \left(x\frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}\right) + \left(2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2\frac{d^3y}{dx^3}\frac{dx}{dt}\right) + \left(x^3\frac{d^3y}{dx^3} + x^3\frac{d^4y}{dx^4}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \left(x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^3\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \left(x^3\frac{d^3y}{dx^3} + x^4\frac{d^4y}{dx^4}\right)$$

$$= x\frac{dy}{dx} + 3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^3\frac{d^3y}{dx^3} + x^4\frac{d^4y}{dx^4}$$

$$= \frac{dy}{dt} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{d^3y}{dt^3} + x^4\frac{d^4y}{dx^4}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka

$$x^4\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^4y}{dt^4}-3\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

Substitusikan

$$x^4\frac{d^4y}{dx^4}+2x^3\frac{d^3y}{dx^3}+14x^2\frac{d^2y}{dx^2}+18x\frac{dy}{dx}+6y=0$$

$$\left(\frac{d^4y}{dt^4}-3\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+2\left(\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+14\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+18\left(\frac{dy}{dt}\right)+6y=0$$

Misal $dy/dt = r$

$$r^4-15r^2+10r+24=0$$

$$(r-3)(r-2)(r+1)(r+4)=0$$

$$g(z)=(r-3)(r-2)(r+1)(r+4)$$

$$y=\sum \operatorname{Re}s\frac{f(z)e^{zt}}{g(z)}$$

$$=\operatorname{Re}s_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}+\operatorname{Re}s_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}+\operatorname{Re}s_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}+\operatorname{Re}s_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}$$

$$y'=\operatorname{Re}s_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}\cdot z+\operatorname{Re}s_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}\cdot z+\operatorname{Re}s_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}\cdot z+\operatorname{Re}s_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\cdot z$$

$$y''=\operatorname{Re}s_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}\cdot z^2+\operatorname{Re}s_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}\cdot z^2+\operatorname{Re}s_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}\cdot z^2+\operatorname{Re}s_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\cdot z^2$$

$$y'''=\operatorname{Re}s_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}\cdot z^3+\operatorname{Re}s_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}\cdot z^3+\operatorname{Re}s_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}\cdot z^3+\operatorname{Re}s_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\cdot z^3$$

$$y''''=\operatorname{Re}s_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}\cdot z^4+\operatorname{Re}s_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}\cdot z^4+\operatorname{Re}s_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}\cdot z^4+\operatorname{Re}s_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\cdot z^4$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$y=\sum \operatorname{Res}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

$$=\left(\operatorname*{Res}_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}\cdot z^4+\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}\cdot z^4+\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}\cdot z^4+\operatorname*{Res}_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\cdot z^4\right)-$$

$$15\left(\operatorname*{Res}_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}\cdot z^2+\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}\cdot z^2+\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}\cdot z^2+\operatorname*{Res}_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\cdot z^2\right)+$$

$$10\left(\operatorname*{Res}_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}\cdot z+\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}\cdot z+\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}\cdot z+\operatorname*{Res}_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\cdot z\right)+$$

$$24\left(\operatorname*{Res}_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}+\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}+\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}+\operatorname*{Res}_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\right)$$

$$=\lim_{z\to 3}\left(z^4-15z^2+10z+24\right)\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}\right)+\lim_{z\to 2}\left(z^4-15z^2+10z+24\right)\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}\right)$$

$$+\lim_{z\to -1}\left(z^4-15z^2+10z+24\right)\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}\right)+\lim_{z\to -4}\left(z^4-15z^2+10z+24\right)\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\right)$$

$$=\left(3^4-15(3)^2+10(3)+24\right)\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}\right)+\left(2^4-15(2)^2+10(2)+24\right)\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}\right)$$

$$\left((-1)^4-15(-1)^2+10(-1)+24\right)\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}\right)+\left((-4)^4-15(-4)^2+10(-4)+24\right)\left(\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}\right)$$

$$=0+0+0=0$$

$$y=\sum \operatorname{Res}\frac{f(z)e^{zt}}{g(z)}$$

$$=\operatorname*{Res}_{z=3}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-3)}+\operatorname*{Res}_{z=2}\frac{f(z)e^{zt}}{(z-2)}+\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+1)}+\operatorname*{Res}_{z=-4}\frac{f(z)e^{zt}}{(z+4)}$$

$$=\lim_{z\to 3}f(z)e^{zt}+\lim_{z\to 2}f(z)e^{zt}+\lim_{z\to -1}f(z)e^{zt}+\lim_{z\to -4}f(z)e^{zt}$$

$$=f(3)e^{3t}+f(2)e^{2t}+f(-1)e^{-t}+f(-4)e^{-4t}$$

$$=C_1e^{3t}+C_2e^{2t}+C_3e^{-x}+C_4e^{-4x}$$

$$=C_1x^3+C_2x^2+C_3x^{-1}+C_4x^{-4}$$

Cx^{rt} (C adalah konstanta yang sebarang)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 3.1.3

Diberikan persamaan $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

Jawab :

Kita subsitusikan $x = e^t$ untuk di trasformasikan ke persamaan di atas dengan variabel bebasnya adalah *t*.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t = x\frac{dy}{dx};$$

Maka

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}e^t$$

$$= \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

Maka $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$
$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

Substitusikan

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 3\left(\frac{dy}{dt}\right) + 5y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 5y = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Misal *dy/dt* = *r*

$r^2 - 4r + 5 = 0$

Maka akar karakteristiknya $4 \pm 2i$ $\quad ,i = 1, 2, 3, ...$

Dimana $(z - r_i) = g(z)$

$$
\begin{aligned}
Y_i &= e^{(4\pm 2i)x} \\
&= e^{4x} \pm e^{i2x} \\
&= e^{4x} \cdot e^{i2x} \\
&= e^{4x}(\cos 2x \pm i \sin 2x)
\end{aligned}
$$

Solusi umumnya yang berkaitan dengan akar kompleks ini adalah:

$$
\begin{aligned}
Y &= C_1 e^{4x}(\cos 2x + i \sin 2x) + C_2 e^{4x}(\cos 2x - i \sin 2x) \\
&= e^{4x}((C_1 + C_2)\cos 2x + i(C_1 - C_2)\sin 2x) \\
Y &= e^{4x}(A\cos 2x + B\sin 2x)
\end{aligned}
$$

Dimana $A = C_1 + C_2,\ B = i(C_1 - C_2)$

Untuk $\alpha + i\beta$ $,\alpha = 4, \beta = 2$

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} &= \frac{1}{(s-1)!} \lim_{z\to r} \frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}} \cdot \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\
&= \lim_{z\to r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} \\
&= \frac{f(4+2i)e^{(4+2i)x}}{g(4+2i)} = C_1 e^{(4+2i)x} = C_1 e^{4x}(\cos 2x + i \sin 2x)
\end{aligned}
$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$
\begin{aligned}
&C_2 e^{4x}(\cos 2x - i \sin 2x) \\
&maka\ \ y = e^{4x}((C_1 + C_2)\cos 2x + (C_1 - C_2)i \sin 2x) \\
&\qquad\quad = e^{4x}(A\cos 2x + B\sin 2x)
\end{aligned}
$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $\alpha + i\beta$

$$\underset{z=r}{\operatorname{Re}s}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d}{dz}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\cdot x$$
$$= \frac{f(4+2i)e^{(4+2i)x}}{g(4+2i)}\cdot x = C_2 xe^{(4+2i)x} = C_2 xe^{4x}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

Untuk $\alpha - i\beta$

$$C_3 xe^{4x}(\cos 2x - i\sin 2x)$$
$$maka\ \ y = xe^{4x}\left((C_2 + C_3)\cos 2x + (C_2 - C_3)i\sin 2x\right)$$
$$= xe^{4x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$$
$$\vdots$$

Untuk $\alpha + i\beta$

$$\underset{z=r}{\operatorname{Re}s}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$
$$= \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}\cdot x^{s-1}$$
$$= \frac{f(4+2i)e^{(4+2i)x}}{g(4+2i)}\cdot x^{s-1} = C_s x^{s-1}e^{(4+2i)x}$$
$$= C_s x^{s-1}e^{4x}(\cos 2x + i\sin 2x)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Untuk $\alpha - i\beta$

$$C_s x^{s-1} e^{4x} \left(\cos 2x - i \sin 2x\right)$$

$$maka \;\; y = x^{s-1} e^{4x} \left(\left(C_s + C_s\right)\cos 2x + \left(C_s - C_s\right) i \sin 2x\right)$$

$$= x^{s-1} e^{4x} \left(A \cos 2x + B \sin 2x\right)$$

Sehingga solusi persamaan (3.1.7) menjadi:

$$e^{4x}\cos 2x, xe^{4x}\cos 2x, x^2 e^{4x}\cos 2x, \ldots, x^{s-1}e^{4x}\cos 2x$$

$$e^{4x}\sin 2x, xe^{4x}\sin 2x, x^2 e^{4x}\sin 2x, \ldots, x^{s-1}e^{4x}\sin 2x$$

3.2 Pemecahan problema secara matematis dan menurut agama Islam

Penyelesaian suatu persamaan Cauchy-Euler membutuhkan suatu tatacara dan urutan serta pengaplikasian teorema yang sesuai supaya dapat terselesaikan, dalam hal ini peneliti mencoba menyelesaikan persamaan Cauchy-Euler dengan mengaplikasikan teorema Residu, dalam proses tersebut haruslah dapat dibuktikan bahwa teorema Residu tersebut bisa menyelesaikan persamaan Cauchy-Euler. Fenomena ini apabila kita lihat dari sudut pandang seorang muslim sama halnya dalam menyelesaikan suatu permasalahan haruslah dengan usaha dan doa. Selain itu kita juga harus tetap yakin bahwa dalam kesulita pastiterdapat kemudahan bgi orang-orang yang berusaha. Hal ini sesuai dengan firman ALLAH SWT dalam Al-Qur'an Surat AL-Insyroh ayat 5-6

فَإِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

"5. Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, 6. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.:"

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Belajar memahami dan memecahkan suatu persoalan dengan ikhlas dan tetap berpegang teguh pada ayat-ayat Allah merupakan suatu keharusan bagi seorang muslim. Dengan melakukan penelitian ini penulis memahami bahwa dalam menyelesaikan suatu masalah kita harus berusaha, sabar dan ihklas, karena di dalam kesulitan pasti ada kemudahan, atau dengan kata lain di dalam kesulitan pasti disertakan juga jalan keluarnya. Penulis juga yakin akan firman Allah dalam Al-Qur'an Surat AL-Insyroh ayat 5-6 yang menyebutkan *5. 'Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, 6. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan'.* Menurut Imani (2006) Kedua ayat ini membesarkan hati kaum mukmin yang ikhlas untuk mengenal dan dan meyakini, bahwa kesulitan atau kesuakaran apapun yang dihadapinya dijalan Allah, maka Allah senantiasa memberikan solusi, jalan keluar. Allah pasti akan memberikan kunci pembebasan pada suatu jalan yang mengantarkan mereka pada kemudahan dan kebahagiaan.

Sama halnya peneliti dalam menyelesaikan problema persamaan Cauchy euler ini $(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ yang menghasilkan solusi umum dari persamaan tersebut yaitu: $y = \sum \operatorname{Re} s \dfrac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)}$ hal ini telah dibuktikan oleh peneliti dalam pembahasan. Bisa peneliti fikirkan apabila teorema tidak sesuai dalam mengaplikasikannya pada suatu teorema maka sulit ditemukan pemecahannya. Fakta peneliti dalam menyelesaikan tugas ini memberikan gambaran akan pentingya seorang muslim yang baik haruslah sesuai dengan kaidah ajaran islam. Pada agama islam sangat jelas dalam menyelesaikan suatu problema hendaklah berhujjah pada Al-qur'an selanjutnya lebih diperinci oleh

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sunnah Rasulullah saw yang mutawatir dan shoheh. Selanjutnya apabila masih ada masalah sulit/ rancu dari sisa hukum yang didapat maka disarankan dengan bermusyawarah dengan para tabi'ien dan ulama.

Menurut ulama-ulama fiqh, dasar-dasar hukum dalam menyelesaikan masalah bagi seorang muslim dapat diurutkan mulai bersandar pada Al-Qur'an, Hadits, Ijma (persepakatan ulama-ulama islam dalam manentukan masalah ijtihadiyah) dan Qiyas (menetapkan suatu hukum terhadap suatu hal yang belum diterangkan oleh al-Qur'an dan al-Sunnah dengan dianalogikan kepada hukum sesuatu yang sudah diterangkan hukumnya oleh al-Qur'an atau al-Sunnah, karena ada sebab (*illah*) yang sama). Diriwayatkan pada suatu ketika Nabi mengutus sahabatnya ke Yaman untuk menjadi Gubernur disana. Sebelum berangkat Nabi menguji sahabatnya Mu'as bin Jabal dengan menanyakan sumber hukum yang akan dipergunakan kelak untuk memecahkan berbagai masalah dan sengketa yang dijumpai di daerah tersebut. Pertanyaan itu dijawab oleh Mu'as dengan mengatakan bahwa dia akan mempergunakan Qur'an, sedangkan jika tidak terdapat di Qur'an dia akan mempergunakan Hadist dan jika tidak ditemukan di hadist maka dia akan mempergunakan akal dan akan mengikuti pendapatnya itu. Berdasarkan Hadist Mu'as bin Jabal dapat disimpulkan bahwa sumber hukum Islam ada tiga, yaitu: Qur'an, Sunnah Rasul dan Akal pikiran manusia yang memenuhi syarat untuk berijtihad (Abdullah, 2004).

Sama halnya bagi peneliti dalam menyelesaikan masalah matematis ini sebenarnya sesuai atau bisa dibilang diambil dari tatacara seorang muslim dalam mengambil suatu hukum dalam menyelesaikan suatu masalah. Buktinya pada tahap awal peneliti menganalisis persamaan Cauchy-Euler dan teorema yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

benar-benar sesuai berdasarkan peneliti sebelumnya Ike Harlin, (2009) dengan judul “Aplikasi Teorema Residu Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linier Orde-n, dalam hal ini peneliti telah mebuktikan teorema Residu dan terbukti dapat diaplikasikan pada persamaan Cauchy-Euler. Fenomena tersebut sesuai dengan seorang muslim yang ingin menyelesaikan problema dengan berhujjah pada kitabullah dan al-hadits, yang dalam islam juga dibutuhkan tatacara yang benar-benar sesuai untuk mencari ayat yang sesuai dengan problema yang dihadapi, sehingga perlu dianalisa secara mendalam. Jadi meskipun banyak ayat dan hokum dalam Islam dalam menyelesaikan suatu maslah haruslah dipilih yang paling tepat dan akurat.

Permasalahan yang dihadapi peneliti juga memerlukan bantuan pengembangan dalam menyelesaikan masalah ini, sebab soal persamaan Cauchy-Euler merupakan pengembangan dari suatu ilmu matematika secara umum begitu juga dengan teorema Residu juga merupakan suatu teorema yang diaplikasikan dan menghasilkan suatu akar - akar persamaan diferensial Cauchy-Euler yaitu: akar rangkap $r_1 = r_2 = r_3 = ... = r_n$, akar berbeda $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq ..., r_{n-1} \neq r_n$, dan akar kompleks $r_i = \alpha \pm \beta i$, dan akar-akar tersebut harus diselesaikan dengan pemfaktoran secara umum.

Sebenarnya proses yang dilakukan peneliti bisa dimisalkan dalam islam dalam menenkan hukum khomer dan alkohol, yang seelain menggunakan Al-Qur’an dan Hadits juga dengan Qiyas. Fakta ini bisa kita fahami bahwa Qiyas adalah menyamakan hukum syara’ satu kasus dengan kasus lain karena keduanya mempunyai persamaan illat atau keduanya mempunyai persamaan penyebab adanya hukum syara bagi masing-masing. Yang dijadikan rujukan adalah kasus

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

yang ada ketentuannya dalam Al-Qur'an dan/atau Hadits, yaitu dengan membandingkan illat-nya atau sebabnya dengan kasus yang akan ditetapkan hukumnya. Contoh hukum yang ditetapkan dengan qiyas adalah keharaman alkohol dimana alkohol memiliki sifat yang sama dengan khamar, yaitu memabukkan bagi yang meminumnya, dan permasalahan tersebut tidak berhenti disitu saja sebab sekarang ada yang namanya tape dan ketan yang dalam pembuatan melalui proses fermentasi dan jelas mengandung alcohol dan hal tersebut merupakan topic yang cukup diperbincangkan dikalangan ulama sekarang (Bakry, 1984). Fenomena tersebut juga sama halnya dengan masalah yang dialami peneliti, dari hasil pembuktian masih terdapat akar-akar yang harus diturunkan untuk diselesaikan sesuai dengan langkah-langkah pembahasan yang ada.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

Ada beberapa hal yang perlu dicatat sebagai kesimpulan dan saran untuk pengembangan dan perbaikan dalam menentukan persamaan diferensial Cauchy-euler orde-n dengan menggunakan Teorema Residu.

4.1 Kesimpulan

Dari hasil kajian sebelumnya dapat diambil kesimpulan bahwa jika diberikan Persamaan Diferensial Cauchy-euler Homogen Orde-n yang mempunyai bentuk umum:

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \tag{4.1.1}$$

mempunyai penyelesaian:

$$y = \sum \operatorname{Re} s \frac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)} \tag{4.1.2}$$

Dengan

$g(z) = A^n z(z-1)...(z-n-1) + a_1 A^{n-1} z(z-1)...(z-n+2) + ... + a_{n-1} Az + a_n$ dan $f(z)$ adalah fungsi regular.

Dimana penjumlahan itu diambil atas semua fungsi singularitas dari

$$z \mapsto \frac{f(z)(Ax+B)^z}{g(z)}$$

yaitu atas semua nilai 0 dari polynomial g

Untuk mencari bentuk-bentuk solusi dari persamaan diferensial Cauchy-euler homogen digunakan sifat:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^z}{g(z)} = \lim_{z\to r}(z-r)\frac{f(z)e^z}{g(z)} = \lim_{z\to r}\frac{f(z)e^z}{g'(z)} = \frac{f(r)}{g'(r)}e^r$$

Dalam menemukan solusi persamaan diferensial linear orde-n dengan menggunakan Teorema Residu mempunyai 3 jenis penyelesaian sebagai berikut:

1. Jika r adalah akar rangkap, berorder s dari persamaan $g(z)=0$, maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^z}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^z}{g(z)}$$

Dimana $(z-r)^s = g(z)$

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r), f'(r),\ldots, f^{(s-1)}(r)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (3) menjadi

$$\left(C_1 + C_2\ln(Ax+B) + \ldots + C_s\ln(Ax+B)^{s-1}\right)e^r$$

Dimana $C_1,\ldots,C_s$ adalah konstanta yang sebarang

2. Jika r adalah akar berbeda, maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^z}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^z}{g(z)}$$

Dimana $(z-r_1)(z-r_2)\ldots(z-r_s) = g(z)$

Ketika f fungsi yang sebarang, $f(r_1 = C_1), f(r_2 = C_2),\ldots, f(r_s = C_s)$ konstanta sebarang, jadi persamaan (5) menjadi

$$\left(C_1 r_1 e^{r_1} + C_2 r_2(r_2-1)e^{r_2-1} + \ldots + C_s e^{r_s-n} r_1(r_2-1)(r_3-2)\ldots(r_n-n+1)\right)$$

Dimana $C_1,\ldots,C_s$ adalah konstanta yang sebarang

3. Jika r adalah akar kompleks, maka

$$\operatorname*{Res}_{z=r} \frac{f(z)e^{zx}}{g(z)} = \frac{1}{(s-1)!}\lim_{z\to r}\frac{\partial^{s-1}}{\partial z^{s-1}}\cdot\frac{f(z)e^{zx}}{g(z)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dimana $(z - r_i) = g(z)$

$$r_i = \alpha + \beta i \qquad , i = 1,2,\ldots, s$$

$$\begin{aligned} Y_i &= e^{(\alpha + \beta i)x} \\ &= e^{\alpha x} + e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) \end{aligned}$$

Solusi umumnya yang berkaitan dengan akar kompleks ini adalah:

$$\begin{aligned} Y &= C_1 e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ &= e^{\alpha x}((C_1 + C_2)\cos \beta x + i(C_1 - C_2)\sin \beta x) \\ Y &= e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x) \end{aligned}$$

Dimana $A = C_1 + C_2$, $B = i(C_1 - C_2)$

Sehingga solusi persamaan menjadi:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{s-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{s-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

4.2 Saran

Skripsi ini merupakan tulisan tentang menentukan persamaan diferensial cauchy-euler orde-n homogen dengan menggunakan Teorema Residu. Peneliti lain disarankan untuk mengembangkan aplikasi Teorema Residu pada masalah lainnya seperti pada persamaan diferensial parsial.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrahman Aisyah.2001. **Tafsir Bintushi-syathi'.** Bandung: Al-Mizan

Al-jazairi Jabir Abu Bakar.2009. **Tafsir Al-Quran Al-Aisar jilid 7.** Jakarta Timur: Darus Sunnah Press.

Baiduri, 2001. **Persamaan Diferensial dan Matematika Model**. Malang: UMM Press.

Bakry, Nazar Drs. 1984. **Fiqh dan Ushul Fiqh. Padang** : Aksara Persada. Abidin

Finizio, 1988. **Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua**. Jakarta: Erlangga.

Faqih Imani, Alamah kamal. 2006. **Tafsir nurul Quran.** Jakarta: Al-Huda.

John, D. Paliouras, 1975. **Peubah Kompleks untuk Ilmuan dan Insinyur**. Rochester Institute ot Tecnology.

Kartono, 1994. **Persamaan Diferensial**, Yogyakarta: Andy Ofset.

Mitrinovie, D. S, Keekie, J. D, 1983. **The Cauchy Method of Residues**. University of Belgrade, Yugoslavia.

Murray, R. Spigel, 1964, **Peubah Kompleks**, Schaum's series, Mc Graw-Hill.

Murray, R. Spigel, 1965. **Transformasi Laplace**, Schaum's series, Mc Graw-Hill.

Mursita, Danang, 2005. **Matematika Lanjut untuk Perguruan Tinggi.** Bandung.

Quthb,Sayyid, 2001, **Tafsir fi Zhilalil Qur'an Jilid 12.** Jakarta: Gema Insani

Richard, Haberman. **Elementary Applied Partial Diferential Equation with Fourier series and Boundary Value Problem**. Prentice Hall International,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Inc.

Saff, E.B, Snider, A.D, 1993, **Fundamental of Complex Analysis for Mathematics**, **Science, and Engineering**, Prentice Hall Inc, America.

Soemantri, R, 1994, **Fungsi Variabel Kompleks**, Yogyakarta.

William, E. Boyce, Richard C. Diprima, 1986**, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**, Canada.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ike Norma Yunita
NIM : 06510030
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Aplikasi Residu Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Cauchy - Euler Orde-n
Pembimbing I : Hairur Rahman M.Si
Pembimbing II : Achmad Nashichuddin, M. A

No	Tanggal	Hal Yang Dikonsultasikan	Tanda Tangan	
1.	11 januari 2010	Judul dan rumusan masalah	1.	
2.	28 Juni 2010	Konsultasi BAB I & BAB II		2.
3.	30 Juni 2010	Konsultasi BAB I & BAB II kajian agama	3.	
4.	3 Juli 2010	ACC seminar proposal skripsi kajian agama		4.
5.	12 Juli 2010	ACC seminar Proposal skripsi	5.	
6.	17 Juli 2010	Revisi BAB I		6.
7.	18 Juli 2010	Revisi BAB I kajian agama	7.	
8.	23 Juli 2010	ACC BAB I kajian agama		8.
9.	24 Juli 2010	Revisi BAB I	9.	
10.	4 Agustus 2010	Konsultasi BAB II kajian agama		10.
11.	7 Agustus 2010	ACC BAB I	11.	
12.	19 Agustus 2010	Revisi BAB II kajian agama		12.
13.	23 Agustus 2010	Konsultasi BAB II	13.	
14.	27 Agustus 2010	ACC BAB II kajian agama		14.
15.	28 Agustus 2010	Revisi BAB II	15.	

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

16.	25 September 2010	ACC BAB II		16.
17.	29 September 2010	Konsultasi BAB III	17.	
18.	1 November 2010	Konsultasi BAB III		18.
19.	11 November 2010	Konsultasi BAB III dan BAB IV	19.	
20.	13 November 2010	ACC BAB III dan BAB IV		20.
21.	13 November 2010	ACC Keseluruhan	21.	
22.	15 November 2010	ACC Kajian Agama		22.
23.	18 November 2010	ACC Keseluruhan	23.	

Malang, 19 November 2010

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BIODATA MAHASISWA

Nama	:	Ike Norma Yunita
NIM	:	06510030
Tempat Tanggal Lahir	:	Probolinggo, 19 juni 1988
Fak./Jur./Program Studi	:	Sains dan Teknologi / Matematika / Matematika
Tahun Masuk	:	2006
Alamat Rumah	:	Dusun Krajan II rt. 05 rw. 02 Karanggeger, Pajarakan , Probolinggo 67281
No Hp	:	085790852319

Malang, 19 November 2010
Mahasiswa

Ike Norma Yunita
NIM. 06510030

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG