

**PEMBUKTIAN TEOREMA
POLINOMIAL KHROMATIK DALAM *SUDOKU***

SKRIPSI

Oleh :
LUTFI ARISATUN NISWAH
NIM. 04510042



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009**

**PEMBUKTIAN TEOREMA
POLINOMIAL KHROMATIK DALAM *SUDOKU***

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S. Si)

Oleh :
LUTFI ARISATUN NISWAH
NIM. 04510042



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009**

**PEMBUKTIAN TEOREMA
POLINOMIAL KHROMATIK DALAM *SUDOKU***

SKRIPSI

Oleh :
LUTFI ARISATUN NISWAH
NIM. 04510042

Telah disetujui untuk diuji
Malang, 16 Januari 2009

Dosen Pembimbing I

Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 150 291 271

Dosen Pembimbing II

Ahmad Barizi, M.A
NIP. 150 283 991

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

**PEMBUKTIAN TEOREMA
POLINOMIAL KHROMATIK DALAM SUDOKU**

SKRIPSI

Oleh :

**LUTFI ARISATUN NISWAH
NIM. 04510042**

Telah Dipertahankan di Depan Dosen Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
19 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji:

Tanda Tangan

- | | | | |
|------------------|---|---|---|
| 1. Penguji Utama | : <u>Dr. H. Turmudzi, M.Si</u> NIP. 150 209 630 | (|) |
| 2. Ketua | : <u>Usman Pagalay, M.Si</u> NIP. 150 327 240 | (|) |
| 3. Sekretaris | : <u>Evawati Alisah, M.Pd</u> NIP. 150 291 271 | (|) |
| 4. Anggota | : <u>Ahmad Barizi, M.A</u> NIP. 150 283 991 | (|) |

**Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika**

Sri Harini, M.Si
NIP: 150 318 321

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Lutfi Arisatun Niswah

NIM : 04510042

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dalam bentuk kutipan yang telah disebutkan sumbernya.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Januari 2009

Yang membuat pernyataan

Lutfi Arisatun Niswah
NIM. 04510042

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۖ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۗ

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”

(al-Insyirah : 5, 6)

*“Kapal akan aman berada di pelabuhan,
tetapi kapal dibuat tidak untuk itu”*

(Grace Murray Hopper)

Dengan mengucapkan rasa syukur kepada Allah skripsi ini
kupersembahkan untuk :

Bapak Tamrudin (Alm.) dan Ibu Siti Masfufah (sumber motivasi)
Mbahkung, Mak, Bulek, Paklek, dan keluarga tercinta
Guru-guru dan dosen-dosen
Elis (thnx a lot atas motivasi & bantuan terjemah), Rozin, Ihza, Ci, Eyi
Vera (thnx dah nganter konsultasi)
So2, Ri2s, Mb Inoel (tq bgt atas pinjaman computer slama kul, dll)
H5, Ima2h, Mude
Seluruh kru Sunan Ampel 11
Teman2 math angkatan 2004

KATA PENGANTAR

Segala puji bagi Allah SWT, karena atas limpahan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, skripsi dengan judul ” Pembuktian Teorema Polinomial Khromatik dalam *Sudoku*” dapat terselesaikan, sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.

Skripsi ini dapat terselesaikan atas bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terimakasih disampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
3. Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd selaku Dosen Pembimbing I yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan pengarahan dalam bidang Matematika selama penulisan skripsi.
5. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing II yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan pengarahan dalam bidang Agama selama penulisan skripsi.
6. Segenap dosen pengajar atas ilmu yang telah diberikan.
7. Semua pihak yang telah membantu penyelesaian skripsi ini.

Dalam penulisan skripsi ini, tentu masih banyak terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak. Amin

Malang, 16 Januari 2009

Penulis



DAFTAR ISI

| | |
|---|-----|
| KATA PENGANTAR | i |
| DAFTAR ISI | iii |
| DAFTAR GAMBAR | v |
| ABSTRAK | vii |
| | |
| BAB I : PENDAHULUAN | |
| 1.1 Latar Belakang Masalah | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah..... | 5 |
| 1.3 Tujuan Penelitian | 5 |
| 1.4 Manfaat Penelitian | 6 |
| 1.5 Metode Penelitian | 6 |
| 1.6 Sistematika Pembahasan..... | 7 |
| | |
| BAB II : KAJIAN TEORI | |
| 2.1 Graf..... | 8 |
| 2.1.1 Terminologi dalam Graf..... | 8 |
| 2.1.2 Macam-macam Graf..... | 12 |
| 2.2 Pewarnaan Graf | 13 |
| 2.2.1 Bilangan Khromatik | 19 |
| 2.2.2 Polinomial Khromatik | 20 |
| 2.2.3 Pewarnaan Parsial..... | 24 |
| 2.3 Pembuktian dalam Matematika | 25 |
| 2.4 Inversi Mobius pada Himpunan Terurut Parsial..... | 29 |
| 2.4.1 Himpunan Terurut Parsial (<i>Poset</i>)..... | 29 |
| 2.4.2 Inversi Mobius pada <i>Poset</i> | 32 |
| 2.5 <i>Sudoku</i> | 34 |

BAB III : PEMBAHASAN

| | |
|---|----|
| 3.1 Pewarnaan Graf pada <i>Sudoku</i> | 38 |
| 3.2 Pembuktian Teorema I | 40 |
| 3.2.1 Bukti Pertama | 42 |
| 3.2.2 Bukti Kedua | 52 |
| 3.3 Pembuktian Teorema II | 53 |

BAB IV PENUTUP

| | |
|----------------------|----|
| 4.1 Kesimpulan | 58 |
| 4.2 Saran | 59 |

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN



DAFTAR GAMBAR

| | |
|---|----|
| 2.1 Contoh Graf..... | 8 |
| 2.2 Lup dan Sisi Rangkap | 9 |
| 2.3 Adjasensi dan Insidensi Graf | 9 |
| 2.4 Derajat Titik pada Graf G | 9 |
| 2.5 H Subgraf dari G | 10 |
| 2.6 Graf Isomorfik..... | 10 |
| 2.7 Jalan pada Graf G | 11 |
| 2.8 Trail pada Graf G | 11 |
| 2.9 Trail Tertutup dan Sikel pada Graf G dan H | 11 |
| 2.10 Graf Nol dengan 6 Titik (N_6)..... | 12 |
| 2.11 Graf Lingkaran..... | 13 |
| 2.12 Graf Lintasan..... | 13 |
| 2.13 Pewarnaan Titik pada Graf G | 14 |
| 2.14 Pewarnaan Sisi pada Graf G | 14 |
| 2.15 Penetapan Waktu Shalat Fardlu Sebagai Pewarnaan Graf..... | 17 |
| 2.16 Graf Berwarna dengan Bilangan Khromatik 3..... | 19 |
| 2.17 Polinomial Khromatik pada Graf K_3 | 20 |
| 2.18 Pewarnaan Parsial dari Sebuah Graf..... | 24 |
| 2.19 Pewarnaan-3 dari Sebuah Graf..... | 24 |
| 2.20 <i>Sudoku</i> | 32 |
| 2.21 <i>Sudoku</i> 4×4 dan <i>Squify</i> | 33 |
| 3.1 Graf <i>Sudoku</i> 4×4 | 35 |
| 3.2 Teka-teki <i>Sudoku</i> 4×4 Berkorepondensi dengan Pewarnaan Parsial Graf | 36 |
| 3.3 Penyelesaian <i>Sudoku</i> 4×4 Berkorepondensi dengan Pewarnaan Graf | 37 |
| 3.4 Graf (K_4, C) | 38 |
| 3.5 Cara Melengkapi K_4 dengan λ Warna..... | 38 |
| 3.6 Cara Melengkapi Pewarnaan K_4 dengan 4 Warna..... | 39 |

| | |
|--|----|
| 3.7 Graf (G, C) | 42 |
| 3.8 Anggota Himpunan P | 42 |
| 3.9 Pewarnaan (G, C) Secara Sembarang dengan 3 Warna | 45 |
| 3.10 Pewarnaan dari Beberapa Graf di P | 46 |
| 3.11 Pewarnaan Parsial Graf G | 49 |
| 3.12 Cara Melengkapi Pewarnaan Graf G | 50 |
| 3.13 Pewarnaan Parsial Graf H | 50 |
| 3.14 Cara Melengkapi Pewarnaan Graf H | 50 |
| 3.15 Pewarnaan Parsial Graf J | 51 |
| 3.16 Cara Melengkapi Pewarnaan Graf J | 52 |



ABSTRAK

Niswah, Lutfi Arisatun. 2009. **Pembuktian Teorema Polinomial Khromatik dalam Sudoku**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd. (II) Ahmad Barizi, M.A.

Kata Kunci: Polinomial Khromatik, *Sudoku*, Pewarnaan Parsial, Polinomial Monik, Fungsi Mobius pada *Poset*, Induksi Kuat.

Sudoku dapat dipandang sebagai pewarnaan parsial dari graf. Banyak cara menyelesaikan *sudoku* sama dengan banyak cara mewarnai titik-titik graf yang belum diwarnai, yang dinyatakan dengan polinomial khromatik. Hal ini menjadi ide teorema I dan II yang ditulis Agnez M. Herzberg dan M. Ram Murty, yang dalam skripsi ini disebut teorema polinomial khromatik dalam *sudoku*. Teorema adalah pernyataan yang dapat ditunjukkan kebenarannya. Dalam al-Quran surat an-Naml ayat 64 disebutkan, "... *Katakanlah: 'Unjukkanlah bukti kebenaranmu, jika kamu memang orang-orang yang benar'* ". Ayat tersebut bermakna bahwa setiap yang benar pasti dapat ditunjukkan bukti kebenarannya, termasuk teorema. Oleh karena itu, skripsi ini bermaksud menjabarkan pembuktian teorema polinomial khromatik dalam *sudoku*.

Misal G merupakan graf sederhana, dan $p_G(k)$ adalah banyak cara mewarnai titik G dengan k warna sedemikian hingga tidak ada dua titik adjasen mendapat warna sama. Fungsi $p_G(k)$ disebut polinomial khromatik G . Polinomial khromatik adalah polinomial monik, yaitu polinomial dengan koefisien utama 1. *Sudoku* adalah teka-teki angka yang tengah menjadi *trend*. Tujuan dari teka-teki ini adalah mengisikan angka 1 sampai 9 ke dalam 9×9 persegi yang terdiri dari sembilan kotak berisi 3×3 persegi, tanpa ada angka yang terulang pada setiap baris, kolom, dan kotak.

Langkah-langkah untuk membuktikan teorema I yaitu: menunjukkan bahwa himpunan S yang dilengkapi dengan relasi subgraf " \leq " adalah *poset*, menunjukkan berlakunya inversi mobius pada penjabaran hipotesis teorema I sehingga diperoleh $p_{G,C}(\lambda) = \sum_{(G',C) \leq (G,C)} q_{G',C}(\lambda) \mu((G',C), (G,C))$, menunjukkan

kebenaran konklusi teorema I, menunjukkan kebenaran teorema I untuk jumlah sisi graf adalah nol, mengasumsikan benar untuk semua graf dengan jumlah sisi kurang dari jumlah sisi graf (G, C) , dan menunjukkan kebenaran teorema I untuk graf (G, C) . Sedangkan teorema II dibuktikan dengan menunjukkan kebenaran hipotesis teorema II sehingga kebenaran konklusinya dapat ditunjukkan.

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini, teorema I dapat dibuktikan dengan dua cara. Cara pertama dengan pembuktian langsung yang menggunakan teori *poset* dan fungsi mobius pada *poset*. Cara kedua dengan pembuktian induksi kuat pada jumlah sisi graf. Adapun teorema II dapat dibuktikan dengan pembuktian langsung.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika seringkali didefinisikan sebagai ilmu pengetahuan yang mempelajari tentang bilangan dan bangun (datar dan ruang). Definisi tersebut benar, jika dipandang dari segi wilayah kajian. Namun kecenderungan pada saat ini, definisi matematika lebih dikaitkan dengan kemampuan berpikir yang digunakan para matematikawan. NRC (*National Research Council*) dari Amerika Serikat menyatakan dengan singkat bahwa “*Mathematics is a science of patterns and order.*” Artinya, matematika adalah ilmu yang membahas pola atau keteraturan dan tingkatan (Shadiq, 2007: 6).

Alam semesta memuat pola-pola atau keteraturan-keteraturan. Matahari, bumi, bulan, serta planet-planet yang lain berbentuk bola. Lintasan bumi saat mengelilingi matahari, demikian juga lintasan-lintasan planet lain saat mengelilingi matahari, berbentuk elip. Alam semesta diciptakan Allah dengan perhitungan-perhitungan yang cermat, sehingga membentuk pola-pola tertentu. Allah berfirman dalam al-Quran surat al-Qamar ayat 49.

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya : “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*” (Qs. al-Qamar/54: 49).

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika tidak membuat suatu rumus sedikitpun, melainkan hanya menemukan rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysykir, 2007: 79, 80).

Dengan demikian, dunia matematika lahir dari rahim kesadaran bahwa alam semesta diatur oleh hukum-hukum yang teratur. Dari kesadaran yang sedemikian itu, manusia lalu berusaha mencandra hukum-hukum keteraturan yang diikuti oleh alam tersebut. Dari pencandraan itu, manusia lalu bisa menentukan dan mengatur apa yang harus dilakukannya. Hukum keteraturan di alam menjadi petunjuk dan landasan bagi manusia untuk bertindak di alam ini (Alisah dan Dharmawan, 2007: 16, 17).

Matematika memiliki beberapa pokok bahasan, salah satunya adalah graf. Wilson & Watkins (1990: 10) menyatakan, graf terdiri dari himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik, dan daftar pasangan tak berurutan dari elemen-elemen tersebut yang dinamakan sisi. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan sebagai visualisasi obyek-obyek agar lebih mudah dimengerti. Contoh graf dalam kehidupan sehari-hari antara lain: struktur organisasi, bagan alir pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik, dan lain-lain (Siang, 2004: 187).

Salah satu topik menarik pada graf adalah pewarnaan graf, yaitu pemberian warna (biasanya berupa bilangan bulat 1, 2, 3, ...) pada titik atau sisi graf. Pewarnaan graf dibagi menjadi dua macam, yaitu pewarnaan titik dan pewarnaan

sisi. Namun, jika tidak diberikan kualifikasinya, pewarnaan graf diartikan sebagai pewarnaan titik. Jika warna tertentu diberikan pada sebuah graf, maka ada beberapa cara untuk mewarnai graf tersebut. Banyak cara mewarnai graf dengan warna tertentu dinyatakan dalam polinomial khromatik atau suku banyak khromatik.

Masalah pewarnaan graf memiliki banyak aplikasi, misalnya penentuan jadwal ujian. Jadwal ujian ditentukan sedemikian sehingga tidak ada mahasiswa yang memiliki dua mata kuliah yang diujikan pada waktu bersamaan. Contoh lainnya adalah saluran televisi ditentukan ke pemancar-pemancar, sedemikian sehingga tidak ada dua pemancar dapat beroperasi pada saluran yang sama dalam jarak tertentu (Rosen, 2003: 618). Selain kedua masalah tersebut, ternyata pewarnaan graf telah berkembang pada suatu permainan yang sangat terkenal yaitu *sudoku*.

Sudoku merupakan teka-teki angka yang diciptakan oleh Howard Gams dan diterbitkan oleh Dell Magazines pada tahun 1979 dengan nama *number place*. Teka-teki ini menjadi terkenal di Jepang pada 1986, setelah diterbitkan oleh Nikoli dengan nama *sudoku*, yang berarti angka-angkanya harus tetap tunggal (<http://id.wikipedia.org/wiki/sudoku>). Tujuan dari permainan ini adalah mengisikan angka 1 sampai 9 ke dalam 9×9 persegi yang terdiri dari sembilan kotak berisi 3×3 persegi, tanpa ada angka yang terulang pada setiap baris, kolom, dan kotak. Karena hanya berupa angka, *sudoku* diminati banyak orang dan menjadi *trend* di berbagai belahan dunia sejak diterbitkan pertama kali di harian The Times pada tahun 2004.

Ketika seseorang mencoba bermain *sudoku*, mungkin akan muncul beberapa pertanyaan. Misalnya, apakah teka-teki ini memiliki penyelesaian? Jika ada, apakah penyelesaiannya hanya satu? Jika penyelesaiannya tidak satu, berapa banyak penyelesaian yang ada? Pertanyaan-pertanyaan tersebut membawa Agnez M. Herzberg dan M. Ram Murty kepada dua teorema tentang polinomial khromatik yaitu:

Teorema I. Misal G adalah graf dengan v titik dan C adalah pewarnaan parsial dari t titik di G dengan menggunakan d_0 warna. Misal $p_{G,C}(\lambda)$ adalah banyak cara melengkapi pewarnaan ini dengan λ warna untuk memperoleh pewarnaan dari G . Maka, $p_{G,C}(\lambda)$ adalah polinomial monik (dalam λ) berderajat $v-t$ dengan koefisien-koefisien bilangan bulat untuk $\lambda \geq d_0$.

Teorema II. Misal G adalah graf dengan bilangan kromatik $\chi(G)$ dan C adalah pewarnaan parsial dari G dengan hanya menggunakan $\chi(G)-2$ warna. Jika pewarnaan parsial dapat dilengkapi untuk pewarnaan total dari G , maka terdapat paling sedikit dua cara dari penambahan pewarnaan (Herzberg dan Murty, 2007: 708-710).

Teka-teki *sudoku* dapat dipandang sebagai pewarnaan parsial dari graf. Banyak cara menyelesaikan teka-teki *sudoku* akan sama dengan banyak cara mewarnai titik-titik yang belum diwarnai, yang dinyatakan dengan polinomial khromatik. Inilah yang menjadi ide dua teorema tersebut. Sehingga, dua teorema tersebut dikatakan sebagai teorema polinomial khromatik dalam *sudoku*.

Teorema adalah pernyataan yang dapat ditunjukkan kebenarannya. Teorema dapat ditunjukkan kebenarannya dengan serangkaian pernyataan yang membentuk

sebuah argumen, disebut bukti. Bukti pada sebuah teorema berperan sebagai jaminan kebenaran. Allah SWT telah berfirman dalam surat an-Naml ayat 64.

قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِن كُنْتُمْ صَادِقِينَ ﴿٦٤﴾

Artinya : “... Katakanlah: ‘Unjukkanlah bukti kebenaranmu, jika kamu memang orang-orang yang benar’ ” (Qs. an-Naml/27: 64).

Ayat di atas berkaitan dengan pembuktian teorema. Bahwa setiap yang benar pasti dapat ditunjukkan bukti kebenarannya. Dengan demikian, kedua teorema di atas juga dapat ditunjukkan kebenarannya dengan bukti.

Berdasarkan uraian yang telah disebutkan, skripsi ini bermaksud menjabarkan pembuktian dua teorema yang ditulis oleh Agnez M. Herzberg dan M. Ram Murty, yaitu teorema polinomial khromatik dalam *sudoku*.

1.2 Rumusan Masalah

Latar belakang yang telah diuraikan mendasari adanya rumusan masalah dalam penelitian ini yaitu ”bagaimana pembuktian teorema polinomial khromatik dalam *sudoku*?”.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah disebutkan, maka tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan pembuktian teorema polinomial khromatik dalam *sudoku*.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi:

- a. Peneliti, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai pembuktian teorema polinomial khromatik dalam *sudoku*.
- b. Pembaca, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika khususnya teori graf mengenai pembuktian teorema polinomial khromatik dalam *sudoku*.
- c. UIN Malang, sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan, khususnya di Jurusan Matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode kajian literatur yaitu metode yang penelitiannya dilakukan dengan menggunakan studi kepustakaan dengan sumber-sumber buku, teks, dan dokumen.

Dalam skripsi ini juga digunakan metode analisis isi (*content analysis*) yaitu penelitian atau kajian yang dilakukan dengan menelaah dari masing-masing teori yang digunakan sebagai dasar pembuktian atau metode penelitian, memanfaatkan seperangkat prosedur untuk menarik kesimpulan yang sohih dari sebuah buku atau dokumen (Handayani, 2005: 7).

Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Menunjukkan *poset* dari penjabaran hipotesis teorema I.
2. Menunjukkan berlakunya inversi mobius pada penjabaran hipotesis teorema I.

3. Menunjukkan kebenaran konklusi teorema I.
4. Menunjukkan kebenaran teorema I untuk jumlah sisi terkecil dari graf.
5. Mengasumsikan benar untuk semua graf dengan jumlah sisi kurang dari jumlah sisi graf yang akan dibuktikan.
6. Menunjukkan kebenaran teorema I untuk graf yang akan dibuktikan.
7. Menunjukkan kebenaran hipotesis teorema II.
8. Menunjukkan kebenaran konklusi teorema II.

1.6 Sistematika Pembahasan

Penelitian ini disusun secara sistematis dengan perincian sebagai berikut :

Bab I merupakan pendahuluan yang membahas tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

Bab II berupa kajian teori yang berisikan teori-teori yang dapat dijadikan sebagai dasar/landasan dalam penelitian ini. Teori-teori tersebut meliputi graf, pewarnaan graf, pembuktian dalam matematika, inversi mobius pada himpunan terurut parsial, dan *sudoku*.

Bab III menyajikan pembahasan yang merupakan inti dari penelitian.

Bab IV merupakan sajian penutup yang meliputi kesimpulan dan saran yang terkait dengan temuan studi.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Graf

2.1.1 Terminologi dalam Graf

Definisi 1. Graf G terdiri dari himpunan tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik, dan daftar pasangan tak berurutan dari elemen-elemen tersebut, yang dinamakan sisi. Himpunan titik-titik dari graf G disebut himpunan titik dari G yang dinotasikan dengan $V(G)$, dan daftar sisi-sisi yang disebut daftar sisi dari G yang dinotasikan dengan $E(G)$ (Wilson & Watkins, 1989: 10).



Gambar 2.1
Contoh Graf

Definisi 2. Dua atau lebih sisi yang menghubungkan sepasang titik yang sama disebut sisi rangkap, dan sisi yang menghubungkan sebuah titik pada dirinya sendiri disebut lup. Graf yang tidak memiliki lup atau sisi rangkap disebut graf sederhana (Wilson & Watkins, 1989: 10).

Gambar 2.1 merupakan contoh graf sederhana, karena ketiga graf tidak memiliki lup atau sisi rangkap. Adapun gambar 2.2 merupakan contoh lup dan sisi rangkap.



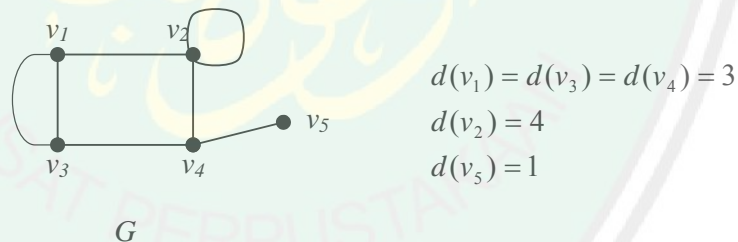
Gambar 2.2
Lup dan Sisi Rangkap

Definisi 3. Misal v dan w adalah titik-titik dari graf. Jika v dan w dihubungkan oleh sisi e , maka v dan w dikatakan adjasen. Selain itu, v dan w dikatakan insiden dengan e , dan e dikatakan insiden dengan v dan w (Wilson & Watkins, 1989: 31).



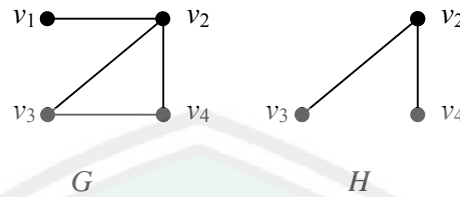
Gambar 2.3
Adjasensi dan Insidensi Graf

Definisi 4. Jumlah sisi yang menempel pada titik v (lup dihitung dua kali), disebut derajat (*degree*) dari titik tersebut dan dinotasikan $d(v)$ (Sutarno, 2005: 69).



Gambar 2.4
Derajat Titik pada Graf G

Definisi 5. Graf H adalah graf bagian atau subgraf dari G , dinotasikan $H \leq G$, jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Sutarno, 2005: 87).



Gambar 2.5
 H Subgraf dari G

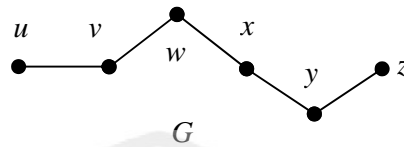
Definisi 6. Graf G dan H adalah isomorfik jika H dapat diperoleh dari G dengan melabeli kembali titik-titiknya. Berarti, jika terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik dari G dan titik-titik dari H , sedemikian hingga jumlah sisi penghubung beberapa pasang titik pada G sama dengan jumlah sisi penghubung yang berkorespondensi dengan pasangan titik pada H (Wilson dan Watkins, 1989: 15).



Gambar 2.6
Graf Isomorfik

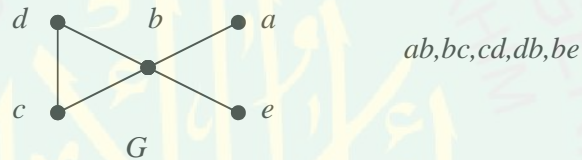
Graf G dan H adalah isomorfik, karena titik-titik di G berkorespondensi satu-satu dengan titik-titik di H . Titik u berkorespondensi dengan titik c , titik v berkorespondensi dengan titik b , dan titik w berkorespondensi dengan titik a .

Definisi 7. Jalan sepanjang k pada graf G adalah urutan k sisi dari G yang berbentuk uv, vw, \dots, yz . Jalan ini dituliskan dengan $uvw \dots yz$, dan merupakan jalan antara titik u dan titik z (Wilson dan Watkins, 1989: 34).



Gambar 2.7
Jalan pada graf G

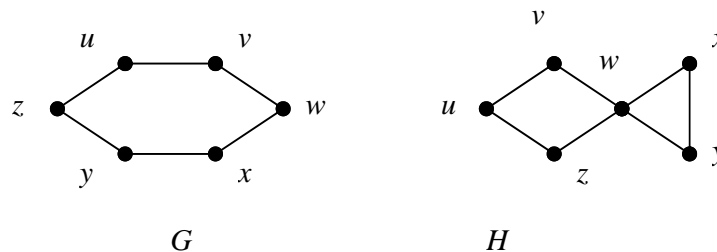
Definisi 8. Jika semua sisi (tidak perlu semua titik) dari jalan adalah berbeda, maka jalan itu disebut trail. Jika semua titik pada trail adalah berbeda, maka trail itu disebut path atau lintasan (Wilson dan Watkins, 1989: 35).



Gambar 2.8
Trail pada Graf G

Graf G pada Gambar 2.7 merupakan contoh graf yang memuat trail dan path sekaligus.

Definisi 9. Jalan tertutup pada graf G adalah urutan sisi di G berbentuk uv , vw , wx , ..., zu . Jika semua sisi tersebut berbeda, maka jalan itu disebut trail tertutup. Jika titik-titik tersebut semuanya berbeda, maka trail itu disebut siklus (Wilson dan Watkins, 1989: 35).



Gambar 2.9

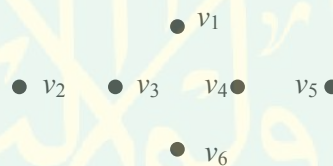
Trail Tertutup dan Sikel pada Graf G dan H

Graf G pada Gambar 2.8 memuat trail tertutup sekaligus sikel yaitu uv, vw, wx, xy, yz, zu . Graf H pada Gambar 2.8 memuat trail tertutup $uv, vw, wx, xy, yw, wz, zu$ dan sikel wx, xy, yw .

2.1.2 Macam-macam Graf

Ada banyak macam graf yang dikelompokkan berdasarkan sudut pandang tertentu. Tetapi, dalam sub bab ini hanya diberikan empat macam graf yang akan disebutkan pada sub bab selanjutnya.

Definisi 10. Graf nol atau graf kosong adalah graf yang tidak memiliki sisi. Graf nol dengan n titik dinotasikan dengan N_n (Wilson & Watkins, 1989: 36).

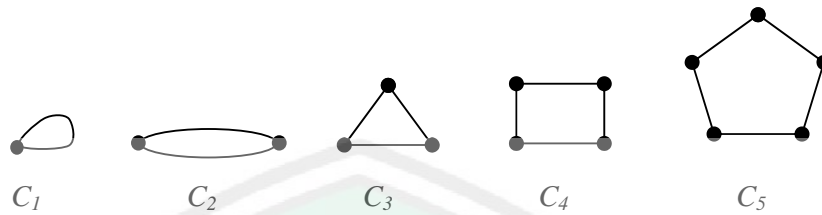


Gambar 2.10
Graf Nol dengan 6 Titik (N_6)

Definisi 11. Graf lengkap adalah graf dengan setiap dua titik berbeda darinya dihubungkan oleh tepat satu sisi. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n (Wilson dan Watkins, 1989: 36).

Gambar 2.1 secara berturut-turut adalah graf lengkap K_1, K_2 , dan K_3 .

Definisi 12. Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n (Munir, 2001: 204).



Gambar 2.11
Graf Lingkaran

Definisi 13. Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan sebagai P_n (Wilson & Watkins, 1990: 37).



Gambar 2.12
Graf Lintasan

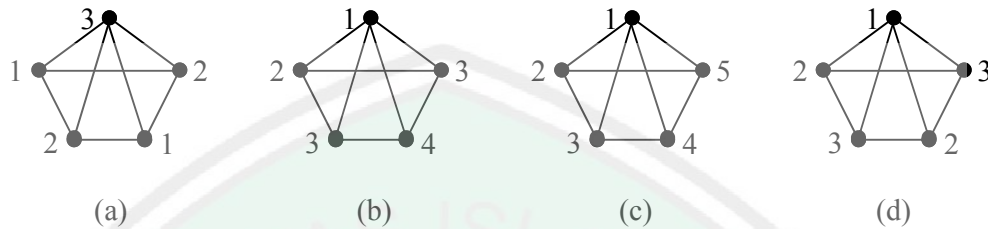
Perhatikan bahwa P_n mempunyai $n - 1$ sisi dan dapat diperoleh dari graf sikel C_n dengan menghilangkan beberapa titik.

2.2 Pewarnaan Graf

Pewarnaan graf terbagi menjadi dua macam yaitu pewarnaan titik dan pewarnaan sisi. Pewarnaan titik didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 14. Jika G adalah graf tanpa lup, pewarnaan titik- k untuk G merupakan penunjukkan k warna pada titik G sedemikian hingga titik-titik yang adjasen mendapat warna berbeda. Jika G memiliki pewarnaan- k , maka G dikatakan dapat diwarna- k (Wilson dan Watkins, 1989: 235).

Berikut adalah contoh pewarnaan titik pada graf G .



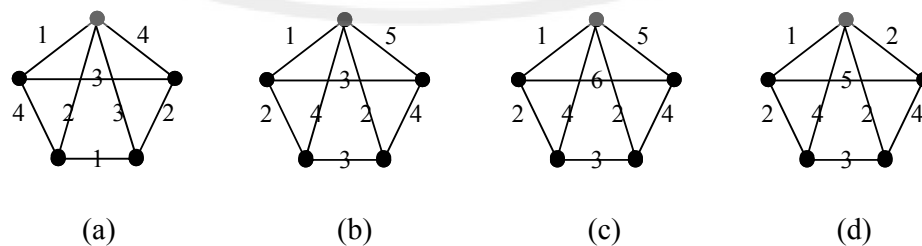
Gambar 2.13
Pewarnaan Titik pada Graf G

Gambar 2.13 (a), (b), dan (c) secara berturut-turut adalah pewarnaan-3, pewarnaan-4, dan pewarnaan-5 dari graf G . Gambar 2.13 (d) bukan merupakan pewarnaan titik dari graf G , karena terdapat dua titik beradjasen yang memiliki warna sama.

Adapun pewarnaan sisi adalah :

Definisi 15. Misal G adalah graf tanpa lup, pewarnaan sisi- k untuk G adalah pemberian k warna pada sisi-sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang bertemu dengan titik yang sama mendapat warna berbeda. Jika G memiliki pewarnaan sisi- k , maka G dikatakan dapat diwarna sisi- k (Wilson dan Watkins, 1989: 240).

Berikut adalah contoh pewarnaan sisi pada graf G .



Gambar 2.14

Pewarnaan Sisi pada Graf G

Gambar 2.14 (a), (b), dan (c) secara berturut-turut adalah pewarnaan sisi-4, pewarnaan sisi-5, dan pewarnaan sisi-6 dari graf G . Gambar 2.13 (d) bukan merupakan pewarnaan sisi dari graf G , karena terdapat dua sisi berwarna sama, bertemu pada titik yang sama.

Selanjutnya, akan diperkenalkan istilah pewarnaan tepat. Pewarnaan tepat adalah pewarnaan titik atau pewarnaan sisi dari graf dengan setiap dua titik beradajasen atau sisi yang bertemu pada satu titik, memiliki warna berbeda (Ege, Tanpa tahun). Definisi tersebut sudah tercakup dalam definisi pewarnaan titik dan pewarnaan sisi. Sehingga, secara umum pewarnaan dipahami sebagai pewarnaan tepat. Dalam skripsi ini, jika disebutkan pewarnaan berarti juga merupakan pewarnaan tepat.

Pada beberapa literatur, salah satunya dalam *Discrete Mathematics and Its Applications* (Rosen, 2003: 614) disebutkan bahwa pewarnaan graf adalah penetapan warna untuk setiap titik dari graf sedemikian hingga tidak ada dua titik yang adjasen mendapat warna sama. Definisi ini sama dengan definisi pewarnaan titik yang telah disebutkan. Oleh karena itu, jika tidak diberikan kualifikasinya, pewarnaan graf diasumsikan menjadi pewarnaan titik.

Masalah pewarnaan graf memiliki banyak aplikasi, salah satunya adalah penentuan jadwal ujian. Jadwal ujian ditentukan sedemikian sehingga tidak ada mahasiswa yang memiliki dua mata kuliah yang diujikan pada waktu bersamaan. Mungkin tidak disadari, penetapan waktu shalat fardlu sebenarnya merupakan pewarnaan graf. Allah SWT berfirman dalam surat an-Nisa' ayat 103:

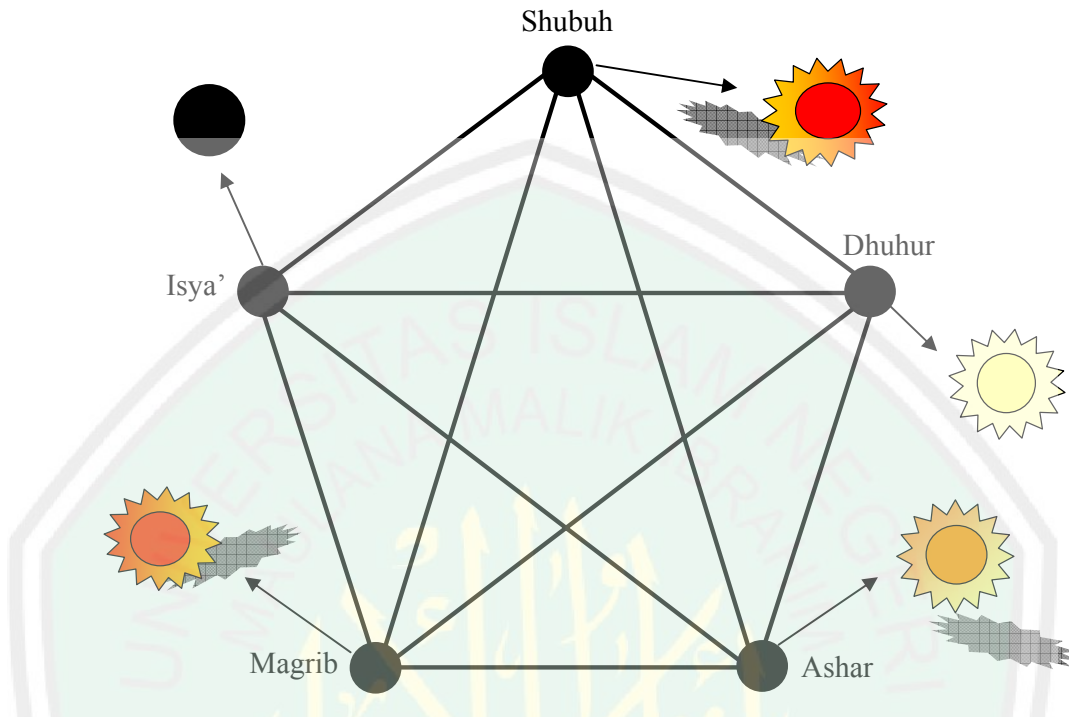
إِنَّ الصَّلَاةَ كَانَتْ عَلَى الْمُؤْمِنِينَ كِتَابًا مَّوْقُوتًا ﴿٤٣﴾

Artinya : "... Sesungguhnya shalat itu adalah fardlu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman" (Qs. an-Nisa'/4: 103).

Ayat tersebut menjelaskan ketetapan waktu shalat, baik shalat fardlu maupun shalat sunnah. Ayat tersebut tidak menjelaskan waktu-waktu pelaksanaan shalat fardlu secara terperinci. Waktu-waktu pelaksanaan shalat fardlu dijelaskan secara terperinci dalam hadits Rasulullah Saw yang diriwayatkan oleh Abu Daud, yang artinya:

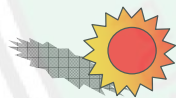
"Saya telah dijadikan imam oleh Jibril di Baitullah dua kali, maka ia shalat bersama saya; shalat dhuhur ketika tergelincir matahari, shalat ashar ketika bayang-bayang sesuatu menyamainya, shalat magrib ketika terbenam matahari, shalat isya' ketika terbenam syafaq, dan shalat shubuh ketika fajar bercahaya. Maka besoknya shalat pulalah ia bersama saya; shalat dhuhur ketika bayang-bayang sesuatu menyamainya, shalat ashar ketika bayang-bayang sesuatu dua kali panjangnya, shalat magrib ketika orang puasa berbuka, shalat isya' ketika sepertiga malam, dan shalat shubuh ketika menguning cahaya pagi. Lalu Jibril berkata, 'Inilah waktu shalat nabi-nabi sebelum engkau, dan waktu shalat ialah antara dua waktu itu.'" (Riwayat Abu Daud dan lain-lainnya) (Rasjid, 2004: 63).

Jika shalat fardlu (shubuh, dhuhur, ashar, magrib, isya') diwakili oleh titik-titik, sedangkan waktu pelaksanaan shalat fardlu dinyatakan sebagai warna, maka diperoleh pewarnaan graf berikut:



Gambar 2.15
Penetapan Waktu Shalat Fardlu Sebagai Pewarnaan Graf

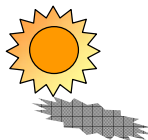
Keterangan:



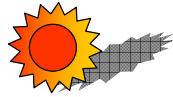
Waktu shalat shubuh, mulai terbit fajar kedua sampai terbit matahari.



Waktu shalat dhuhur, setelah tergelincir matahari dari pertengahan langit sampai ketika bayang-bayang sesuatu telah sama dengan panjangnya, selain dari bayang-bayang ketika matahari menonggak (tepat di atas ubun-ubun).








Waktu shalat ashar, ketika bayang-bayang sesuatu lebih dari panjangnya selain dari bayang-bayang ketika matahari sedang menonggak, sampai terbenam matahari.




Waktu shalat magrib, dari terbenam matahari sampai terbenam syafaq (teja) merah. Cahaya matahari yang terpancar di tepi langit sesudah terbenamnya, ada dua rupa. Mula-mula merah, sesudah hilang yang merah ini datang cahaya putih; kedua cahaya dinamakan syafaq.



Waktu shalat isya', mulai terbenam syafaq merah sampai terbit fajar kedua (Rasjid, 2004: 62).

Gambar 2.15 menunjukkan bahwa penetapan waktu shalat fardlu merupakan pewarnaan graf. Titik shubuh, dhuhur, ashar, magrib, dan isya' secara berturut-turut diberi warna , , , , dan . Kelima titik diberi warna berbeda karena waktu pelaksanaan kelima shalat juga berbeda. Sisi-sisi pada gambar 2.15 tidak harus dimaknai sebagai suatu hubungan. Sisi-sisi tersebut menunjukkan bahwa titik yang dihubungkannya, memiliki warna berbeda. Seperti pada penentuan jadwal ujian. Misal ada dua mata kuliah A dan B, yang tidak boleh diujikan pada waktu yang sama. Ketika pewarnaan graf diaplikasikan untuk menentukan jadwal ujian, maka mata kuliah-mata kuliah akan direpresentasikan oleh titik-titik. Titik A dan B akan dihubungkan oleh sebuah sisi. Sisi tersebut menandai bahwa kedua titik tidak boleh diberi warna sama (sesuai definisi pewarnaan graf), dimana warna merupakan representasi waktu ujian. Sehingga, ujian kedua mata kuliah tidak akan dilaksanakan pada waktu yang sama.

Pewarnaan graf biasanya dihubungkan dengan polinomial khromatik, yaitu banyak cara mewarnai sebuah graf. Dengan penjabaran warna yang telah diberikan (keterangan), maka graf waktu shalat fardlu hanya dapat diwarnai seperti pada gambar 2.15. Titik shubuh hanya dapat diwarnai , titik dhuhur

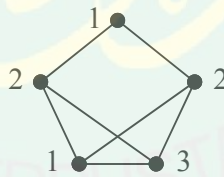


hanya dapat diwarnai , dan seterusnya. Tidak ada pewarnaan lain lagi, karena waktu shalat telah ditetapkan. Sehingga, polinomial khromatik graf waktu shalat adalah satu. Polinomial khromatik akan dibahas lebih dalam pada sub bab tersendiri.

2.2.1 Bilangan Khromatik

Sebuah graf dapat diwarnai dengan memberikan warna berbeda ke setiap titiknya. Pada kenyataannya, kebanyakan graf dapat diwarnai menggunakan warna yang lebih sedikit dari jumlah titik pada graf tersebut. Hal ini mengantarkan kepada pertanyaan yaitu berapa warna minimum yang dapat digunakan untuk mewarnai sebuah graf. Maka muncul istilah bilangan khromatik.

Definisi 16. Bilangan khromatik G , dinotasikan dengan $\chi(G)$ adalah bilangan terkecil k yang menunjukkan bahwa G dapat diwarnai k (Wilson & Watkins, 1989: 235).



Gambar 2.16
Graf Berwarna dengan Bilangan Khromatik 3

Gambar 2.16 adalah contoh graf yang diwarnai dengan bilangan khromatiknya. Graf tersebut tidak dapat diwarnai dengan warna kurang dari 3, karena terdapat titik yang adjasen dengan dua titik, dan dua titik tersebut juga

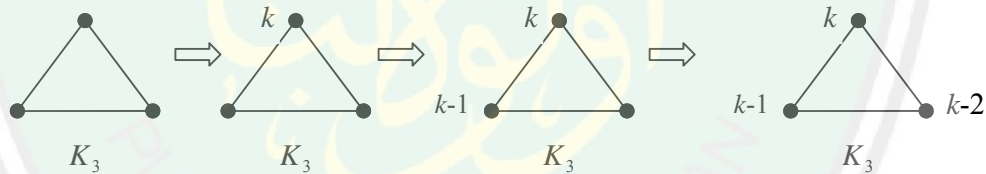
adjasen. Sehingga, ada tiga titik yang harus diberi 3 warna berbeda. Jadi, bilangan khromatik dari graf tersebut adalah 3.

2.2.2 Polinomial Khromatik

Definisi 17. Misal G merupakan graf sederhana, dan $p_G(k)$ adalah banyak cara mewarnai titik G dengan k warna sedemikian hingga tidak ada dua titik yang adjasen mendapat warna sama. Fungsi $p_G(k)$ disebut polinomial khromatik G atau suku banyak khromatik G .

Walaupun $p_G(k)$ disebut polinomial khromatik G , tidak jelas dari definisi di atas tentang mengapa banyak pewarnaan- k dari G harus menjadi polinomial dalam k . Contoh berikut mungkin dapat menjelaskan mengapa banyak pewarnaan- k dari G harus menjadi polinomial dalam k .

Contoh 2.1



Gambar 2.17
Polinomial Khromatik pada Graf K_3

K_3 adalah graf lengkap-3. titik puncak K_3 dapat diberi warna sembarang dari k warna tersebut. Titik di sebelah kirinya dapat diberi warna sembarang dari $k - 1$ warna yang belum diberikan pada titik puncak. Titik di sebelah kanan titik puncak dapat diberi warna sembarang dari $k - 2$ warna yang belum terpakai.

Sehingga, banyak cara mewarnai K_3 adalah $k(k-1)(k-2)$ atau $p_{K_3}(k) = k(k-1)(k-2)$ (Wilson dan Watkins, 1989: 237, 238).

Berikut diberikan polinomial khromatik beberapa macam graf dalam k .

Tabel 2.1
Polinomial Khromatik Beberapa Macam Graf

| Graf | Polinomial Khromatik |
|---------------------|-----------------------------------|
| Graf Lengkap K_n | $k(k-1)(k-2)\dots(k-n+1) / (k)_n$ |
| Graf Sikel C_n | $(-1)^n(k-1) + (k-1)^n$ |
| Graf Lintasan P_n | $k(k-1)^{n-1}$ |

(Sumber : <http://mathworld.wolfram.com/ChromaticPolynomial.html>)

Graf isomorfik dapat memiliki polinomial khromatik yang sama. Jika polinomial khromatik diketahui, maka bilangan khromatik suatu graf dapat dihitung dengan mudah, karena bilangan khromatik graf G adalah bilangan bulat positif terkecil k yang memenuhi $p_G(k) > 0$.

Berikut diberikan beberapa teorema mengenai polinomial khromatik dan definisi polinomial monik. Teorema-teorema dan definisi berikut sangat penting untuk memahami teorema yang akan dibuktikan dalam pembahasan skripsi ini.

Teorema 1. Jika p dan q masing-masing adalah polinomial (dalam k), maka demikian juga dengan $p + q$ dan $p - q$ (Duval, 2005: 1).

Definisi 18. Polinomial monik adalah polinomial dengan koefisien utama 1. Jika $P_n(x)$ adalah polinomial berderajat n dalam peubah x , maka koefisien x^n pada $P_n(x)$ adalah 1 (<http://planetmath.org/encyclopedia/Monic2.html>).

Contoh 2.2

$x^5 + 3x^3 - 10x^2 + 1$ adalah polinomial monik berderajat 5. $3x^2 + 2z - 5$ adalah polinomial berderajat 2 yang bukan monik.

Teorema 2. Jika G adalah graf nol dengan n titik, maka $p_G(k) = k^n$ (Duval, 2005: 2).

Bukti. Karena G adalah graf nol, maka tidak ada adjasensi antar titiknya. Berarti setiap titik di G dapat diberi sembarang warna dari k warna. Sehingga, banyak cara mewarnai G adalah k sebanyak titiknya, yaitu n kali, atau

$$p_G(k) = \underbrace{k \cdot k \cdot k \cdots k}_{n \text{ kali}} = k^n \quad . \quad \square$$

Teorema 3. Misal G adalah graf sederhana, dan $G-e$ serta G/e adalah graf yang diperoleh dari G dengan menghapus dan mengkontraksi suatu sisi e . Maka

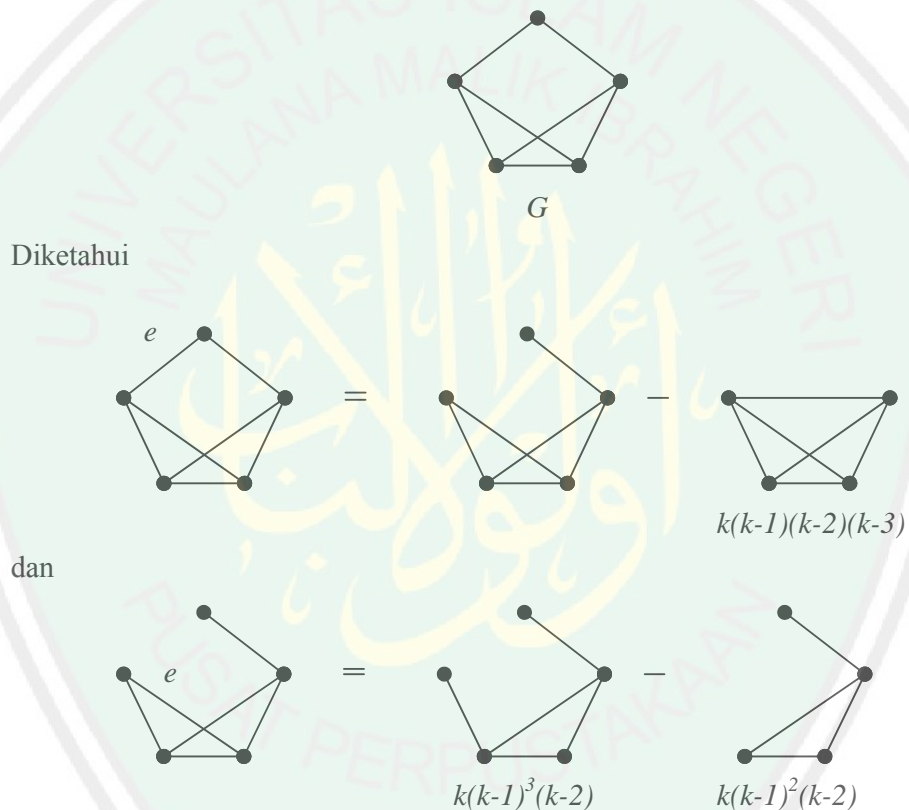
$$p_G(k) = p_{G-e}(k) - p_{G/e}(k)$$

Bukti. Misal $e = vw$ adalah sisi dari G . $G-e$ adalah graf yang diperoleh dengan menghapus sisi e dan G/e adalah graf yang diperoleh dengan mengkontraksi sisi e . Jika titik v dan w pada graf $G-e$ diberikan warna berbeda, maka banyak cara mewarnai $G-e$ sama dengan banyak cara mewarnai G . Jika titik v dan w pada graf

$G-e$ diberikan warna sama, maka banyak cara mewarnai $G-e$ sama dengan banyak cara mewarnai G/e . Sehingga, jumlah total pewarnaan- k untuk $G-e$ adalah

$$p_{G-e}(k) = p_G(k) + p_{G/e}(k) \text{ dan } p_G(k) = p_{G-e}(k) - p_{G/e}(k). \square$$

Contoh 2.3



$$\begin{aligned} p_G(k) &= [k(k-1)^3(k-2) - k(k-1)^2(k-2)] - k(k-1)(k-2)(k-3) \\ &= k(k-1)(k-2)(k^2 - 4k + 5) \\ &= k^5 - 7k^4 + 19k^3 - 23k^2 + 10k \end{aligned}$$

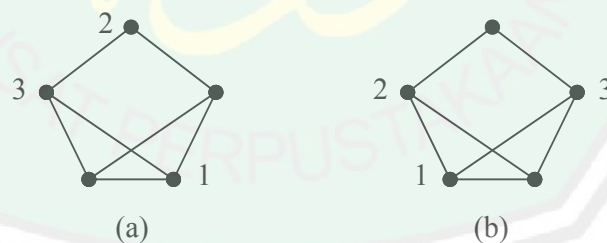
Karena $p_G(1) = 0$, $p_G(2) = 0$, dan $p_G(3) = 12$, maka $\chi(G) = 3$ (Wilson dan Watkins, 1989: 238-240).

2.2.3 Pewarnaan Parsial

Definisi 18. Pewarnaan- k parsial dari graf G adalah penetapan k warna (biasanya dengan bilangan bulat $1, 2, \dots, k$) ke himpunan bagian titik dari graf G (mungkin juga kosong), sedemikian hingga tidak ada dua titik yang adjasen mendapat warna sama.

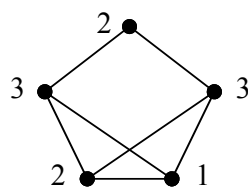
Pewarnaan- k parsial dilengkapi dengan menetapkan warna ke titik-titik yang belum diwarnai, untuk menghasilkan pewarnaan- k . Tidak setiap pewarnaan- k parsial dapat dilengkapi, bahkan untuk pewarnaan- k parsial dari graf yang dapat diwarnai- k (Molloy dan Reed, 2002: 4).

Contoh 2.4



Gambar 2.18
Pewarnaan Parsial dari Sebuah Graf

Gambar 2.18 merupakan dua pewarnaan-3 parsial berbeda dari graf yang sama. Gambar 2.18 (a) dapat dilengkapi menjadi pewarnaan-3, sebagai berikut:



Gambar 2.19
Pewarnaan-3 dari Sebuah Graf

Akan tetapi, gambar 2.18 (b) tidak dapat dilengkapi menjadi pewarnaan-3, karena ada sebuah titik beradjasen dengan tiga titik lain yang menggunakan 3 warna. Titik tersebut tidak dapat diwarnai lagi dengan 3 warna. Untuk melengkapi pewarnaannya, titik tersebut harus diberi warna baru. Sehingga gambar 2.16 (b) tidak dapat dilengkapi menjadi pewarnaan-3, meskipun grafnya dapat diwarna-3 seperti yang ditunjukkan pada gambar 2.19.

2.3 Pembuktian dalam Matematika

Pembuktian dalam Matematika adalah sebuah demonstrasi yang meyakinkan atas rumus, teorema, atau pernyataan. Namun sebuah pembuktian dapat pula terdiri atas pencarian bahwa pernyataan itu benar, dengan bantuan logika dan matematika (http://id.wikipedia.org/wiki/Pembuktian_matematika). Secara umum, pembuktian kebenaran dari suatu pernyataan telah dijelaskan dalam surat al-Hujurat ayat 6.

يَأْتِيهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِن جَاءكُمْ فَاسِقٌ بِنَبَأٍ فَتَبَيَّنُوا أَن تُصِيبُوا قَوْمًا مَّجْهَلًا فَتُصِيبُوا

عَلَىٰ مَا فَعَلْتُمْ نَادِمِينَ ﴿٦﴾

Artinya: "Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa suatu berita, maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaannya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu" (Qs. al-Hujurat/49: 6).

”Berita” pada ayat tersebut dimaknai sebagai ”pernyataan”. Ketika ada suatu pernyataan, maka harus diperiksa atau dibuktikan terlebih dahulu. Apakah pernyataan tersebut bernilai benar atau salah. Jika pernyataan yang salah diterima begitu saja tanpa dibuktikan, maka akan menyebabkan kerugian. Berita pada ayat tersebut dimaknai lebih khusus sebagai konjektur, karena belum diketahui nilai kebenarannya. Oleh karena itu, konjektur masih berupa persangkaan. Hal yang masih berupa persangkaan tidak dapat memberi manfaat sebagaimana disebutkan dalam al-Quran surat an-Najm ayat 28.

وَمَا لَهُمْ بِهِ مِنْ عِلْمٍ إِنْ يَتَّبِعُونَ إِلَّا الظَّنَّ وَإِنَّ الظَّنَّ لَا يُغْنِي مِنَ الْحَقِّ شَيْئًا ﴿٢٨﴾

Artinya : ”Dan mereka tidak mempunyai sesuatu pengetahuanpun tentang itu. mereka tidak lain hanyalah mengikuti persangkaan sedang Sesungguhnya persangkaan itu tiada berfaedah sedikitpun terhadap kebenaran” (Qs. An-Najm/53: 28).

Sebuah persangkaan atau konjektur tidak memberi manfaat, karena tidak dapat dijadikan dasar bagi pengembangan pengetahuan (Abdusysykir, 2007: 54). Konjektur baru dapat dijadikan dasar bagi pengembangan pengetahuan, ketika dapat dibuktikan kebenarannya, atau dengan kata lain menjadi teorema.

Teorema adalah pernyataan yang dapat ditunjukkan kebenarannya. Pembuktian pada teorema berperan sebagai jaminan kebenaran. Untuk mengkontruksi bukti, metode-metode diperlukan untuk memperoleh pernyataan-pernyataan baru dari pernyataan-pernyataan lama. Pernyataan-pernyataan yang digunakan dalam sebuah bukti dapat meliputi aksioma atau postulat, yaitu pernyataan dasar yang tidak perlu dibuktikan kebenarannya, hipotesis dari

teorema yang dibuktikan, dan teorema yang telah dibuktikan sebelumnya (Rosen, 2003: 56).

Ada beberapa metode pembuktian, tetapi pada sub bab ini hanya dijelaskan dua metode pembuktian yang berkaitan dengan pembahasan skripsi.

a. Pembuktian Langsung

Implikasi $p \rightarrow q$ dapat dibuktikan dengan menunjukkan bahwa jika p benar, maka q juga harus benar. Ini menunjukkan bahwa kombinasi p benar dan q salah tidak pernah terjadi. Bukti semacam ini disebut bukti langsung.

Sebelum diberikan contoh mengenai bukti langsung, diberikan definisi sebagai berikut :

Bilangan bulat n adalah genap jika terdapat bilangan bulat k sedemikian hingga $n = 2k$ dan n adalah ganjil jika terdapat bilangan bulat k sedemikian hingga $n = 2k + 1$. (catat bahwa bilangan bulat adalah salah satu dari genap atau ganjil)

Contoh 2.5

Berikan bukti langsung dari teorema "jika n adalah bilangan bulat ganjil, maka n^2 adalah bilangan bulat ganjil."

Penyelesaian:

Asumsikan bahwa hipotesis dari teorema ini benar, yaitu anggap bahwa n adalah ganjil. Berdasarkan definisi maka $n = 2k + 1$, dengan k adalah bilangan bulat.

Sehingga $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Oleh karena itu, n^2 adalah bilangan bulat ganjil (Rosen, 2003: 63, 64).

b. Pembuktian dengan Induksi Kuat

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan tentang bilangan bulat dan ingin dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, hanya perlu ditunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$, jika $p(n_0), p(n_0 + 1), \dots, p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar.

Contoh 2.6

Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai hasil kali satu atau lebih bilangan prima. Buktikan dengan induksi kuat.

Penyelesaian:

Basis induksi. Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu) buah bilangan prima.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa bilangan 2, 3, ..., n dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi).

Kita perlu menunjukkan bahwa $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian

bilangan prima. Jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a sedemikian hingga $2 < a < n + 1$ yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa. Dengan kata lain, $(n + 1)/a = b$ atau $(n + 1) = ab$. Menurut hipotesis induksi, a dan b adalah bilangan prima, jadi baik a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$ (Munir, 2001: 67, 68).

2.4 Inversi Mobius pada Himpunan Terurut Parsial

2.4.1 Himpunan Terurut Parsial (*Poset*)

Definisi 19. sebuah relasi biner (relasi) dari suatu himpunan A ke himpunan B adalah suatu subset R dari $A \times B$. Jika R adalah relasi dari A ke A yaitu jika $A \times A$ maka dikatakan R adalah relasi pada A (Lipschutz dan Lipson, 2001: 70).

Definisi 20. Misal R adalah sebuah relasi pada sebuah himpunan S yang memenuhi tiga sifat berikut :

- (i) Refleksif: $a R a$ untuk setiap $a \in S$.
- (ii) Antisimetris: Jika $a R b$ dan $b R a$, maka $a = b$.
- (iii) Transitif: Jika $a R b$ dan $b R c$, maka $a R c$.

Maka R dikatakan sebuah urutan parsial atau relasi urutan, dan S bersama-sama dengan urutan parsialnya dikatakan terurut secara parsial atau, secara sederhana, sebuah himpunan terurut (Lipschutz dan Lipson, 2001: 217). Himpunan terurut

parsial disebut juga dengan *poset* yang merupakan singkatan dari *partially ordered set*.

Contoh 2.7

Misalkan A adalah sekumpulan himpunan-himpunan sembarang. Didefinisikan relasi "himpunan bagian (\subseteq)" pada A sebagai berikut:

$$(\forall U, V \in A) U \subseteq V \Leftrightarrow ((\forall x) x \in U \Rightarrow x \in V)$$

Buktikan bahwa relasi \subseteq adalah relasi urutan parsial.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa \subseteq adalah relasi urutan parsial, haruslah dibuktikan bahwa \subseteq bersifat refleksif, antisimetris, dan transitif.

- a. Ambil sembarang himpunan $U \in A$. Menurut teori himpunan, suatu himpunan adalah himpunan bagian dari dirinya sendiri. Jadi $U \subseteq U$. Terbukti bahwa relasi \subseteq bersifat refleksif.
- b. Ambil sembarang 2 himpunan $U, V \in A$ sedemikian hingga $U \subseteq V$ dan $V \subseteq U$. Akan dibuktikan bahwa $U = V$ sebagai berikut:

Menurut teori himpunan, apabila $U \subseteq V$ dan $V \subseteq U$, maka $U = V$. Berarti \subseteq adalah relasi yang antisimetris.

- c. Ambil sembarang 3 himpunan $U, V, W \in A$ sedemikian hingga $U \subseteq V$ dan $V \subseteq W$. Akan dibuktikan bahwa $U \subseteq W$ sebagai berikut:

$$U \subseteq V \text{ berarti } (\forall x) x \in U \Rightarrow x \in V$$

$$V \subseteq W \text{ berarti } (\forall x) x \in V \Rightarrow x \in W$$

Dari kedua implikasi tersebut dapat disimpulkan $(\forall x) x \in U \Rightarrow x \in W$. Ini berarti $U \subseteq W$.

Terbukti bahwa \subseteq adalah relasi yang transitif.

Karena \subseteq refleksif, antisimetris dan transitif, maka \subseteq adalah relasi urutan parsial (Siang, 2004: 322, 323). Sehingga A bersama dengan \subseteq merupakan *poset*.

Lambang R dalam $a R b$ secara umum akan ditukar dengan \leq . Jika $a \leq b$, dikatakan a lebih kecil dari atau sama dengan a , a termuat dalam b , b memuat a , dan sebagainya. Jika $a \leq b$ dan $a \neq b$, ditulis $a < b$. $b \leq a$ berarti $a \leq b$; $b > a$ berarti $a < b$. Jika $a \leq b$ atau $b \leq a$, dikatakan bahwa a, b *komparabel* (dapat dibandingkan). Unsur-unsur dari suatu *poset* tidak harus *komparabel* satu sama lain, meskipun setiap unsur adalah *komparabel* dengan dirinya sendiri (Sukardjono, 2002: 27).

Contoh 2.8

Misal $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7\}$ dengan

$$B_1 = \{1\} \quad B_3 = \{3\} \quad B_5 = \{1, 3\} \quad B_7 = \{1, 2, 3\}$$

$$B_2 = \{2\} \quad B_4 = \{1, 2\} \quad B_6 = \{2, 3\}.$$

Pada contoh 2.7 telah dibuktikan bahwa relasi \subseteq adalah relasi urutan parsial untuk sekumpulan himpunan sembarang. Berarti B dengan relasi \subseteq juga merupakan *poset*. Perhatikan bahwa beberapa unsur pada *poset* B tidak *komparabel* satu sama lain, misalnya:

$$B_1 \not\subseteq B_2 \text{ dan } B_2 \not\subseteq B_1, \text{ berarti } B_1, B_2 \text{ tidak } \textit{komparabel},$$

$$B_1 \not\subseteq B_3 \text{ dan } B_3 \not\subseteq B_1, \text{ berarti } B_1, B_3 \text{ tidak } \textit{komparabel},$$

$$B_3 \not\subseteq B_4 \text{ dan } B_4 \not\subseteq B_3, \text{ berarti } B_3, B_4 \text{ tidak } \textit{komparabel}.$$

Sehingga unsur-unsur dari *poset* B tidak harus *komparabel* satu sama lain.

Himpunan bagian T dari *poset* S mewarisi urutan parsial pada S dan T sendiri adalah *poset*, karena sifat refleksif, antisimetris, dan transitif berlaku untuk semua anggota S . T disebut sebagai *poset* bagian atau *subposet* dari S (Ross dan Wright, 2003: 429).

Definisi 21. *Poset* S adalah *locally finite* jika setiap interval $[x, y]$ mempunyai banyak elemen berhingga. Interval $[x, y]$ adalah himpunan seluruh elemen antara x dan y , yaitu $[x, y] = \{z \in S \mid x \leq z \leq y, \forall x, y \in S\}$, dengan \leq adalah relasi pada S .

Bilangan riil dengan relasi urutan bilangan \leq bukan merupakan *locally finite*, karena ada tak hingga banyaknya bilangan di setiap interval bilangan riil. Sedangkan *poset* dari subset berhingga merupakan *locally finite* (Bender dan Goldman, 1975: 791).

2.4.2 Inversi Mobius pada *Poset*

Definisi 22. Misal *poset* S adalah *locally finite*. Fungsi mobius μ dari S adalah fungsi pasangan elemen di S bernilai bilangan bulat, yang didefinisikan oleh kondisi berikut : $\mu(x, y) = 0$ jika $x \not\leq y$, $\mu(x, x) = 1$ untuk semua x , dan relasi rekursif $\sum_{z: x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0$ jika $x < y$. Jika S berhingga, nilai fungsi $\mu(x, y)$ adalah entri xy dalam invers matriks keterhubungan dari relasi urutan parsial pada S .

Definisi 23. Misal f, g adalah fungsi yang didefinisikan dari S ke komutatif ring R dengan kesatuan. Rumus inversi mobius menyatakan (Kung, Tanpa tahun):

$$g(x) = \sum_{y: y \leq x} f(y) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{y: y \leq x} g(y) \mu(y, x)$$

atau

$$g(x) = \sum_{y:y \geq x} f(y) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{y:y \geq x} \mu(x, y)g(y).$$

Menurut Bender dan Goldman (1975: 792), $g(x)$ tidak perlu dibatasi menjadi fungsi bernilai riil. Sehingga fungsi f, g tidak harus didefinisikan ke komutatif ring R .

Contoh 2.9 (Pewarnaan Peta)

Peta adalah graf planar: sekumpulan wilayah berhingga yang terhubung dan terbatas pada bidang, dengan batas-batas berupa garis. Dua negara yang berbagi garis (bukan hanya titik) dikatakan adjasen. Jika negara-negara diwarnai sedemikian hingga tidak ada dua negara yang adjasen mendapat warna sama, menghasilkan pewarnaan. Misal G adalah peta dan $M_G(\lambda)$ adalah banyak pewarnaan. Subpeta dari G diperoleh dengan menghapus batas-batas antara negara-negara, yang berarti menyatukan negara-negara tersebut. Beberapa peta dapat diwarnai secara sembarang dalam $\lambda^{|G|}$ cara, dengan $|G|$ adalah banyak negara di G . Beberapa pewarnaan sembarang tersebut adalah pewarnaan untuk tepat satu subpeta dari G (hanya menghapus batas-batas antara negara-negara yang berwarna sama). Relasi “subpeta dari” menjadikan subpeta dari G ke dalam himpunan terurut, dan

$$\lambda^{|G|} = \sum_{x \leq G} M_x(\lambda).$$

Karena $[0, y]$ isomorfik dengan himpunan terurut dari subpeta-subpeta y , diperoleh

$$\lambda^{|y|} = \sum_{x \leq y} M_x(\lambda).$$

Jika $f(y)$ pada definisi 23 ditentukan sama dengan $M_x(\lambda)$, maka $g(x)$ sama dengan $\lambda^{|x|}$. Dengan inversi mobius dan menentukan $y = G$, diperoleh

$$M_G(\lambda) = \sum_{x \leq G} \lambda^{|x|} \mu(x, G).$$

$M_G(\lambda)$ tidak lain adalah polinomial khromatik dari G (Bender dan Goldman, 1975: 796).

2.5 Sudoku

Sudoku merupakan teka-teki angka yang diciptakan oleh Arsitek Amerika bernama Howard Gams. Teeka-teki ini diterbitkan oleh Dell Magazines pada tahun 1979 dengan nama *number place*. Teeka-teki ini menjadi terkenal di Jepang pada 1986, setelah diterbitkan oleh Nikoli dengan nama *sudoku*, yang berarti angkanya harus tetap tunggal (<http://id.wikipedia.org/wiki/sudoku>).

Sudoku terdiri dari 9×9 persegi yang dibagi menjadi 9 kotak lebih kecil berisikan 3×3 persegi. Untuk memecahkan *sudoku*, masing-masing baris, kolom, dan kotak harus berisikan angka 1 sampai 9, serta tidak boleh ada angka yang kembar di setiap baris, kolom, dan kotak. Berikut disajikan contoh *sudoku*.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 8 | 3 | 4 | | |
| 3 | | | | | 4 | 8 | 2 | 1 |
| 7 | | | | | | | | |
| | | 9 | 4 | | 1 | | 8 | 3 |
| | | | | | | | | |
| 4 | 6 | | 5 | | 7 | 1 | | |
| | | | | | | | | 7 |
| 1 | 2 | 5 | 3 | | | | | 9 |
| | | 7 | 2 | 4 | | | | |

(Sumber : Komurata,2006:viii)

Gambar 2.20
Sudoku

Keterangan :

1. Seluruh *sudoku* atau bingkai angka ajaib disebut *grid* (bingkai).
2. Setiap *grid* berisi sembilan kotak berukuran 3×3 disebut *box* (kotak).
3. Setiap *box* berisi 9 sel-sel kotak yang harus diisi angka sebagai *square* (persegi).

Meskipun mengandung unsur tebakan, tetapi *sudoku* adalah permainan yang mengandung banyak unsur analisis angka dan logika. Teknik menebak tidak diperlukan dan tidak diperkenankan kecuali ketika mengerjakan *sudoku* berlevel rumit atau level paling rumit (Komurata, 2006: viii, ix).

Sudoku menjadi *trend* di berbagai belahan dunia sejak diterbitkan pertama kali di harian The Times pada tahun 2004. *Sudoku* melintasi hambatan antarbangsa terbesar yaitu bahasa, karena permainan ini hanya berupa angka. Menurut laporan media di Inggris, di situs internet Amazon.com, terdapat lebih

dari 100 judul buku mengenai *sudoku*, di situs Amerika maupun Inggris. Banyak di antaranya masuk dalam daftar 500 buku terlaris (Wijaya, 2005: 1). Karena diminati banyak orang, maka muncul versi-versi baru *sudoku* seperti *sudoku* 4×4, *sudoku* 6×6, *sudoku* 16×16, *circular sudoku*, *sudoku alphabet*, *squify*, dan lain-lain.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 | | 2 |
| | 3 | | |
| 4 | | 2 | |
| | | 4 | |

(Sumber : Transmedia Team, 2006:3)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | | 2 | | |
| 9 | | 6 | | 4 | | | 3 |
| | | | | | | | 9 |
| | | 7 | | | 1 | 2 | |
| 6 | 5 | | | | | | 7 |
| | 2 | | 7 | | 5 | | |
| | | 8 | 9 | | | | 5 |
| | | | | | | 9 | 1 |
| 2 | | | | 7 | | | 6 |

(Sumber : Nagasaki, 2007: 7)

Gambar 2.21
Sudoku 4×4 dan *Squify*

Demam *sudoku* menunjukkan bahwa permainan angka masih diminati hingga saat ini. Angka tampaknya memiliki daya magis, sehingga hampir semua orang suka bermain dengan angka-angka. Sang Pencipta alam semesta pun suka bermain dengan angka. Allah menciptakan langit dan bumi selama **6** masa (Qs. al-A'raf/7: 54). Amal kebaikan mendapat pahala **10** kali amal kebaikan tersebut, sedangkan amal kejahatan mendapat balasan **1** kali amal kejahatan tersebut (Qs. al-An'am/6: 160). Allah sendiri disifati dengan kata *wahid* (**satu**) (Qs. al-Baqarah/2: 163). Bukankah itu semua menunjukkan bahwa Allah suka bermain dengan angka. Bahkan Allah bersumpah atas nama bilangan (angka) (Qs. al-

Fajr/89: 2). Jadi, wajar jika manusia sebagai ciptaan Allah suka bermain angka, karena Sang Pencipta pun suka bermain dengan angka.

Meskipun telah populer dan memiliki versi-versi baru, belum pernah ditemukan artikel yang menyatakan mengapa sudoku diciptakan menjadi 9×9 persegi dengan mengisikan angka 1 sampai 9. Mungkin karena angka 9 merupakan akhir numerologi, sehingga hanya ada 9 angka yang harus diisikan dalam *sudoku*. Menurut Djajaprana (2008), angka 9 bermakna keadilan Allah sebagaimana disebutkan dalam al-Quran surat al-Isra' ayat 101.

وَلَقَدْ آتَيْنَا مُوسَىٰ تِسْعَ آيَاتٍ بَيِّنَاتٍ ۖ فَسَأَلَ بَنِي إِسْرَائِيلَ إِذْ جَاءَهُمْ فَقَالَ لَهُ
فِرْعَوْنُ إِنِّي لَأَظُنُّكَ يَمُوسَىٰ مَسْحُورًا ﴿١٠١﴾

Artinya : "Dan Sesungguhnya kami Telah memberikan kepada Musa **sembilan** buah mukjizat yang nyata, Maka tanyakanlah kepada Bani Israil, tatkala Musa datang kepada mereka lalu Fir'aun Berkata kepadanya: 'Sesungguhnya Aku sangka kamu, Hai Musa, seorang yang kena sihir'." (Qs. al-Isra'/17: 101).

Keadilan yang dimaksud dari ayat tersebut adalah keadilan Allah ketika memberi mukjizat nabi Musa untuk membantunya berdakwah. Keadilan tentang perhitungan dan memberi balasan atas manusia yang melewati batas. Makna keadilan pada angka 9 ini, berkaitan dengan *sudoku*.

Jika dipikirkan, aturan permainan *sudoku* mengandung makna angka 9. Setiap baris, kolom, dan kotak dari *sudoku* harus berisi angka 1 sampai 9, serta tidak boleh ada angka yang kembar di setiap baris, kolom, dan kotak. Artinya, distribusi angka pada setiap baris, kolom, dan kotaknya adalah rata, atau dengan kata lain adil. Jadi, *sudoku* mengandung unsur 9 pada bentuk maupun maknanya.

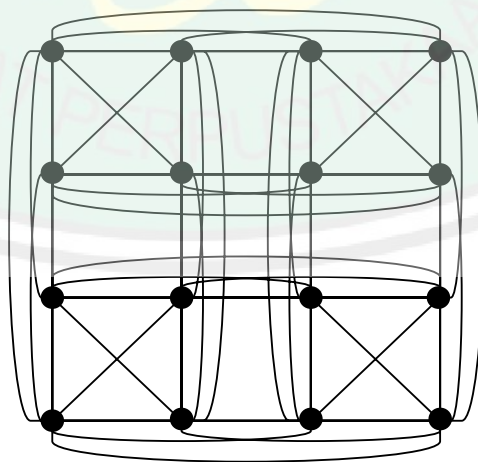
BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pewarnaan Graf pada *Sudoku*

Sudoku merupakan teka-teki angka yang terdiri dari 9×9 persegi dan dibagi menjadi 9 kotak lebih kecil berisikan 3×3 persegi. Untuk memecahkan teka-teki *sudoku*, masing-masing baris, kolom, dan kotak harus berisikan angka 1 sampai 9, serta tidak boleh ada angka yang kembar di setiap baris, kolom, dan kotak (Komurata, 2006: viii). Aturan main teka-teki ini perlu ditegaskan kembali, karena sangat penting pada perubahan *sudoku* menjadi graf.

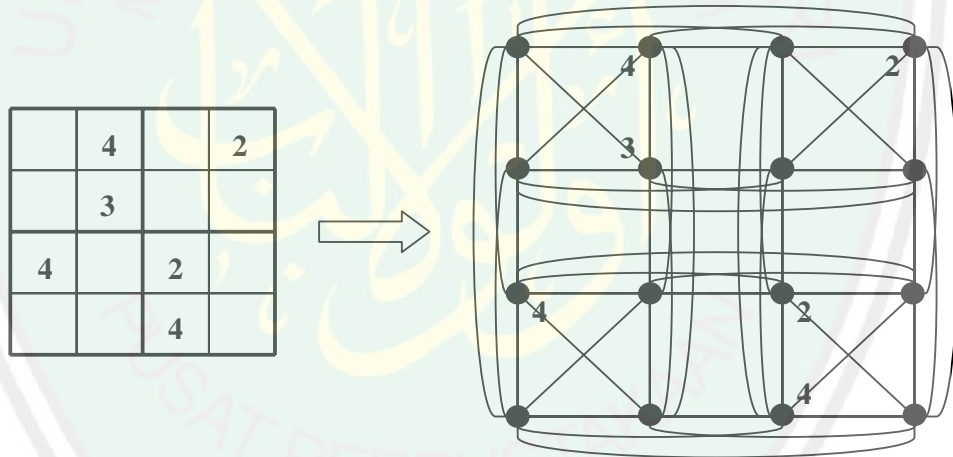
Setiap persegi (kotak kecil) dari *sudoku* diwakili oleh titik. Sehingga, graf dari *sudoku* memiliki 81 titik yang sesuai dengan jumlah kotaknya. Setiap titik dari graf *sudoku* adjasen dengan titik yang sebaris, sekolom, dan sekotak. Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh graf *sudoku* tetapi bukan *sudoku* 9×9 , melainkan *sudoku* 4×4 .



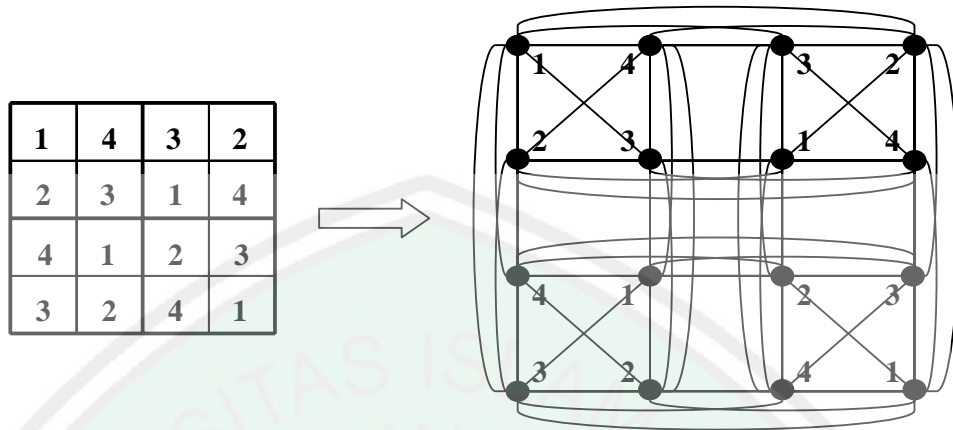
Gambar 3.1
Graf *Sudoku* 4×4

Berdasarkan definisi 1, maka jelas gambar 3.1 merupakan graf. Setelah diberikan Gambar 3.1, tentu dapat dipahami mengapa dipilih *sudoku* 4×4 sebagai contoh. Representasi graf dari *sudoku* 9×9 lebih rumit daripada *sudoku* 4×4 , karena memiliki lebih banyak titik dan sisi. Setiap titik dari graf *sudoku* 9×9 adjasen dengan 20 titik yang lain. Dapat dibayangkan keruwetan sisi-sisi dari graf tersebut. *Sudoku* 4×4 dianggap sudah mewakili gambaran graf *sudoku*.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa teka-teki *sudoku* berkorespondensi dengan pewarnaan parsial. Adapun teka-teki *sudoku* yang terselesaikan akan sama dengan pewarnaan dari graf *sudoku*. Contoh yang diberikan masih menggunakan *sudoku* 4×4 .



Gambar 3.2
Teka-teki *Sudoku* 4×4 Berkorespondensi dengan Pewarnaan Parsial Graf



Gambar 3.3
Penyelesaian *Sudoku* 4×4 Berkorepondensi dengan Pewarnaan Graf

Berdasarkan definisi 18, maka gambar 3.2 merupakan pewarnaan parsial. Demikian juga gambar 3.3 merupakan pewarnaan graf, atau lebih spesifik lagi pewarnaan titik (lihat definisi 14).

Setelah diberikan ketiga gambar di atas, tentu dapat dipahami mengapa teorema yang akan dibuktikan dalam skripsi ini dikaitkan dengan *sudoku*. Meskipun berisi polinomial khromatik secara umum, ide kedua teorema berasal dari *sudoku*. Sehingga, kedua teorema dikatakan sebagai teorema polinomial khromatik dalam *sudoku*.

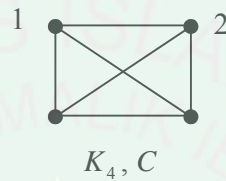
3.2 Pembuktian Teorema I

Teorema I. Misal G adalah graf dengan v titik dan C adalah pewarnaan parsial dari t titik di G dengan menggunakan d_0 warna. Misal $p_{G,C}(\lambda)$ adalah banyak cara melengkapi pewarnaan ini dengan λ warna untuk memperoleh pewarnaan dari G . Maka, $p_{G,C}(\lambda)$ adalah polinomial monik (dalam λ) berderajat $v-t$ dengan

koefisien-koefisien bilangan bulat untuk $\lambda \geq d_0$ (Herzberg dan Murty, 2007: 709).

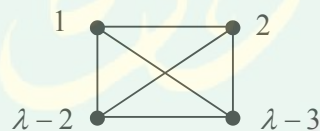
Agar maksud teorema I lebih mudah dipahami, maka diberikan satu contoh sederhana dari graf lengkap K_4 .

Contoh 3.1



Gambar 3.4
Graf (K_4, C)

Graf di atas adalah graf lengkap K_4 . C adalah pewarnaan parsial dari 2 titik dengan menggunakan 2 warna. Misal λ adalah banyak warna yang digunakan untuk mewarnai K_4 , maka banyak cara melengkapi K_4 dengan λ warna adalah:



Gambar 3.5
Cara Melengkapi K_4 dengan λ Warna

Karena 2 warna telah digunakan pada pewarnaan parsial dan titik ketiga dari K_4 beradjasen dengan dua titik di C , maka titik tersebut dapat diwarnai menggunakan $\lambda - 2$ warna. Selanjutnya, karena 3 warna telah digunakan dan titik keempat dari K_4 beradjasen dengan ketiga titik yang telah diwarnai, maka titik tersebut dapat

diwarnai dengan $\lambda - 3$ warna. Sehingga, banyak cara melengkapi pewarnaan K_4 adalah :

$$p_{K_4, C}(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = \lambda^{4-2} - 5\lambda + 6$$

Sesuai dengan definisi 18, $p_{K_4, C}(\lambda)$ adalah polinomial monik berderajat $4 - 2$, dengan 4 adalah banyak titik di K_4 dan 2 adalah banyak titik di C . Untuk lebih jelas lagi, maka dipilih $\lambda = 4$ sebagai banyak warna untuk melengkapi pewarnaan K_4 . Sehingga, banyak cara melengkapi pewarnaan K_4 dengan 4 warna adalah :

$$p_{K_4, C}(4) = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 = 16 - 20 + 6 = 2 \text{ cara}$$



Gambar 3.6
Cara Melengkapi Pewarnaan K_4 dengan 4 Warna

Selanjutnya, akan dibahas pembuktian teorema I. Teorema I akan dibuktikan melalui 2 cara. Bukti pertama menggunakan teori himpunan terurut parsial (*poset*) dan fungsi mobius pada *poset*. Bukti kedua tidak menggunakan teori *poset* dan fungsi mobius pada *poset*, tetapi menggunakan induksi kuat.

3.2.1 Bukti Pertama

Misal (G, C) adalah graf G dengan v titik dan pewarnaan parsial C . pewarnaan parsial C adalah pewarnaan dari t titik di G yang menggunakan d_0 warna. (G', C) adalah subgraf dari (G, C) yang diperoleh dari kontraksi beberapa

sisi G dengan paling banyak satu titik akhir di C . Sehingga, kontraksi minimum akan menjadi titik-titik di C dengan adjasensi antara titik-titiknya tetap dipertahankan. Misal S adalah himpunan seluruh (G', C) dan (G, C) , maka S yang dilengkapi dengan relasi subgraf (dilambangkan \leq) adalah himpunan terurut parsial (*poset*). Untuk membuktikan bahwa S yang dilengkapi dengan relasi \leq adalah *poset*, maka akan dibuktikan bahwa relasi \leq memenuhi sifat-sifat :

- i) Refleksif : $\forall (G', C) \in S$ maka $(G', C) \leq (G', C)$.
- ii) Antisimetrik : $\forall (G', C), (G'', C) \in S$, $(G', C) \leq (G'', C)$ dan $(G'', C) \leq (G', C)$, maka $(G', C) = (G'', C)$.
- iii) Transitif : $\forall (G', C), (G'', C), (G''', C) \in S$, $(G', C) \leq (G'', C)$ dan $(G'', C) \leq (G''', C)$, maka $(G', C) \leq (G''', C)$.

Bukti :

- i) Refleksif

Ambil sebarang graf $(G', C) \in S$. Menurut teori graf, suatu graf adalah subgraf dari dirinya sendiri. Jadi $\forall (G', C) \in S$ maka $(G', C) \leq (G', C)$.

Terbukti bahwa relasi \leq bersifat refleksif.

- ii) Antisimetrik

Ambil dua graf anggota S , misal (G', C) dan (G'', C) dengan $(G', C) \leq (G'', C)$ dan $(G'', C) \leq (G', C)$.

$(G', C) \leq (G'', C)$ berarti $V(G', C) \subseteq V(G'', C)$ dan $E(G', C) \subseteq E(G'', C)$.

$(G'', C) \leq (G', C)$ berarti $V(G'', C) \subseteq V(G', C)$ dan $E(G'', C) \subseteq E(G', C)$.

Karena $V(G', C) \subseteq V(G'', C)$ dan $V(G'', C) \subseteq V(G', C)$, maka
 $V(G', C) = V(G'', C)$.

Karena $E(G', C) \subseteq E(G'', C)$ dan $E(G'', C) \subseteq E(G', C)$, maka
 $E(G', C) = E(G'', C)$.

Karena $V(G', C) = V(G'', C)$ dan $E(G', C) = E(G'', C)$, maka
 $(G', C) = (G'', C)$.

Jadi $\forall (G', C), (G'', C) \in S$, $(G', C) \leq (G'', C)$ dan $(G'', C) \leq (G', C)$, maka
 $(G', C) = (G'', C)$.

Terbukti bahwa relasi \leq bersifat antisimetrik.

iii) Transitif

Ambil tiga graf anggota S , misal (G', C) , (G'', C) dan (G''', C) dengan
 $(G', C) \leq (G'', C)$ dan $(G'', C) \leq (G''', C)$.

$(G', C) \leq (G'', C)$ berarti $V(G', C) \subseteq V(G'', C)$ dan $E(G', C) \subseteq E(G'', C)$.

$(G'', C) \leq (G''', C)$ berarti $V(G'', C) \subseteq V(G''', C)$ dan $E(G'', C) \subseteq E(G''', C)$.

$V(G', C) \subseteq V(G'', C)$ berarti $\forall v \in V(G', C) \rightarrow v \in V(G'', C)$.

$V(G'', C) \subseteq V(G''', C)$ berarti $\forall v \in V(G'', C) \rightarrow v \in V(G''', C)$.

Dari kedua implikasi tersebut dapat disimpulkan bahwa
 $\forall v \in V(G', C) \rightarrow v \in V(G''', C)$. Sehingga $V(G', C) \subseteq V(G''', C)$.

$E(G', C) \subseteq E(G'', C)$ berarti $\forall e \in E(G', C) \rightarrow e \in E(G'', C)$.

$E(G'', C) \subseteq E(G''', C)$ berarti $\forall e \in E(G'', C) \rightarrow e \in E(G''', C)$.

Dari kedua implikasi tersebut dapat disimpulkan bahwa
 $\forall e \in E(G', C) \rightarrow e \in E(G''', C)$. Sehingga $E(G', C) \subseteq E(G''', C)$.

Karena $V(G', C) \subseteq V(G'', C)$ dan $E(G', C) \subseteq E(G'', C)$, maka $(G', C) \leq (G'', C)$.

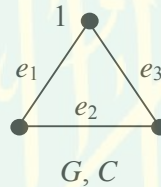
Jadi $\forall (G', C), (G'', C), (G''', C) \in S$, $(G', C) \leq (G'', C)$ dan $(G'', C) \leq (G''', C)$, maka $(G', C) \leq (G''', C)$.

Terbukti bahwa relasi \leq bersifat transitif.

Jadi, terbukti bahwa S yang dilengkapi dengan relasi \leq adalah *poset*. \square

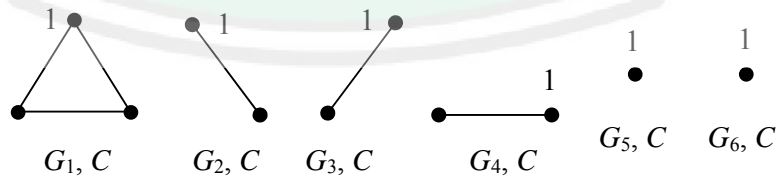
Agar uraian yang telah disebutkan lebih jelas, berikut diberikan contoh *poset* dari himpunan graf yang memiliki pewarnaan parsial.

Contoh 3.2



Gambar 3.7
Graf (G, C)

(G, C) adalah graf lengkap-3 dengan pewarnaan parsial yang menggunakan 1 warna. P adalah himpunan subgraf (G, C) dan (G, C) sendiri. Subgraf (G, C) yang dimaksud adalah subgraf dari (G, C) yang diperoleh dari kontraksi beberapa sisi G dengan paling banyak satu titik akhir di C . Sehingga, anggota-anggota P adalah :



Gambar 3.8
Anggota Himpunan P

Meskipun G_5 dan G_6 sama, tetapi kedua graf diperoleh dari kontraksi sisi yang berbeda. Untuk mengetahui darimana graf-graf pada gambar 3.8 diperoleh, dapat dilihat pada keterangan berikut.

- (G_1, C) adalah graf (G, C) sendiri.
- (G_2, C) diperoleh dengan mengkontraksi sisi e_1 dari graf (G, C) .
- (G_3, C) diperoleh dengan mengkontraksi sisi e_2 dari graf (G, C) .
- (G_4, C) diperoleh dengan mengkontraksi sisi e_3 dari graf (G, C) .
- (G_5, C) diperoleh dengan mengkontraksi sisi e_2 dari graf (G, C) , kemudian dilanjutkan dengan mengkontraksi sisi e_1 .
- (G_6, C) diperoleh dengan mengkontraksi sisi e_2 dari graf (G, C) , kemudian dilanjutkan dengan mengkontraksi sisi e_3 .

P dengan relasi subgraf “ \leq ” adalah *poset*. Setiap graf anggota P adalah subgraf dari dirinya sendiri (sifat refleksif \leq), $(G_1, C) \leq (G_1, C)$, $(G_2, C) \leq (G_2, C)$, $(G_3, C) \leq (G_3, C)$, dan seterusnya. $(G_5, C) \leq (G_6, C)$ dan $(G_6, C) \leq (G_6, C)$ sehingga $(G_5, C) = (G_6, C)$ (sifat antisimetrik \leq). $(G_2, C) \neq (G_1, C)$ dan $(G_2, C) \leq (G_1, C)$ tetapi $(G_1, C) \not\leq (G_2, C)$. $(G_5, C) \leq (G_4, C)$ dan $(G_4, C) \leq (G_1, C)$ sehingga $(G_5, C) \leq (G_1, C)$ (sifat transitif \leq).

Kembali pada pembuktian teorema I. Misal $p_{G',C}(\lambda)$ adalah banyak cara melengkapi pewarnaan (G', C) dengan λ warna, untuk setiap (G', C) anggota dari *poset* S . Sedangkan $q_{G',C}(\lambda)$ adalah banyak cara melengkapi pewarnaan $(G'$,

C) secara sembarang dengan menggunakan λ warna, untuk setiap (G', C) anggota dari *poset* S . Pewarnaan sembarang berarti titik yang adjasen boleh diberi warna sama. Pada pewarnaan sembarang, setiap titik yang belum diwarnai dapat diwarnai dengan seluruh warna yang digunakan, seperti mewarnai graf nol. Jika v' adalah banyak titik di G' dan t adalah banyak titik di C , maka banyak cara melengkapi pewarnaan (G', C) secara sembarang dengan λ warna, sama dengan banyak cara mewarnai graf nol dengan λ warna dan $v' - t$ titik (lihat teorema 2),

$$q_{G',C}(\lambda) = \lambda^{v'-t} \dots\dots\dots(1)$$

Jika $\lambda \geq d_0$ dan (G, C) dilengkapi pewarnaannya secara sembarang dengan λ warna, maka akan diperoleh pewarnaan dari beberapa graf anggota *poset* S . Graf-graf khusus ini diperoleh secara sederhana dengan mengkontraksi sisi-sisi yang menghubungkan dua titik di (G, C) dengan kedua titik memiliki warna sama. Misal T adalah himpunan graf khusus tersebut, maka $T \subseteq S$. Setiap himpunan bagian S juga merupakan *poset* dibawah relasi subgraf " \leq ". Sehingga T dengan relasi \leq adalah *poset*. Pada pewarnaan sembarang (G, C) , pasti terdapat pewarnaan (G, C) . Oleh karena itu, (G, C) selalu terdapat di T dan menjadi graf maksimal. Untuk setiap (G', C) anggota *poset* T , $(G', C) \leq (G, C)$. Sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$q_{G,C}(\lambda) = \sum_{(G',C) \leq (G,C)} p_{G',C}(\lambda) \dots\dots\dots(2)$$

Berdasarkan definisi 21, maka *poset* T adalah *locally finite*, karena setiap interval dari anggota T mempunyai banyak elemen berhingga. $q_{G,C}(\lambda)$ dan $p_{G',C}(\lambda)$ adalah fungsi bernilai bilangan bulat positif, yang nilainya bergantung pada graf-

graf di poset T dan λ . Jadi keduanya merupakan fungsi dari poset T dan λ ke bilangan bulat positif. Sehingga dari definisi 23 diperoleh:

$$p_{G,C}(\lambda) = \sum_{(G',C) \leq (G,C)} q_{G',C}(\lambda) \mu((G',C), (G,C)) \dots\dots\dots(3)$$

Misal $T = \{(G',C), (G'',C), \dots, (G,C)\}$ dan v', v'', \dots, v secara berturut-turut adalah jumlah titik dari $(G',C), (G'',C), \dots, (G,C)$, maka

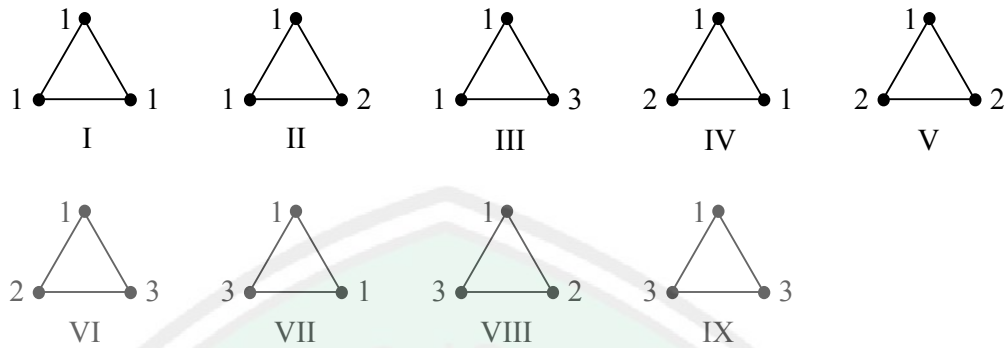
$$\begin{aligned} p_{G,C}(\lambda) &= q_{G',C}(\lambda) \mu((G',C), (G,C)) + q_{G'',C}(\lambda) \mu((G'',C), (G,C)) + \dots + \\ &\quad q_{G,C}(\lambda) \mu((G,C), (G,C)) \\ &= \mu((G,C), (G,C)) q_{G,C}(\lambda) + \dots + \mu((G'',C), (G,C)) q_{G'',C}(\lambda) + \\ &\quad \mu((G',C), (G,C)) q_{G',C}(\lambda) \\ &= 1 \cdot \lambda^{v-t} + \dots + \mu((G'',C), (G,C)) \lambda^{v''-t} + \mu((G',C), (G,C)) \lambda^{v'-t}. \end{aligned}$$

Karena fungsi mobius μ dari S adalah fungsi bernilai bilangan bulat dari dua peubah pada S , maka terbukti bahwa $p_{G,C}(\lambda)$ adalah polinomial monik dalam λ berderajat $v - t$, dengan koefisien-koefisien bilangan bulat untuk $\lambda \geq d_0$. \square

Untuk memperjelas bukti pertama teorema I ini, maka diberikan contoh sederhana.

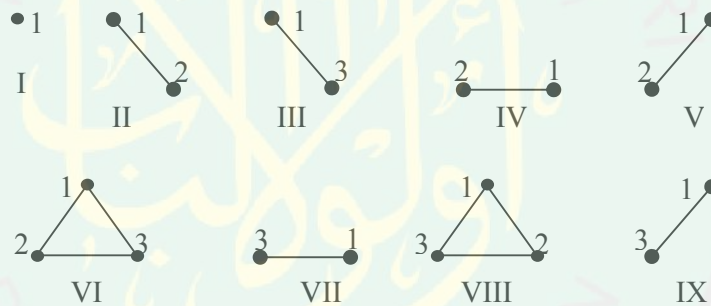
Contoh 3.3

Jika graf (G, C) pada gambar 3.7 dilengkapi pewarnaannya secara sembarang dengan 3 warna, maka diperoleh pewarnaan-pewarnaan sebagai berikut.



Gambar 3.9
Pewarnaan (G, C) Secara Sembarang dengan 3 Warna

Jika sisi-sisi yang menghubungkan dua titik dengan warna sama pada gambar 3.9 dikontraksi, maka diperoleh pewarnaan dari beberapa graf di P pada contoh 3.2.



Gambar 3.10
Pewarnaan dari Beberapa Graf di P

Perhatikan kembali contoh 3.2.

- Gambar 3.10 (I) adalah pewarnaan graf (G_5, C) . Sebenarnya gambar tersebut juga merupakan pewarnaan graf (G_6, C) . Tetapi pada contoh ini dipilih graf (G_5, C) , karena alasan urutan yang lebih awal pada himpunan P .
- Gambar 3.10 (II) dan (III) adalah pewarnaan graf (G_2, C) .
- Gambar 3.10 (IV) dan (VII) adalah pewarnaan graf (G_4, C) .

- Gambar 3.10 (V) dan (IX) adalah pewarnaan graf (G_3, C) .
- Gambar 3.10 (VI) dan (VIII) adalah pewarnaan graf (G_1, C) .

Misal Q adalah graf-graf khusus di P , maka $Q = \{(G_1, C), (G_2, C), (G_3, C), (G_4, C), (G_5, C)\}$. Karena $Q \subseteq P$, maka Q dengan relasi subgraf " \leq " juga merupakan *poset*. Sehingga memenuhi persamaan (2) dan diperoleh:

$$\begin{aligned} q_{G,C}(3) &= p_{G_5,C}(3) + p_{G_4,C}(3) + p_{G_3,C}(3) + p_{G_2,C}(3) + p_{G_1,C}(3) \\ &= 1 + 2 + 2 + 2 + 2 \\ &= 9. \end{aligned}$$

Setiap interval di Q mempunyai banyak elemen berhingga, misal

$$[(G_3, C), (G_1, C)] = \{(G_3, C), (G_1, C)\}, \text{ dan}$$

$$[(G_5, C), (G_1, C)] = \{(G_5, C), (G_4, C), (G_3, C), (G_2, C), (G_1, C)\}.$$

Sehingga memenuhi persamaan (3). Sebelum mensubstitusikan nilai pada persamaan (3), terlebih dahulu ditentukan nilai fungsi $\mu((G', C), (G, C))$. Fungsi $\mu((G', C), (G, C))$ adalah entri $(G', C)(G, C)$ dalam invers matriks keterhubungan dari relasi subgraf " \leq " pada *poset* Q .

Tabel 3.1
Matriks Keterhubungan dari Relasi Subgraf " \leq " pada *Poset* Q

| \rightarrow \leq | (G_1, C) | (G_2, C) | (G_3, C) | (G_4, C) | (G_5, C) | |
|-------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|---|
| (G_1, C) | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | Karena $(G_2, C) \leq (G_1, C)$, maka kolom tersebut diisi 1 |
| (G_2, C) | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| (G_3, C) | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | Karena $(G_2, C) \not\leq (G_5, C)$, maka kolom tersebut diisi 0 |
| (G_4, C) | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| (G_5, C) | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

Misal M adalah matriks yang diperoleh dari table 3.1, maka

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{adj}(M) = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

| | (G_1, C) | (G_2, C) | (G_3, C) | (G_4, C) | (G_5, C) | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------------------------------|
| (G_1, C) | ① | — 0 — | — 0 — | — 0 — | — 0 — | $\rightarrow \mu((G_1C), (G_1, C))$ |
| (G_2, C) | ① | — 1 — | — 0 — | — 0 — | — 0 — | $\rightarrow \mu((G_2C), (G_1, C))$ |
| (G_3, C) | ① | — 0 — | — 1 — | — 0 — | — 0 — | $\rightarrow \mu((G_3C), (G_1, C))$ |
| (G_4, C) | ① | — 0 — | — 0 — | — 1 — | — 0 — | $\rightarrow \mu((G_4C), (G_1, C))$ |
| (G_5, C) | ② | — 1 — | — 1 — | — 1 — | — 1 — | $\rightarrow \mu((G_5C), (G_1, C))$ |

Karena $G_1 = G$ dan $\lambda = 3$, maka dari persamaan (3) diperoleh:

$$\begin{aligned} p_{G,C}(3) &= q_{G_5,C}(3)\mu((G_5, C), (G, C)) + q_{G_4,C}(3)\mu((G_4, C), (G, C)) + \\ & q_{G_3,C}(3)\mu((G_3, C), (G, C)) + q_{G_2,C}(3)\mu((G_2, C), (G, C)) + \\ & q_{G,C}(3)\mu((G, C), (G, C)) \\ &= 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 9 \cdot 1 \\ &= 2 - 3 - 3 - 3 + 9 \\ &= 2. \end{aligned}$$

3.2.2 Bukti Kedua

Misal (G, C) adalah graf G dengan v titik dan pewarnaan parsial C dari t titik di G yang menggunakan d_0 warna. Misal $p_{G,C}(\lambda)$ adalah banyak cara melengkapi pewarnaan (G, C) dengan λ warna untuk $\lambda \geq d_0$. Akan dibuktikan bahwa $p_{G,C}(\lambda)$ adalah polinomial monik (dalam λ) berderajat $v - t$ dengan koefisien-koefisien bilangan bulat untuk $\lambda \geq d_0$. Bukti yang akan ditunjukkan menggunakan induksi kuat pada jumlah sisi graf (G, C) .

Basis induksi. Jumlah sisi terkecil dari suatu graf adalah nol. Jika jumlah sisi di G adalah nol, maka (G, C) adalah graf nol dengan v titik dan pewarnaan parsial C dari t titik di G yang menggunakan d_0 warna. Untuk $\lambda \geq d_0$, banyak cara melengkapi pewarnaan (G, C) dengan λ warna adalah banyak cara mewarnai titik-titik yang belum diwarnai, yaitu $v - t$ titik. Berdasarkan teorema 2 maka $p_{G,C}(\lambda) = \lambda^{v-t}$. Dari definisi 18, terbukti bahwa $p_{G,C}(\lambda)$ adalah polinomial monik (dalam λ) berderajat $v - t$ dengan koefisien bilangan bulat untuk $\lambda \geq d_0$.

Langkah induksi. Asumsikan teorema I benar untuk semua graf dengan pewarnaan parsial C , yang jumlah sisinya kurang dari jumlah sisi (G, C) . Misal e adalah sisi yang menghubungkan dua titik di (G, C) , dengan paling banyak satu titik di C . $(G - e, C)$ adalah graf yang diperoleh dari (G, C) dengan menghilangkan sisi e , tetapi titik yang dihubungkan oleh sisi tersebut tidak dihilangkan. $(G/e, C)$ adalah graf yang diperoleh dari (G, C) dengan mengkontraksi sisi e , yaitu menyatukan dua titik yang dihubungkan oleh e (dan membuang beberapa sisi rangkap). Untuk

$\lambda \geq d_0$, $p_{G,C}(\lambda)$ adalah banyak cara melengkapi pewarnaan (G, C) dengan λ warna. Dari teorema 3, maka diperoleh

$$p_{G,C}(\lambda) = p_{G-e,C}(\lambda) - p_{G/e,C}(\lambda).$$

$(G-e, C)$ dan $(G/e, C)$ adalah graf-graf yang jumlah sisinya kurang dari jumlah sisi (G, C) . Berdasarkan asumsi, maka $p_{G-e,C}(\lambda)$ dan $p_{G/e,C}(\lambda)$ secara berturut-turut adalah polinomial monik (dalam λ) berderajat $v-t$ dan $(v-1)-t$, dengan koefisien-koefisien bilangan bulat untuk $\lambda \geq d_0$. Berdasarkan teorema 1, maka $p_{G,C}(\lambda)$ adalah polinomial monik (dalam λ) berderajat $v-t$ dengan koefisien-koefisien bilangan bulat untuk $\lambda \geq d_0$.

Jadi, dengan induksi kuat pada jumlah sisi graf, teorema I terbukti. \square

3.3 Pembuktian Teorema II

Teorema II. Misal G adalah graf dengan bilangan kromatik $\chi(G)$ dan C adalah pewarnaan parsial dari G dengan hanya menggunakan $\chi(G)-2$ warna. Jika pewarnaan parsial dapat dilengkapi untuk pewarnaan total dari G , maka terdapat paling sedikit dua cara dari penambahan pewarnaan (Herzberg dan Murty, 2007: 710).

Bukti

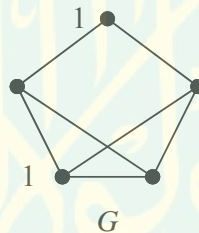
Misal G adalah graf dengan bilangan kromatik $\chi(G)$ dan pewarnaan parsial C . $\chi(G)$ adalah bilangan warna terkecil yang diperlukan untuk mewarnai G dan C adalah pewarnaan beberapa titik di G dengan menggunakan $\chi(G)-2$ warna. Sehingga, G adalah graf dengan beberapa titik telah diwarnai menggunakan

$\chi(G) - 2$ warna dan beberapa titik lainnya belum diwarnai. Karena 2 warna belum digunakan pada pewarnaan parsial C , maka 2 warna tersebut dapat ditukar ketika melengkapi pewarnaan pada G . Jadi, paling sedikit ada 2 cara untuk melengkapi pewarnaan pada G . \square

Berikut diberikan contoh-contoh, untuk memperjelas pembuktian teorema II.

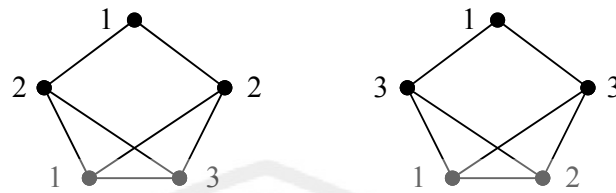
Contoh 3.4

Misal G adalah graf dengan $\chi(G) = 3$ dan pewarnaan parsial yang menggunakan 1 warna, seperti yang ditunjukkan pada gambar 3.11.



Gambar 3.11
Pewarnaan Parsial Graf G

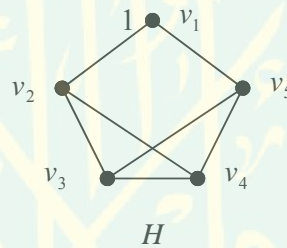
Karena tiga titik yang belum diwarnai beradjasen dengan titik-titik pada pewarnaan parsial, maka ketiga titik tersebut tidak dapat diberi warna 1. Karena bilangan kromatik graf G adalah 3, maka ketiga titik hanya dapat diberi warna 2 dan warna 3. Sehingga, ada 2 cara untuk melengkapi pewarnaan pada G yaitu :



Gambar 3.12
Cara Melengkapi Pewarnaan Graf G

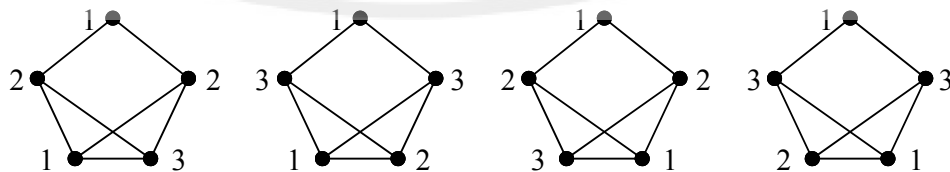
Contoh 3.5

Misal H adalah graf dengan $\chi(H) = 3$ dan pewarnaan parsial yang menggunakan 1 warna, seperti yang ditunjukkan pada gambar 3.13 .



Gambar 3.13
Pewarnaan Parsial Graf H

Graf H adalah graf G dengan pewarnaan parsial hanya dari satu titik. Titik v_3 dan v_4 dapat diwarnai menggunakan warna pada pewarnaan parsial H . Sehingga, cara untuk melengkapi pewarnaan pada H adalah :

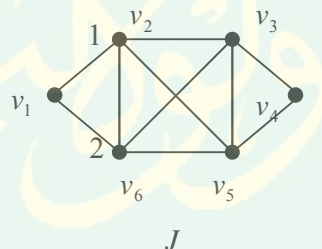


Gambar 3.14
Cara Melengkapi Pewarnaan Graf H

Dua cara pertama melengkapi pewarnaan pada H , tidak lain adalah cara melengkapi pewarnaan pada G . karena titik v_3 dan v_4 dapat bertukar warna 1 dan juga dua warna yang belum digunakan dapat ditukar, maka cara melengkapi pewarnaan H ada lebih dari 2. untuk memperoleh cara melengkapi pewarnaan lebih dari 2, sebuah graf tidak harus menyisakan satu atau beberapa titik yang masih dapat diberi warna pada pewarnaan parsial. Hal ini ditunjukkan pada contoh 3.6.

Contoh 3.6

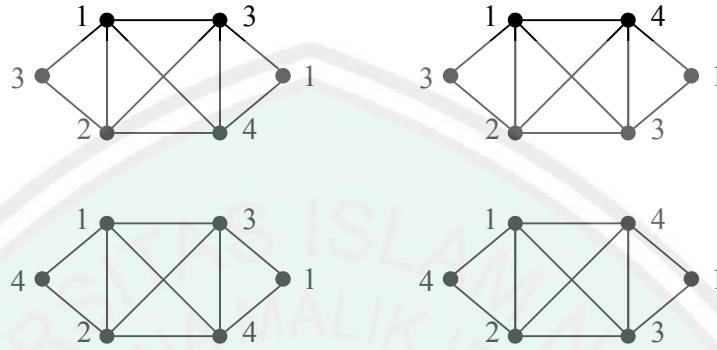
Misal J adalah graf dengan $\chi(J) = 3$ dan pewarnaan parsial yang menggunakan 2 warna, seperti yang ditunjukkan pada gambar 3.15.



Gambar 3.15
Pewarnaan Parsial Graf J

Tiga titik yang belum diwarnai tidak dapat diwarnai dengan warna pada pewarnaan parsial, yaitu warna 1 dan 2. Ketiga titik yang belum diwarnai hanya dapat diwarnai dengan warna 3 dan 4. Titik v_1 hanya beradjasen dengan dua titik yang telah diwarnai, sehingga v_1 bebas diwarnai 3 atau 4. Misalkan pada cara kedua melengkapi pewarnaan graf J adalah dengan menukar warna titik v_3 dan

v_5 dari cara pertama, maka titik v_1 masih dapat diwarnai dengan warna pada cara pertama. Lebih jelasnya, berikut cara melengkapi pewarnaan graf J .



Gambar 3.16
Cara Melengkapi Pewarnaan Graf J

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah diuraikan, dapat disimpulkan bahwa teorema I dapat dibuktikan melalui dua cara. Bukti pertama adalah pembuktian langsung menggunakan teori *poset* dan fungsi mobius pada *poset*, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. *Poset* dari penjabaran hipotesis teorema I dapat ditunjukkan, yaitu himpunan S yang dilengkapi dengan relasi subgraf (dilambangkan \leq).
2. Inversi mobius berlaku pada penjabaran hipotesis teorema I, sehingga diperoleh persamaan
$$p_{G,C}(\lambda) = \sum_{(G',C) \leq (G,C)} q_{G',C}(\lambda) \mu((G',C), (G,C)).$$
3. Konklusi teorema I dapat ditunjukkan kebenarannya.

Bukti kedua adalah pembuktian dengan induksi kuat pada jumlah sisi graf, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

9. Kebenaran teorema I dapat ditunjukkan untuk jumlah sisi terkecil dari graf, yaitu nol.
10. Teorema I diasumsikan benar untuk semua graf dengan jumlah sisi kurang dari jumlah sisi graf (G, C) .
11. Kebenaran teorema I dapat ditunjukkan untuk graf (G, C) .

Adapun teorema II dapat dibuktikan dengan pembuktian langsung, dengan langkah-langkah:

1. Kebenaran hipotesis teorema II dapat ditunjukkan.
2. Kebenaran konklusi teorema II dapat ditunjukkan.

4.2 Saran

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, penulis menyarankan untuk:

1. membuktikan teorema-teorema lain pada artikel *Sudoku Squares and Chromatic Polynomials*.
2. mengkaji *sudoku* pada bidang matematika yang lain misalnya pemrograman, aljabar abstrak (grup permutasi), dan lain-lain.
3. mengkaji versi-versi baru *sudoku* seperti *circular sudoku*, *sudoku alphabet*, *squify*, dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdusyasykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Alisah, Evawati dan Dharmawan, Eko Prasetyo. 2007. *Filsafat Dunia Matematika: Pengantar untuk Memahami Konsep-konsep Matematika*. Jakarta: Pustaka Karya
- Bender E. A. dan Goldman, J. R.. 1975. *Mobius Inversion In Combinatorial Analysis: On The Applications of Mobius Inversion In Combinatorial Analysis*. (www.joma.org/images/uploadlibrary/22/Ford/BenderGoldman.pdf, diakses Rabu, 12 November 2008, pukul 08.17 WIB)
- Djajaprana, Ferry. 2008. *Misteri Angka Menurut Sufi*. (http://ferrydjajaprana.multiply.com/journal/item/271/Misteri_Angka_Menurut_Sufi, diakses Minggu, 4 Januari 2009, pukul 08.48 WIB)
- Duval, Art. 2005. *An Example of Induction: Chromatic Polynomials*. (<http://www.math.utep.edu/Faculty/duval/class/2325/084/chrpoly.pdf>, diakses Rabu, 3 Desember 2008, pukul 06.21 WIB)
- Ege, Mustafa. Tanpa tahun. *Proper Coloring (definition)*. (<http://www.nist.gov/dads/HTML/propercolor.html>, diakses Selasa, 14 Oktober 2008, pukul 08.42 WIB)
- Handayani, Qori. 2005. *Pembuktian Teorema Pythagoras dengan Menggunakan Kekonvergenan Seragam Barisan Fungsi*. UIN Malang: Skripsi tidak diterbitkan
- Herzberg, Agnes M. dan Murty, M. Ram. 2007. *Notices of The AMS Volume 54, Number 6: Sudoku Squares and Chromatic Polynomials*. (<http://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf>, diakses Jumat, 28 Desember 2007, pukul 16.42 WIB)
- http://id.wikipedia.org/wiki/Pembuktian_matematika, diakses Minggu, 4 Januari 2009, pukul 08.59 WIB
- <http://id.wikipedia.org/wiki/sudoku>, diakses Minggu, 3 Agustus 2008, pukul 06.56 WIB
- <http://mathworld.wolfram.com/ChromaticPolynomial.html>, diakses Rabu, 3 Desember 2008, pukul 06.08 WIB

<http://planetmath.org/encyclopedia/Monic2.html>, diakses Minggu, 3 Agustus 2008, pukul 06.01 WIB

Komurata, Mitsuko. 2006. *Sudoku Permainan Tebak Angka*. _ : Mitra Media

Kung, Joseph P. S.. Tanpa tahun. *Möbius Inversion*. (<http://eom.springer.de/m/m130180.htm>, diakses Rabu, 12 November 2008 pukul 07.46 WIB)

Lipschutz, Seymour dan Lipson, Marc Lars. 2002. *Matematika Diskrit I: Terjemahan Tim Editor Salemba Teknika*. Jakarta: Salemba Teknika

Molloy, Michael dan Reed, Bruce. 2002. *Graph Colouring and The Probabilistic Method*. Berlin: Springer

Munir, Rinaldi. 2001. *Buku Teks Ilmu Komputer: Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika

Nagasaki, Aiko. 2007. *Extreme Sudoku*. _ : Mitra Media

Rasjid, H. Sulaiman. 2004. *Fiqih Islam: Cetakan ke-37*. Bandung: Sinar Baru Algesindo

Rosen, Kenneth H.. 2003. *Discrete Mathematics and Its Application: Fifth Edition*. Singapura: McGraw Hill

Ross, Kenneth A. dan Wright, Charles R. B.. 2003. *Discrete Mathematics: Fifth Edition*. New Jersey: Prentice Hall

Shadiq, Fadjar. 2007. *Apa dan Mengapa Matematika Begitu penting?*. Yogyakarta: Departemen Pendidikan Nasional

Siang, Jok Jeng. 2004. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer: Edisi II*. Yogyakarta; Andi

Sukardjono. 2002. *Teori Latis*. Yogyakarta Andi

Sutarno, Heri dkk.. 2005. *Matematika Diskrit*. Malang: UM Press

Transmedia Team. 2006. *Sudoku*. Jakarta : Transmedia

Wijaya, L. Sastra. 2005. *Wayne Gould Menebar "Wabah" Sudoku*. (<http://64.203.71.11/kompas-cetak/0510/24/Sosok/2148353.htm>, diakses Minggu, 3 Agustus 2008, pukul 07.03)

Wilson, Robin J. & Watkins, John J.. 1989. *Graphs An Introductory Approach*. Singapura: Wiley



DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lutfi Arisatun Niswah
Nim : 04510042
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Pembuktian Teorema Polinomial Khromatik dalam
Sudoku
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Ahmad Barizi, M.A

| No | Tanggal | HAL | Tanda Tangan |
|----|-------------------|---|--------------|
| 1 | 25 Februari 2008 | Proposal | 1. |
| 2 | 11 Agustus 2008 | Konsultasi Masalah | 2. |
| 3 | 28 September 2008 | Konsultasi BAB I dan II | 3. |
| 4 | 16 Oktober 2008 | Konsultasi Keagamaan | 4. |
| 5 | 17 Oktober 2008 | Revisi BAB I dan II | 5. |
| 6 | 22 Oktober 2008 | Revisi Keagamaan | 6. |
| 7 | 28 Oktober 2008 | Revisi BAB I dan II Konsultasi BAB III | 7. |
| 8 | 11 November 2008 | Revisi BAB III | 8. |
| 9 | 27 Desember 2008 | Revisi BAB III | 9. |
| 10 | 27 Desember 2008 | Revisi Keagamaan | 10. |
| 11 | 6 Januari 2009 | Konsultasi Keseluruhan | 11. |
| 12 | 10 Januari 2009 | Revisi Keagamaan | 12. |
| 13 | 15 Januari 2009 | ACC Keagamaan | 13. |
| 14 | 16 Januari 2009 | ACC Keseluruhan | 14. |

Malang, 16 Januari 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321