

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *BIVARIATE MODIFIED*
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE PADA PROSES
PRODUKSI KERTAS**

SKRIPSI

**OLEH
NUR AINI
NIM. 10610013**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *BIVARIATE MODIFIED*
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE PADA PROSES
PRODUKSI KERTAS**

SKRIPSI

**Diajukan kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh
Nur Aini
NIM. 10610013**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2015**

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *BIVARIATE MODIFIED*
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE PADA PROSES
PRODUKSI KERTAS**

SKRIPSI

**Oleh
Nur Aini
NIM. 10610013**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 28 Januari 2015

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENERAPAN GRAFIK PENGENDALI *BIVARIATE MODIFIED*
EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE PADA PROSES
PRODUKSI KERTAS**

SKRIPSI

**Oleh
Nur Aini
NIM. 10610013**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 13 Februari 2015

Penguji Utama : Dr. Sri Harini, M.Si

Ketua Penguji : Abdul Aziz, M.Si

Sekretaris Penguji : Fachrur Rozi, M.Si

Anggota Penguji : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Nur Aini

NIM : 10610013

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul : Penerapan Grafik Pengendali *Bivariate Modified Exponentially*

Weighted Moving Average pada Proses Produksi Kertas

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Januari 2015
Yang membuat pernyataan,

Nur Aini
NIM. 10610013

MOTO

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

“Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”

(QS. Alam Nasyrah/94:6)



PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'aalamin

Karya ini penulis persembahkan untuk:

Bapak dan Ibu tercinta, “Bpk. Warsono dan Ibu Kusrotun” yang selalu mendo’akan, membimbing, mendukung dan memotivasi baik dari segi material maupun spiritual sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Adik tersayang, Agung Kurniawan yang selalu memberikan motivasi dan semangat untuk penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu 'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke-hadirat Allah Swt. yang telah menganugerahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Keberhasilan penyusunan skripsi ini tidak lepas dari bantuan, arahan dan bimbingan dari berbagai pihak, baik berupa pikiran, motivasi, tenaga, maupun do'a dan restu. Karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahardjo, M.Si, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. drh. Hj. Bayyinatul Muchtaromah, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang telah banyak meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan arahan dengan sabar dalam menyelesaikan skripsi ini.
5. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd, selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan banyak arahan dan bimbingan kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

7. H. Yahya Dja'far dan Hj. Syafiyah, selaku Pengasuh PPP. Al-Hikmah Al-Fathimiyyah yang senantiasa memberi pengarahan kepada penulis selama menjadi santri.
8. Kedua orang tua penulis, Bapak Warsono dan Ibu Kusrotun yang senantiasa mendukung dengan segenap cinta kasih yang tulus. Berkat do'a dan ridho mereka, Allah memberikan berbagai kemudahan kepada penulis.
9. Sahabat-sahabat "Integral", terutama Syaifie Ali Azizy, Rowaihul Jannah, Naila Nafilah, Nurul Jannah, Harum Kurniasari, Fitria Nur Aini, Muhammad Ghozali, Syihabuddin Zahid, Sigit Fembrianto, Muhammad Hasan, Fahmi C.A dan Fina Aliyah terima kasih selalu memberikan motivasi, nasihat, serta pengalaman berharga saat di bangku kuliah dan organisasi.
10. Sahabat-sahabat Jurusan Matematika, khususnya Wahyudi, Siti Muyassaroh dan Mayasaroh. Terima kasih telah berbagi ilmu di bangku kuliah.
11. Keluarga besar Ahaf Institute, terutama Rona Avissina, Mu'awanah, Siti Jumaroh, Santika Priyantini, Dinda Zahra dan Shobibatul Khoiriyah. Terima kasih atas segala dukungan dan motivasi yang diberikan kepada penulis.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang turut mendukung kelancaran penyempurnaan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal 'Alamin.*

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Januari 2015

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR TABEL	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
ABSTRAK	xv
ABSTRACT	xvi
ملخص	xvii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	6
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 Batasan Masalah	7
1.5 Manfaat Penelitian	7
1.6 Sistematika Penulisan	8
 BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Pengendalian Kualitas Statistik (<i>Statistical Quality Control</i>)	10
2.2 Grafik Pengendali <i>Exponentially Weighted Moving Average</i> (EWMA)	13
2.3 Grafik Pengendali <i>Modified Exponentially Weighted Moving Average</i> (MOEWMA)	16
2.4 Grafik Pengendali <i>Multivariat Exponentially Weighted Moving Average</i> (MEWMA)	27
2.5 Analisis Korelasi	29
2.6 Uji Distribusi Normal Multivariat	31
2.7 Deret Geometrik	33
2.8 Identifikasi Variabel Penyebab <i>Out of Control</i>	33

2.9 Kajian Keagamaan tentang Menjaga Karakteristik Kualitas	34
---	----

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian	37
3.2 Jenis dan Sumber Data	37
3.3 Struktur Data	38
3.4 Metode Analisis	39
3.4.1 Studi Literatur	39
3.4.2 Analisis	39

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Grafik Pengendali BMOEWMA	41
4.1.1 Definisi Vektor BMOEWMA (Z_i^*)	41
4.1.2 Deskripsi Z_i^* Secara Rekursif dari Vektor X_0	42
4.1.3 Penentuan Z_i^* dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	43
4.1.4 Penentuan Ekspektasi dari Z_i^*	44
4.1.5 Penentuan Kovarian dari Z_i^*	46
4.2 Penerapan Grafik Pengendali BMOEWMA	47
4.2.1 Penerapan Data Karakteristik Kualitas	47
4.2.2 Analisis Korelasi antara <i>Gramathur</i> dan <i>Thickness</i>	48
4.2.3 Uji Distribusi Normal Multivariat	49
4.2.4 Pendeteksian <i>Mean</i> Proses dengan Grafik Pengendali BMOEWMA	50
4.3 Perbandingan Grafik Pengendali BMOEWMA dengan BEWMA	56
4.4 Pengidentifikasian Penyebab Variabel yang Tidak Terkendali pada Grafik Pengendali BMOEWMA	58
4.5 Manfaat Menjaga Karakteristik Kualitas dalam Kajian Agama	64

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan	67
5.2 Saran	68

DAFTAR PUSTAKA	69
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN	71
--------------------------------	----

RIWAYAT HIDUP	93
----------------------------	----

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Standar Perusahaan untuk Masing-masing Variabel	38
Tabel 3.2 Struktur Data untuk Grafik Pengendali BMOEWMA	38
Tabel 4.1 Deskriptif Statistik Karakteristik Kualitas	47
Tabel 4.2 Nilai Korelasi antar Variabel	48
Tabel 4.3 Data Terpusat dari Masing-masing Variabel	50
Tabel 4.4 Nilai Vektor BMOEWMA untuk Tiap-tiap z_i^* pada $\lambda = 0,1$	51
Tabel 4.5 Nilai Vektor BMOEWMA untuk Tiap-tiap z_i^* pada $\lambda = 0,2$	51
Tabel 4.6 Nilai Statistik T_i^2	52
Tabel 4.7 Pengamatan di Luar Batas Pengendali Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,1$	54
Tabel 4.8 Pengamatan di Luar Batas Pengendali Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,2$	55
Tabel 4.9 Pengamatan di Luar Batas Pengendali Grafik Pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,2$	58
Tabel 4.10 Nilai Kontribusi Relatif dari Masing-masing Variabel untuk $\lambda = 0,1$	59
Tabel 4.11 Variabel Penyebab Tidak Terkendali untuk $\lambda = 0,1$	60
Tabel 4.12 Nilai Kontribusi Relatif dari Masing-masing Variabel untuk $\lambda = 0,2$	62
Tabel 4.13 Variabel Penyebab Tidak Terkendali untuk $\lambda = 0,2$	63

DAFTAR GAMBAR

Gambar 4.1 Grafik QQ Plot Normal Multivariat 49

Gambar 4.2 Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,1$ 53

Gambar 4.3 Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,2$ 53

Gambar 4.4 Grafik Pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,1$ 57

Gambar 4.5 Grafik Pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,2$ 57

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Data Sifat Fisik Kertas Bulan Mei dan Juni	71
Lampiran 2 Data Terpusat dari Masing-masing Variabel	72
Lampiran 3 Program Pemeriksaan Distribusi Normal Multivariat	73
Lampiran 4 Program Grafik Pengendali BMOEWMA dan Identifikasi Variabel Penyebab <i>Out of Control</i>	74
Lampiran 5 Program Grafik Pengendali BEWMA	76
Lampiran 6 Nilai Vektor BMOEWMA untuk Tiap-tiap Z_i^* untuk $\lambda = 0,1$	78
Lampiran 7 Nilai Vektor BMOEWMA untuk Tiap-tiap Z_i^* untuk $\lambda = 0,2$	79
Lampiran 8 Nilai Statistik T_i^2	80
Lampiran 9 Pengamatan <i>Out of Control</i> untuk $\lambda = 0,4$	82
Lampiran 10 Pengamatan <i>Out of Control</i> untuk $\lambda = 0,6$	83
Lampiran 11 Pengamatan <i>Out of Control</i> untuk $\lambda = 0,8$	84
Lampiran 12 Nilai Vektor BEWMA untuk Tiap-tiap Z_i^* untuk $\lambda = 0,1$	85
Lampiran 13 Nilai Vektor BEWMA untuk Tiap-tiap Z_i^* untuk $\lambda = 0,2$	86
Lampiran 14 Nilai Statistik M_i	87
Lampiran 15 Gambar Grafik Pengendali BEWMA	89
Lampiran 16 Nilai ARL untuk Diagram Kendali MOEWMA	90
Lampiran 17 Tabel Distribusi <i>Chi-Square</i> untuk d.f. = 1 – 60	91
Lampiran 18 Tabel r untuk d.f. = 51 – 90	92

ABSTRAK

Aini, Nur. 2015. **Penerapan Grafik Pengendali *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* Pada Proses Produksi Kertas.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si (II) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

Kata kunci: Grafik pengendali BMOEWMA, identifikasi variabel

Grafik pengendali *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* (BMOEWMA) merupakan grafik pengendali variabel yang berguna untuk mendeteksi pergeseran rata-rata proses yang melibatkan lebih dari satu karakteristik kualitas yang saling berhubungan secara bersama-sama. Mengendalikan satu persatu karakteristik kualitas menjadi tidak efektif dalam mengendalikan produk yang memiliki lebih dari satu karakteristik kualitas. Salah satu grafik pengendali yang dapat digunakan dalam situasi ini adalah grafik pengendali BMOEWMA, yakni lebih sensitif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses.

Dalam penelitian ini, grafik pengendali BMOEWMA diterapkan pada produksi kertas yang terdiri dari 2 karakteristik kualitas yakni *gramathur* (X_1) dan *thickness* (X_2). Analisis data dilakukan pada 3 tahap, tahap pertama mempelajari konsep dasar grafik pengendali BMOEWMA, tahap kedua penerapan grafik pengendali BMOEWMA dan tahap ketiga mengidentifikasi variabel penyebab terjadinya sinyal *out of control*. Penerapan grafik pengendali BMOEWMA dilakukan pada nilai λ yang berbeda yakni $\lambda = 0,1$ dan $\lambda = 0,2$

Pada grafik pengendali BMOEWMA dengan $\lambda = 0,1$ terdapat 40 pengamatan yang *out of control*, dan pada $\lambda = 0,2$ terdapat 32 pengamatan yang *out of control*, ini menunjukkan bahwa grafik pengendali tersebut sangat sensitif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata. Terdapat banyak titik yang berada di luar batas kendali, sehingga dilakukan identifikasi variabel penyebab proses *out of control* untuk perbaikan proses. Variabel yang menyebabkan proses *out of control* adalah variabel yang nilai kontribusinya lebih besar dari nilai $\chi_{0,05;1}$ yaitu 3,84146, dalam hal ini variabel yang paling sering menyebabkan *out of control* adalah variabel *thickness* (X_2).

ABSTRACT

Aini, Nur. 2015. **The Application of Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average Control Chart on Paper Production Process.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Fachrur Rozi, M.Si (II) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.

Keyword: BMOEWMA control chart, identification variable

Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average (BMOEWMA) control chart is a variable chart controller that is useful for detecting the average drag involves more than one quality characteristics that are interconnected each other. Controlling one by one of quality characteristics become ineffective in a product controlling that has more than one quality characteristics. One of the control charts that can be used in this situation is BMOEWMA control chart, which is more sensitive to detect an average drag of a process.

In this research, the BMOEWMA control chart applied on the paper production that consist of two quality characteristics namely the gramathur (X_1) and thickness (X_2). Data analysis was done on three steps, the first step is studying the basic concepts BMOEWMA control chart, the second step is the applying BMOEWMA control chart and the third step is identifying variables that causes the signal is out of control. Application of BMOEWMA control chart is done in different value λ , that is when $\lambda = 0,1$ and $\lambda = 0,2$.

In the BMOEWMA control chart with $\lambda = 0,1$ there are 40 observations out of control, and at $\lambda = 0,2$ there are 32 observations were out of control, in which indicate that the control charts are very sensitive on detecting the average drag. There are many points are outside the control limits, so that be done by variables identifying variable that caused the process out of control was performed to improve the process. Variables cause the process out of control is variable that its contribution value is bigger than the value of $\chi_{0.05,1}$ that is 3,84146. In this case the most often variable that cause out of control is thickness (X_2).

ملخص

عيني, نور. ٢٠١٥. تطبيق وحدة تحكم رسومات *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* في عملية إنتاج الورق. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج. المشرف: (١) فحر الرازي، الماجستير (٢) آري كوسماتوتي، الماجستير.

الكلمة الرئيسية: وحدة تحكم رسومات *BMOEWMA*، تحديد المتغير

وحدة تحكم رسومات *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* (*BMOEWMA*) هي تحكم الرسومات المتغيري لاكتشاف متوسط السحب من العمليات التي تنطوي على خصائص الجودة الكثيرة التي ترابط معا. التحكم في خصائص واحدا بواحد عديم التأثير لتحكم منتجات لها خصائص الجودة الكثيرة. إحدى وحدة تحكم الرسومات التي يمكن استخدامها في هذه الحالة هي وحدة تحكم رسومات *BMOEWMA*، أحس في كشف تحول معدل العملية. في هذا البحث، تطبق تحكم رسومات *BMOEWMA* في إنتاج الورق التي تتكون من خصائصا الجودة يعني $Gramathur (X_1)$ و $Thickness (X_2)$. وتحليل البيانات على ثلاث مراحل، المرحلة الأولى تعليم مفهوم وحدة تحكم رسومات *BMOEWMA* الأساسية، والمرحلة الثاني تطبيق وحدة تحكم رسومات *BMOEWMA*، والمرحلة الثالثة تحديد المتغيرات المسببة لوجود إشارة *out of control*. تطبق وحدة تحكم رسومات *BMOEWMA* على قيمة λ المختلف يعني $\lambda = 0,1$ و $\lambda = 0,2$

في وحدة تحكم رسومات *BMOEWMA* $\lambda = 0,1$ أربعون ملاحظة خارج نطاق السيطرة (*out of control*) و ب $\lambda = 0,2$ اثنان وثلاثون ملاحظة خارج نطاق السيطرة (*out of control*)، وهذا يدل على الرسم البياني للتحكم حساس جدا في الكشف عن تحول في المتوسط. بسبب كثير من النقطة التي خارج حدود السيطرة فتعمل تحديد المتغيرات سبب عملية (*out of control*) لتصحيح العملية. المتغير الذي يسبب عملية (*out of control*) متغير قيمة اسهامها أكبر من $X_{0,05,1}$ يعني $3,84146$ المتغير الذي يسبب عملية (*out of control*) مرار في هذا الأمر هي متغير $Thickness (X_2)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Proses produksi merupakan serangkaian kegiatan dalam mengolah bahan baku menjadi suatu produk jadi. Dalam proses produksi perlu adanya pengawasan yang ketat supaya produk yang dihasilkan berkualitas. Kualitas menjadi hal penting yang harus diperhatikan dalam menghadapi persaingan bisnis dunia industri yang terus berkembang. Dalam menjaga kualitas produk yang dihasilkan diperlukan sistem pengendalian kualitas statistik, agar menghasilkan produk yang semakin baik. Montgomery (1990:120) menyatakan bahwa tujuan pokok pengendalian kualitas statistik adalah menyidik dengan cepat terjadinya sebab-sebab terduga atau pergeseran proses sedemikian hingga penyelidikan terhadap proses itu dan tindakan pembetulan dapat dilakukan sebelum terlalu banyak unit yang tak sesuai diproduksi.

Dalam upaya meningkatkan kualitas produk secara statistik digunakan metode untuk memonitor proses dan mengendalikan kualitas proses produksi yang disebut dengan Pengendalian Kualitas Proses secara Statistik atau *Statistical Process Control* (SPC). SPC memiliki tujuh alat statistik yang membantu mencapai tujuan pokoknya, salah satu alatnya adalah grafik pengendali. Grafik pengendali diklasifikasikan ke dalam dua tipe yaitu grafik pengendali variabel dan atribut. Grafik pengendali variabel memberikan jauh lebih banyak informasi tentang penampilan proses daripada grafik pengendali atribut. Informasi yang diberikan adalah mengenai *mean* dan variabilitas sehingga titik-titik yang jatuh di

luar batas kendali dapat dicari penyebab terduganya (Montgomery, 1990:125&243).

Shey-Huei Sheu, dkk (2009) dalam Tyagita dan Mashuri (2011:1) mengatakan pada tahun 1920, Walter A. Shewhart mengembangkan konsep grafik pengendali untuk memonitor karakteristik kualitas dan meningkatkan kemampuan proses. Hal yang penting dari memonitor proses secara statistik adalah pendeteksian variasi secara cepat dalam sistem produksi untuk memungkinkan pengambilan langkah yang diperlukan sebelum terjadi lebih banyak lagi produk cacat yang diproduksi. Grafik pengendali bertujuan untuk mendeteksi sinyal *out of control* dengan cepat ketika terjadi pergeseran rata-rata proses.

SPC berdasarkan karakteristik kualitas dibedakan menjadi dua macam yaitu grafik pengendali univariat jika menggunakan satu variabel karakteristik kualitas dan grafik pengendali multivariat jika menggunakan lebih dari satu variabel karakteristik kualitas. Pengembangan grafik pengendali untuk yang pertama kali adalah grafik pengendali univariat yaitu grafik pengendali Shewhart. Pertama kali diperkenalkan untuk grafik pengendali variabel adalah grafik pengendali $\bar{x}$ Shewhart, akan tetapi tidak peka terhadap pergeseran kecil dalam *mean* proses. Kemudian diusulkan grafik pengendali jumlah kumulatif (atau *cusum*) sebagai alternatif terhadap grafik pengendali Shewhart. Grafik ini dapat menghimpun secara langsung semua informasi di dalam barisan nilai-nilai sampel dengan menggambarkan jumlah kumulatif deviasi nilai sampel dari nilai target. Grafik pengendali rata-rata bergerak atau EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) juga sangat efektif dalam mendeteksi pergeseran proses yang kecil (Montgomery, 1990:270).

Setelah pengembangan grafik pengendali univariat berikutnya dikembangkan grafik pengendali multivariat. Dalam jurnal yang ditulis oleh Dewantara dan Mashuri (2013:1) menyebutkan bahwa “Ada banyak macam grafik pengendali multivariat, diantaranya adalah T^2 Hotelling, Cumulative Sum, Multivariate Exponential Weighted Moving Average (MEWMA).”, dalam mengendalikan beberapa karakteristik yang saling berhubungan secara bersamaan, untuk membandingkan beberapa grafik pengendali, salah satu alat pembanding yang dapat digunakan adalah Average Run Length (ARL).

Pada penelitian terdahulu telah membandingkan grafik pengendali multivariat T^2 Hotelling dengan grafik pengendali MEWMA untuk pengontrolan terhadap *mean* pada proses pembuatan pita plastik, berdasarkan hasil penelitian perbandingan kedua grafik pengendali tersebut dapat disimpulkan bahwa grafik pengendali MEWMA lebih sensitif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses (Suryaningtyas dan Mashuri, 2013:1).

Salah satu grafik pengendali multivariat yang efektif untuk mendeteksi pergeseran vektor *mean* yang kecil dan pengamatan bersifat individual adalah grafik pengendali Multivariate Exponentially Weighted Moving Average (MEWMA). Patel dan Divecha (2013) mengembangkan grafik pengendali Multivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average (MMOEWMA) sebagai modifikasi grafik MEWMA. Kemudian melakukan perbandingan antara grafik pengendali MMOEWMA dengan MEWMA, dengan hasil untuk proses pergeseran yang kecil grafik pengendali MMOEWMA lebih sensitif dari grafik pengendali MEWMA. Dalam upaya memperbaiki kualitas produk, akan terus

dikembangkan grafik pengendali untuk memonitor proses produksi pada suatu perusahaan. Sebagaimana disebutkan dalam firman Allah sebagai berikut:

أَفَرَأَىٰ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ ﴿٣﴾ الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ ﴿٤﴾ عَلَّمَ الْإِنْسَانَ مَا لَمْ يَعْلَمْ ﴿٥﴾

“Bacalah, dan Tuhan-mulah yang Maha pemurah. Yang mengajar (manusia) dengan perantaraan kalam. Dia mengajarkan kepada manusia apa yang tidak diketahuinya.” (QS. al-Alaq/96:3-5).

Al-Jazairi (2009:978) menafsirkan bahwa “Allah *Ta’ala* berfirman, ‘*Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya,*’ inilah di antara nikmat Allah yang diberikan kepada seluruh hamba-Nya dan nikmat-Nya ini tidak bisa dihitung. Yaitu Allah telah mengajarkan ilmu pengetahuan yang tidak diketahui manusia melalui pena. Inilah keutamaan pena karena telah menjadi perantara ilmu pengetahuan.”

Pada tafsir ayat di atas penulis menginterpretasikan terus berusaha mempelajari metode baru pada grafik pengendali untuk memperbaiki hasil produksi, maka Allah Swt. akan memberikan pemahaman kepada manusia tentang pengembangan suatu metode yaitu grafik pengendali MMOEWMA.

Seiring dengan bertambahnya penduduk, kebutuhan manusia terhadap barang-barang keperluan sehari-hari juga ikut bertambah, salah satunya adalah kertas. Kertas sudah menjadi kebutuhan primer bagi perusahaan yang bergerak di sektor finansial, asuransi dan lain-lain. Konsumsi kertas semakin bertambah setiap tahunnya sehingga peluang pasar terbuka untuk produksi kertas. Kertas sebagai media utama untuk menulis, mencetak, fotokopi dan penyiapan dokumen, sehingga kualitas dan harga adalah dua hal yang menjadi kriteria utama dalam memilih kertas. Dalam produksi kertas karakteristik kualitas dapat dinyatakan dalam bentuk ukuran angka seperti ketebalan dan berat kertas.

Kualitas merupakan salah satu faktor yang mempengaruhi konsumen untuk menentukan produk yang akan digunakan. Konsumen akan memilih produk yang sesuai dengan keinginan dan kebutuhan mereka yaitu produk yang memiliki kualitas baik. Upaya sebuah perusahaan yang bertindak sebagai produsen dalam memenuhi keinginan dan kebutuhan konsumen, adalah menjaga kualitas produk. Sebagaimana firman Allah di dalam al-Quran sebagai berikut:

أَوْفُوا الْكَيْلَ وَلَا تَكُونُوا مِنَ الْمُخْسِرِينَ ﴿١٨١﴾ وَزِنُوا بِالْقِسْطَاسِ الْمُسْتَقِيمِ ﴿١٨٢﴾ وَلَا تَبْخُسُوا النَّاسَ أَشْيَاءَهُمْ وَلَا تَعَثُّوا فِي الْأَرْضِ مُفْسِدِينَ ﴿١٨٣﴾

“Sempurnakanlah takaran dan janganlah kamu termasuk orang-orang yang merugikan. Dan timbanglah dengan timbangan yang lurus. Dan janganlah kamu merugikan manusia pada hak-haknya dan janganlah kamu merajalela di muka bumi dengan membuat kerusakan.” (QS. asy-Syu’araa’ /26:181-183).

Penafsiran ayat di atas adalah “Jika kalian berjualan, maka takarlah pembelian mereka dengan sempurna, dan janganlah kalian merugikan hak mereka sehingga kalian memberikannya dalam keadaan kurang. Kemudian jika kalian membeli, maka ambillah seperti jika kalian menjual. Timbangkanlah dengan timbangan yang lurus dan adil. Janganlah kalian mengingkari hak orang lain dalam takaran, timbangan atau lain-lain, seperti pengukuran dan perhitungan. Bentuk pengurangan hak itu seperti mengambil telur yang besar dan memberi telur yang kecil, memberi roti yang kecil dan mengambil roti yang besar, dan seterusnya (Al-Maragi, 1993:184-185).

Dengan mempelajari ide dan pengembangan hasil penelitian sebelumnya penelitian ini akan difokuskan untuk membangun grafik pengendali bivariat. Grafik pengendali bivariat lebih efektif dalam mengendalikan dua karakteristik kualitas yang saling berhubungan secara bersama-sama. Mengendalikan satu

persatu karakteristik kualitas menjadi tidak efektif untuk mengendalikan produk yang memiliki lebih dari satu karakteristik kualitas.

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan dua variabel karakteristik kualitas, yaitu berat kertas (*gramathur*) dan ketebalan (*thickness*). Maka akan digunakan grafik pengendali *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average (BMOEWMA)* yang merupakan perluasan dari grafik pengendali *Modified Exponentially Weighted Moving Average (MOEWMA)* sehingga dalam skripsi ini, judul yang diajukan adalah “Penerapan Grafik Pengendali *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* pada Proses Produksi Kertas”

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana penerapan grafik pengendali *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average (BMOEWMA)* untuk mendeteksi pergeseran rata-rata proses pada proses produksi kertas?
2. Variabel apa yang menyebabkan proses tidak terkendali?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. Mengetahui penerapan grafik pengendali *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average (BMOEWMA)* pada proses produksi kertas.
2. Mengetahui variabel yang menyebabkan proses tidak terkendali.

Batasan Masalah

Sesuai rumusan masalah dan tujuan penelitian, pembatasan masalahnya adalah:

1. Grafik pengendali bivariat untuk mengendalikan karakteristik kualitas dengan pengamatan yang bersifat individual.
2. Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah variabel kualitas produksi kertas pada proses *calender stack* yaitu berat kertas (*gramathur*) dan ketebalan (*thickness*).
3. Nilai pembobot pada grafik BMOEWMA diasumsikan sama, yaitu $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, dengan $\lambda = 0,1$, $\lambda = 0,2$, $\lambda = 0,4$, $\lambda = 0,6$ atau $\lambda = 0,8$

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan bermanfaat bagi pihak terkait. Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi Peneliti

Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan tentang grafik pengendali multivariat dan mengetahui bagaimana aplikasi grafik pengendali BMOEWMA.

2. Bagi Instansi

Membantu perusahaan untuk melakukan kinerja yang lebih baik lagi pada proses *calender stack* dalam meningkatkan atau mempertahankan kualitas produksi kertas.

3. Bagi Pembaca

Penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan rujukan dan pengembangan pembelajaran statistik, khususnya dalam bidang pengendalian kualitas statistik.

1.5 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari lima bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Pustaka

Bab ini menjelaskan beberapa teori yang berhubungan dengan penelitian, yaitu mengenai pengendalian kualitas statistik, grafik pengendali multivariat, grafik pengendali *exponentially weighted moving average*, grafik pengendali *modified exponentially weighted moving average*, grafik pengendali *multivariate exponentially weighted moving average*, dan kajian keagamaan.

Bab III Metode Penelitian

Bab ini menjelaskan langkah-langkah dalam penelitian yang meliputi pendekatan, sumber data, struktur data yang digunakan, dan metode analisis.

Bab IV Pembahasan

Bab ini menjelaskan bagaimana membuat grafik pengendali BMOEWMA dengan langkah-langkah yang telah disebutkan dalam metode penelitian dan mengidentifikasi variabel penyebab *out of control*.

Bab V Penutup

Bab ini memaparkan kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran untuk penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Pengendalian Kualitas Secara Statistik (*Statistical Quality Control*)

Montgomery (1990:120) menjelaskan bahwa dalam suatu perusahaan, untuk mengetahui apakah kualitas suatu produk sudah sesuai dengan spesifikasi atau belum, maka perlu diadakan pengendalian kualitas merupakan suatu metode pengumpulan dan analisis data kualitas, serta penentuan dan interpretasi pengukuran yang menjelaskan tentang proses dalam suatu sistem industri, untuk meningkatkan kualitas dari hasil produksi guna memenuhi kebutuhan konsumen.

Tujuan pengendalian kualitas statistik adalah menyidik dengan cepat terjadinya sebab-sebab terduga atau pergeseran proses sedemikian sehingga penyelidikan terhadap proses dan tindakan pembetulan dapat dilakukan sebelum terlalu banyak unit yang tak sesuai diproduksi. Sedangkan tujuan akhir pengendalian kualitas statistik adalah menyingkirkan keragaman dalam proses sehingga dapat melakukan perbaikan dalam proses produksi untuk menghasilkan hasil produksi yang baik.

Pengendali kualitas statistik banyak menggunakan alat-alat statistik yang membantu mencapai tujuannya. Pengendalian kualitas statistik mempunyai 7 alat, yaitu:

1. Grafik pengendali (*control chart*)
2. Histogram
3. Diagram pareto
4. Lembar kendali

5. Diagram konsentrasi cacat
6. Diagram pencar (*scatter plot*)
7. Diagram sebab dan akibat.

Montgomery (1990:125) menyatakan bahwa untuk menentukan suatu proses berada dalam kendali secara statistik digunakan suatu alat yang disebut sebagai grafik pengendali (*control chart*). Secara umum grafik pengendali diklasifikasikan ke dalam dua tipe. Pertama, grafik pengendali variabel yaitu apabila karakteristik kualitas dapat diukur dan dinyatakan dalam bilangan. Misalnya, diameter bantalan poros dapat diukur dengan mikrometer dan dinyatakan dalam mililimeter. Suatu karakteristik kualitas yang dapat diukur, seperti dimensi, berat, atau volume.

Kedua, grafik pengendali sifat (atribut) yaitu apabila karakteristik kualitas tidak dapat diukur dengan skala kuantitatif. Dalam keadaan ini kita dapat menilai tiap unit produk sebagai sesuai atau tidak sesuai atau kita dapat mencacah banyak yang tidak sesuai (cacat) yang tampak pada suatu unit produk. Contoh karakteristik kualitas yang merupakan sifat, terjadinya tangkai penghubung mesin mobil, bagian semi konduktor tak berfungsi dalam satu giliran produksi, dan sebagainya.

Secara umum model grafik pengendali dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 UCL &= \mu_w + k\sigma_w \\
 CL &= \mu_w \\
 LCL &= \mu_w - k\sigma_w
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

dengan

UCL : batas kendali atas (*upper control limit*)

CL : garis tengah (*center line*)

LCL : batas kendali bawah (*lower control limit*)

w : statistik sampel yang digunakan sebagai ukuran karakteristik kualitas proses produksi

k : jarak batas kendali dari garis tengah yang dinyatakan dalam unit standar deviasi

σ_w : standar deviasi dari w

μ_w : *mean* deviasi dari w

Teori umum grafik pengendali ini pertama kali ditemukan oleh Dr. Walter A. Shewhart, dan grafik pengendali yang dikembangkan menurut asas-asas ini seringkali dinamakan grafik pengendali Shewhart. Satu kekurangan utama setiap grafik pengendali Shewhart adalah hanya menggunakan informasi tentang proses yang terkandung dalam titik tergambar yang terakhir, dan mengabaikan setiap informasi yang diberikan oleh seluruh barisan titik-titik itu.

Montgomery (1990:270) menyatakan bahwa grafik pengendali jumlah kumulatif (*cusum*) telah diusulkan sebagai alternatif terhadap grafik pengendali Shewhart. Grafik pengendali jumlah kumulatif lebih efektif dalam menyidik pergeseran kecil dari pada grafik $\bar{x}$ Shewhart. Akan tetapi grafik pengendali jumlah kumulatif memiliki kekurangan yaitu lambat dalam menyidik pergeseran proses yang besar. Grafik pengendali berdasarkan rata-rata bergerak lebih efektif dalam menyidik pergeseran proses yang kecil dari pada grafik $\bar{x}$ biasa. Seperti halnya grafik pengendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA).

2.2 Grafik Pengendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)

Choeroni (2013:22-24) menjelaskan bahwa grafik pengendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) telah diperkenalkan oleh Robert dan Hunter. EWMA didefinisikan sebagai

$$Z_i = \lambda X_i + (1 - \lambda)Z_{i-1} \quad (2.2)$$

Dengan $0 < \lambda \leq 1$ suatu konstanta dan nilai awal (diperlukan dengan sampel pertama pada $i = 1$) adalah

$$Z_0 = \bar{X}$$

maka pada saat $i = 1$ diperoleh

$$Z_1 = \lambda X_1 + (1 - \lambda)Z_0 = \lambda X_1 + (1 - \lambda)\bar{X}$$

untuk $i = 2$ diperoleh

$$Z_2 = \lambda X_2 + (1 - \lambda)Z_1$$

Dengan mengganti Z_1 dengan $\lambda X_1 + (1 - \lambda)\bar{X}$, $j = 0, 1, \dots, i$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} Z_2 &= \lambda X_2 + (1 - \lambda)Z_1 \\ &= \lambda X_2 + (1 - \lambda)(\lambda X_1 + (1 - \lambda)\bar{X}) \\ &= \lambda X_2 + (1 - \lambda)\lambda X_1 + (1 - \lambda)(1 - \lambda)\bar{X} \\ &= \lambda X_2 + (1 - \lambda)\lambda X_1 + (1 - \lambda)^2 \bar{X} \\ &= \lambda(X_2 + (1 - \lambda)X_1) + (1 - \lambda)^2 \bar{X} \\ &= (1 - \lambda)^2 \bar{X} + \lambda \sum_{j=0}^1 (1 - \lambda)^j X_{2-j} \end{aligned}$$

untuk $i = 3$ diperoleh

$$Z_3 = \lambda X_3 + (1 - \lambda)Z_2$$

Dengan mengganti Z_2 dengan $\lambda(X_2 + (1-\lambda)X_1) + (1-\lambda)^2 \bar{X}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 Z_3 &= \lambda X_3 + (1-\lambda)Z_2 \\
 &= \lambda X_3 + (1-\lambda)[\lambda(X_2 + (1-\lambda)X_1) + (1-\lambda)^2 \bar{X}] \\
 &= \lambda X_3 + (1-\lambda)[\lambda(X_2 + (1-\lambda)X_1)] + (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 \bar{X}] \\
 &= \lambda[X_3 + (1-\lambda)X_2 + (1-\lambda)X_1] + (1-\lambda)^3 \bar{X} \\
 &= (1-\lambda)^3 \bar{X} + \lambda \sum_{j=0}^2 (1-\lambda)^j X_{3-j}
 \end{aligned}$$

sehingga untuk $j = i$ diperoleh

$$Z_i = (1-\lambda)^i \bar{X} + \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j} \quad (2.3)$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa EWMA Z_i adalah rata-rata terbobot dari semua rata-rata sampel sebelumnya. Variansi dari Z_i adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 Var(Z_i) &= Var((1-\lambda)^i \bar{X}) + Var\left(\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j}\right) \\
 &= (1-\lambda)^{2i} Var(\bar{X}) + \lambda^2 \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j} Var(X_{i-j})
 \end{aligned}$$

Oleh karena $\lim_{i \rightarrow \infty} (1-\lambda)^{2i}$ nilainya mendekati nol, apabila nilai i semakin besar,

sehingga diperoleh $Var(Z_i)$ sebagai berikut:

$$Var(Z_i) = \lambda^2 \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j} Var(X_{i-j}) \quad (2.4)$$

Jika X_i variabel acak bebas dengan variansi σ^2 .

Pandang deret $G_i = \lambda^2 \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j}$ adalah deret geometrik dengan rasio $(1-\lambda)^2$ dan

suku pertama λ^2 , maka jumlah parsial ke- i , (G_i) dinyatakan,

$$G_i = \lambda^2 + \lambda^2 (1-\lambda)^2 + \lambda^2 (1-\lambda)^4 + \dots + \lambda^2 (1-\lambda)^{2i-1} \quad (2.5)$$

Kedua ruas dikalikan dengan rasio yaitu $(1-\lambda)^2$

$$(1-\lambda)^2 G_i = \lambda^2 (1-\lambda)^2 + \lambda^2 (1-\lambda)^4 + \dots + \lambda^2 (1-\lambda)^{2i-1} + \lambda^2 (1-\lambda)^{2i} \quad (2.6)$$

Selanjutnya persamaan (2.5) dikurangkan dengan persamaan (2.6) sehingga menjadi

$$G_i - (1-\lambda)^2 G_i = \lambda^2 - \lambda^2 (1-\lambda)^{2i}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} G_i [1 - (1-\lambda)^2] &= \lambda^2 [1 - (1-\lambda)^{2i}] \\ G_i &= \frac{\lambda^2 [1 - (1-\lambda)^{2i}]}{[1 - (1-\lambda)^2]} \\ &= \frac{\lambda^2 [1 - (1-\lambda)^{2i}]}{[1 - (1 - 2\lambda + \lambda^2)]} \\ &= \frac{\lambda^2 [1 - (1-\lambda)^{2i}]}{\lambda(2-\lambda)} \\ &= \frac{\lambda [1 - (1-\lambda)^{2i}]}{2-\lambda} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substitusi persamaan (2.7) ke persamaan (2.4), sehingga diperoleh $\sigma_{Z_i}^2$ sebagai berikut:

$$\sigma_{Z_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2-\lambda} \right) [1 - (1-\lambda)^{2i}] \quad (2.8)$$

Jika i naik, $\sigma_{Z_i}^2$ naik menuju nilai limit

$$\sigma_{Z_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \quad (2.9)$$

Dengan demikian batas kendali untuk EWMA adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} UCL &= \bar{Z} + \sigma^2 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right)} \\ LCL &= \bar{Z} - \sigma^2 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right)} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Jika jumlah sampel i cukup besar. Untuk i kecil, maka batas kendali didasarkan atas persamaan (2.8).

2.3 Grafik Pengendali *Modified Exponentially Weighted Moving Average* (MOEWMA)

Menurut Patel dan Divecha (2011:13), grafik pengendali MOEWMA adalah grafik yang menggabungkan keistimewaan dari grafik pengendali Shewhart dan grafik pengendali EWMA dengan cara yang sederhana dan memiliki kemampuan mendeteksi pergeseran yang kecil, sebagaimana mendeteksi pergeseran yang besar sesegera mungkin. Selisih antara dua proses berturut-turut $X_i - X_{i-1}$ digunakan untuk mendeteksi perubahan secara tiba-tiba.

Secara geometrik X_i mencatat jumlah dari pengamatan terakhir, perubahan terakhir, pengamatan saat ini dan perubahan saat ini pada proses. Grafik pengendali MOEWMA bekerja seperti grafik pengendali EWMA untuk mendeteksi pergeseran kecil dan waktu mendeteksi perubahan secara tiba-tiba seperti grafik Shewhart.

Modified Exponentially Weighted Moving Average didefinisikan sebagai

$$Z_i = \lambda X_i + (1-\lambda)Z_{i-1} + (X_i - X_{i-1}) \quad (2.11)$$

dengan $i = 0, 1, 2, \dots, n$ $0 < \lambda \leq 1$ adalah konstanta dan nilai awal adalah $Z_0 = \mu_0 = X_0$.

Nilai awal Z_0 diperlukan untuk menghitung Z_i dengan sampel pertama $i = 1$, maka diperoleh

$$Z_1 = \lambda X_1 + (1-\lambda)Z_0 + (X_1 - X_0)$$

dan untuk $i = 2$ diperoleh

$$Z_2 = \lambda X_2 + (1-\lambda)Z_1 + (X_2 - X_1)$$

Dengan mengganti Z_1 dengan $\lambda X_1 + (1-\lambda)Z_0 + (X_1 - X_0)$ akan diperoleh

$$\begin{aligned} Z_2 &= \lambda X_2 + (1-\lambda)(\lambda X_1 + (1-\lambda)Z_0 + (X_1 - X_0)) + (X_2 - X_1) \\ &= \lambda X_2 + \lambda(1-\lambda)X_1 + (1-\lambda)^2 Z_0 + (1-\lambda)(X_1 - X_0) + (X_2 - X_1) \end{aligned}$$

untuk $i = 3$ akan diperoleh sebagai berikut

$$Z_3 = \lambda X_3 + (1-\lambda)Z_2 + (X_3 - X_2)$$

Selanjutnya dengan mengganti Z_2 dengan $\lambda X_2 + \lambda(1-\lambda)X_1 + (1-\lambda)^2 Z_0 + (1-\lambda)(X_1 - X_0) + (X_2 - X_1)$ akan diperoleh

$$\begin{aligned} Z_3 &= \lambda X_3 + (1-\lambda)(\lambda X_2 + \lambda(1-\lambda)X_1 + (1-\lambda)^2 Z_0 + (1-\lambda)(X_1 - X_0) + (X_2 - X_1)) \\ &\quad + (X_3 - X_2) \\ &= \lambda X_3 + \lambda(1-\lambda)X_2 + \lambda(1-\lambda)^2 X_1 + (1-\lambda)^3 Z_0 + (1-\lambda)^2 (X_1 - X_0) + (1-\lambda) \\ &\quad (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) \\ &= \lambda [X_3 + (1-\lambda)X_2 + (1-\lambda)^2 X_1] + (1-\lambda)^3 Z_0 + (1-\lambda)^2 (X_1 - X_0) + (1-\lambda) \\ &\quad (X_2 - X_1) + (X_3 - X_2) \end{aligned}$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^2 (1-\lambda)^j X_{3-j} + (1-\lambda)^i Z_0 + \sum_{j=0}^2 (1-\lambda)^j (X_{3-j} - X_{3-j-1})$$

Langkah di atas dilakukan hingga $i = n$ dengan mengasumsikan n adalah banyaknya pengamatan, melanjutkan secara rekursif untuk Z_{i-j} , $j = 1, 2, 3, \dots, n$ sehingga diperoleh Z_i sebagai berikut:

$$Z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j} + (1-\lambda)^i Z_0 + \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j (X_{i-j} - X_{i-j-1}) \quad (2.12)$$

Oleh karena $Z_0 = X_0$ sehingga akan diperoleh Z_i sebagai berikut:

$$Z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j} + (1-\lambda)^i X_0 + \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j (X_{i-j} - X_{i-j-1}) \quad (2.13)$$

Dudewich dan Mishra (1995:274) menyatakan bentuk-bentuk dari variansi adalah sebagai berikut:

Lemma 2.3.1

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Kov}(X_1, X_2)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + X_2) &= E(X_1 + X_2)^2 - (E(X_1 + X_2))^2 \\ &= E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) - (EX_1 + EX_2)^2 \\ &= EX_1^2 + 2EX_1X_2 + EX_2^2 - ((EX_1)^2 + 2(EX_1X_2) + (EX_2)^2) \\ &= EX_1^2 - (EX_1)^2 + EX_2^2 - (EX_2)^2 + 2(EX_1X_2 - (EX_1X_2)) \\ &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Kov}(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Lemma 2.3.2

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{Kov}(X_i, X_j)$$

Bukti diturunkan dari Lemma 2.3.1 dengan menggunakan induksi matematika untuk $n \geq 2$ sebagai berikut:

Untuk $n = 2$, maka

$$\text{Var}(X_1 + X_2) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + 2\text{Kov}(X_1, X_2), \text{ benar}$$

Pembuktian berdasarkan Lemma 2.3.1

Misalkan untuk $n = k$, maka

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_k) = \sum_{i=1}^k \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j}^k \text{Kov}(X_i, X_j), \text{ benar}$$

Akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$, maka

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_k + X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j}^{k+1} \text{Kov}(X_i, X_j)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_k + X_{k+1}) &= \text{Var}((X_1 + X_2 + \dots + X_k) + X_{k+1}) \\ &= \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_k) + \text{Var}(X_{k+1}) + \\ &\quad 2\text{Kov}\left(\sum_{i=1}^k X_i, X_{k+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j}^k \text{Kov}(X_i, X_j) + \text{Var}(X_{k+1}) + \\ &\quad 2\text{Kov}\left(\sum_{i=1}^k X_i, X_{k+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j}^k \text{Kov}(X_i, X_j) + \text{Var}(X_{k+1}) + \\ &\quad 2 \sum_{i=1}^{k+1} \text{Kov}(X_i, X_{k+1}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i < j}^{k+1} \text{Kov}(X_i, X_j)$$

Lemma 2.3.3

$$\text{Var}(aX_1) = a^2 \text{Var}(X_1)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX_1) &= E(aX_1)^2 - (E(aX_1))^2 \\ &= E(a^2 X_1^2) - (Ea + EX_1)^2 \\ &= Ea^2 EX_1^2 - (Ea)^2 (EX_1)^2 \\ &= a^2 EX_1^2 - a^2 (EX_1)^2 \\ &= a^2 (EX_1^2 - (EX_1)^2) \\ &= a^2 \text{Var}(X_1) \end{aligned}$$

Variansi dari univariat MOEWMA pengendali statistik Z_i adalah

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_i) &= \text{Var}\left((1-\lambda)^i X_0\right) + \text{Var}\left(\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j X_{i-j}\right) + \\ &\quad \text{Var}\left(\sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j (X_{i-j} - X_{i-j-1})\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Berdasarkan pembuktian lemma di atas maka variansi dari univariat MOEWMA pengendali statistik Z_i adalah

$$\text{Var}(Z_i) = (1-\lambda)^{2i} \text{Var}(X_0) + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j} \text{Var}(X_{i-j}) + 2 \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j+1}$$

$$\text{Kov}(X_{i-j}, X_{i-j-1}) + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j} \text{Var}(X_{i-j} - X_{i-j-1}) + 2 \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j+1}$$

$$\text{Kov}(X_{i-j} - X_{i-j-1})(X_{i-j-1} - X_{i-j-2}) + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda (1-\lambda)^{2j}$$

$$\text{Kov}(X_{i-j}, (X_{i-j} - X_{i-j-1})) + \sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1-\lambda)^{2j+1} \text{Kov}[X_{i-j}, (X_{i-j} - X_{i-j-1})] \quad (2.15)$$

Untuk menghitung $\text{Var}(Z_i)$ maka persamaan (2.15) akan diuraikan ke dalam bentuk lain untuk mendapatkan variansi asimtotik dari $i \rightarrow \infty$.

Misalkan ρ adalah korelasi antara X_i dan X_{i-1} , ρ_1 adalah korelasi X_i dengan fluktuasi maju $(X_i - X_{i-1})$, $(i \geq 1)$, ρ_2 korelasi X_i dengan fluktuasi mundur $(X_{i+1} - X_i)$, $(i \geq 0)$, ρ_3 korelasi fluktuasi maju $(X_i - X_{i-1})$ dan fluktuasi mundur $(X_{i+1} - X_i)$, $(i \geq 1)$. Selanjutnya persamaan (2.15) akan diuraikan persuku, pandang bentuk $S_i = \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j}$ pada persamaan (2.15) adalah deret geometri dengan suku pertama = 1 dan rasio $(1-\lambda)^2$, maka untuk $i \rightarrow \infty$, hasil dari deret geometri (S_i) adalah sebagai berikut:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_i = \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j} = 1 + (1-\lambda)^2 + (1-\lambda)^4 + \dots$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_i = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(1-\lambda)^2}$$

$$= \frac{1}{1-(1-2\lambda+\lambda^2)}$$

$$= \frac{1}{(2\lambda-\lambda^2)}$$

$$= \frac{1}{\lambda(2-\lambda)}$$

(2.16)

Selanjutnya pandang bentuk $R_i = \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j+1}$ pada persamaan (2.15) adalah deret geometri dengan suku pertama $= (1-\lambda)$ dan rasio $(1-\lambda)^2$, maka untuk $i \rightarrow \infty$ adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} R_i &= \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j+1} = (1-\lambda) + (1-\lambda)^3 + (1-\lambda)^5 + \dots \\ \lim_{i \rightarrow \infty} R_i &= \frac{a}{1-r} = \frac{(1-\lambda)}{1-(1-\lambda)^2} \\ &= \frac{(1-\lambda)}{1-(1-2\lambda+\lambda^2)} \\ &= \frac{(1-\lambda)}{(2\lambda-\lambda^2)} \\ &= \frac{(1-\lambda)}{\lambda(2-\lambda)} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pada persamaan (2.15) terdapat bentuk $\sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j} \text{Var}(X_{i-j})$, untuk $\text{Var}(X_{i-j})$ akan diuraikan ke dalam bentuk lain. Misalkan variansi dari X_i adalah σ^2 , untuk $i = 1, 2, \dots, n$, maka variansi dari (X_{i-j}) adalah

$$\text{Var}(X_{i-j}) = \text{Var}(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

Pada persamaan (2.15) terdapat bentuk $2 \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j+1} \text{Kov}(X_{i-j}, X_{i-j-1})$ maka akan dihitung $\text{Kov}(X_{i-j}, X_{i-j-1})$, karena bentuk $\text{Kov}(X_{i-j}, X_{i-j-1}) = \text{Kov}(X_i, X_{i-1})$, misal ρ adalah korelasi antara X_i dan X_{i-1} , maka

$$\rho = \frac{\text{Kov}(X_i, X_{i-1})}{\sqrt{\text{Var}(X_i) \text{Var}(X_{i-1})}}$$

$$= \frac{Kov(X_i, X_{i-1})}{\sqrt{\sigma^2 \sigma^2}}$$

Sehingga,

$$Kov(X_i, X_{i-1}) = \rho \sigma^2 \quad (2.19)$$

Pada persamaan (2.15) terdapat bentuk $\sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j} Var(X_{i-j} - X_{i-j-1})$ maka

akan dihitung $Var(X_{i-j} - X_{i-j-1})$, karena bentuk $Var(X_{i-j} - X_{i-j-1}) = Var(X_i - X_{i-1})$,

Misal $\sigma_1^2 = Var(X_i - X_{i-1})$ maka, variansi dari $(X_i - X_{i-1}) (i \geq 1)$ adalah

$$\begin{aligned} Var(X_i - X_{i-1}) &= Var(X_i) + Var(X_{i-1}) - 2Kov(X_i, X_{i-1}) \\ &= \sigma^2 + \sigma^2 - 2\rho\sigma^2 \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\sigma_1^2 = 2\sigma^2 - 2\rho\sigma^2 = 2(1-\rho)\sigma^2 \quad (2.20)$$

Pada persamaan (2.15) terdapat korelasi X_i dengan fluktuasi maju $(X_i - X_{i-1})$, maka akan dihitung nilai korelasinya. Misal korelasi X_i dengan fluktuasi maju $(X_i - X_{i-1})$, $(i \geq 1)$ adalah ρ_1 , maka

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{Kov(X_{i-j}, (X_{i-j} - X_{i-j-1}))}{\sqrt{Var(X_{i-j})Var(X_{i-j} - X_{i-j-1})}} \\ &= \frac{Kov(X_{i-j}, (X_{i-j} - X_{i-j-1}))}{\sqrt{\sigma^2 2(1-\rho)\sigma^2}} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$Kov(X_{i-j}, (X_{i-j} - X_{i-j-1})) = \rho_1 \sigma^2 \sqrt{2(1-\rho)} \quad (2.21)$$

Selanjutnya pada persamaan (2.15) terdapat korelasi X_i dengan fluktuasi mundur $(X_{i+1} - X_i)$, maka akan dihitung nilai korelasinya. Misal untuk korelasi X_i dengan fluktuasi mundur $(X_{i+1} - X_i)$, $(i \geq 0)$ adalah ρ_2 , maka

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \frac{\text{Kov}(X_{i-j-1}, (X_{i-j} - X_{i-j-1}))}{\sqrt{\text{Var}(X_{i-j-1})\text{Var}(X_{i-j} - X_{i-j-1})}} \\ &= \frac{\text{Kov}(X_{i-j-1}, (X_{i-j} - X_{i-j-1}))}{\sqrt{\sigma^2 2(1-\rho)\sigma^2}}\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\text{Kov}(X_{i-j-1}, (X_{i-j} - X_{i-j-1})) = \rho_2 \sigma^2 \sqrt{2(1-\rho)} \quad (2.22)$$

Terakhir, pada persamaan (2.15) terdapat korelasi maju $(X_i - X_{i-1})$ dan fluktuasi mundur $(X_{i+1} - X_i)$, maka akan dihitung nilai korelasinya. Misalkan korelasi fluktuasi maju $(X_i - X_{i-1})$ dan fluktuasi mundur $(X_{i+1} - X_i)$ $(i \geq 1)$ adalah ρ_3 , maka

$$\begin{aligned}\rho_3 &= \frac{\text{Kov}((X_{i+1} - X_i), (X_i - X_{i-1}))}{\sqrt{\text{Var}(X_{i+1} - X_i)\text{Var}(X_i - X_{i-1})}} \\ &= \frac{\text{Kov}((X_{i+1} - X_i), (X_i - X_{i-1}))}{\sqrt{(2(1-\rho)\sigma^2)(2(1-\rho)\sigma^2)}}\end{aligned}$$

Sehingga,

$$\text{Kov}((X_{i+1} - X_i), (X_i - X_{i-1})) = 2\rho_3(1-\rho)\sigma^2 \quad (2.23)$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan persamaan (2.16) dan (2.18) pada suku

$\sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j} \text{Var}(X_{i-j})$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j} \text{Var}(X_{i-j}) = \frac{\lambda^2}{\lambda(2-\lambda)} \sigma^2 = \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \sigma^2 \quad (2.24)$$

Substitusi persamaan (2.17) dan (2.19) pada suku

$2 \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j+1} \text{Kov}(X_{i-j}, X_{i-j-1})$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$2 \sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j+1} \text{Kov}(X_{i-j}, X_{i-j-1}) = \frac{2\lambda^2(1-\lambda)}{\lambda(2-\lambda)} \rho \sigma^2 = \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)} \rho \sigma^2 \quad (2.25)$$

Substitusi persamaan (2.16) dan (2.20) pada suku $\sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j} \text{Var}(X_{i-j} - X_{i-j-1})$

akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\sum_{j=0}^{i-1} \lambda^2 (1-\lambda)^{2j} \text{Var}(X_{i-j} - X_{i-j-1}) = \frac{2(1-\rho)}{\lambda(2-\lambda)} \sigma^2 \quad (2.26)$$

Substitusi persamaan (2.17) dan (2.23) pada suku

$2 \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j+1} \text{Kov}[(X_{i-j} - X_{i-j-1}), (X_{i-j-1} - X_{i-j-2})]$ akan diperoleh hasil sebagai

berikut:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^{2j+1} \text{Kov}((X_{i-j} - X_{i-j-1}), (X_{i-j-1} - X_{i-j-2})) &= \frac{2(1-\lambda)2\rho_3(1-\rho)\sigma^2}{\lambda(2-\lambda)} \\ &= \frac{4\rho_3(1-\lambda)(1-\rho)\sigma^2}{\lambda(2-\lambda)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Substitusi persamaan (2.16) dan (2.21) pada suku $\sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1-\lambda)^{2j} \text{Kov}((X_{i-j}),$

$(X_{i-j} - X_{i-j-1}))$ akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1-\lambda)^{2j} \text{Kov}(X_{i-j}, (X_{i-j} - X_{i-j-1})) = \frac{2\sqrt{2}\rho_1\sqrt{(1-\rho)}\sigma^2}{(2-\lambda)} \quad (2.28)$$

Substitusi persamaan (2.17) dan (2.22) pada suku $\sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1-\lambda)^{2j+1} \text{Kov}[(X_{i-j-1},$

$(X_{i-j} - X_{i-j-1})]$ diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\sum_{j=0}^{i-1} \lambda(1-\lambda)^{2j+1} \text{Kov}(X_{i-j-1}, (X_{i-j} - X_{i-j-1})) = \frac{(1-\lambda)\sqrt{2}\rho_2\sqrt{(1-\rho)}\sigma^2}{(2-\lambda)} \quad (2.29)$$

Pandang bentuk $(1-\lambda)^{2i}$ $0 < \lambda < 1$, maka $\lim_{i \rightarrow \infty} (1-\lambda)^{2i} = 0$, untuk i semakin besar maka $1-\lambda$ semakin mendekati nol. Maka berdasarkan bentuk asimtotik persamaan (2.15) jika $i \rightarrow \infty$, adalah

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_i) = & \frac{\lambda}{(2-\lambda)}\sigma^2 + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)}\rho\sigma^2 + \frac{2(1-\rho)\sigma^2}{\lambda(2-\lambda)} + \frac{4\rho_3(1-\rho)(1-\lambda)\sigma^2}{\lambda(2-\lambda)} \\ & \frac{2\sqrt{2}\rho_1\sqrt{(1-\rho)}\sigma^2}{(2-\lambda)} + \frac{(1-\lambda)2\sqrt{2}\rho_2\sqrt{(1-\rho)}\sigma^2}{(2-\lambda)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dalam proses autokorelasi normal dengan ρ_3 hampir mendekati negatif dan ρ_1, ρ_2 hampir sama dan berlawanan tanda dalam mendeteksi pergeseran kecil, dengan autokorelasi ρ mendekati satu. Persamaan (2.26) menjadi

$$\text{Var}(Z_i) = \frac{\lambda}{(2-\lambda)}\sigma^2 + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)}\rho\sigma^2 \quad (2.31)$$

Untuk $\frac{2\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)}\rho\sigma^2$ akan menjadi kecil untuk nilai yang besar dari $(\rho \rightarrow 1)$ dan λ kecil, kadang-kadang hal itu dianggap tidak ada seperti limit modifikasi EWMA sama dengan limit EWMA, maka menjadi

$$\text{Var}(Z_i) = \left[\frac{\lambda}{(2-\lambda)} + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)} \right] \sigma^2 \quad (2.32)$$

Sehingga diperoleh batas kendali untuk *Modified Exponentially Weighted Moving Average* adalah

$$UCL = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{2-\lambda}}$$

$$CL = \mu_0$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma\sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{2-\lambda}} \quad (2.33)$$

2.4 Grafik Pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA)

Khoo (2003) dalam Setiastuti (2011:7), mengatakan bahwa grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) adalah grafik kendali yang digunakan untuk mendeteksi terjadinya perubahan *mean* kecil dalam proses. Apabila terdapat pengamatan dalam kasus univariat, yaitu terdapat karakteristik kualitas ($p = 1$) diketahui sebagai

$$\mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_{1n} \\ X_{1n} \\ \vdots \\ X_{pn} \end{bmatrix}$$

maka grafik pengendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA) diberikan sebagai

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \bar{\mathbf{x}}_i + (1-\lambda)\mathbf{Z}_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

Pada kasus multivariat ($p \geq 2$), suatu perluasan dari grafik kendali *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA). Bentuk desain *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) dalam kasus multivariat disajikan sebagai berikut:

$$\mathbf{Z}_i = \lambda \mathbf{X}_i + (1-\lambda)\mathbf{Z}_{i-1}, \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.35)$$

Dalam hal ini, $\mathbf{Z}_i$ adalah vektor MEWMA ke- i dengan $\mathbf{Z}_0 = \vec{\mu}_0 = \mathbf{0}$ $\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p), 0 < \lambda_j \leq 1$, dan $\mathbf{X}_i$ merupakan vektor karakteristik mutu yang diamati pada sampel ke- i , $\mathbf{X}_i$ diasumsikan sebagai vektor acak berdistribusi

normal multivariat yang saling bebas. Dengan nilai n merupakan banyaknya sampel pengamatan yang dilakukan dan p merupakan banyaknya variabel karakteristik kualitas yang terlibat.

Berikut ini diilustrasikan metode MEWMA dengan p variabel dan berisi n observasi pada masing-masing variabel. Data masukan berupa matriks seperti berikut ini:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix}$$

Pada grafik pengendali MEWMA dapat digunakan nilai pembobot sama atau tidak sama pada masing-masing karakteristik kualitas. Pemberian nilai pembobot digunakan untuk memboboti variabel-variabel yang dianggap penting sesuai dengan kebutuhan dengan tujuan:

1. Untuk mendeteksi kapan adanya penyebab khusus masuk ke dalam sistem.
2. Sebagai pereduksi yang optimal untuk observasi berikutnya dari proses *moving average*

Nilai Statistik *Multivariate Exponential Weighted Moving Average* (MEWMA) dapat ditulis sebagai berikut:

$$M_i = \mathbf{Z}_i' \Sigma_{Z_i}^{-1} \mathbf{Z}_i \quad (2.36)$$

dengan $\mathbf{Z}_i$ pada persamaan (2.26) Σ_{Z_i} adalah matriks varian kovarian dari $\mathbf{Z}_i$.

$$\Sigma_{Z_i} = \frac{\lambda}{(2-\lambda)} (1 - (1-\lambda)^{2i}) \Sigma_x \quad (2.37)$$

Untuk i mendekati tak hingga maka persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi:

$$\sum_{z_i} = \frac{\lambda}{(2 - \lambda)} \sum_x \quad (2.38)$$

dengan $\sum_x$ merupakan matriks varian kovarian dari X_i .

2.5 Analisis Korelasi

Menurut Purwanto (2011:189-191), indeks korelasi yang diberi notasi r (singkatan dari *relation*) adalah indeks yang menunjukkan kekuatan hubungan variabel bebas dengan variabel terikat. Indeks r dihitung menggunakan rumus *r product moment* sebagai berikut:

$$r_{xy} = \frac{N \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{\{N \sum X^2 - (\sum X)^2\} \{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}} \quad (2.39)$$

Hubungan X dan Y menunjukkan bahwa nilai X bervariasi sejalan dengan nilai Y . Menurut perilaku variasinya, hubungan mempunyai tiga kemungkinan:

1. Korelasi positif

Dua variabel X dan Y dikatakan berkorelasi positif apabila variasi X sejalan dengan variasi Y . Oleh karenanya, kenaikan nilai X cenderung diikuti oleh kenaikan nilai Y dan penurunan nilai X cenderung diikuti oleh penurunan nilai Y .

2. Korelasi negatif

Dua variabel X dan Y dikatakan berkorelasi negatif apabila variasi X sejalan dengan variasi Y . Oleh karenanya, kenaikan nilai X cenderung diikuti oleh kenaikan nilai Y dan penurunan nilai X cenderung diikuti oleh penurunan nilai Y .

3. Korelasi nol

Dua variabel X dan Y dikatakan berkorelasi nol apabila variasi X dan Y tidak mempunyai pola. Ketika terjadi kenaikan nilai X , nilai Y kadang naik kadang turun, begitu pula ketika terjadi penurunan nilai X , nilai Y juga kadang naik kadang turun.

Indeks r berhasil perhitungan tersebut diinterpretasikan dengan mengkonfirmasikan dengan r_{tabel} pada jumlah sampel (N) dan taraf kesalahan (α) tertentu. Bila r_{hitung} lebih besar dari r_{tabel} maka dapat disimpulkan bahwa antara variabel bebas dan variabel terikat mempunyai hubungan yang signifikan. Sebaliknya, bila r_{hitung} lebih kecil daripada r_{tabel} maka hubungan variabel bebas dengan variabel terikat tidak signifikan dan terjadi secara kebetulan.

Besarnya r_{tabel} sangat ditentukan oleh dua hal yaitu taraf kesalahan yang diambil dan besar sampel.

1. Taraf kesalahan

Makin kecil taraf kesalahan, maka makin besar harga r_{tabel} yang dipakai untuk menentukan batas signifikansi. Sebaliknya, makin besar taraf kesalahan, maka makin kecil harga r_{tabel} yang dipakai untuk menentukan batas signifikansi.

2. Besar sampel

Makin kecil sampel, makin besar harga r_{tabel} yang digunakan sebagai batas signifikansi. Sebaliknya, makin besar sampel, makin kecil harga r_{tabel} yang digunakan sebagai batas signifikansi.

2.6 Uji Distribusi Normal Multivariat

Menurut Santoso (2010) dalam Muhassinah (2011:6), tujuan uji normalitas adalah ingin mengetahui apakah sebuah data mengikuti atau mendekati distribusi normal, yakni distribusi data dengan bentuk lonceng (*bell shaped*). Data yang baik adalah yang mempunyai pola seperti distribusi normal, yakni distribusi tersebut tidak menceng ke kiri atau menceng ke kanan.

Uji normalitas pada multivariat sebenarnya sangat kompleks, karena harus dilakukan pada seluruh variabel secara bersama-sama. Namun uji ini bisa juga dilakukan pada setiap variabel, dengan logika bahwa jika secara *individual* masing-masing variabel memenuhi asumsi normalitas, maka secara bersama-sama (multivariat) variabel tersebut juga dapat dianggap memenuhi asumsi normalitas.

Pengujian distribusi normal multivariat dilakukan dengan hipotesis sebagai berikut.

H_0 : Variabel karakteristik kualitas berdistribusi normal multivariat

H_1 : Variabel karakteristik kualitas tidak berdistribusi normal multivariat

Variabel-variabel $X_1, X_2, \dots, X_p$ dikatakan berdistribusi normal multivariat dengan parameter μ dan Σ jika mempunyai fungsi kepadatan peluang (*probability density function*)

$$f(X_1, X_2, \dots, X_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} |\Sigma|^{\frac{p}{2}}} e^{\frac{1}{2}(X-\mu)\Sigma^{-1}(X-\mu)} \quad (2.40)$$

dimana: μ = mean kolom vektor

Σ = matriks kovarian

Σ^{-1} = invers dari matriks kovarian

$|\Sigma|$ = determinan dari matriks kovarian

Johnson (1992) dalam Muhassinah (2011:6), jika $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ berdistribusi normal multivariat maka $(\mathbf{X} - \mu)' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu)$ berdistribusi χ^2 . Berdasarkan ini maka pemeriksaan distribusi normal multivariat dapat dilakukan dengan membuat *QQ plot* dari nilai

$$d_j^2 = (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})' S^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}), j = 1, 2, \dots, n \quad (2.41)$$

Adapun untuk melakukan uji normal multivariat dengan membuat plot d_j^2 tersebut adalah sebagai berikut:

1. Menghitung d_j^2 , yaitu jarak yang dikuadratkan dengan menghitung

$$d_j^2 = (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})' S^{-1} (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}), j = 1, 2, \dots, n$$

2. Mengurutkan nilai d_j^2 dari nilai-nilai yang terkecil sampai yang terbesar atau

$$d_{(1)}^2 \leq d_{(2)}^2 \leq \dots \leq d_{(n)}^2.$$

3. Langkah selanjutnya yaitu membuat *plot* dengan titik koordinat

$$\left(d_j^2 = \chi^2 \left[p, \frac{j-0,5}{n} j \right] \right) \text{dimana nilai } \chi^2 \left[p, \frac{j-0,5}{n} j \right] \text{didapatkan dari tabel } \chi^2.$$

Jika data berdistribusi normal multivariat, plot ini akan membentuk garis lurus dan jika terdapat kelengkungan menunjukkan penyimpangan dari normalitas. H_0 ditolak atau data tidak berdistribusi normal multivariat jika terdapat kurang dari 50% jarak $d_j^2 \leq \chi_{(p;0,05)}^2$.

2.7 Deret Geometrik

Barisan $\langle ar^{n-1} \rangle$, yang terdiri dari suku $a, ar, ar^2, ar^3, \dots$. Deret $\sum ar^{n-1}$ disebut deret geometrik dengan rasio r dan suku pertama a . Jumlah parsial ke- n , (S_n) , dinyatakan oleh:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad (2.42)$$

atau dapat dinyatakan dengan:

$$\begin{aligned} rS_n &= ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \\ S_n - rS_n &= a - ar^n \\ (1-r)S_n &= a(1-r^n) \\ S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ S_n &= \frac{a - ar^n}{1-r} \\ S_n &= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n \end{aligned}$$

Apabila $|r| < 1$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, sehingga

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r} \quad (\text{Purcell dan Varberg, 1987:12}) \quad (2.43)$$

2.8 Identifikasi Variabel Penyebab *Out of Control*

Jika dalam diagram kendali terdapat satu atau beberapa data yang tidak terkendali atau berada di luar batas kendali, maka perlu dilakukan identifikasi variabel penyebab terjadinya sinyal *out of control* tersebut identifikasi tersebut

dilakukan agar perbaikan proses akan mencapai sasaran yang tepat. Dalam Sulistyawati (2010:4), dijelaskan bahwa salah satu pendekatan yang dapat digunakan dalam mendiagnosis sinyal *out of control* adalah menguraikan statistik T_i^2 ke dalam komponen-komponen yang menunjukkan kontribusi dari masing-masing variabel. Jika T^{2*} adalah nilai statistik yang diambil dari semua pengamatan yang *out of control*, dan T_j^2 adalah sebuah nilai statistik untuk semua variabel proses tanpa variabel ke- j , maka dijelaskan sebagai berikut:

$$d_j = T^{2*} - T_j^2 \quad (2.44)$$

Dengan d_j merupakan indikator kontribusi relatif dari variabel ke- j untuk keseluruhan statistik. Perbaikan proses difokuskan pada variabel yang memiliki nilai d_j lebih besar dari $\chi_{\alpha,1}^2$.

2.9 Kajian Keagamaan tentang Menjaga Karakteristik Kualitas

Islam merupakan agama yang memberikan cahaya hidayah kepada dunia, disaat dunia ini telah dipenuhi oleh kekufuran, kegelapan, kebodohan dan kejahilan. Nabi Muhammad Saw. telah membawa manusia ke puncak perdamaian dan kejayaan dari zaman jahiliyah. Dengan cahaya hidayah tersebut telah mengantarkan kaum muslimin pada kekuasaan, kekuatan dan kemuliaan di seluruh dunia selama berabad-abad. Kaum muslimin telah beriman bahwa cahaya hidayah yang dibawa Nabi Muhammad Saw adalah al-Quran yang dijadikan sebagai tuntunan dan aturan yang sempurna bagi umatnya. Tuntunan dan aturan digunakan untuk mengatur kehidupan manusia di muka bumi ini, peraturan itu ada dalam al-Quran dan Hadits. Seperti dalam al-Quran yaitu sebagai berikut:

يَتَأَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا لَا تَخُونُوا اللَّهَ وَالرَّسُولَ وَتَخُونُوا أَمْنَتَكُمْ وَأَنْتُمْ تَعْلَمُونَ ﴿٢٧﴾

“Hai orang-orang yang beriman, janganlah kamu mengkhianati Allah dan Rasul (Muhammad) dan (juga) janganlah kamu mengkhianati amanat-amanat yang dipercayakan kepadamu, sedang kamu mengetahui.” (QS. al-Anfal/8:27).

Shihab (2002:404) menafsirkan ayat di atas “Kata *takhūnū* terambil dari kata *al-khaun* yakni ‘kekurangan’, antonimnya adalah *al-wafā’* yang berarti ‘kesempurnaan’. Selanjutnya kata ‘khianat’ digunakan sebagai antonim dari ‘amanat’ karena jika seseorang mengkhianati pihak lain maka dia telah mengurangi kewajiban yang harus ia tunaikan. Kata *amānāt* adalah bentuk jamak dari kata ‘amanah’ yang terambil dari kata *amina* yang berarti ‘merasa aman’ dan ‘percaya’. Siapa yang dititipi amanat, maka itu berarti yang menitipkannya percaya kepadanya dan merasa aman bahwa sesuatu yang dititipkan itu akan dipelihara olehnya – secara aktif – atau paling tidak secara pasif sehingga bila tiba saatnya diminta kembali oleh yang menyerahkan, ia akan mendapati titipannya tidak kurang, tidak rusak, tetap sebagaimana ketika diserahkan sebagai hasil pemeliharaan pasif, bahkan lebih baik dan berkembang sebagai hasil pemeliharaan aktif.

Segala sesuatu yang berada dalam genggamannya manusia adalah amanat Allah swt. Agama adalah amanat Allah, bumi dan segala isinya adalah amanat-Nya, keluarga dan anak-anak adalah amanat-Nya bahkan jiwa raga masing-masing manusia bersama potensi yang melekat pada dirinya adalah amanat Allah swt. Semua harus dipelihara dan dikembangkan. Amanat manusia terhadap manusia mencakup banyak hal, bukan hanya harta benda yang dititipkan, atau ikatan perjanjian yang disepakati, tetapi termasuk juga rahasia yang dibisikkan.”

Dalam menjaga amanat konsumen, seorang produsen harus memperhatikan kualitas yang diberikan, seperti dalam ayat Al-Quran sebagai berikut:

وَيْلٌ لِّلْمُطَفِّفِينَ ﴿١﴾ الَّذِينَ إِذَا اكْتَالُوا عَلَى النَّاسِ يَسْتَوْفُونَ ﴿٢﴾ وَإِذَا كَالُوهُمْ أَوْ وَزَنُوهُمْ يُخْسِرُونَ ﴿٣﴾

“Celakalah bagi orang-orang yang mengurangi takaran!. Yang jika mereka (untuk dirinya) dari orang lain, mereka menakar dengan penuh. Tetapi ketika mereka menakar atau menimbang untuk orang lain, mereka menguranginya.” (QS. al-Muthaffifin/83:1-3).

Al-Jazairi (2009:842) menafsirkan bahwa “Firman-Nya, ‘kecelakaan besarlah bagi orang-orang yang curang,’ Allah Ta’ala mengancam dengan lembah di neraka Jahanam yang penuh dengan nanah penduduk neraka untuk mereka yang selalu mengurangi takaran dan timbangan sesama di dunia. Maka Allah Ta’ala menjelaskan dengan firman-Nya, ‘(yaitu) orang-orang yang apabila menerima takaran dari orang lain mereka minta dipenuhi,’ maksudnya ketika mereka membeli barang dari orang lain, mereka akan meminta agar takaran dan timbangannya dipenuhi. Akan tetapi, apabila mereka menjual (menakar untuk orang lain), maka mereka akan menguranginya.”

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Pendekatan Penelitian

Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kuantitatif dengan bantuan studi literatur yang dilakukan dengan cara mengkaji buku-buku yang berkaitan dengan penelitian kuantitatif. Selanjutnya menganalisis pengendalian kualitas proses produksi data bivariat, yang akan dikaji terlebih dahulu tentang konsep dasar grafik pengendali multivariat, yang dikhususkan terhadap jumlah karakteristik kualitas produk.

3.2 Jenis dan Sumber Data

Dalam penelitian ini sumber data merupakan data sekunder pada skripsi Mudrikatul Muhassinah tahun 2011. Data sekunder yaitu data yang diperoleh berdasarkan literatur dokumen arsip yang ada. Data yang digunakan yaitu data sifat fisik kertas, pada bulan Mei-Juni 2009.

Data yang digunakan adalah data sifat fisik karakteristik kertas jenis HVS 60 gsm, yaitu berat kertas (*gramathur*) dan ketebalan (*thickness*). Adapun rincian data sifat fisik kertas yang digunakan adalah sebagai berikut.

1. *Gramathur*

Gramathur merupakan berat kertas yang dinyatakan dalam gram/m^2 . *Gramathur* sangat dipengaruhi oleh kelembapan udara sekitarnya, sehingga pengukurannya harus dalam kondisi standar, misalnya pada kondisi kelembapan 50% dari suhu 25°C . Alat yang dapat digunakan untuk mengukur *gramathur*

adalah *paper weight scale* yang dikukukan dengan cara neraca diset nol, kemudian diambil sampel kertas dengan ukuran 100 x 100 mm, maka dengan *paper weight scale gramathur* kertas akan terbaca langsung.

2. Thickness

Thickness merupakan jumlah *sheet* dalam micro (m). Alat yang digunakan adalah *thickness tester*. Pengukuran dilakukan dengan alat dengan satuan 10^{-1} mm. Standar perusahaan untuk masing-masing variabel adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Standar Perusahaan untuk Masing-Masing Variabel

Variabel	Satuan	Standar perusahaan
<i>Gramathur</i>	gsm	57 - 62,40
<i>Thickness</i>	m	75 – 83

3.3 Struktur Data

Pengamatan yang digunakan sebanyak 58 pengamatan dengan ukuran sampel = 1 (pengamatan individual) dan variabel atau karakteristik kualitas yang digunakan ada sebanyak 2 variabel. Struktur data dalam satu periode proses produksi kertas pada grafik pengendali BMOEWMA terdapat pada tabel berikut:

Tabel 3.2 Struktur Data untuk Grafik Pengendali BMOEWMA

Data ke	X_1	X_2
1	X_{11}	X_{21}
2	X_{12}	X_{22}
3	X_{13}	X_{23}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	X_{1i}	X_{2i}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
58	X_{158}	X_{258}

dengan

X_{ji} = hasil pengamatan, $i = 1, 2, \dots, 58$

X_j = variabel karakteristik kualitas ke- j , $j = 1, 2$

i = banyaknya pengamatan, $i = 1, 2, 3, \dots, 58$

3.4 Metode Analisis

3.4.1 Studi Literatur

Melakukan studi literatur tentang teori dasar grafik pengendali multivariat yang dikhususkan pada grafik pengendali *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* (BMOEWMA).

3.4.2 Analisis Data

Analisis yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. Mempelajari konsep dasar grafik pengendali BMOEWMA dalam pengendalian kualitas proses secara statistik
 - i. Mendefinisikan vektor BMOEWMA ($\mathbf{Z}_i^*$)
 - ii. Mendeskripsikan $\mathbf{Z}_i^*$ dari vektor $\mathbf{X}_0$
 - iii. Menentukan $\mathbf{Z}_i^*$ dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$
 - iv. Menentukan $E[\mathbf{Z}_i^*]$
 - v. Menentukan $Cov(\mathbf{Z}_i^*)$
- b. Penerapan grafik pengendali BMOEWMA dalam pengendalian kualitas proses secara statistik
 - i. Mendiskripsikan gambaran umum karakteristik kualitas
 - ii. Uji korelasi antar variabel karakteristik kualitas.
 - iii. Melakukan pemeriksaan multivariat kenormalan data sebagai uji asumsi yang diperlukan sebelum pembuatan grafik pengendali BMOEWMA
 - iv. Mendeteksi *mean* proses dengan grafik pengendali BMOEWMA
 1. Menghitung vektor BMOEWMA ($\mathbf{Z}_i^*$)
 2. Menghitung matriks varians kovarians dari $\mathbf{Z}_i^*$

3. Menghitung nilai statistik BMOEWMA (T_i^2) pada setiap pengamatan
 4. Membuat grafik pengendali BMOEWMA
- c. Membandingkan grafik pengendali BMOEWMA dengan BEWMA
- d. Mengidentifikasi penyebab variabel yang tidak terkendali pada grafik pengendali BMOEWMA
- i. Menghitung T_j^2 untuk tiap-tiap variabel, yaitu nilai statistik untuk semua variabel proses tanpa variabel ke-j
 - ii. Menghitung indikator kontribusi relatif dari variabel ke-j untuk keseluruhan statistik (d_j)
 - iii. Menentukan variabel-variabel penyebab tidak terkendali dengan membandingkan dengan nilai $\chi^2_{(\alpha,1)}$
- e. Membuat kesimpulan dan saran.

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab ini penulis akan membahas penurunan rumus untuk mencari batas kendali dan penerapan data dengan menggunakan Grafik Pengendali *Multivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* (MMOEWMA) yang dikhususkan pada Grafik Pengendali *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* (BMOEWMA).

4.1 Grafik Pengendali BMOEWMA

4.1.1 Definisi Vektor BMOEWMA (Z_i^*)

Pada penelitian ini ada dua karakteristik kualitas yaitu X_1 dan X_2 , dimana X_1 adalah berat kertas (*gramathur*) dan X_2 adalah ketebalan (*thickness*) jika disajikan dalam vektor 2 x 1 sebagai berikut

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

adalah vektor nilai nominal bagi tiap karakteristik kualitas. Diasumsikan nilai harapan dari setiap elemen adalah sebagai berikut

$$E(\vec{X}) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \vec{\mu}$$

Mengadaptasi dari definisi *Multivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average*, maka *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* didefinisikan sebagai

$$Z_i^* = \Lambda X_i + (\mathbf{I} - \Lambda) Z_{i-1}^* + (X_i - X_{i-1}) \quad (4.1)$$

dengan

$$\mathbf{Z}_i^* : \text{vektor BMOEWMA ke-}i, \mathbf{Z}_i^* = \begin{bmatrix} Z_{1i}^* \\ Z_{2i}^* \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Lambda : \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, 0 < \lambda_j \leq 1, j = 1, 2; \lambda_j : \text{nilai pembobot ke-}j$$

$$\mathbf{X}_i : \text{vektor karakteristik kualitas yang diamati pada sampel ke-}i, \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} X_{1i} \\ X_{2i} \end{bmatrix},$$

n : banyaknya pengamatan

Pada saat sampel pertama diasumsikan nilai awal $\mathbf{X}_0$ dan $\mathbf{Z}_0$ yaitu pada $i = 1$ adalah

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{Z}_0^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.1.2 Deskripsi $\mathbf{Z}_i^*$ Secara Rekursif dari Vektor $\mathbf{X}_0$

Nilai awal $\mathbf{Z}_0^*$ diperlukan untuk menghitung $\mathbf{Z}_1^*$ dengan sampel pertama pada $i = 1$, maka diperoleh

$$\mathbf{Z}_1^* = \Lambda \mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0)$$

dan untuk $i = 2$ diperoleh

$$\mathbf{Z}_2^* = \Lambda \mathbf{X}_2 + (\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{Z}_1^* + (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)$$

Dengan mengganti $\mathbf{Z}_1^*$ dengan $\Lambda \mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2^* &= \Lambda \mathbf{X}_2 + (\mathbf{I} - \Lambda) [\Lambda \mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0)] + (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \\ &= \Lambda \mathbf{X}_2 + \Lambda (\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} - \Lambda)^2 \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{I} - \Lambda) (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) + (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \end{aligned}$$

untuk $i = 3$ diperoleh

$$\mathbf{Z}_3^* = \Lambda \mathbf{X}_3 + (\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{Z}_2^* + (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2)$$

Dengan mengganti $\mathbf{Z}_2^*$ dengan $\Lambda \mathbf{X}_2 + \Lambda(\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} - \Lambda)^2 \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{I} - \Lambda)$

$(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) + (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_3^* &= \Lambda \mathbf{X}_3 + (\mathbf{I} - \Lambda) \left[\Lambda \mathbf{X}_2 + \Lambda(\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} - \Lambda)^2 \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{I} - \Lambda)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) + (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) \right] \\ &\quad + (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2) \\ &= \Lambda \mathbf{X}_3 + \Lambda(\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{X}_2 + \Lambda(\mathbf{I} - \Lambda)^2 \mathbf{X}_1 + (\mathbf{I} - \Lambda)^3 \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{I} - \Lambda)^2 (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) + (\mathbf{I} - \Lambda) \\ &\quad (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) + (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2) \\ &= \Lambda \left[\mathbf{X}_3 + (\mathbf{I} - \Lambda) \mathbf{X}_2 + (\mathbf{I} - \Lambda)^2 \mathbf{X}_1 \right] + (\mathbf{I} - \Lambda)^3 \mathbf{Z}_0^* + (\mathbf{I} - \Lambda)^2 (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) + (\mathbf{I} - \Lambda) \\ &\quad (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1) + (\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2) \\ &= \Lambda \sum_{j=0}^2 (\mathbf{I} - \Lambda)^j \mathbf{X}_{3-j} + (\mathbf{I} - \Lambda)^3 \mathbf{Z}_0^* + \sum_{j=0}^2 (\mathbf{I} - \Lambda)^j (\mathbf{X}_{3-j} - \mathbf{X}_{3-j-1}) \end{aligned}$$

Langkah di atas dilakukan hingga $i = n$ dengan n adalah banyaknya pengamatan, sehingga untuk $\mathbf{Z}_i^*$ diperoleh

$$\mathbf{Z}_i^* = \Lambda \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbf{I} - \Lambda)^j \mathbf{X}_{i-j} + (\mathbf{I} - \Lambda)^i \mathbf{Z}_0^* + \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbf{I} - \Lambda)^j (\mathbf{X}_{i-j} - \mathbf{X}_{i-j-1}) \quad (4.2)$$

Diberikan $\mathbf{Z}_0^* = \mathbf{X}_0$ maka $\mathbf{Z}_i^*$ menjadi

$$\mathbf{Z}_i^* = \Lambda \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbf{I} - \Lambda)^j \mathbf{X}_{i-j} + (\mathbf{I} - \Lambda)^i \mathbf{X}_0 + \sum_{j=0}^{i-1} (\mathbf{I} - \Lambda)^j (\mathbf{X}_{i-j} - \mathbf{X}_{i-j-1}) \quad (4.3)$$

4.1.3 Penentuan $\mathbf{Z}_i^*$ dengan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

Selanjutnya bentuk (4.3) dapat disederhanakan dengan asumsi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

sehingga $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ maka diperoleh $\mathbf{Z}_i^*$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_i^* &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{i-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right)^j \begin{bmatrix} X_{1,i-j} \\ X_{2,i-j} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right)^i \begin{bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{bmatrix} + \\
&\quad \sum_{j=0}^{i-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right)^j \begin{bmatrix} X_{1,i-j} - X_{1,i-j-1} \\ X_{2,i-j} - X_{2,i-j-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{i-1} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}^j \begin{bmatrix} X_{1,i-j} \\ X_{2,i-j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}^i \begin{bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{i-1} \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}^j \\
&\quad \begin{bmatrix} X_{1,i-j} - X_{1,i-j-1} \\ X_{2,i-j} - X_{2,i-j-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{i-1} \begin{bmatrix} (1-\lambda)^j & 0 \\ 0 & (1-\lambda)^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,i-j} \\ X_{2,i-j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\lambda)^i & 0 \\ 0 & (1-\lambda)^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{bmatrix} + \\
&\quad \sum_{j=0}^{i-1} \begin{bmatrix} (1-\lambda)^j & 0 \\ 0 & (1-\lambda)^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1,i-j} - X_{1,i-j-1} \\ X_{2,i-j} - X_{2,i-j-1} \end{bmatrix} \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j \mathbf{X}_{i-j} + (1-\lambda)^i \mathbf{X}_0 + \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j (\mathbf{X}_{i-j} - \mathbf{X}_{i-j-1}) \quad (4.4)
\end{aligned}$$

4.1.4 Penentuan Ekspektasi dari $\mathbf{Z}_i^*$

Berdasarkan persamaan (4.4) untuk melihat karakteristik dari $\mathbf{Z}_i^*$ maka akan dihitung ekspektasi pada $\mathbf{Z}_i^*$

$$E(\mathbf{Z}_i^*) = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j E(\mathbf{X}_{i-j}) + (1-\lambda)^i E(\mathbf{X}_0) + \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j E(\mathbf{X}_{i-j} - \mathbf{X}_{i-j-1}) \quad (4.5)$$

Diberikan, $E[\mathbf{X}_{i-j}] = \boldsymbol{\mu}$, untuk setiap $i = 0, 1, 2, \dots, n$, maka persamaan di atas menjadi,

$$E(\mathbf{Z}_i^*) = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j \boldsymbol{\mu} + (1-\lambda)^i \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu})$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j \mu + (1-\lambda)^i \mu + \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j (0) \\
&= \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j \mu + (1-\lambda)^i \mu
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Oleh karena deret $\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j$ adalah deret geometrik dengan rasio $(1-\lambda)$ dan

suku pertama λ , maka jumlah parsial ke- i , (S_i) dinyatakan,

$$S_i = \lambda + \lambda(1-\lambda) + \lambda(1-\lambda)^2 + \dots + \lambda(1-\lambda)^{i-1} \tag{4.7}$$

Kedua ruas dikalikan dengan rasio yaitu $(1-\lambda)$

$$(1-\lambda)S_i = \lambda(1-\lambda) + \lambda(1-\lambda)^2 + \dots + \lambda(1-\lambda)^{i-1} + \lambda(1-\lambda)^i \tag{4.8}$$

Selanjutnya persamaan (4.7) dikurangkan dengan persamaan (4.8) sehingga menjadi

$$S_i - (1-\lambda)S_i = \lambda - \lambda(1-\lambda)^i$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}
S_i [1 - (1-\lambda)] &= \lambda [1 - (1-\lambda)^i] \\
S_i &= \frac{\lambda [1 - (1-\lambda)^i]}{[1 - (1-\lambda)]} \\
&= [1 - (1-\lambda)^i]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.9) pada persamaan (4.6) akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
E(\mathbf{Z}_i^*) &= \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j \mu + (1-\lambda)^i \mu \\
&= [1 - (1-\lambda)^i] \mu + (1-\lambda)^i \mu \\
&= \mu - (1-\lambda)^i \mu + (1-\lambda)^i \mu = \mu
\end{aligned} \tag{4.10}$$

4.1.5 Penentuan Kovarian dari Z_i^*

Selanjutnya akan dihitung kovarian dari Z_i^* , yang akan digunakan untuk menghitung nilai statistik BMOEWMA (T_i^2). Dengan menghitung Z_i^* terlebih dahulu, untuk $i = 1$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} Z_1^* &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{10} \\ X_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{11} - X_{10} \\ X_{21} - X_{20} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 X_{11} \\ \lambda_2 X_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1-\lambda_1) X_{10} \\ (1-\lambda_2) X_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{11} - X_{10} \\ X_{21} - X_{20} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 X_{11} + (1-\lambda_1) X_{10} + X_{11} - X_{10} \\ \lambda_2 X_{21} + (1-\lambda_2) X_{20} + X_{21} - X_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}^* \\ Z_{21}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Didefinisikan kovariansi dari Z_1^* sebagai berikut

$$\text{Cov}(Z_1^*) = \Sigma_{Z_1^*} = \begin{bmatrix} \text{Var}(Z_{11}^*) & \text{Cov}(Z_{11}^*, Z_{21}^*) \\ \text{Cov}(Z_{11}^*, Z_{21}^*) & \text{Var}(Z_{21}^*) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

dengan $\text{Var}(Z_{11}^*)$ dan $\text{Var}(Z_{21}^*)$ adalah variansi dari univariat MOEWMA statistik, sehingga untuk $i = 1, 2, \dots, n$ persamaan (4.12) menjadi

$$\text{Cov}(Z_i^*) = \Sigma_{Z_i^*} = \begin{bmatrix} \text{Var}(Z_{1i}^*) & \text{Cov}(Z_{1i}^*, Z_{2i}^*) \\ \text{Cov}(Z_{1i}^*, Z_{2i}^*) & \text{Var}(Z_{2i}^*) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Selanjutnya untuk rumus $\text{Var}(Z_{1i}^*)$ sama dengan variansi pada MOEWMA yang telah dijelaskan pada Bab II yaitu ditunjukkan sebagai berikut

$$\text{Var}(Z_i) = \left[\frac{\lambda}{(2-\lambda)} + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)} \right] \sigma^2 \quad (4.14)$$

Sehingga kovariansi untuk BMOEWMA adalah

$$\text{Var}(Z_{1i}^*) = \left[\frac{\lambda}{(2-\lambda)} + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)} \right] \Sigma = \text{Var}(Z_{2i}^*) \quad (4.15)$$

dimana Σ adalah matrik varian kovarian dari data. Sehingga matrik varian kovarian BMOEWMA (Z_i^*) diberikan sebagai berikut:

$$\Sigma_{Z_i^*} = \frac{\lambda}{(2-\lambda)} \Sigma + \frac{2\lambda(1-\lambda)}{(2-\lambda)} \rho \Sigma \quad (4.16)$$

Mengadaptasi dari nilai statistik MEWMA, maka nilai statistik untuk BMOEWMA adalah

$$T_i^2 = Z_i^* \Sigma_{Z_i^*}^{-1} Z_i^* \quad (4.17)$$

4.2 Penerapan Grafik Pengendali BMOEWMA

4.2.1 Penerapan Data Karakteristik Kualitas

Gambaran umum data karakteristik kualitas digunakan untuk mengetahui karakteristik masing-masing variabel data, dengan menggunakan analisis deskriptif statistik. Hasil dari analisis deskriptif dengan menggunakan program adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1 Deskriptif Statistik Karakteristik Kualitas

Variabel	N	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Median	Maksimum
Gramathur	58	54,144	0,278	2,116	49,233	53,707	58,196
Thickness	58	73,734	0,276	2,101	68,556	73,268	78,000

Ada dua variabel dari karakteristik kertas yang digunakan pada tugas akhir ini yaitu *gramathur* dan *thickness*. Dari hasil analisis pada Tabel 4.1 diketahui bahwa nilai rata-rata dari variabel *gramathur* dan *thickness* berada di luar batas standar perusahaan, maka diasumsikan banyak produk berada di luar batas standar perusahaan. Dan jika proses menyebar di luar batas standar perusahaan, proses belum dikatakan memenuhi standar perusahaan.

Deskriptif dari masing-masing variabel yaitu:

1. Pada Tabel 4.1 variabel *gramathur* mempunyai nilai rata-rata sebesar 54,144 dan nilai minimum sebesar 49,233, berarti nilai tersebut masih berada di bawah standar perusahaan yang dapat dilihat pada Tabel 3.1. Hal ini menunjukkan masih ada produksi yang keluar dari batas standar yang ditentukan oleh perusahaan.
2. Pada Tabel 4.1 variabel *thickness* mempunyai nilai rata-rata sebesar 73,734 dan nilai minimum sebesar 68,556, berarti nilai tersebut masih berada di bawah standar perusahaan yang dapat dilihat pada Tabel 3.1. Hal ini menunjukkan masih ada produksi yang keluar dari batas standar yang ditentukan oleh perusahaan.

4.2.2 Analisis Korelasi antara *Gramathur* dan *Thickness*

Sebelum melakukan pengendalian kualitas, perlu diketahui terlebih dahulu hubungan antar variabel. Jika terdapat hubungan antar variabel maka dapat dianalisis lebih lanjut. Uji yang dilakukan adalah uji satu sisi karena dicari ada atau tidak adanya hubungan antar variabel. Untuk mencari hubungan kedua variabel digunakan program SPSS, sehingga didapat hasil pada Tabel 4.2 berikut:

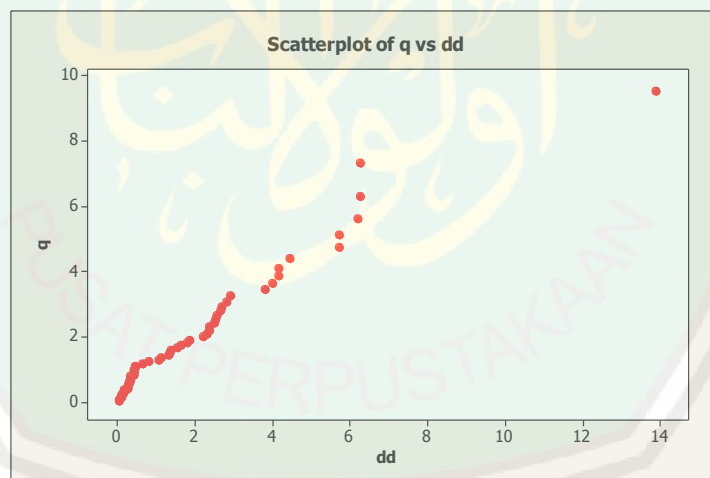
Tabel 4.2 Nilai Korelasi antar Variabel

	<i>Gramathur</i>	<i>Thickness</i>
	<i>Pearson Correlation</i>	
<i>Gramathur</i>	1	.844**
<i>Thickness</i>	.844**	1
	<i>Sig.(1-tailed)</i>	
<i>Gramathur</i>		.000
<i>Thickness</i>	.000	

Dapat dilihat pada Tabel 4.2 koefisien korelasi pada tingkat kesalahan 0,05 antara variabel *gramathur* dan *thickness* adalah $0,844 > r_{tabel}$ yaitu sebesar 0,2144, maka dapat disimpulkan terdapat hubungan yang signifikan antara variabel *gramathur* dan *thickness* yang berarti kedua variabel tersebut saling mempengaruhi satu sama lain.

4.2.3 Uji Distribusi Normal Multivariat

Distribusi normal multivariat adalah asumsi yang harus dipenuhi sebelum menggunakan grafik pengendali multivariat, sehingga pengujian kemultinormalan perlu dilakukan. Pengujian tersebut dilakukan dengan menggunakan *QQ plot*, diperoleh grafik *QQ plot* normal multivariat pada Gambar 4.1



Gambar 4.1 Grafik *QQ Plot* Normal Multivariat

Pengujian distribusi normal multivariat dilakukan dengan hipotesis sebagai berikut:

H_0 : Variabel karakteristik kualitas berdistribusi normal multivariat

H_1 : Variabel karakteristik kualitas tidak berdistribusi normal multivariat

Berdasarkan grafik *QQ plot* dari macro MINITAB diperoleh data display dengan jarak $d_j^2 \leq \chi_{2,0.05}^2$ yaitu sebesar $0,534483 \leq 5,99146$ sehingga menerima H_0 dan dapat disimpulkan bahwa data variabel mengikuti distribusi normal multivariat, selain diuji dapat pula dilihat dari pola plotnya yang cenderung membentuk pola garis lurus kemudian setelah memenuhi asumsi normal multivariat maka dapat dibuat grafik pengendali multivariat.

4.2.4 Pendeteksian *Mean* Proses dengan Grafik Pengendali BMOEWMA

Pada bagian ini penulis akan mendeteksi *mean* proses dengan membangun Grafik Pengendali BMOEWMA yang diterapkan pada data karakteristik kualitas kertas yang memiliki dua variabel yaitu *gramathur* dan *thickness*. Pada penelitian ini dibatasi pada pemilihan $\lambda = 0,1$, $\lambda = 0,2$, $\lambda = 0,4$, $\lambda = 0,6$ dan $\lambda = 0,8$, yakni λ yang sering digunakan untuk menyusun grafik pengendali. Penulis akan menggunakan masing-masing λ tersebut untuk membangun Grafik Pengendali BMOEWMA.

Langkah pertama yang dilakukan untuk membangun Grafik Pengendali BMOEWMA adalah menghitung data terpusat yakni data variabel X_1 dan X_2 dikurangi rata-rata dari tiap variabel, diperoleh data sebagai berikut:

Tabel 4.3 Data Terpusat dari Masing-masing Variabel

NO	$X_1 - \mu_1$	$X_2 - \mu_2$
1	-0,1172	-0,5806
2	-0,5862	1,2656
3	-0,5449	0,8489
⋮	...	...
58	1,0486	1,1227

Untuk selengkapnya tabel ditunjukkan pada Lampiran 2.

Data terpusat digunakan untuk menghitung vektor Z_i^* dengan menggunakan program pada Lampiran 5, sehingga untuk $\lambda = 0,1$ dan $\lambda = 0,2$ diperoleh hasil sebagai berikut:

Tabel 4.4 Nilai Vektor BMOEWMA untuk Tiap-tiap Z_i^* pada $\lambda = 0,1$

i	Z_{1i}^*	Z_{2i}^*
1	-0,1290	-0,6386
2	-0,6437	1,3980
3	-0,5925	0,9264
$\vdots$	...	...
58	1,1477	1,2077

Untuk selengkapnya tabel ditunjukkan pada Lampiran 6.

Tabel 4.5 Nilai Vektor BMOEWMA untuk Tiap-tiap Z_i^* pada $\lambda = 0,2$

I	Z_{1i}^*	Z_{2i}^*
1	-0,1407	-0,6967
2	-0,6988	1,5420
3	-0,6267	0,9866
$\vdots$	...	...
58	1,2329	1,2376

Untuk selengkapnya tabel ditunjukkan pada Lampiran 7.

Setelah didapatkan nilai vektor BMOEWMA (Z_i^*) langkah selanjutnya adalah menghitung matriks varian kovarian dari Z_i^* dengan menggunakan program pada Lampiran 5. Didapatkan hasil untuk $\lambda = 0,1$ matriks varian kovarian dari Z_i^* adalah $\sum_{Z_i^*} = \begin{bmatrix} 0,5934 & 0,4971 \\ 0,4971 & 0,5853 \end{bmatrix}$, sedangkan untuk $\lambda = 0,2$

diperoleh $\sum_{Z_i^*} = \begin{bmatrix} 1,1687 & 0,9792 \\ 0,9792 & 1,1529 \end{bmatrix}$, untuk $\lambda = 0,4$ adalah $\sum_{Z_i^*} = \begin{bmatrix} 2,2520 & 1,8868 \\ 1,8868 & 2,2215 \end{bmatrix}$

, kemudian untuk $\lambda = 0,6$ adalah $\sum_{z_i} = \begin{bmatrix} 3.2132 & 2.6921 \\ 2.6921 & 3.1697 \end{bmatrix}$ dan $\lambda = 0,8$ adalah

$$\sum_{z_i} = \begin{bmatrix} 3.9913 & 3.3441 \\ 3.3441 & 3.9372 \end{bmatrix}.$$

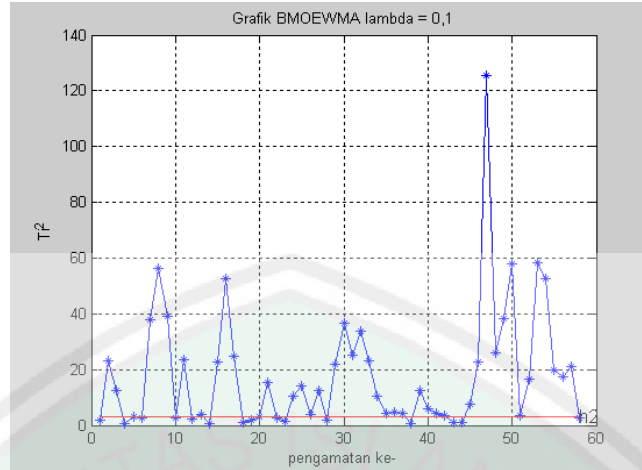
Setelah diperoleh matriks varian kovarian dari Z_i^* , sehingga dapat dihitung nilai statistik BMOEWMA (T_i^2) pada setiap pengamatan. Dengan menggunakan program pada Lampiran 5, maka didapat nilai statistik BMOEWMA (T_i^2) untuk masing-masing λ sebagai berikut:

Tabel 4.6 Nilai Statistik T_i^2

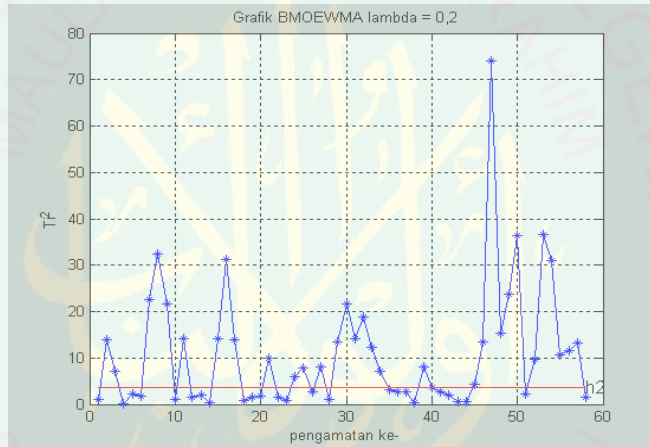
No	T_i^2 $\lambda = 0,1$	T_i^2 $\lambda = 0,2$	T_i^2 $\lambda = 0,4$	T_i^2 $\lambda = 0,6$	T_i^2 $\lambda = 0,8$
1	1,6959	1,0246	0,7238	0,6626	0,6751
2	22,9323	14,0306	10,3296	9,9940	10,8507
3	12,5845	7,2098	4,1527	2,6759	1,5468
$\vdots$	...	...	...	...	...
58	2,5789	1,4266	0,5422	0,0681	0,0322

Untuk selengkapnya tabel ditunjukkan pada Lampiran 8.

Langkah terakhir adalah membangun grafik pengendali BMOEWMA, dengan menggunakan batas kendali atas yaitu nilai h_2 . Nilai $h_2 > 0$ dipilih untuk mendapatkan ketetapan *Average Run Length* (ARL) yang *in control* pada grafik pengendali BMOEWMA, dapat dilihat pada Lampiran 16. Jika ada satu atau lebih titik yang berada di atas nilai h_2 maka proses itu dikatakan *out of control*. Dengan menggunakan program pada Lampiran 5, diperoleh grafik pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,1$ dan $\lambda = 0,2$ sebagai berikut:



Gambar 4.2 Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,1$



Gambar 4.3 Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,2$

Grafik pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,4$, $\lambda = 0,6$ dan $\lambda = 0,8$ ada pada Lampiran 9-11. Sumbu vertikal menunjukkan nilai pengamatan ke- i dengan titik-titik yang digambarkan merupakan nilai statistik T_i^2 untuk setiap pengamatan. Pada Gambar 4.2 dengan menggunakan nilai h_2 sebesar 3,135 untuk $\lambda = 0,1$ diperoleh 41 titik yang keluar dari batas kendali atas, yaitu titik-titik yang memiliki nilai statistik T_i^2 lebih dari h_2 . Titik-titik tersebut disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.7 Pengamatan di Luar Batas Pengendali Grafik
Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,1$

Pengamatan di luar batas pengendali	T^{2*}
2	22.9323
3	12.5845
7	37.8937
8	56.3233
9	39.2461
11	23.3803
13	3.7330
15	22.5938
16	52.5713
17	24.7052
21	15.4999
24	10.3206
25	13.9294
26	3.9969
27	12.4437
29	21.9302
30	36.4791
31	25.2671
32	33.9191
33	23.1502
34	10.4291
35	4.3408
36	4.5108
37	4.4579
39	12.5766
40	5.9842
41	4.1918
42	3.3322
45	7.5236
46	22.8012
47	125.5501
48	26.1696
49	38.4051
50	58.0769
51	3.2946
52	16.6674
53	58.2292
54	52.4230
55	19.7661
56	17.4623
57	21.2743

Pada Gambar 4.3 dengan nilai h_2 sebesar 3,742 untuk $\lambda = 0,2$ dapat diketahui dari grafik pengendali BMOEWMA di atas terdapat 32 titik yang berada di luar batas kendali atas, dengan nilai statistik T_i^2 untuk pengamatan yang berada di luar batas pengendali atas sebagai berikut:

Tabel 4.8 Pengamatan di Luar Batas Pengendali Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,2$

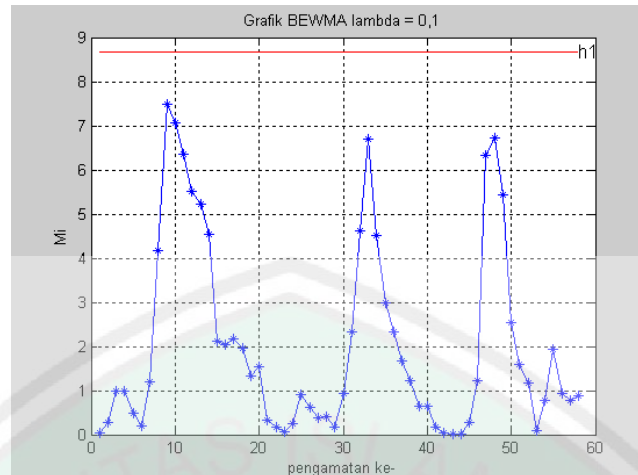
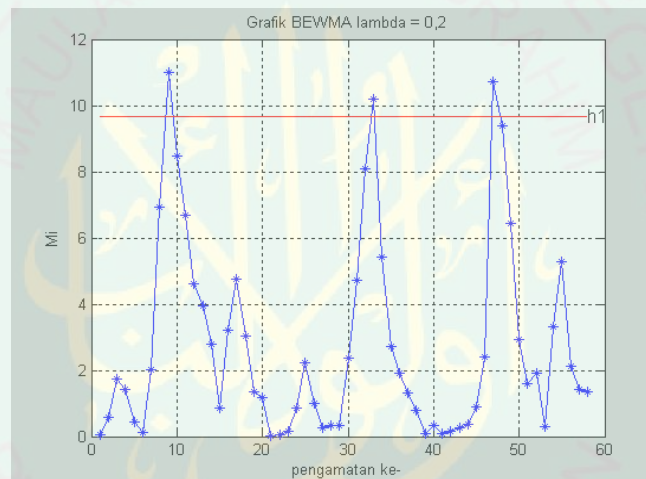
Pengamatan di luar batas pengendali	T^{2*}
2	14,0306
3	7,2098
7	22,6835
8	32,4914
9	21,6223
11	14,0830
15	14,2353
16	31,1792
17	13,8705
21	9,8614
24	6,0013
25	7,8437
27	7,9573
29	13,5376
30	21,6098
31	14,1958
32	18,8135
33	12,2357
34	7,0931
39	8,0188
45	4,3500
46	13,3522
47	74,0241
48	15,3374
49	23,7929
50	36,4836
52	9,7950
53	36,6457
54	30,8896
55	10,7399
56	11,5786
57	13,2603

Grafik pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,4$ dapat mendeteksi 30 titik yang berada di luar batas kendali, sedangkan $\lambda = 0,6$ dan $\lambda = 0,8$ masing-masing dapat mendeteksi 21 dan 15 titik, informasi dapat dilihat pada Lampiran 9-11. Dalam hal ini $\lambda = 0,1$ lebih banyak mendeteksi titik yang *out of control*, sehingga pada $\lambda = 0,1$ lebih sensitif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses. Saat pergeseran rata-rata proses yang kecil yaitu 0,5, $\lambda = 0,1$ paling cepat mendeteksi adanya titik yang *out of control*, informasi dapat dilihat pada Lampiran 16.. Banyaknya titik yang keluar dari batas pengendali sehingga perlu adanya identifikasi variabel yang menyebabkan *out of control*.

4.3 Perbandingan Grafik Pengendali BMOEWMA dengan BEWMA

Pada tahap ini penulis akan membandingkan penerapan grafik pengendali *Bivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* (BMOEWMA) dengan grafik pengendali *Bivariate Exponentially Weighted Moving Average* (BEWMA). Penjelasan tentang BEWMA telah dijelaskan secara implisit pada bab II, ketika membahas grafik pengendali *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average* (MEWMA) dengan $p = 2$ maka dapat disebut BEWMA.

Selanjutnya dapat dibangun grafik pengendali BEWMA, dengan menggunakan batas kendali atas yaitu nilai h_1 . Nilai $h_1 > 0$ dipilih untuk mendapatkan ketetapan *Average Run Length* (ARL) yang *in control* pada grafik pengendali BEWMA, nilai h_1 untuk masing-masing λ dapat dilihat pada Lampiran 16. Dengan menggunakan program pada Lampiran 6, diperoleh grafik pengendali BEWMA untuk masing-masing λ sebagai berikut:

Gambar 4.4 Grafik Pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,1$ Gambar 4.5 Grafik Pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,2$

Gambar 4.4 dan 4.5 merupakan grafik pengendali BEWMA dengan $\lambda = 0,1$ dan $\lambda = 0,2$, untuk $\lambda = 0,4$, $\lambda = 0,6$ dan $\lambda = 0,8$ ada pada Lampiran 15. Sumbu vertikal menunjukkan nilai pengamatan ke- i dengan titik-titik yang digambarkan merupakan nilai statistik M_i untuk setiap pengamatan. Pada Gambar 4.4 dengan nilai h_1 sebesar 8,66 untuk $\lambda = 0,1$ dapat diketahui tidak ada titik yang berada di luar batas kendali atas. Sedangkan pada Gambar 4.5 dengan nilai h_1 sebesar 9,65 untuk $\lambda = 0,2$ dapat diketahui tiga titik yang *out of control*

yaitu pada titik 9, 33 dan 47 dengan nilai statistik M_i masing-masing untuk pengamatan di luar batas pengendali sebagai berikut:

Tabel 4.9 Pengamatan di Luar Batas Pengendali Grafik Pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,2$

Pengamatan di luar batas pengendali	M_i
9	10,9876
33	10,1900
47	10,7149

Grafik pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,4$ dapat mendeteksi 2 titik yang berada di luar batas kendali, sedangkan $\lambda = 0,6$ dan $\lambda = 0,8$ masing-masing dapat mendeteksi 1 titik, informasi dapat dilihat pada Lampiran 15. Setelah dilakukan perbandingan untuk masing-masing λ yang sama antara grafik pengendali BMOEWMA dan BEWMA, dapat disimpulkan bahwa banyaknya titik yang *out of control* pada grafik pengendali BMOEWMA menunjukkan bahwa grafik tersebut lebih sensitif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata dibandingkan dengan grafik pengendali BEWMA.

4.4 Pengidentifikasian Penyebab Variabel yang Tidak Terkendali pada Grafik Pengendali BMOEWMA

Melalui informasi titik-titik yang berada di luar batas kendali dapat diidentifikasi variabel yang menyebabkan pengamatan *out of control*, sehingga dapat melakukan perbaikan diproses yang akan datang. Dalam Sulistyawati (2010:4), dijelaskan bahwa salah satu pendekatan yang dapat digunakan dalam mendiagnosis sinyal *out of control* adalah menguraikan nilai statistik T_i^2 ke dalam komponen-komponen yang menunjukkan kontribusi dari masing-masing variabel. Perbaikan proses dilakukan pada variabel yang memiliki nilai $d_j > \chi^2_{0.05,1}$

Tabel 4.10 Nilai Kontribusi Relatif (d_j) dari Masing-masing Variabel untuk $\lambda = 0,1$

Pengamatan ke	Variabel	
	X_1	X_1
2	19.5933	22.2340
3	11.1183	11.9928
7	0.8848	6.1180
8	1.7633	8.1027
9	13.9769	0.2063
11	17.8732	23.2958
13	1.6921	3.4764
15	14.1363	2.5919
16	46.8565	20.1655
17	10.9964	0.6545
21	12.9308	15.1647
24	10.1622	8.4266
25	13.3132	12.2466
26	0.8572	3.0018
27	8.4606	12.4289
29	5.7975	17.5403
30	0.1131	12.4060
31	0.7786	3.6601
32	4.5208	1.2502
33	5.9359	0.0299
34	5.5353	10.0659
35	0.7271	3.0283
36	2.5703	4.4121
37	1.0328	3.4268
39	11.4527	11.7246
40	5.2638	5.7178
41	0.0696	1.7238
42	0.3170	1.9810
45	2.4012	6.3635
46	17.7677	22.6635
47	122.7523	104.9490
48	9.7628	0.2121
49	0.5978	15.6359
50	42.5947	58.0424
51	3.2413	1.9453
52	15.7254	14.9490
53	2.3683	28.2163
54	38.5868	10.5141
55	18.4962	9.1372
56	0.6313	2.3498
57	1.9855	1.3686

Tabel 4.10 merupakan nilai kontribusi relatif (d_j) untuk pengamatan yang *out of control* pada grafik pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,1$. Selanjutnya nilai d_j dari kedua variabel tersebut dibandingkan terhadap nilai $\chi^2_{0,05,1}$ yaitu sebesar 3,84146, apabila terdapat variabel yang memiliki nilai d_j lebih besar dari $\chi^2_{0,05,1}$, maka variabel tersebut merupakan penyebab *out of control*. Sehingga dapat diidentifikasi variabel yang menyebabkan *out of control*, sebagai berikut:

Tabel 4.11 Variabel Penyebab Tidak Terkendali untuk $\lambda = 0,1$

Pengamatan di luar batas pengendali	Variabel penyebab tidak terkendali
2	X_1, X_2
3	X_1, X_2
7	X_2
8	X_2
9	X_1
11	X_1, X_2
13	-
15	X_1
16	X_1, X_2
17	X_1
21	X_1, X_2
24	X_1, X_2
25	X_1, X_2
26	-
27	X_1, X_2
29	X_1, X_2
30	X_2
31	-
32	X_1
33	X_1
34	X_1, X_2
35	-
36	X_2
37	-
39	X_1, X_2
40	X_1, X_2
41	-
42	-
45	X_2

Tabel 4.11 (Lanjutan)

46	X_1, X_2
47	X_1, X_2
48	X_1
49	X_2
50	X_1, X_2
51	-
52	X_1, X_2
53	X_2
54	X_1, X_2
55	X_1, X_2
56	-
57	-

Berdasarkan Tabel 4.11 dapat dilihat bahwa pada pengamatan ke 13, 26, 31, 35, 37, 41, 42, 51, 56 dan 57, variabel *gramathur* dan *thickness* bukan merupakan variabel penyebab tidak terkendalinya proses, berarti terdapat variabel lain yang menyebabkan proses tidak terkendali pada pengamatan tersebut. Karena pada perusahaan kertas memiliki lebih dari dua variabel karakteristik kualitas.

Selanjutnya identifikasi dilakukan pada grafik pengendali BMOEWMA dengan $\lambda = 0,2$, melalui Gambar 4.3 dapat dilihat titik-titik yang berada di luar batas kendali atas adalah pengamatan ke 2, 3, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, dan 57. Kemudian nilai d_j dari kedua variabel tersebut dibandingkan terhadap nilai $\chi^2_{0.05,1}$, maka didapatkan variabel penyebab *out of control* sehingga dapat dilakukan tindakan perbaikan proses pada variabel yang memiliki nilai d_j lebih besar dari $\chi^2_{0.05,1}$. Nilai d_j untuk pengamatan yang *out of control* pada grafik pengendali BMOEWMA dengan $\lambda = 0,2$ sebagai berikut:

Tabel 4.12 Nilai Kontribusi Relatif (d_j) dari Masing-masing Variabel untuk $\lambda = 0,2$

Pengamatan ke	Variabel	
	X_1	X_2
2	11,9683	13,6128
3	6,3654	6,8737
7	0,5082	3,7153
8	1,0030	4,7030
9	8,1707	0,1951
11	11,5258	13,8581
15	8,5938	1,4338
16	27,6166	11,6928
17	5,7424	0,2405
21	8,3096	9,6142
24	5,9262	4,8435
25	7,5147	6,8670
27	5,5428	7,9552
29	3,5232	10,7769
30	0,0487	7,1814
31	0,5231	1,8923
32	2,7702	0,5580
33	3,4673	0,0004
34	3,0896	6,5396
39	7,3063	7,4720
45	1,4970	3,7604
46	10,6440	13,2199
47	72,6293	61,2050
48	4,6276	0,0033
49	0,7625	10,9810
50	27,7378	36,3723
52	9,3842	8,5754
53	1,6613	18,1786
54	22,8769	6,3235
55	10,1658	5,2109
56	0,6724	1,1702
57	1,5323	0,6318

Berdasarkan Tabel 4.12 dapat dicari variabel yang menyebabkan proses *out of control*, setelah dibandingkan dengan nilai $\chi^2_{0,05,1}$ maka didapatkan variabel yang menyebabkan *out of control*, yang akan disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4.13 Variabel Penyebab Tidak Terkendali untuk $\lambda = 0,2$

Pengamatan di luar batas pengendali	Variabel penyebab tidak terkendali
2	X_1, X_2
3	X_1, X_2
7	-
8	X_2
9	X_1
11	X_1, X_2
15	X_1
16	X_1, X_2
17	X_1
21	X_1, X_2
24	X_1, X_2
25	X_1, X_2
27	X_1, X_2
29	X_2
30	X_2
31	-
32	-
33	-
34	X_2
39	X_1, X_2
45	-
46	X_1, X_2
47	X_1, X_2
48	X_1
49	X_2
50	X_1, X_2
52	X_1, X_2
53	X_2
54	X_1, X_2
55	X_1, X_2
56	-
57	-

Berdasarkan Tabel 4.13 dapat dilihat bahwa pada pengamatan ke 7, 31, 32, 33, 45, 56 dan 57, variabel *gramathur* dan *thickness* bukan merupakan variabel penyebab tidak terkendalnya proses, berarti terdapat variabel lain yang menyebabkan proses tidak terkendali pada pengamatan tersebut. Karena pada perusahaan kertas memiliki lebih dari dua variabel karakteristik kualitas.

Identifikasi grafik pengendali BMOEWMA dengan $\lambda = 0,4$, $\lambda = 0,6$ dan $\lambda = 0,8$ informasi dapat dilihat pada Lampiran 9-11.

Berdasarkan Tabel 4.11 dan Tabel 4.13 di atas, variabel yang menyebabkan proses *out of control* adalah variabel *gramathur* (X_1) dan *thickness* (X_2), akan tetapi variabel yang paling banyak menyebabkan *out of control* adalah variabel *thickness* (X_2).

4.5 Manfaat Menjaga Karakteristik Kualitas dalam Kajian Agama

Kualitas merupakan salah satu faktor yang menentukan banyaknya pengguna produk tersebut. Dalam proses produksi, perlu adanya grafik pengendali untuk memonitor karakteristik kualitas agar produk yang dihasilkan memenuhi standar perusahaan. Apabila kualitas tetap terjaga, maka konsumen akan tetap menggunakan produk tersebut dan konsumen akan bertambah. Sebagaimana firman Allah sebagai berikut:

وَأَوْفُوا الْكَيْلَ إِذَا كَلَّمْتُمْ بِالْقَيْسِطِ الْمُسْتَقِيمِ ۚ ذَٰلِكَ خَيْرٌ وَأَحْسَنُ تَأْوِيلًا ﴿٣٥﴾

“Dan sempurnakanlah takaran apabila kamu menakar, dan timbanglah dengan neraca yang benar. Itulah yang lebih utama (bagimu) dan lebih baik akibatnya.” (QS. *al-Isra'*/17:35).

Shihab (2002:463) menafsirkan ayat di atas bahwa “Salah satu hal yang berkaitan dengan hak pemberian harta adalah menakar dengan sempurna, karena itu ayat ini melanjutkan dengan menyatakan bahwa *dan sempurnakanlah* secara sungguh-sungguh *takaran apabila kamu menakar* untuk pihak lain *dan timbanglah dengan neraca yang lurus* yakni yang benar dan adil. *Itulah yang baik* bagi kamu dan orang lain karena dengan demikian orang akan percaya kepada kamu sehingga semakin banyak yang berinteraksi dengan kamu *dan* melakukan

hal itu juga *lebih bagus akibatnya* bagi kamu di akhirat nanti dan bagi seluruh masyarakat dalam kehidupan dunia ini.

Penyempurnaan takaran dan timbangan oleh ayat di atas dinyatakan *baik dan lebih bagus akibatnya*. Ini karena penyempurnaan takaran/timbangan, melahirkan rasa aman, ketentramandan kesejahteraan hidup bermasyarakat. Kesemuanya dapat tercapai melalui keharmonisan hubungan antara anggota masyarakat, yang antara lain bila masing-masing memberi apa yang berlebih dari kebutuhannya dan menerima yang seimbang dengan haknya. Ini tentu saja memerlukan rasa aman menyangkut alat ukur, baik takaran maupun timbangan. Siapa yang membenarkan bagi dirinya mengurangi hak seseorang, maka rasa aman tidak akan tercipta, dan inipun tentu saja tidak baik bagi perorangan dan masyarakat.”

Apabila memberikan pelayanan yang terbaik untuk pelanggan maka akan mendapatkan balasan yang baik, yakni akan mendapatkan pelanggan setia dan bertambahnya pelanggan. Sebaliknya jika memberikan pelayanan yang buruk kepada pelanggan maka satu per satu pelanggan akan berpindah kepada penjual lain, sehingga akan mengalami kerugian. Dalam hal ini seperti firman Allah yaitu sebagai berikut:

يُثَبِّتُ اللَّهُ الَّذِينَ ءَامَنُوا بِالْقَوْلِ الثَّابِتِ فِي الْحَيَاةِ الدُّنْيَا وَفِي الْآخِرَةِ وَيُضِلُّ اللَّهُ الظَّالِمِينَ
وَيَفْعَلُ اللَّهُ مَا يَشَاءُ

“Allah meneguhkan (iman) orang-orang yang beriman dengan Ucapan yang teguh itu dalam kehidupan di dunia dan di akhirat; dan Allah menyesatkan orang-orang yang zalim dan memperbuat apa yang Dia kehendaki.” (QS. Ibrahim/14:27).

Pada ayat yang lalu menyatakan bahwa *Kalimah Thayyibah/kalimat yang baik* serupa dengan pohon yang baik yang terhujaam akarnya ke bumi. Sebagaimana teguhnya akar pohon itu Allah juga *meneguhkan hati orang-orang*

yang beriman dengan ucapan yang teguh yakni kalimah thayyibah itu ke dalam hati mereka, sehingga mereka selalu konsisten menghadapi segala ujian dan cobaan di dunia dan di akhirat. Dan sebaliknya, Allah menyesatkan orang-orang zalim karena mereka memilih pegangan yang bagaikan pohon yang buruk sehingga selalu terombang ambing tidak tahan menghadapi godaan, dan cobaan dan Allah berbuat apa yang Dia kehendaki (Shihab, 2002:54).



BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penerapan grafik pengendali BMOEWMA untuk mendeteksi *mean* proses produksi kertas pada bulan Mei-Juni 2009 tidak terkendali secara statistik karena untuk $\lambda = 0,1$ terdapat 41 pengamatan yang berada di luar batas kendali, yakni pada pengamatan ke 2, 3, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 16, 17, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, dan 57. Sedangkan pada grafik pengendali untuk $\lambda = 0,2$ menunjukkan 32 pengamatan yang berada di luar batas kendali, yakni pada pengamatan ke 2, 3, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 21, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, dan 57, sedangkan pada $\lambda = 0,4$, $\lambda = 0,6$ dan $\lambda = 0,8$ masing-masing dapat mendeteksi 30, 21 dan 15 titik yang berada di luar batas kendali. Banyaknya titik yang berada di luar batas kendali menunjukkan bahwa grafik pengendali BMOEWMA sangat sensitif dalam mendeteksi pergeseran rata-rata proses.
2. Banyaknya titik yang berada di luar batas kendali menunjukkan bahwa proses produksi perlu adanya perbaikan, untuk melakukan perbaikan perlu adanya identifikasi variabel yang menyebabkan proses tidak terkendali. Variabel yang menyebabkan proses *out of control* adalah variabel yang nilai kontribusinya

lebih besar dari nilai $\chi_{0.05,1}$ yaitu 3,84146, dalam hal ini variabel yang paling sering menyebabkan *out of control* adalah variabel *Thickness* (X_2).

5.2 Saran

Pada penulisan penelitian selanjutnya dapat diteruskan penerapan grafik pengendali *Multivariate Modified Exponentially Weighted Moving Average* (MMOEWMA) dengan menggunakan lebih dari dua variabel karakteristik kualitas, untuk mengendalikan proses produksi yang memiliki banyak variabel secara bersama-sama.



LAMPIRAN-LAMPIRAN

Lampiran 1. Data Sifat Fisik Kertas Pada Bulan Mei dan Juni

NO	Gramathur (X ₁)	Thickness (X ₂)	NO	Gramathur (X ₁)	Thickness (X ₂)
1	54,0269	73,1538	32	58,1964	77,5714
2	53,5579	75,0000	33	57,5929	76,7143
3	53,5992	74,5833	34	53,8269	72,3077
4	53,9038	73,7692	35	53,4333	72,5000
5	53,8778	72,8889	36	54,0000	72,8333
6	53,9521	73,0000	37	53,5000	72,5000
7	50,1833	69,5000	38	53,7250	73,2500
8	49,2333	68,5556	39	53,5429	74,5000
9	49,6808	70,1538	40	53,8179	74,3571
10	53,1231	73,2308	41	53,0727	72,3571
11	54,2307	72,0000	42	53,3462	72,5455
12	53,4818	73,6364	43	53,4462	73,1538
13	53,6893	72,6429	44	53,5462	73,0000
14	53,6500	73,5000	45	53,3846	72,1538
15	57,1867	75,6667	46	54,3923	72,1538
16	58,0778	75,3333	47	57,3143	72,5385
17	57,5667	76,2667	48	57,7333	76,5114
18	53,6038	73,0000	49	57,5375	78,0000
19	53,3571	73,2857	50	54,0917	76,5000
20	53,3857	72,5714	51	53,4000	73,6250
21	53,7364	74,8182	52	53,2818	74,4545
22	53,4333	73,6000	53	50,3500	68,5833
23	54,2385	74,2308	54	49,6143	71,1429
24	53,1708	74,0000	55	51,8231	72,9231
25	53,2182	74,2727	56	56,8111	76,5556
26	53,4214	72,5000	57	57,2429	76,7857
27	54,0307	72,3333	58	55,1927	74,8571
28	53,9500	73,0833			
29	55,5857	76,5000			
30	57,5700	77,9286			
31	57,4214	77,2143			

Sumber : (Muhassinah, 2011)

Lampiran 2. Data Terpusat dari Masing-masing Variabel

NO	$X_1 - \mu_1$	$X_2 - \mu_2$	NO	$X_1 - \mu_1$	$X_2 - \mu_2$
1	-0,1172	-0,5806	32	4,0523	3,837
2	-0,5862	1,2656	33	3,4488	2,9799
3	-0,5449	0,8489	34	-0,3172	-1,4267
4	-0,2403	0,0348	35	-0,7108	-1,2344
5	-0,2663	-0,8455	36	-0,1441	-0,9011
6	-0,192	-0,7344	37	-0,6441	-1,2344
7	-3,9608	-4,2344	38	-0,4191	-0,4844
8	-4,9108	-5,1788	39	-0,6012	0,7656
9	-4,4633	-3,5806	40	-0,3262	0,6227
10	-1,021	-0,5036	41	-1,0714	-1,3773
11	0,0866	-1,7344	42	-0,7979	-1,1889
12	-0,6623	-0,098	43	-0,6979	-0,5806
13	-0,4548	-1,0915	44	-0,5979	-0,7344
14	-0,4941	-0,2344	45	-0,7595	-1,5806
15	3,0426	1,9323	46	0,2482	-1,5806
16	3,9337	1,5989	47	3,1702	-1,1959
17	3,4226	2,5323	48	3,5892	2,777
18	-0,5403	-0,7344	49	3,3934	4,2656
19	-0,787	-0,4487	50	-0,0524	2,7656
20	-0,7584	-1,163	51	-0,7441	-0,1094
21	-0,4077	1,0838	52	-0,8623	0,7201
22	-0,7108	-0,1344	53	-3,7941	-5,1511
23	0,0944	0,4964	54	-4,5298	-2,5915
24	-0,9733	0,2656	55	-2,321	-0,8113
25	-0,9259	0,5383	56	2,667	2,8212
26	-0,7227	-1,2344	57	3,0988	3,0513
27	-0,1134	-1,4011	58	1,0486	1,1227
28	-0,1941	-0,6511			
29	1,4416	2,7656			
30	3,4259	4,1942			
31	3,2773	3,4799			

Lampiran 3. Program Pemeriksaan Distribusi Normal Multivariat

```

macro
qq x.1-x.p
mconstant i n p t chis
mcolumn d x.1-x.p dd pi q ss tt
mmatrix s sinv ma mb mc md
let n=count (x.1)
cova x.1-x.p s
invert s sinv
do i=1:p
  let x.i=x.i-mean(x.i)
enddo
do i=1:n
  copy x.1-x.p ma;
  use i.
  transpose ma mb
  multiply ma sinv mc
  multiply mc mb md
  copy md tt
  let t=tt(1)
  let d(i)=t
enddo
set pi
  1:n
end
let pi=(pi-0.5)/n
sort d dd
invcdf pi q;
chis p.
plot q*dd
invcdf 0.5 chis;
chis p.
let ss=dd<chis
let t=sum(ss)/n
print t
if t>0.5
  note distribusi data multinormal
endif
if t<=0.5
  note distribusi data bukan multinormal
endif
endmacro

```

Lampiran 4. Program Grafik Pengendali BMOEWMA dan Identifikasi Variabel Penyebab *Out of Control*

```

clc, clear;
format short
x1=[54.0269;53.5579;53.5992;53.9038;53.8778;53.9521;50.1833;49.233
3;49.6808;53.1231;54.2307;53.4818;53.6893;53.65;57.1867;58.0778;57
.5667;53.6038;53.3571;53.3857;53.7364;53.4333;54.2385;53.1708;53.2
182;53.4214;54.0307;53.95;55.5857;57.57;57.4214;58.1964;57.5929;53
.8269;53.4333;54;53.5;53.725;53.5429;53.8179;53.0727;53.3462;53.44
62;53.5462;53.3846;54.3923;57.3143;57.7333;57.5375;54.0917;53.4;53
.2818;50.35;49.6143;51.8231;56.8111;57.2429;55.1927];
x2=[73.1538;75;74.5833;73.7692;72.8889;73;69.5;68.5556;70.1538;73.
2308;72;73.6364;72.6429;73.5;75.6667;75.3333;76.2667;73;73.2857;72
.5714;74.8182;73.6;74.2308;74;74.2727;72.5;72.3333;73.0833;76.5;77
.9286;77.2143;77.5714;76.7143;72.3077;72.5;72.8333;72.5;73.25;74.5
;74.3571;72.3571;72.5455;73.1538;73;72.1538;72.1538;72.5385;76.511
4;78;76.5;73.625;74.4545;68.5833;71.1429;72.9231;76.5556;76.7857;7
4.8571];
a=length(x1);
b=length(x2);
c1=sum(x1)/a;
c2=sum(x2)/b;
z=zeros(2,58);
lambda=0.1;

%--mencari data terpusat--%
for n=1:a
    xp1(n)=x1(n)-c1;
    xp2(n)=x2(n)-c2;
end
XP1=xp1'
XP2=xp2'

%--mencari vektor zi--%

z(1:2,1)=([lambda 0;0 lambda]*[XP1(1);XP2(1)])+([lambda 0;0
lambda]*[0;0])+([XP1(1)-0;XP2(1)-0]);
for i=2:a
    z(1:2,i)=([lambda 0;0 lambda]*[XP1(i);XP2(i)])+[1-lambda 0;0
1-lambda]*[z(1,i-1);z(2,i-1)]+[XP1(i)-XP1(i-1);XP2(i)-XP2(i-1)];
end
Z=z'

%--mencari matrix varians kovarians zi--%
%--s = matrix varians kovarians dari zi--%

k=cov(x1,x2);
k1=cov(x1);
k2=cov(x2);
rho=corr(x1,x2);
s=((lambda/(2-lambda))*k)+((2*lambda*(1-lambda)/(2-lambda))*rho*k)
s1=((lambda/(2-lambda))*k1)+((2*lambda*(1-lambda)/(2-
lambda))*rho*k1)

```

Lampiran 4. (Lanjutan)

```

s2=((lambda/(2-lambda))*k2)+((2*lambda*(1-lambda)/(2-
lambda))*rho*k2)

%--mencari nilai statistik Ti--%
%--mencari Nilai Kontribusi Relatif dari Masing-masing Variabel--%
%--d1=Nilai Kontribusi Relatif x1--%
%--d2=Nilai Kontribusi Relatif x2--%
in=inv(s)
c=length(z)
for j=1:c
    t(j)=z(1:2,j)'*inv(s)*z(1:2,j);
    t1(j)=z(2,j)'*inv(s2)*z(2,j);
    t2(j)=z(1,j)'*inv(s1)*z(1,j);
end
T=t'
T1=t1'
T2=t2'
d1=T-T1
d2=T-T2

%--mencari Batas Kendali Atas (BKA)--%

h=3.135;
pengamatan=1:1:58;

for q=1:1:length(pengamatan)
    bb(q,1)=h;
end
bb;
plot(pengamatan,T,'b*-')
hold on
plot(pengamatan,bb,'r-');
title('Grafik BMOEWMA lambda=0,1')
grid on
ylabel('Ti^2')
xlabel('pengamatan ke-')
text(length (pengamatan),bb(58),'h2','FontSize',12);

%--mencari titik out of control--%
%t adalah pengamatan yang out of control%

TT=find(t>h);
tt=TT'
keluar=length(TT)

%--identifikasi variabel penyebab out of control--%
%dj1 adalah nilai kontribusi variabel ke-1 untuk pengamatan ke-%
%dj2 adalah nilai kontribusi variabel ke-2 untuk pengamatan ke-%

dj1=find(d1>3.84146)
dj2=find(d2>3.84146)

```

Lampiran 5. Program Grafik Pengendali BEWMA

```

clc, clear;
format short
x1=[54.0269;53.5579;53.5992;53.9038;53.8778;53.9521;50.1833;49.233
3;49.6808;53.1231;54.2307;53.4818;53.6893;53.65;57.1867;58.0778;57
.5667;53.6038;53.3571;53.3857;53.7364;53.4333;54.2385;53.1708;53.2
182;53.4214;54.0307;53.95;55.5857;57.57;57.4214;58.1964;57.5929;53
.8269;53.4333;54;53.5;53.725;53.5429;53.8179;53.0727;53.3462;53.44
62;53.5462;53.3846;54.3923;57.3143;57.7333;57.5375;54.0917;53.4;53
.2818;50.35;49.6143;51.8231;56.8111;57.2429;55.1927];
x2=[73.1538;75;74.5833;73.7692;72.8889;73;69.5;68.5556;70.1538;73.
2308;72;73.6364;72.6429;73.5;75.6667;75.3333;76.2667;73;73.2857;72
.5714;74.8182;73.6;74.2308;74;74.2727;72.5;72.3333;73.0833;76.5;77
.9286;77.2143;77.5714;76.7143;72.3077;72.5;72.8333;72.5;73.25;74.5
;74.3571;72.3571;72.5455;73.1538;73;72.1538;72.1538;72.5385;76.511
4;78;76.5;73.625;74.4545;68.5833;71.1429;72.9231;76.5556;76.7857;7
4.8571];
a=length(x1);
b=length(x2);
c1=sum(x1)/a;
c2=sum(x2)/b;
z=zeros(2,58);
lambda=0.2;

%--mencari data terpusat--%
for n=1:a
    xp1(n)=x1(n)-c1;
    xp2(n)=x2(n)-c2;
end
XP1=xp1'
XP2=xp2'

%--mencari vektor zi--%

z(1:2,1)=[lambda 0;0 lambda]*[XP1(1);XP2(1)]+[1-lambda 0;0 1-
lambda]*[0;0];
for i=2:a
    z(1:2,i)=[lambda 0;0 lambda]*[XP1(i);XP2(i)]+[1-lambda 0;0
1-lambda]*[z(1,i-1);z(2,i-1)];
end
Z=z'

k=cov(x1,x2);
s=(lambda/(2-lambda))*k)

c=length(z)
for j=1:c
    t(j)=z(1:2,j)'\*inv(s)*z(1:2,j);

    end
T=t'

h=9.65;
pengamatan=1:1:58;

```

Lampiran 5. (Lanjutan)

```

for q=1:1:length(pengamatan)
    bb(q,1)=h;
end
bb;
plot(pengamatan,T,'b*-')
hold on
plot(pengamatan,bb,'r-');
title('Grafik BEWMA lambda=0,2')
grid on
ylabel('Mi')
xlabel('pengamatan ke-')
text(length (pengamatan),bb(58),'h1','FontSize',12);

```



Lampiran 6. Nilai Vektor BMOEWMA untuk Tiap-Tiap Z_i^* untuk $\lambda = 0,1$

i	Z_{1i}^*	Z_{2i}^*	I	Z_{1i}^*	Z_{2i}^*
1	-0,1290	-0,6386	32	4,4028	4,1482
2	-0,6437	1,3980	33	3,7039	3,1742
3	-0,5925	0,9264	34	-0,4642	-1,6925
4	-0,2527	0,0231	35	-0,8825	-1,4544
5	-0,2801	-0,9440	36	-0,2420	-1,0657
6	-0,1970	-0,8120	37	-0,7822	-1,4159
7	-4,3422	-4,6542	38	-0,5209	-0,5727
8	-5,3490	-5,6511	39	-0,7110	0,8111
9	-4,8130	-3,8458	40	-0,3975	0,6494
10	-0,9915	-0,4346	41	-1,2101	-1,5533
11	0,2239	-1,7954	42	-0,8954	-1,3285
12	-0,6136	0,0108	43	-0,7757	-0,6454
13	-0,3902	-1,0930	44	-0,6579	-0,8081
14	-0,4399	-0,1500	45	-0,8297	-1,7315
15	3,4450	2,2249	46	0,2858	-1,7164
16	4,3850	1,8289	47	3,4963	-1,2797
17	3,7777	2,8327	48	3,9245	3,0989
18	-0,6170	-0,7907	49	3,6756	4,7042
19	-0,8807	-0,4708	50	-0,1430	3,0103
20	-0,8399	-1,2544	51	-0,8948	-0,1767
21	-0,4460	1,2263	52	-1,0098	0,7425
22	-0,7756	-0,1280	53	-4,2200	-5,7180
23	0,1166	0,5652	54	-4,9867	-2,8458
24	-1,0601	0,3045	55	-2,5113	-0,8621
25	-0,9993	0,6006	56	2,9945	3,1387
26	-0,7684	-1,3556	57	3,4367	3,3601
27	-0,0936	-1,5269	58	1,1477	1,2077
28	-0,1844	-0,6893			
29	1,6139	3,0729			
30	3,7794	4,6136			
31	3,5806	3,7859			

Lampiran 7. Nilai Vektor BMOEWMA untuk Tiap-tiap Z_i^* untuk $\lambda = 0,2$

i	Z_{1i}^*	Z_{2i}^*	i	Z_{1i}^*	Z_{2i}^*
1	-0,1407	-0,6967	32	4,6191	4,3007
2	-0,6988	1,5420	33	3,7815	3,1795
3	-0,6267	0,9866	34	-0,8042	-2,1484
4	-0,2449	-0,0178	35	-1,1792	-1,7733
5	-0,2752	-1,0637	36	-0,4055	-1,2655
6	-0,1842	-0,8867	37	-0,9532	-1,5926
7	-4,7084	-5,0562	38	-0,6214	-0,6210
8	-5,6989	-6,0251	39	-0,7995	0,9063
9	-5,0043	-3,9380	40	-0,4298	0,7067
10	-0,7653	-0,1741	41	-1,3033	-1,7101
11	0,5127	-1,7170	42	-0,9288	-1,4174
12	-0,4712	0,2432	43	-0,7826	-0,6418
13	-0,2605	-1,0172	44	-0,6457	-0,8141
14	-0,3465	-0,0036	45	-0,8300	-1,8136
15	3,8680	2,5503	46	0,3933	-1,7670
16	4,7722	2,0266	47	3,8707	-1,2681
17	3,9912	3,0612	48	4,2334	3,5138
18	-0,8780	-0,9646	49	3,8696	5,1528
19	-1,1065	-0,5758	50	-0,3606	3,1754
20	-1,0083	-1,4075	51	-1,1290	-0,3566
21	-0,5375	1,3376	52	-1,1939	0,6882
22	-0,8753	-0,1750	53	-4,6457	-6,3508
23	0,1239	0,5901	54	-5,3583	-3,0394
24	-1,1633	0,2944	55	-2,5420	-0,8135
25	-1,0684	0,6159	56	3,4878	3,5459
26	-0,7961	-1,5269	57	3,8418	3,6771
27	-0,0503	-1,6684	58	1,2329	1,2376
28	-0,1597	-0,7150			
29	1,7962	3,3979			
30	4,1065	4,9857			
31	3,7920	3,9703			

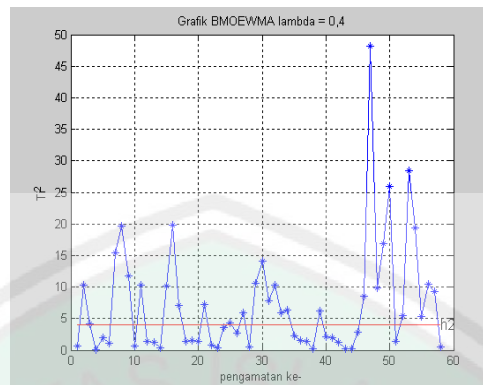
Lampiran 8. Nilai Statistik T_i^2

No	T_i^2 $\lambda = 0,1$	T_i^2 $\lambda = 0,2$	T_i^2 $\lambda = 0,4$	No	T_i^2 $\lambda = 0,1$	T_i^2 $\lambda = 0,2$	T_i^2 $\lambda = 0,4$
1	1,6959	1,0246	0,7238	41	4,1918	2,6025	2,0273
2	22,9323	14,0306	10,3296	42	3,3322	1,9673	1,2694
3	12,5845	7,2098	4,1527	43	1,0141	0,5246	0,2222
4	0,4343	0,1568	0,0160	44	1,1204	0,5811	0,2734
5	3,1135	2,1524	1,9807	45	7,5236	4,3500	2,7822
6	2,5450	1,6422	1,1426	46	22,8012	13,3522	8,5665
7	37,8937	22,6835	15,4762	47	125,5501	74,0241	48,2098
8	56,3233	32,4914	19,6215	48	26,1696	15,3374	9,8157
9	39,2461	21,6223	11,7006	49	38,4051	23,7929	16,8968
10	2,5860	1,1572	0,6306	50	58,0769	36,4836	25,9731
11	23,3803	14,0830	10,3404	51	3,2946	2,1354	1,3935
12	2,2664	1,4144	1,4456	52	16,6674	9,7950	5,4793
13	3,7330	1,9782	1,2315	53	58,2292	36,6457	28,3841
14	0,6091	0,3500	0,3420	54	52,4230	30,8896	19,4164
15	22,5938	14,2353	10,1539	55	19,7661	10,7399	5,2834
16	52,5713	31,1792	19,7396	56	17,4623	11,5786	10,5110
17	24,7052	13,8705	7,0343	57	21,2743	13,2603	9,3152
18	1,0857	0,8174	1,4539	58	2,5789	1,4266	0,5422
19	1,7299	1,4188	1,5842				
20	2,9852	1,8223	1,3583				
21	15,4999	9,8614	7,2521				
22	2,6268	1,5929	0,7734				
23	1,3179	0,7244	0,3164				
24	10,3206	6,0013	3,5796				
25	13,9294	7,8437	4,3732				
26	3,9969	2,7663	2,6961				
27	12,4437	7,9573	5,9509				
28	1,7519	1,0376	0,4733				
29	21,9302	13,5376	10,6199				
30	36,4791	21,6098	14,1138				
31	25,2671	14,1958	7,7552				
32	33,9191	18,8135	10,2514				
33	23,1502	12,2357	5,8962				
34	10,4291	7,0931	6,3018				
35	4,3408	3,0447	2,3080				
36	4,5108	2,7188	1,4909				
37	4,4579	2,6735	1,3946				
38	0,5674	0,3607	0,1552				
39	12,5766	8,0188	6,1597				
40	5,9842	3,5812	2,1135				

Lampiran 8. (Lanjutan)

No	T_i^2 $\lambda = 0,6$	T_i^2 $\lambda = 0,8$	No	T_i^2 $\lambda = 0,6$	T_i^2 $\lambda = 0,8$
1	0,6626	0,6751	41	2,3497	2,8946
2	9,9940	10,8507	42	0,9829	0,6488
3	2,6759	1,5468	43	0,1645	0,2115
4	0,1131	0,3417	44	0,1821	0,1698
5	2,0356	1,9461	45	2,3497	2,2673
6	0,7750	0,4432	46	6,9237	6,1398
7	13,6020	13,4498	47	39,7620	36,2676
8	14,4370	11,2146	48	8,6420	9,5830
9	7,8261	5,8700	49	14,3651	12,2148
10	0,8402	1,1924	50	21,3707	18,1448
11	10,2591	11,1600	51	1,2495	1,7853
12	2,1043	3,5395	52	3,7276	3,4509
13	1,2321	1,6322	53	27,2149	28,4142
14	0,4272	0,5780	54	16,2671	16,9635
15	9,3183	9,7710	55	3,2880	2,0753
16	15,5099	13,0602	56	11,3708	12,2065
17	4,2291	2,9546	57	6,9452	4,7091
18	2,4741	3,5101	58	0,0681	0,0322
19	1,4547	1,0322			
20	1,1485	1,1395			
21	6,7813	7,3476			
22	0,3395	0,2046			
23	0,1999	0,1951			
24	2,9322	2,9446			
25	3,1647	2,5269			
26	3,2277	4,0645			
27	5,0011	4,1008			
28	0,1205	0,0061			
29	10,7748	11,4499			
30	11,0243	8,9141			
31	4,8691	3,1956			
32	7,0228	5,6003			
33	3,5696	2,4650			
34	6,6631	7,2797			
35	1,5824	0,8425			
36	0,8694	0,6443			
37	0,8174	0,6074			
38	0,1033	0,1179			
39	5,6837	5,5631			
40	1,2501	0,6260			

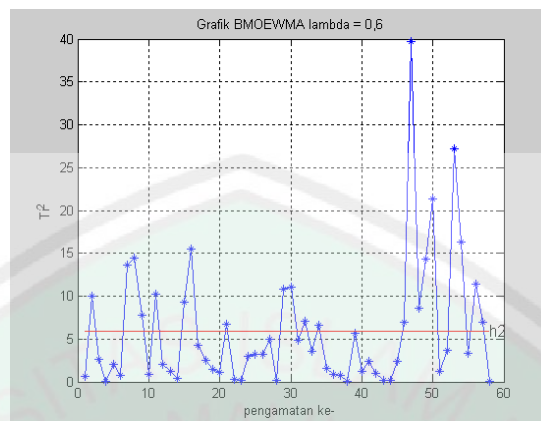
Lampiran 9. Pengamatan *Out of Control* untuk $\lambda = 0,4$



Gambar Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,4$

Pengamatan ke	Variabel		Variabel penyebab tidak terkendali
	X_1	X_2	
2	8.7643	10.044	X_1, X_2
3	3.6642	3.9605	X_2
7	0.4383	2.3227	-
8	0.6972	2.6628	-
9	5.4567	0.3952	X_1
11	9.2728	9.7571	X_1, X_2
15	6.026	0.9598	X_1
16	17.7105	7.7568	X_1, X_2
17	2.3664	0.0189	-
21	6.0129	7.1093	X_1, X_2
25	4.1818	3.8417	X_1, X_2
27	4.4065	5.9446	X_1, X_2
29	2.8677	8.5482	X_2
30	0.0162	4.5098	X_2
31	0.4248	0.8175	-
32	1.8772	0.1586	-
33	2.0508	0.024	-
34	1.6239	5.0019	X_2
39	5.4028	5.8951	X_1, X_2
46	47.5939	38.9515	X_1, X_2
47	1.1726	0.4427	-
48	1.6284	10.0798	X_2
49	21.6454	25.4202	X_1, X_2
50	47.5939	38.9515	X_1, X_2
52	5.3745	4.5347	X_1, X_2
53	2.0943	15.795	X_2
54	15.1951	4.774	X_1, X_2
55	5.2178	3.202	X_1
56	1.2654	0.4678	-
57	1.4883	0.224	-

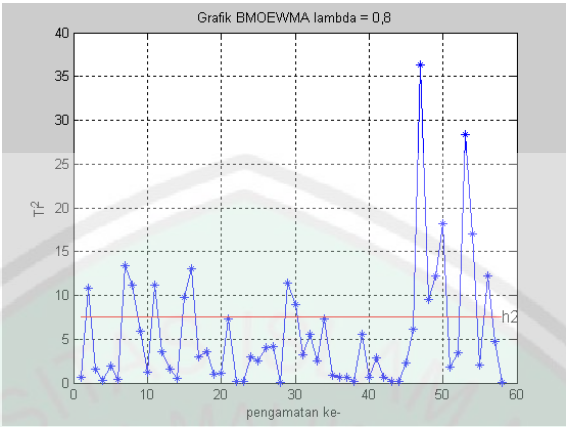
Lampiran 10. Pengamatan *Out of Control* untuk $\lambda = 0,6$



Gambar Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,6$

Pengamatan ke	Variabel		Variabel penyebab tidak terkendali
	X_1	X_2	
2	8.4195	9.7443	X_1, X_2
7	0.5987	1.6481	-
8	0.6122	1.7868	-
9	4.5995	0.7132	X_1
11	9.3759	9.5339	X_1, X_2
15	5.6561	0.9575	X_1
16	14.2621	6.6867	X_1, X_2
21	5.2809	6.741	X_1, X_2
29	3.1521	8.8825	X_2
30	0,0000	3.1624	-
32	1.5773	0.0375	-
34	1.0299	4.5398	X_2
46	5.9203	6.7106	X_1, X_2
47	39.4167	31.4915	X_1, X_2
48	0.0433	1.9575	-
49	2.4858	10.1183	-
50	19.2152	20.1262	X_1, X_2
53	3.0025	16.8443	X_2
54	14.2961	5.9322	X_1, X_2
56	2.0251	0.1947	-
57	1.2789	0.1052	-

Lampiran 11. Pengamatan *Out of Control* untuk $\lambda = 0,8$



Gambar Grafik Pengendali BMOEWMA untuk $\lambda = 0,8$

Pengamatan ke	Variabel		Variabel penyebab tidak terkendali
	X_1	X_2	
2	9.0676	10.61	X_1, X_2
7	0.8259	1.3029	-
8	0.4922	1.3611	-
11	9.9462	10.576	X_1, X_2
15	6.1405	1.1388	X_1
16	12.3246	6.2543	X_1, X_2
29	3.4775	9.5444	X_2
30	0.0595	1.9385	-
47	36.0547	28.2282	X_1, X_2
48	0.4047	4.6811	X_2
49	2.7536	9.3126	X_2
50	17.1956	16.1706	X_1, X_2
53	3.9518	18.7751	X_1, X_2
54	16.4099	9.1062	X_1, X_2
56	2.8896	0.0421	-

Lampiran 12. Nilai Vektor BEWMA untuk Tiap-Tiap Z_i pada $\lambda = 0,1$

i	Z_{1i}	Z_{2i}	i	Z_{1i}	Z_{2i}
1	-0,0117	-0,0581	32	0,8977	1,0367
2	-0,0692	0,0743	33	1,1528	1,2310
3	-0,1168	0,1518	34	1,0058	0,9652
4	-0,1291	0,1401	35	0,8341	0,7453
5	-0,1428	0,0415	36	0,7363	0,5806
6	-0,1478	-0,0361	37	0,5983	0,3991
7	-0,5291	-0,4559	38	0,4965	0,3108
8	-0,9672	-0,9282	39	0,3867	0,3563
9	-1,3169	-1,1934	40	0,3154	0,3829
10	-1,2873	-1,1244	41	0,1768	0,2069
11	-1,1499	-1,1854	42	0,0793	0,0673
12	-1,1011	-1,0767	43	0,0016	0,0025
13	-1,0365	-1,0782	44	-0,0584	-0,0712
14	-0,9823	-0,9938	45	-0,1285	-0,2221
15	-0,5798	-0,7012	46	-0,0908	-0,3580
16	-0,1284	-0,4712	47	0,2353	-0,4417
17	0,2267	0,2267	48	0,5706	-0,1199
18	0,1500	-0,2272	49	0,8529	0,3187
19	0,0563	-0,2493	50	0,7624	0,5634
20	-0,0252	-0,3407	51	0,6117	0,4961
21	-0,0635	-0,1982	52	0,4643	0,5185
22	-0,1282	-0,1919	53	0,0385	-0,0485
23	-0,1059	-0,1230	54	-0,4184	-0,3028
24	-0,1927	-0,0842	55	-0,6086	-0,3536
25	-0,2660	-0,0219	56	-0,2811	-0,0361
26	-0,3117	-0,1432	57	0,0569	0,2726
27	-0,2919	-0,2690	58	0,1561	0,3576
28	-0,2821	-0,3072			
29	-0,1097	0,0001			
30	0,2438	0,4195			
31	0,5472	0,7256			

Lampiran 13. Nilai Vektor BEWMA untuk Tiap-Tiap Z_i pada $\lambda = 0,2$

i	Z_{1i}	Z_{2i}	i	Z_{1i}	Z_{2i}
1	-0,0234	-0,1161	32	1,7850	1,9822
2	-0,1360	0,1602	33	2,1178	2,1817
3	-0,2178	0,2980	34	1,6308	1,4601
4	-0,2223	0,2453	35	1,1624	0,9212
5	-0,2311	0,0272	36	0,9011	0,5567
6	-0,2233	-0,1251	37	0,5921	0,1985
7	-0,9708	-0,9470	38	0,3898	0,0619
8	-1,7588	-1,7934	39	0,1916	0,2027
9	-2,2997	-2,1508	40	0,0880	0,2867
10	-2,0440	-1,8214	41	-0,1439	-0,0461
11	-1,6179	-1,8040	42	-0,2747	-0,2747
12	-1,4268	-1,4628	43	-0,3593	-0,3359
13	-1,2324	-1,3885	44	-0,4071	-0,4156
14	-1,0847	-1,1577	45	-0,4775	-0,6486
15	-0,2593	-0,5397	46	-0,3324	-0,8350
16	0,5793	-0,1120	47	0,3681	-0,9072
17	1,1480	0,4169	48	1,0123	-0,1703
18	0,8103	0,1866	49	1,4885	0,7169
19	0,4908	0,0596	50	1,1803	1,1266
20	0,2410	-0,1849	51	0,7954	0,8794
21	0,1112	0,0688	52	0,4639	0,8476
22	-0,0532	0,0282	53	-0,3877	-0,3522
23	-0,0237	0,1218	54	-1,2161	-0,8000
24	-0,2136	0,1506	55	-1,4371	-0,8023
25	-0,3561	-0,3561	56	-0,6163	-0,0776
26	-0,4294	-0,0644	57	0,1267	0,5482
27	-0,3662	-0,3317	58	0,3111	0,6631
28	-0,3318	-0,3956			
29	0,0229	0,2366			
30	0,7035	1,0282			
31	1,2182	1,5185			

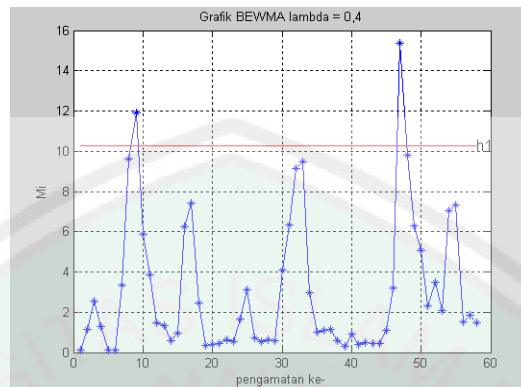
Lampiran 14. Nilai Statistik M_i

No	M_i $\lambda = 0,1$	M_i $\lambda = 0,2$	M_i $\lambda = 0,4$	No	M_i $\lambda = 0,1$	M_i $\lambda = 0,2$	M_i $\lambda = 0,4$
1	0,0353	0,0669	0,1189	41	0,1842	0,0807	0,3984
2	0,2813	0,5685	1,1437	42	0,0267	0,1657	0,4954
3	0,9873	1,7266	2,5273	43	0,0000	0,2681	0,4560
4	0,9902	1,4158	1,2962	44	0,0219	0,3724	0,4503
5	0,4742	0,4519	0,1273	45	0,2655	0,8948	1,1094
6	0,2075	0,1274	0,1351	46	1,2202	2,4106	3,1899
7	1,1904	2,0210	3,3641	47	6,3242	10,7149	15,3749
8	4,1779	6,9419	9,6274	48	6,7171	9,3910	9,8011
9	7,4814	10,9876	11,9155	49	5,4264	6,4418	6,2739
10	7,0647	8,4833	5,8833	50	2,5517	2,9350	5,0854
11	6,3476	6,6838	3,8655	51	1,5923	1,5926	2,3026
12	5,5007	4,5979	1,4577	52	1,1652	1,9209	3,4627
13	5,2164	3,9491	1,3327	53	0,1034	0,3075	2,0860
14	4,5306	2,8033	0,5958	54	0,7769	3,3122	7,0358
15	2,1191	0,8700	0,9654	55	1,9367	5,2932	7,3072
16	2,0421	3,1963	6,2603	56	0,9282	2,1243	1,5038
17	2,1595	4,7479	7,4364	57	0,7685	1,4132	1,8416
18	1,9527	3,0326	2,4433	58	0,8712	1,3393	1,4914
19	1,3248	1,3583	0,3739				
20	1,5264	1,1743	0,3769				
21	0,3311	0,0291	0,4379				
22	0,1762	0,0431	0,6402				
23	0,0652	0,1429	0,5566				
24	0,2467	0,8592	1,6692				
25	0,9028	2,2136	3,1339				
26	0,6200	0,9874	0,7268				
27	0,3705	0,2740	0,5487				
28	0,4126	0,3191	0,6100				
29	0,1775	0,3353	0,5822				
30	0,9434	2,3555	4,0702				
31	2,3353	4,7353	6,3461				
32	4,6286	8,0798	9,1650				
33	6,6896	10,1900	9,4964				
34	4,5178	5,4088	2,9581				
35	2,9852	2,7364	1,0106				
36	2,3206	1,9104	1,0785				
37	1,6746	1,3305	1,1461				
38	1,2115	0,8007	0,5700				
39	0,6503	0,0864	0,3161				
40	0,6323	0,3359	0,9298				

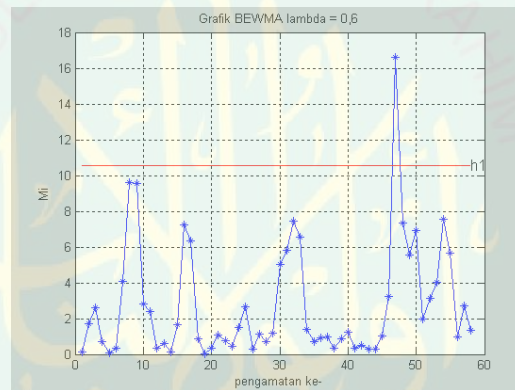
Lampiran 14. (Lanjutan)

No	M_i $\lambda = 0,6$	M_i $\lambda = 0,8$	No	M_i $\lambda = 0,6$	M_i $\lambda = 0,8$
1	0,1560	0,1783	41	0,3395	0,3391
2	1,6884	2,1578	42	0,5013	0,4735
3	2,5791	2,1168	43	0,3104	0,1844
4	0,7297	0,2695	44	0,2875	0,1792
5	0,0767	0,2207	45	1,0223	0,9264
6	0,3165	0,3584	46	3,2495	2,9789
7	4,0980	4,2860	47	16,5876	15,7856
8	9,6255	8,2249	48	7,3400	4,7088
9	9,5596	6,7467	49	5,5299	4,9500
10	2,8084	1,0676	50	6,8986	7,1521
11	2,3925	2,3084	51	1,9743	1,0262
12	0,3283	0,1234	52	3,1335	2,3017
13	0,5987	0,4349	53	4,0185	5,4385
14	0,1572	0,0823	54	7,5439	6,6659
15	1,6599	2,1072	55	5,6708	3,7504
16	7,2617	6,8696	56	0,9947	1,3916
17	6,3563	4,3817	57	2,7252	2,9163
18	0,8507	0,1565	58	1,3351	0,7579
19	0,0078	0,1239			
20	0,3308	0,3650			
21	1,0528	1,3976			
22	0,7741	0,5447			
23	0,4336	0,2397			
24	1,5160	1,2832			
25	2,6648	2,0884			
26	0,3115	0,2689			
27	1,1159	1,4339			
28	0,6852	0,4520			
29	1,1895	1,9035			
30	5,0103	4,8840			
31	5,7996	4,3015			
32	7,4263	5,3780			
33	6,5765	4,2263			
34	1,3759	1,0089			
35	0,6925	0,6369			
36	0,9356	0,6992			
37	0,9922	0,6949			
38	0,3289	0,1395			
39	0,8430	1,2078			
40	1,2139	1,0225			

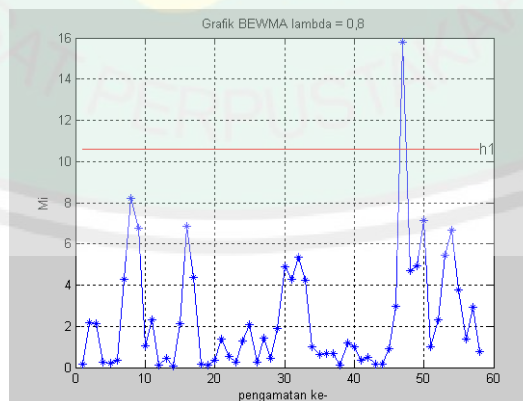
Lampiran 15. Gambar Grafik Pengendali BEWMA



Gambar Grafik Pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,4$



Gambar Grafik Pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,6$



Gambar Grafik Pengendali BEWMA untuk $\lambda = 0,8$

Lampiran 16. Nilai ARL untuk Diagram Kendali MEWMA dan MOEWMA

	χ^2 chart	MEWMA Chart				
$\lambda =$		0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
Shift	h	h_1				
	10,6	8,66	9,65	10,29	10,53	10,58
ARL values for p=2						
0	200,	200	201	199	200	200
0,5	116,	28,1	35,10	51,9	73,6	95,5
1,0	42,	10,2	10,10	13,2	19,3	28,1
1,5	15,8	6,12	5,50	5,74	7,24	10,3
2,0	6,9	4,41	3,80	3,54	3,86	4,75
2,5	3,5	3,51	2,91	2,55	2,53	2,75
3,0	2,2	2,92	2,42	2,04	1,88	1,91

MMOEWMA Chart						
$\lambda =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,8
$h_2 =$	3,135	3,742	4,223	4,705	5,85	7,561
Shift	ARL values for p=2					
0	200	200	200	200	200	200
0,5	21,1	24,76	29,9	29,9	51,6	74,98
1,0	8,12	7,88	8,65	8,65	14,93	23,99
1,5	4,78	4,11	4,06	4,06	5,75	8,92
2,0	3,29	2,64	2,44	2,44	2,92	4,12
2,5	2,45	1,87	1,69	1,69	1,86	2,36
3,0	1,90	1,43	1,32	1,32	1,41	1,63

(Sumber: Patel, A.K. Dan Divecha, 2013)

Lampiran 17. Tabel Distribusi *Chi-Square* untuk d.f. = 1 – 60

df	pr	0,05	df	pr	0,05
1		3,84146	31		44,9853
2		5,99146	32		46,1943
3		7,81473	33		47,3999
4		9,48773	34		48,6024
5		11,0705	35		49,8018
6		12,5916	36		50,9985
7		14,0671	37		52,1923
8		15,5073	38		53,3835
9		16,919	39		54,5722
10		18,307	40		55,7585
11		19,6751	41		56,9424
12		21,0261	42		58,124
13		22,362	43		59,3035
14		23,6848	44		60,4809
15		24,9958	45		61,6562
16		26,2962	46		62,8296
17		27,5871	47		64,0011
18		28,8693	48		65,1708
19		30,1435	49		66,3386
20		31,4104	50		67,5048
21		32,6706	51		68,6693
22		33,9244	52		69,8322
23		35,1725	53		70,9935
24		36,415	54		72,1532
25		37,6525	55		73,3115
26		38,8851	56		74,4683
27		40,1133	57		75,6237
28		41,3371	58		76,7778
29		42,557	59		77,9305
30		43,773	60		79,0819

(Sumber: *Microsoft Excel* 2007)

Lampiran 18. Tabel r untuk d.f. = 51 – 90

df	Tingkat signifikansi untuk uji satu arah				
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005
	Tingkat signifikansi untuk uji dua arah				
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
51	0,2284	0,2706	0,3188	0,3509	0,4393
52	0,2262	0,2681	0,3158	0,3477	0,4354
53	0,2241	0,2656	0,3129	0,3445	0,4317
54	0,2221	0,2632	0,3102	0,3415	0,4280
55	0,2201	0,2609	0,3074	0,3385	0,4244
56	0,2181	0,2586	0,3048	0,3357	0,4210
57	0,2162	0,2564	0,3022	0,3328	0,4176
58	0,2144	0,2542	0,2997	0,3301	0,4143
59	0,2126	0,2521	0,2972	0,3274	0,4110
60	0,2108	0,2500	0,2948	0,3248	0,4079
61	0,2091	0,2480	0,2925	0,3223	0,4048
62	0,2075	0,2461	0,2902	0,3198	0,4018
63	0,2058	0,2441	0,2880	0,3173	0,3988
64	0,2042	0,2423	0,2858	0,3150	0,3959
65	0,2027	0,2404	0,2837	0,3126	0,3931
66	0,2012	0,2387	0,2816	0,3104	0,3903
67	0,1997	0,2369	0,2796	0,3081	0,3876
68	0,1982	0,2352	0,2776	0,3060	0,3850
69	0,1968	0,2335	0,2756	0,3038	0,3823
70	0,1954	0,2319	0,2737	0,3017	0,3798
71	0,1940	0,2303	0,2718	0,2997	0,3773
72	0,1927	0,2287	0,2700	0,2977	0,3748
73	0,1914	0,2272	0,2682	0,2957	0,3724
74	0,1901	0,2257	0,2664	0,2938	0,3701
75	0,1888	0,2242	0,2647	0,2919	0,3678
76	0,1876	0,2227	0,2630	0,2900	0,3655
77	0,1864	0,2213	0,2613	0,2882	0,3633
78	0,1852	0,2199	0,2597	0,2864	0,3611
79	0,1841	0,2185	0,2581	0,2847	0,3589
80	0,1829	0,2172	0,2565	0,2830	0,3568
81	0,1818	0,2159	0,2550	0,2813	0,3547
82	0,1807	0,2146	0,2535	0,2796	0,3527
83	0,1796	0,2133	0,2520	0,2780	0,3507
84	0,1786	0,2120	0,2505	0,2764	0,3487
85	0,1775	0,2108	0,2491	0,2748	0,3468
86	0,1765	0,2096	0,2477	0,2732	0,3449
87	0,1755	0,2084	0,2463	0,2717	0,3430
88	0,1745	0,2072	0,2449	0,2702	0,3412
89	0,1735	0,2061	0,2435	0,2687	0,3393

Sumber : (<https://rufiismada.files.wordpress.com/2012/10/tabel-r.pdf>)

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Jazairi, A.B.J. 2009. *Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar*. Terjemahan Fityan Amaliy dan Edi Suwanto. Jakarta: Darus Sunnah Press.
- Al-Maragi, A.M. 1993. *Terjemah Tafsir Al-Maragi*. Terjemahan Abu Bakar B. dkk. Semarang: Toha Putra.
- Anonim. 2015. Tabel r. (Online), (<https://rufiismada.files.wordpress.com/2012/10/tabel-r.pdf>), diakses Selasa 20 Januari 2015 21:30.
- Choeroni, M. 2013. *Grafik Pengendali Rata-Rata Bergerak Dalam Pengendalian Kecacatan Per Unit untuk Data yang Berautokorelasi*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Dewantara, C.R. & Mashuri, M. 2013. Penerapan *Multivariate Exponentially Weighted Moving Average Chart* Pada Proses Pembuatan Boiler di PT. ALSTOM ESI Surabaya. (Online), (<http://digilib.its.ac.id/public/ITS-paper-28920-1309100101-Paper.pdf>), diakses Selasa 20 Mei 2014 22:00.
- Dudewich E.J & Mishra, S.N. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Terjemahan RK Sembiring. Bandung: ITB Bandung.
- Montgomery, D.C.. 1990. *Pengantar Pengendalian Kualitas Statistik*. Terjemahan Zanzawi Soejoeti. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Muhassinah, M. 2011. *Pengontrolan Kualitas Proses Produksi Kertas di PT. Kertas Leces (Persero) dengan Grafik Pengendali Multivariate Hotelling T^2 Individual*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Negeri Malang.
- Patel, A.K. & Divecha, J. 2011. Modified Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) Control Scheme for an Analytical Process Data. *Journal of Chemical Engineering and Material Science*, Vol. 2(1), 12-20.
- Patel, A.K. & Divecha, J. 2013. Modified MEWMA Control Scheme for an Analytical Proses Data. *Global Journal of Computer Science and Technology Software & Data Engineering*, Vol. 13(3), 23-33.
- Purcell E.J. & Varberg D. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 2*. Terjemahan I Nyoman S. dkk. Jakarta: Erlangga.
- Purwanto. 2011. *Statistika untuk Penelitian*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
- Saida, L. 2011. *Analisis Penerapan Bagan Pengendali Jumlah Kumulatif Untuk Mendeteksi Pergeseran Rata-rata Proses*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

- Setiastuti, D. 2011. *Penerapan Grafik Pengendali MEWMA pada Analisa Harian Kualitas Air Produksi di Instalasi Penjernihan Air Minum (IPAM) Ngayol II Kota Surabaya*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: Universitas Negeri Malang.
- Shihab, M.Q. 2002. *Tafsir Al-Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Quran*. Jakarta: Lentera Hati.
- Sulistyawati, S. 2010. *Penerapan Diagram MEWMA Baru pada Proses Blending Bagian Primary di Sebuah Perusahaan Rokok di Surabaya*. Skripsi tidak dipublikasikan. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Suryaningtyas, W. & Mashuri, M. 2013. *Interpretasi Sinyal Out of Control pada Diagram Kontrol Multivariat*. (Online), (<http://digilib.its.ac.id/public/ITS-Master-13378-Paper.pdf>), diakses Selasa 20 Mei 2014 22:00.
- Tyagita, R.P.V. & Mashuri, M. 2011. *Pengontrolan Kualitas Proses Produksi Minyak Lumas dengan Menggunakan Diagram Kontrol Kombinasi MEWMA*. (Online), (<http://digilib.its.ac.id/public/ITS-Master-13381-Paper.pdf>), diakses Selasa 20 Mei 2014 22:00.