

FAKTORISASI PADA GRAF KOMPLIT

SKRIPSI

Oleh:
VERA MANDAILINA
NIM: 04510041



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009**

FAKTORISASI PADA GRAF KOMPLIT

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
VERA MANDAILINA
NIM 04510041**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2009**

FAKTORISASI PADA GRAF KOMPLIT

SKRIPSI

Oleh:
VERA MANDAILINA
NIM 04510041

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 6 Januari 2009

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP: 150 300 415

Achmad Nashichuddin, MA
NIP. 150 302 531

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

FAKTORISASI PADA GRAF KOMPLIT

SKRIPSI

Oleh:
VERA MANDAILINA
NIM 04510041

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal 19 Januari 2009

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

- | | | | |
|------------------|---|---|---|
| 1. Penguji Utama | : <u>Drs. H. Turmudi, M.Si</u>
NIP. 150 209 630 | (|) |
| 2. Ketua | : <u>Evawati Alisah, M. Pd</u>
NIP. 150 291 271 | (|) |
| 3. Sekretaris | : <u>Wahyu Henky Irawan, M.Pd</u>
NIP: 150 300 415 | (|) |
| 4. Anggota | : <u>Achmad Nashichuddin, MA</u>
NIP. 150 302 531 | (|) |

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : VERA MANDAILINA

NIM : 04510041

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Januari 2009

Yang membuat pernyataan

Vera Mandailina
NIM. 04510041

MOTTO

||

||

“kamu menginginkan sebuah keberhasilan, tapi kamu tidak pernah mau menjalani prosesnya.
Ketahulah bahwa sesungguhnya kapal laut itu tidak akan pernah berlayar diatas daratan” (wise word)

“hidup adalah perjuangan, maka jangan pernah berhenti berjuang hari ini, karena kita tidak tahu apa yang akan terjadi besok”
(penulis)



*Untuk
Bapak M.na'im, SPt, Ibu Ratna
Dan Adikku Wahyu firmana*

KATA PENGANTAR



Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul “Faktorisasi Pada Graf Komplit”. Salawat serta salam tak lupa penulis curahkan kepada junjungan besar Nabi Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini hingga selesai. Oleh karena itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang .
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Bapak Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Achmad Nashichuddin, MA selaku dosen pembimbing agama, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf UIN Malang.

7. Kedua orang tua tercinta, Bapak mama, yang selalu membimbing, mencintai dan menjadi motivator terbaik untuk penulis. Terima kasih yang sebesar-besarnya atas segala perjuangan bapak dan mama untuk penulis. Kalian adalah orang tua yang terbaik yang dikirim Allah SWT dari surga untuk penulis.
8. Adik tersayang, yang memotivasi penulis untuk menjadi manusia yang lebih baik. Terima kasih adik sayang, kamu adalah saudara yang terbaik yang pernah penulis miliki.
9. Teman-teman Matematika angkatan 2004, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan. Khususnya untuk upiq, yang mengajarkan penulis untuk tetap tegar menghadapi hidup (aq salut padamu teman!). Imamah dan Jalil, terima kasih atas bimbingannya. Rina dan Nirwan, teman seperjuangan, terima kasih sudah menemani bimbingan dan memberi masukan pada penulis.
10. Warga Gajayana 107, terima kasih atas doa, pengertian dan kenangan kalian. Khususnya untuk Nia dan Lina, terima kasih atas dorongan semangatnya (cepat selesai ya! SEMANGAT!).
11. Ibu Amie Oejoto, mbak Ririn dan keluarga, terima kasih sudah menjadi keluarga yang baik selama penulis kuliah di Malang.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan untuk membantu penulis ucapkan terima kasih.

Penulisan skripsi ini bermaksud untuk meningkatkan pengetahuan dan wawasan kepada khalayak umum khususnya mahasiswa jurusan matematika. Penulis menyadari tak ada gading yang tak retak, begitu pula dalam tulisan skripsi ini masih banyak kekurangan didalamnya. Oleh karena itu, perlu penyempurnaan kembali yang mungkin nantinya dapat disempurnakan oleh pembaca yang tertarik mengkaji tentang keterhubungan.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amien.

Malang, 17 Januari 2009

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR TABEL	vii
ABSTRAK	ix
BAB I : PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	7
BAB II : KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Graf	8
2.1.1 Definisi Graf	8
2.1.2 Derajat Suatu Titik	9
2.1.3 Subgraf	12
2.1.4 Operasi Graf	14
2.1.5 Jalan dan Lintasan	15
2.1.6 Sikel Hamilton	17
2.1.7 Graf Komplit	18
2.1.8 Matching	19
2.1.9 Faktorisasi	19
2.2 Rukun Iman	20
2.2.1 Pengertian Iman	20
2.2.2 Rukun Iman	21
BAB III: PEMBAHASAN	
3.1 Faktorisasi Pada Graf Komplit K_n	35
3.1.1 Graf komplit genap (K_{2n}) difaktorkan menggunakan 1-faktor	35
3.2.2 Graf komplit ganjil (K_{2n+1}) difaktorkan menggunakan sikel Hamilton	52

3.2 Rukun Iman dalam Kajian Teori Graf	62
--	----

BAB IV: PENUTUP

4.1 Kesimpulan	67
4.2 Saran	67

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN



DAFTAR GAMBAR

No.	Gambar	Halaman
2.1	Graf G	8
2.2	Graf H	9
2.3	Graf G	10
2.4	Graf dengan Subgraf dan bukan Subgraf	12
2.5	Graf dengan Subgraf Terinduksinya	13
2.6	Subgraf Terinduksi Titik dan Terinduksi Sisi	13
2.7	Graf G dan Subgraf Merentanganya	14
2.8	Gabungan Graf	14
2.9	Penjumlahan Dua Graf	15
2.10	Graf Hasil Kali Kartesius	15
2.11	Jalan dan Lintasan	16
2.12	Graf G dan Sikel Hamiltonnya (G_1)	18
2.13	Graf Komplit	18
2.14	Matching dan Maksimum Matching	19
2.15	Graf G dan Faktor-faktornya	20
3.1	Graf K_2	35
3.2	Faktor dari Graf K_2	35
3.3	Graf K_4	36
3.4	Faktor Pertama dari Graf K_4	36
3.5	Faktor Kedua dari Graf K_4	37
3.6	Faktor Ketiga dari Graf K_4	37
3.7	Graf K_6	38
3.8	Faktor Pertama dari Graf K_6	39
3.9	Faktor Kedua dari Graf K_6	40
3.10	Faktor Ketiga dari Graf K_6	41
3.11	Faktor keempat dari Graf K_6	42
3.12	Faktor Kelima dari Graf K_6	43
3.13	Graf K_8	44
3.14	Faktor Pertama dari Graf K_8	45
3.15	Faktor Kedua dari Graf K_8	46
3.16	Faktor Ketiga dari Graf K_8	47
3.17	Faktor Keempat dari Graf K_8	48
3.18	Faktor Kelima dari Graf K_8	49
3.19	Faktor Keenam dari Graf K_8	50
3.20	Faktor Ketujuh dari Graf K_8	51
3.21	Graf K_2	55
3.22	Graf K_3	57

3.23 Graf K_5	58
3.24 Graf K_7	60
3.25 Graf K_9	62
3.26 Graf K_3	66



DAFTAR TABEL

No.	Tabel	Halaman
3.1	Jumlah Faktor Graf K_{2n} Menggunakan 1-faktor.....	52
3.2	Jumlah Faktor Graf K_{2n+1} Menggunakan Sikel Hamilton.....	61



ABSTRAK

Mandailina, Vera. 2009. **Faktorisasi pada Graf Komplit**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd (II) Achmad Nashichuddin, MA

Kata Kunci: Faktor, Faktorisasi, Graf komplit.

Teori graf adalah salah satu cabang ilmu matematika, yang didalamnya terdapat bahasan tentang faktorisasi pada graf G . Kemudian dalam skripsi ini penulis mengembangkannya dengan membahas faktorisasi graf komplit. Masalah yang dibahas dalam skripsi ini dirumuskan sebagai berikut yaitu: bagaimana pola faktorisasi graf komplit yang berorder genap menggunakan 1-faktor serta bagaimana pola faktorisasi graf komplit yang berorder ganjil menggunakan siklus Hamilton. Sedangkan tujuan penulisan ini adalah mengetahui pola faktorisasi graf komplit yang berorder genap menggunakan 1-faktor dan mengetahui pola faktorisasi graf komplit yang berorder ganjil menggunakan siklus Hamilton. Kemudian permasalahan yang dikaji dibatasi pada faktorisasi dalam graf komplit hanya dengan menggunakan 1-faktor dan siklus Hamilton.

Adapun langkah-langkah dalam menentukan pola faktorisasi pada graf komplit adalah sebagai berikut:

- a. Menggambar beberapa contoh graf komplit, dengan memisahkan antara graf komplit yang berorder genap dan graf komplit yang berorder ganjil.
- b. Mencari pola pada faktorisasi graf komplit yang berorder genap menggunakan 1-faktor kemudian menghasilkan teorema dan dibuktikan.
- c. Mencari pola pada faktorisasi graf komplit yang berorder ganjil menggunakan siklus Hamilton kemudian menghasilkan teorema dan dibuktikan.

Dalam menjelaskan faktorisasi pada graf komplit perlu diketahui definisi-definisi dari graf komplit, *matching*, faktor dari graf G , dan faktorisasi dari graf G .

Dalam kajian ini, penulis mengkaji faktorisasi pada graf komplit. Pembahasan faktorisasi pada graf komplit dibagi menjadi dua bagian yaitu: (1) Graf komplit yang berorder genap difaktorkan menggunakan 1-faktor, (2) Graf komplit yang berorder ganjil difaktorkan menggunakan siklus Hamilton.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh pola jumlah faktor-faktor pada Graf komplit sebagai berikut: (1) Suatu Graf komplit yang berorder genap (K_{2n}) jika difaktorkan menggunakan 1-faktor, diperoleh pola yaitu: $K_{2n} = 2n - 1$, untuk $n = 1, 2, \dots$, (2) Suatu Graf komplit yang berorder ganjil (K_{2n+1}) jika difaktorkan menggunakan 1-faktor, diperoleh pola yaitu: $K_{2n+1} = \frac{2n}{2}$, untuk $n = 1, 2, \dots$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menurut Kerami (2003:156) matematika merupakan penelaahan tentang bilangan-bilangan, bentuk-bentuk dan lambang-lambang. Berkaitan dengan definisi tersebut, matematika seringkali dibagi menjadi tiga cabang, yaitu aljabar, analisis dan geometri. Aljabar membahas tentang bilangan dan pengabstrakannya, analisis membahas kekonvergenan dan limit, sedangkan geometri membahas tentang bentuk dan konsep-konsep yang berkaitan. Dalam perkembangan selanjutnya, cabang matematika menjadi semakin banyak dan salah satunya adalah teori graf. Teori graf berkembang sangat pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan aljabar yang lebih dahulu berkembang (Hasanah, 2008: 1).

Graf merupakan himpunan tak kosong yang terdiri atas himpunan titik-titik yang beraturan, dan himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik. Seiring dengan perkembangan tentang teori graf, jenis-jenis graf pun semakin banyak. Dimulai dari graf sederhana, graf ganda, graf semu, dan hingga ditemukannya graf komplit. Suatu graf komplit didefinisikan sebagai graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi (Purwanto, 1998:21). Graf komplit merupakan penggabungan atau hasil penjumlahan dari beberapa graf yang merupakan faktor-faktor dari graf komplit tersebut. Karena graf komplit dapat mewakili graf secara umum, sehingga penulis ingin meneliti faktorisasi pada graf komplit.

Dalam kehidupan beragama graf komplit dapat dimisalkan dengan rukun iman, sedangkan beberapa graf sederhana dimisalkan sebagai enam rukun iman. Sebagai mana disebutkan dalam hadist berikut:

عَنْ عُمَرَ رَضِيَ اللَّهُ تَعَالَى عَنْهُ أَيْضًا قَالَ يَبْنِيَانِ جُلُوسٌ عِنْدَ رَسُولِ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ ذَاتَ يَوْمٍ إِذْ طَلَعَ عَلَيْنَا رَجُلٌ شَدِيدُ بَيَاضِ الثِّيَابِ شَدِيدُ سَوَادِ الشَّعْرِ لَا يُرَى عَلَيْهِ أَثَرُ السَّفَرِ وَلَا يَعْرِفُهُ مِنَّا أَحَدٌ حَتَّى جَلَسَ إِلَى النَّبِيِّ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ فَأَسْنَدَ رُكْبَتَيْهِ إِلَى رُكْبَتَيْهِ وَوَضَعَ كَفَيْهِ عَلَى فَخْذَيْهِ وَقَالَ يَا مُحَمَّدُ أَخْبِرْنِي عَنِ الْإِسْلَامِ فَقَالَ رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ: الْإِسْلَامُ أَنْ تَشْهَدَ أَنْ لَا إِلَهَ إِلَّا اللَّهُ وَأَنَّ مُحَمَّدًا رَسُولُ اللَّهِ وَيُعِيمَ الصَّلَاةَ وَتُؤْتِيَ الزَّكَاةَ وَتَصُومَ رَمَضَانَ وَتَحَجَّ الْبَيْتَ إِنْ اسْتَطَعْتَ إِلَيْهِ سَبِيلًا. قَالَ صَدَقْتَ فَعَجِبْنَا لَهُ يَسْأَلُهُ وَيُصَدِّقُهُ. قَالَ فَأَخْبِرْنِي عَنِ الْإِيمَانِ. قَالَ أَنْ تُؤْمِنَ بِاللَّهِ وَمَلَائِكَتِهِ وَكُتُبِهِ وَرُسُلِهِ وَالْيَوْمِ الْآخِرِ وَتُؤْمِنَ بِالْقَدَرِ خَيْرِهِ وَشَرِّهِ. قَالَ صَدَقْتَ. قَالَ فَأَخْبِرْنِي عَنِ الْإِحْسَانِ. قَالَ أَنْ تَعْبُدَ اللَّهَ كَأَنَّكَ تَرَاهُ فَإِنْ لَمْ تَكُنْ تَرَاهُ فَإِنَّهُ يَرَاكَ. قَالَ فَأَخْبِرْنِي عَنِ السَّاعَةِ. قَالَ مَا الْمَسْئُولُ عَنْهَا بِأَعْلَمَ مِنَ السَّائِلِ. قَالَ فَأَخْبِرْنِي عَنْ أَمَارَاتِهَا. قَالَ أَنْ تَلِدَ الْأُمُّ رَبَّتَهَا وَأَنْ تَرَى الْحَفَاةَ الْعَالَةَ رِعَاءَ الشَّيْءِ يَتَّبِعُونَ فِي الْبُيُوتِ ثُمَّ انْطَلَقَ فَلَبِثَ مَلِيًّا ثُمَّ قَالَ يَا عُمَرُ أَنْتَ رَأَيْتَ مَنْ السَّائِلُ...؟ قُلْتُ: اللَّهُ وَرَسُولُهُ أَعْلَمُ. قَالَ "فَإِنَّهُ جِبْرِيلُ أَتَاكُمْ يُعَلِّمُكُمْ دِينَكُمْ."

رواه مسلم

Artinya: Dirwayatkan dari Umar RA bahwa dia berkata, 'ketika kami sedang duduk-duduk pada suatu hari, tiba-tiba muncul seorang laki-laki dengan mengenakan pakaian yang sangat putih, rambutnya sangat hitam, dan tidak terlihat pada dirinya bekas selesai melakukan perjalanan. Tidak seorang pun di antara kami yang mengenalnya. Dia pun segera duduk di hadapan Nabi SAW lalu dia menyandarkan kedua lututnya pada kedua lutut beliau dan meletakkan kedua telapak tangannya pada kedua paha beliau. Dia berkata, 'Ya Muhammad, beritahukan (ajarkan) kepadaku tentang islam!' Rasulullah menjawab, 'Islam adalah engkau bersaksi bahwa tiada sembahyan yang berhak diibadahi kecuali Allah; dan Muhammad adalah utusan Allah, engkau tegakkan shalat, engkau tunaikan zakat, engkau laksanakan puasa Ramadhan, dan engkau tunaikan ibadah haji ke Baitullah jika engkau mampu menempuh perjalanan ke sana.' Dia

berkata, 'Engkau benar.' Kami pun merasa heran terhadapnya; dia sendiri yang bertanya kepada beliau dan dia juga yang membenarkan jawaban beliau. Dia berkata, 'Beritahu kepadaku tentang iman!' Beliau menjawab, 'Engkau beriman kepada Allah, para malaikat-Nya, kitab-kitab-Nya, rasul-rasul-Nya, hari akhir dan beriman pada takdir yang baik maupun yang buruk.' Dia berkata, 'Engkau benar.' Dia berkata lagi, 'Beritahu kepadaku tentang ihsan!' Beliau menjawab, 'Engkau beribadah kepada Allah seakan engkau melihat-Nya, jika engkau tidak (beribadah kepada-Nya seakan) melihat-Nya maka (beribadahlah kepada-Nya seakan) Dia yang sedang melihatmu.' Dia bertanya lagi, 'Beritahukan kepadaku perihal (terjadinya) kiamat!' Beliau menjawab, 'Yang ditanya perihal kiamat tidaklah lebih tahu daripada penanya.' Dia berkata lagi, 'Kalau begitu, beritahukan kepadaku tentang tanda-tandanya!' Beliau menjawab, 'Jika seorang budak wanita melahirkan tuan putrinya dan jika kamu lihat orang-orang yang tak beralas kaki, tidak mengenakan pakaian, miskin, bekerja sebagai pengembala kaming, namun mereka saling berbangga dengan bangunan yang tinggi.' Orang itu pun pergi, sedangkan aku masih saja diam cukup lama. Kemudian Rasulullah bertanya kepadaku, 'Umar, tahukah kamu, siapa sebenarnya yang bertanya tadi?' Aku jawab, 'Allah dan Rasul-Nya lebih tahu.' Beliau bersabda, 'Sebenarnya dia adalah Jibril yang sengaja datang kepada kalian untuk mengajarkan kepada kalian perihal ajaran agama kalian. (HR. Muslim)

(Nawawi, 2007:61)

Dari hadist tersebut dapat diketahui bahwa rukun iman adalah iman kepada Allah SWT, malaikat-malaikatNya, kitab-kitabNya, rasul-rasulNya, adanya hari akhir dan qada'dan qadarNya. Untuk menjadi seorang yang beriman, maka setiap orang haruslah percaya atau mengimani keenam rukun-rukunnya tersebut. Jika seseorang tidak mengimani salah satunya maka seseorang tersebut belum bisa dikatakan seorang yang beriman.

Berdasarkan uraian tersebut dalam penelitian ini akan dikaji tentang faktorisasi pada graf komplit. Selain itu pembahasan tentang faktorisasi pada graf komplit sebelumnya juga jarang dibahas. Oleh karena penulis tertarik untuk mengkajinya dengan judul "**Faktorisasi Pada Graf Komplit**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas dapat ditarik rumusan permasalahan yang akan dibahas, yaitu

1. Bagaimana pola faktorisasi graf komplit yang berorder genap menggunakan 1-faktor?
2. Bagaimana pola faktorisasi graf komplit yang berorder ganjil menggunakan siklus Hamilton?

1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui pola faktorisasi graf komplit yang berorder genap menggunakan 1-faktor.
2. Untuk mengetahui pola faktorisasi graf komplit yang berorder ganjil menggunakan siklus Hamilton.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini penulis membatasi masalah faktorisasi dalam graf komplit hanya dengan menggunakan 1-faktor dan siklus Hamilton.

1.5 Manfaat Penulisan

1. Bagi penulis

Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang teori graf, khususnya faktorisasi pada graf..

2. Bagi lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian adalah metode study literature (kepustakaan) atau kajian pustaka. Yaitu melakukan penelusuran dan penelaahan terhadap beberapa literatur yang berhubungan dengan topik bahasan. Bertujuan untuk mengumpulkan data-data dan informasi dengan bantuan bermacam-macam materi yang terdapat diruang perpustakaan seperti: buku-buku, majalah, dokumen, catatan, kisah-kisah sejarah dan sebagainya. Langkah-langkah yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah

Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu peneliti menyusun rencana penelitian yang mulia dari suatu masalah tentang faktorisasi pada graf komplit.

2. Mengumpulkan Data.

Mengumpulkan data merupakan standar utama dari suatu penelitian. Dalam hal ini peneliti mengumpulkan data dari literatur Graphs & Digraphs (Gary Chartrand dan Linda Lesniak) dan literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian.

3. Menganalisis Data

Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah :

- a. Menggambar beberapa contoh graf komplit, dengan memisahkan antara graf komplit yang berorder genap dan graf komplit yang berorder ganjil.
- b. Mencari pola pada faktorisasi graf komplit yang berorder genap menggunakan 1-faktor yang kemudian menghasilkan teorema dan dibuktikan.
- c. Mencari pola pada faktorisasi graf komplit yang berorder ganjil menggunakan sikel Hamilton yang kemudian menghasilkan teorema dan dibuktikan.

4. Membuat Kesimpulan

Kesimpulan dalam penelitaian ini berupa pola faktorisasi yang merupakan hasil dari faktorisasi pada graf graf komplit berorder genap menggunakan 1-faktor, dan faktorisasi pada graf komplit berorder ganjil menggunakan sikel Hamilton .

5. Melaporkan

Langkah terakhir dari penelitian adalah menyusun laporan dari penelitian yang telah dilakukan, yaitu berupa skripsi yang digunakan sebagai syarat memperoleh gelar sarjana.

1.7 Sistematika Pembahasan

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN TEORI

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, *incident* dan *adjacent*, derajat titik pada graf, subgraf, *Induced subgraf*, *edge induced*, *spanning subgraf*, graf terhubung, operasi graf, siklus Hamilton, graf komplit, *matching*, faktorisasi graf, dan rukun iman.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan ini berisi tentang bagaimana pola faktorisasi pada graf komplit yang berorder genap menggunakan 1-faktor, bagaimana faktorisasi graf komplit yang berorder ganjil menggunakan siklus Hamilton dan Rukun Iman dalam Kajian Teori Graf.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Graf

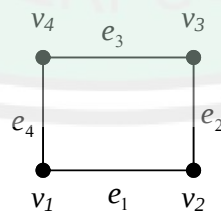
2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka *order* dan *size* dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Graf terhubung G

Graf terhubung G memuat himpunan titik $|V|$ dan sisi $|G|$ yaitu :

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

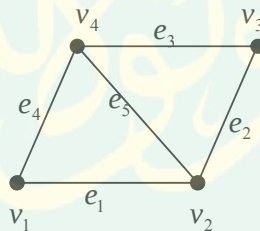
Dimana $e_1 = v_1v_2$, $e_2 = v_2v_3$, $e_3 = v_3v_4$, dan $e_4 = v_4v_1$,

Graf terhubung G mempunyai order 4 atau $p = 4$ dan size 4 atau $q = 4$.

Definisi 2

Sisi $e = (u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u,v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$. (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

Contoh 2.2



Gambar 2.2 Graf terhubung H

Dari gambar 2.2 pada graf terhubung H, titik v_1 dan v_2 adalah *adjacent* atau terhubung langsung, tapi titik v_1 dan v_3 tidak terhubung langsung. Sisi e_1 dan sisi e_4 adalah *incident* atau terkait langsung dengan titik v_1 .

2.1.2 Derajat Titik

Definisi 3

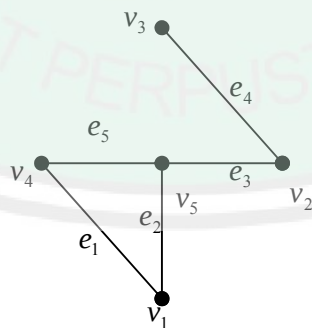
*Derajat dari titik v di graf G , ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v (Chartrand dan Leniak, 1986:7).*

Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G , maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap (even vertices)* dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil (odd vertices)*. Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung (end vertices)* (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

Jika setiap titik dalam suatu graf mempunyai derajat yang sama maka graf tersebut disebut dengan graf reguler (*Regular Graphs*). Sebuah graf G dikatakan r reguler atau reguler berderajat r jika setiap titik di G mempunyai derajat r .

Contoh 2.3

Misalkan suatu graf G mempunyai himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Dimana graf G sebagai berikut:



Gambar 2.3 Graf terhubung G

Berdasarkan gambar 2.3 diatas, dapat diperoleh:

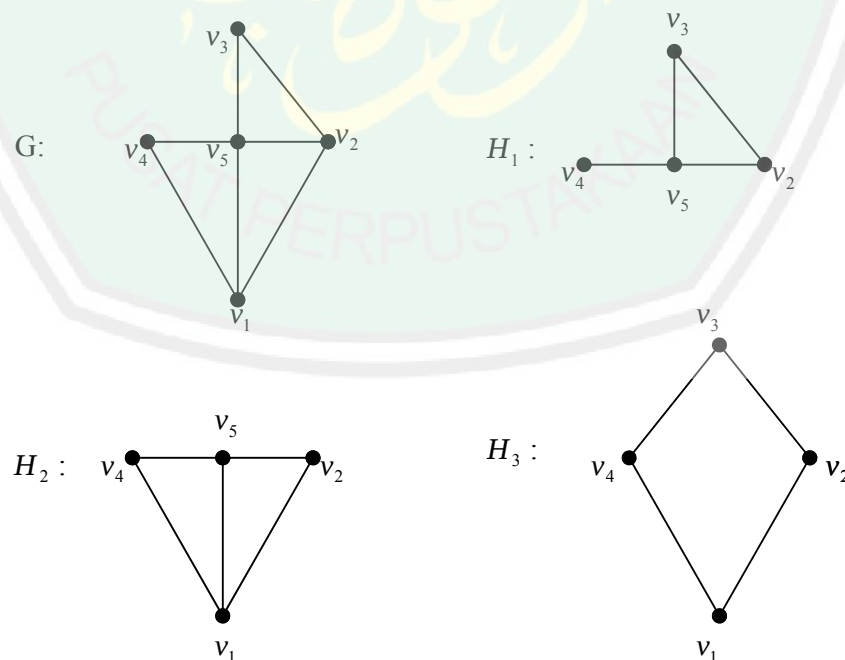
$\deg(v_1) = 2$, $\deg(v_2) = 2$, $\deg(v_3) = 1$, $\deg(v_4) = 2$ dan $\deg(v_5) = 3$. Titik v_1 , v_2 dan v_4 adalah titik-titik yang berderajat genap (*even vertices*), titik v_5 adalah titik yang berderajat ganjil (*odd vertices*), sedangkan titik v_3 adalah titik yang berderajat satu atau titik ujung (*end vertices*).

2.1.3 Subgraf

Definisi 4

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G . Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf G , maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Contoh 2.4



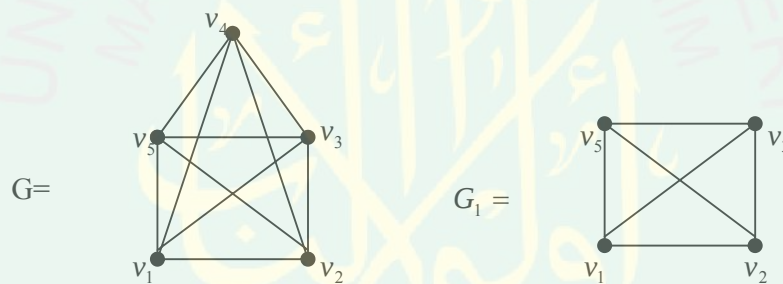
Gambar 2.4 Graf dengan Subgraf dan bukan Subgraf

Pada contoh 2.4 diberikan graf G , yang mana graf H_1 dan H_2 adalah subgraf dari dari graf G . Sedangkan, graf H_3 bukan merupakan subgraf dari G , karena sisi (v_3v_4) bukan merupakan anggota dari graf G .

Definisi 5

Subgraf Terinduksi (*Induced subgraf*) H dari graf G yang dinotasikan dengan $G[V^1]$ adalah subgraf dari graf G yang memuat himpunan V^1 titik bersama semua sisi-sisi uv dari graf G dimana $u, v \in V^1$, jadi subgraf H dari graf G dapat diperoleh dengan menghapus titik-titik dari graf G .

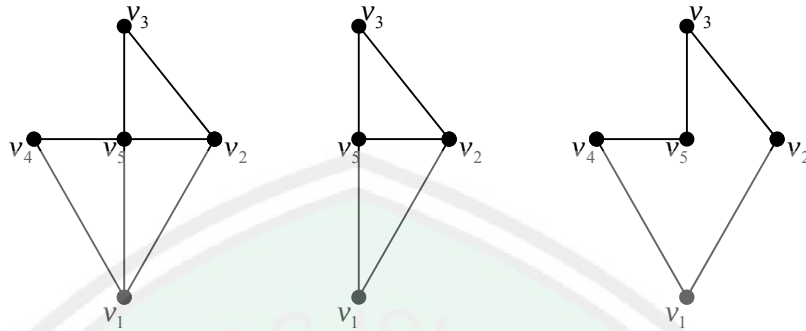
Contoh 2.5:



Gambar 2.5 Graf dengan Subgraf Terinduksinya

Definisi 6

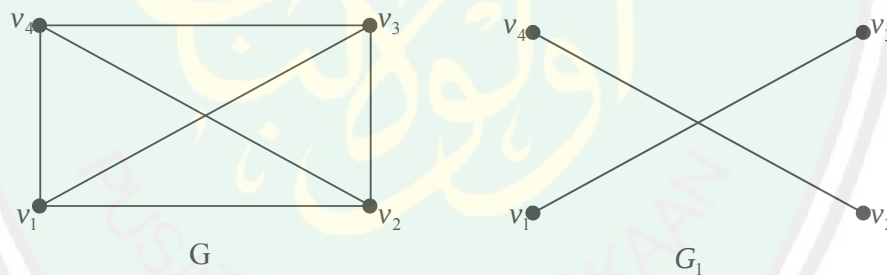
Subgraf terinduksi sisi (*edge induced*) H didefinisikan sebagai $G[E^1]$ jika $H \cong \langle F \rangle$ untuk setiap subset F dari $E(G)$. Jadi subgraf terinduksi sisi dari graf G dapat diperoleh dengan menghapus titik dan sisi pada graf G .

Contoh 2.6

Gambar 2.6 Subgraf Terinduksi Titik dan Terinduksi Sisi

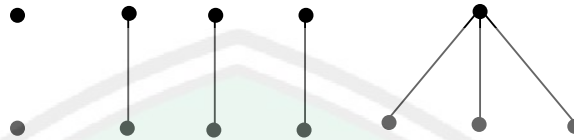
Definisi 7

Subgraf H dari graf G yang memiliki himpunan order yang sama pada G , atau jika subgraf H dengan $V(H) = V(G)$, maka H disebut *spanning subgraf* dari G .

Contoh 2.7Gambar 2.7 Graf G dan Subgraf Merentanganya**2.1.4 Operasi Graf**

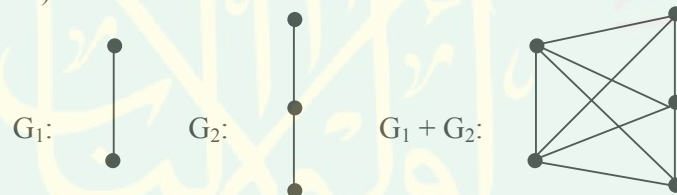
Gabungan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G memuat sebanyak $n \geq 2$ graf H , maka

dinotasikan dengan $G = {}_nH$. Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_{(1,3)}$ akan ditunjukkan pada gambar sebagai berikut (Chartrand and Lesniak, 1986: 11).



Gambar 2.8 Gabungan Graf

Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$. (Chartrand and Lesniak, 1986: 11).



Gambar 2.9 Penjumlahan Dua Graf

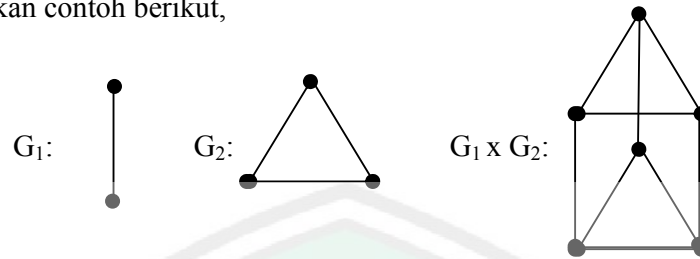
Hasil kali kartesius dari graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika

$$u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 v_2 \in E(G_2)$$

atau

$$u_2 = v_2 \text{ dan } u_1 v_1 \in E(G_1) \quad (\text{Chartrand and Lesniak, 1986: 11}).$$

Perhatikan contoh berikut,



Gambar 2.10 Graf Hasil Kali Kartesius

2.1.5 Jalan dan Lintasan

Definisi 8

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong)

$$W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$$

yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v sedemikian hingga untuk $0 < i \leq n$, maka $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G . v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

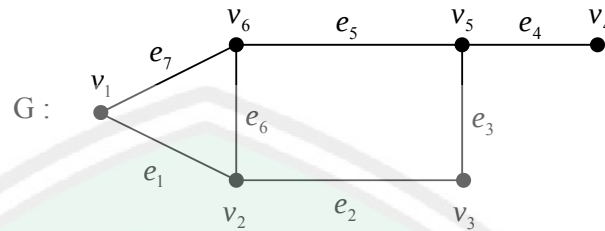
Definisi 9

Trail $u - v$ adalah jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda dan boleh mengulang titik (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 10

Jalan *terbuka* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *lintasan*.

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa setiap lintasan pasti trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Wilson and Watkins, 1989: 35).

Contoh 2.9

Gambar 2.11 Jalan dan Lintasan

Contoh jalan pada graf G dalam gambar 2.11 adalah :

$$v_4, e_4, v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2.$$

Contoh trail pada graf G dalam gambar 2.10 adalah :

$$v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4.$$

Contoh lintasan pada graf G dalam gambar 2.11 adalah :

$$v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4.$$

Definisi 11

Sirkuit adalah sebuah jalan tertutup (*closed trail*) dan melewati sisi yang berbeda pada Graf G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 12

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap i disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh 2.10

Contoh sirkuit pada graf G dalam gambar 2.11 adalah :

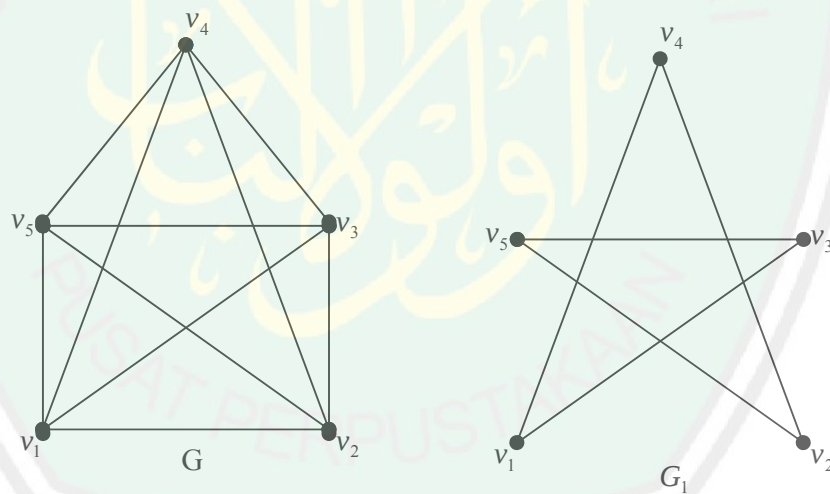
$$v_5, e_5, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$$

Contoh Sikel pada graf G dalam gambar 2.11 adalah:

$$v_5, e_5, v_6, e_6, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$$

2.1.6 Sikel Hamilton**Definisi 13**

Sikel Hamilton adalah sikel yang memuat semua titik pada graf G (Chartrand dan Lesniak, 1986: 182).

Contoh 2.12

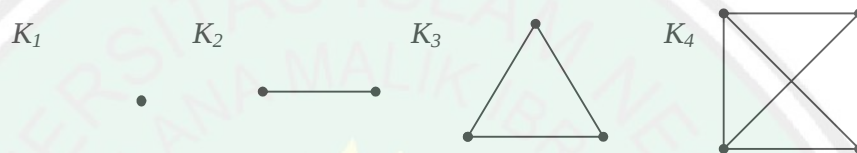
Gambar 2.12 Graf G dan Sikel Hamiltonnya (G_1)

Dari gambar 2.12 merupakan salah-satu contoh dari sikel Hamilton pada graf G .

2.1.7 Graf Komplit

Definisi 14

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Purwanto, 1998:21).



Gambar 2.13 Graf Komplit

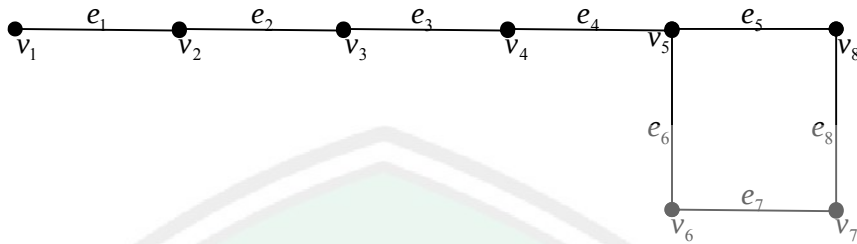
Dari Gambar 2.13. K_1 , K_2 , K_3 dan K_4 adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjacent* dengan semua titik yang lain.

2.1.8 Matching

Definisi 15

Pasangan (*matching*) pada graf G adalah himpunan dua buah titik atau suatu sisi pada graf G yang bebas jika sisinya tidak saling *adjacent* pada G (Chartrand dan Lesniak, 1986: 225).

M disebut sebagai *matching sempurna* (*perfect matching*) pada graf G , jika M merupakan suatu *matching* pada graf G , yang mana titik-titik pada G berinsident dengan sisi-sisi pada M .

Contoh 2.14

Gambar 2.14 Matching dan Maksimum Matching

Dari gambar 2.14 himpunan $M_1 = \{e_1, e_3, e_8\}$ adalah matching tetapi bukan matching maksimum. Tapi, $M_2 = \{e_1, e_3, e_5, e_7\}$ adalah matching maksimum dan merupakan *matching perfect*.

2.1.9 Faktorisasi**Definisi 16**

Faktor dari graf G adalah suatu subgraf merentang (spanning subgraph) dari graf G . (Chartrand dan Lesniak, 1986: 229).

Jika $(n \geq 2)$ adalah faktor yang disjoint sisi pada graf G sedemikian hingga $\bigcup_{i=1}^n E(G_i) = E(G)$, dimana $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor $G_1, \dots, G_n$.

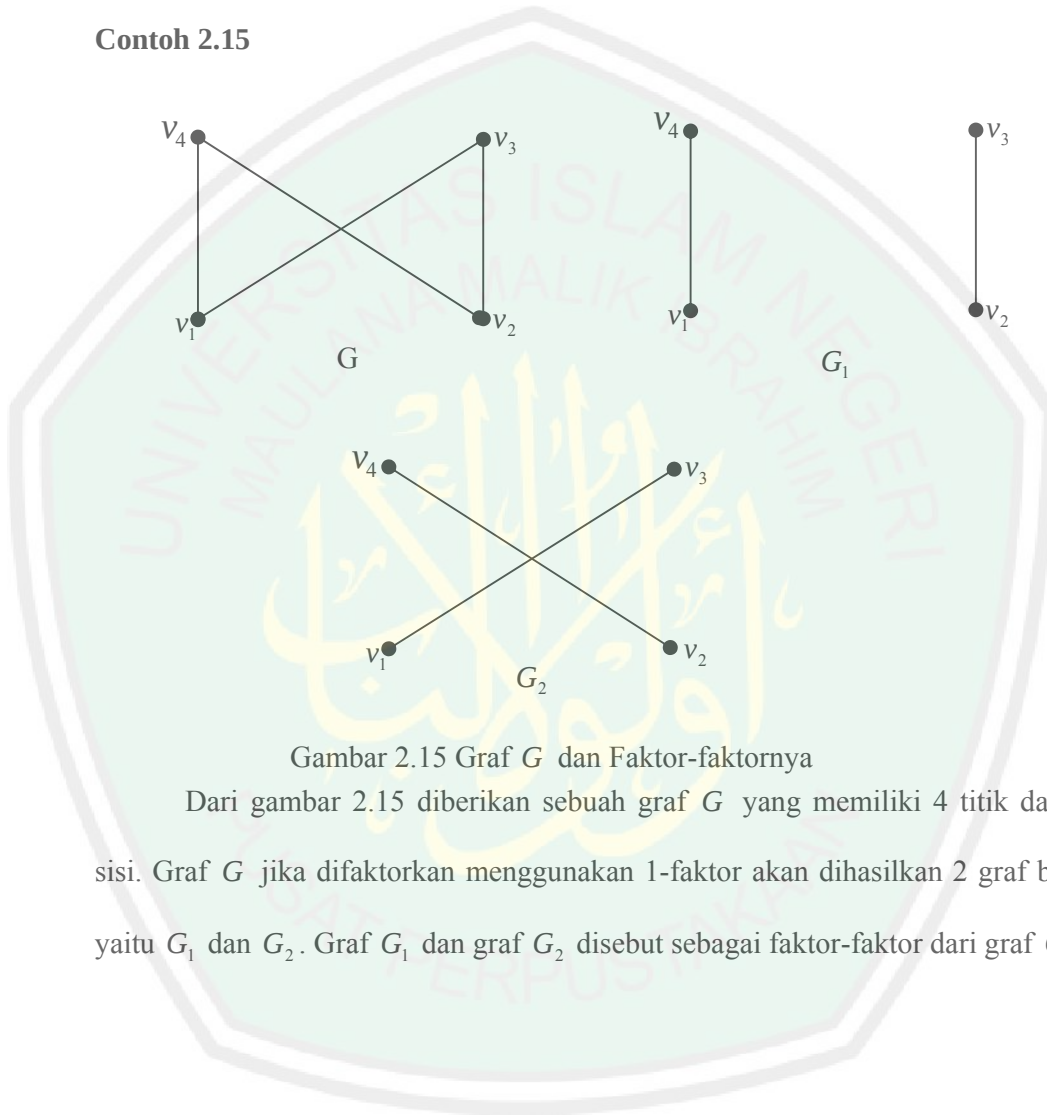
Definisi 17

Faktorisasi dari graf G adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf G . . (Chartrand dan Lesniak, 1986: 229).

Suatu r -regular faktor dari graf G dapat dinyatakan sebagai r -faktor dari G . Oleh sebab itu, suatu graf memiliki 1 -faktor jika dan hanya jika mengandung suatu *matching sempurna*. Jika suatu faktorisasi ada pada graf G dengan demikian

setiap faktor adalah r -faktor (untuk setiap r tetap), maka G dapat difaktorkan r -faktor. Jika G adalah suatu graf yang dapat difaktorkan r -faktor, maka G perlu k -*regular* untuk suatu k yang merupakan kelipatan dari r .

Contoh 2.15



Gambar 2.15 Graf G dan Faktor-faktornya

Dari gambar 2.15 diberikan sebuah graf G yang memiliki 4 titik dan 4 sisi. Graf G jika difaktorkan menggunakan 1-faktor akan dihasilkan 2 graf baru yaitu G_1 dan G_2 . Graf G_1 dan graf G_2 disebut sebagai faktor-faktor dari graf G .

2.2 Rukun Iman

2.2.1 Pengertian Iman

Iman menurut bahasa adalah membenaran, sedangkan menurut istilah adalah membenaran atau pengakuan hati dengan penuh yakin tanpa ragu-ragu akan segala apa yang dibawa oleh Nabi Muhammad SAW, yang diketahui dengan jelas sebagai ajaran agama yang berasal dari wahyu Allah (Daudy, 1997:21).

Menurut Yusuf Qardlawi (1977:25), iman adalah kepercayaan yang meresap kedalam hati dengan keyakinan, tidak tercampur syak dan ragu, serta memberi pengaruh bagi pandangan hidup, tingkah laku dan perbuatan pemiliknya sehari-hari (Chirzin, 1997:17).

Allah berfirman:

مَا جَعَلَ اللَّهُ لِرَجُلٍ مِّن قَلْبَيْنِ فِي جَوْفِهِ ۚ وَمَا جَعَلَ أَزْوَاجَكُمُ الَّتِي تُظَاهِرُونَ مِنْهُنَّ أُمَّهَاتِكُمْ ۚ وَمَا جَعَلَ أَدْعِيَاءَكُمْ أَبْنَاءَكُمْ ۚ ذَٰلِكُمْ قَوْلُكُمْ بِأَفْوَاهِكُمْ ۖ وَاللَّهُ يَقُولُ الْحَقَّ وَهُوَ يَهْدِي السَّبِيلَ ﴿٤﴾

Artinya: 4. Allah sekali-kali tidak menjadikan bagi seseorang dua buah hati dalam rongganya; dan dia tidak menjadikan istri-istrimu yang kamu zihar itu sebagai ibumu, dan dia tidak menjadikan anak-anak angkatmu sebagai anak kandungmu (sendiri). yang demikian itu hanyalah perkataanmu dimulutmu saja. dan Allah mengatakan yang Sebenarnya dan dia menunjukkan jalan (yang benar).

Berdasarkan ayat diatas diperoleh pengertian bahwa. Iman adalah suatu unsur yang dapat merubah jiwa manusia sehingga berubah tujuan hidup dan jalan yang ditempuhnya. Berubah tingkah laku, pandangan hidup, perasaan dan pertimbangannya. Iman membangkitkan jiwa seseorang untuk hijrah dari dunia

jahiliyah menuju dunia iman. Allah tidak akan menjadikan bagi seseorang dua hati dalam raganya yakni dua asa yang berlawanan (Chirzin, 1997:19).

2.2.2 Rukun Iman

Rukun iman ada 6 sebagai berikut:

1. Iman kepada Allah

Iman kepada Allah secara garis besar ialah kita beritikad bahwa sesungguhnya Allah itu bersifat dengan semua sifat kesempurnaan, dan Maha suci dari segala sifat kekurangan. Secara tafsir iman kepada Allah ialah kita beritikad bahwa sesungguhnya Allah itu bersifat dengan sifat-sifat wajib yang jumlahnya 20 (Wujud, Qidam, Baqa, dan seterusnya...). Sementara itu menurut sebagian ulama, iman kepada Allah mencakup 3 hal yaitu:

1. Membenarkan dengan yakin akan adanya Allah.
2. Membenarkan dengan yakin akan keesaan Allah (baik dalam perbuatan menjadikan makhluk seluruhnya maupun dalam menerima ibadat dari segenap makhluk), dan
3. Membenarkan dengan yakin bahwa Allah bersifat dengan segala sifat kesempurnaan, suci dari segala sifat kekurangan, dan suci pula dari menyerupai segala yang baharu (alam)

(Tatapangarsa, 1979:42).

Beriman kepada Allah adalah dasar dari iman. Dari ajaran asas ini timbullah bagian-bagian atau rukun-rukun iman yang lain. Bahwa beriman kepada Allah adalah beriman kepada yang gaib, dan beriman kepada yang gaib memerlukan dalil-dalil yang rasional untuk membuktikan keimanan itu.

Dalil-dalil tentang wujud Allah ada yang berdasarkan akal dan ada juga yang berdasarkan wahyu yang merupakan dalil yang lengkap bagi dasar pengetahuan kita tentang Allah. Sebab, sesuatu yang gaib pada dasarnya sangat sukar dapat diliputi oleh akal manusia yang terbatas, dan karena itu hanya Allah sendiri yang Mahatahu akan diri-Nya (Daudy, 1997:48).

Mengenal Allah SWT, dapat ditempuh melalui dua jalur. *Pertama*, dengan menggunakan akal pikiran untuk memeriksa dan memikirkan secara teliti apa yang diciptakan Allah. *Kedua*, dengan mengerti nama-nama dan sifat-sifat-Nya dalam Al-Qur'an.

Al-Qur'an telah mendorong akal pikiran manusia untuk mengenal Allah dengan mengemukakan ayat-ayat tentang alam yang menjelaskan segala isi dunia. Dengan pemikiran itu akan tercapailah pengenalan kepada Allah. Dengan mengenal ciptaan-Nya, manusia akan mengenal kesempurnaan sifat-sifat-Nya, kebesaran dan keluhuran-Nya, bukti-bukti kepedulian-Nya, kelengkapan ilmu-Nya, dan kelangsungan kekuasaan-Nya dalam mencipta (Chirzin, 1997:23). Sebagaimana dalam firman Allah dalam surat An-Naml ayat 59-64 yang artinya:

59. Katakanlah: "Segala puji bagi Allah dan kesejahteraan atas hamba-hamba-Nya yang dipilih-Nya. apakah Allah yang lebih baik, ataukah apa yang mereka persekutukan dengan Dia?"
60. Atau siapakah yang Telah menciptakan langit dan bumi dan yang menurunkan air untukmu dari langit, lalu kami tumbuhkan dengan air itu kebun-kebun yang berpemandangan indah, yang kamu sekali-kali tidak mampu menumbuhkan pohon-pohonnya? apakah disamping Allah ada Tuhan (yang lain)? bahkan (sebenarnya) mereka adalah orang-orang yang menyimpang (dari kebenaran).
61. Atau siapakah yang Telah menjadikan bumi sebagai tempat berdiam, dan yang menjadikan sungai-sungai di celah-celahnya, dan yang menjadikan gunung-gunung untuk (mengkokohkan)nya dan

menjadikan suatu pemisah antara dua laut? apakah disamping Allah ada Tuhan (yang lain)? bahkan (sebenarnya) kebanyakan dari mereka tidak Mengetahui.

62. *Atau siapakah yang memperkenalkan (doa) orang yang dalam kesulitan apabila ia berdoa kepada-Nya, dan yang menghilangkan kesusahan dan yang menjadikan kamu (manusia) sebagai khalifah di bumi? apakah disamping Allah ada Tuhan (yang lain)? amat sedikitlah kamu mengingati(Nya).*
63. *Atau siapakah yang memimpin kamu dalam kegelapan di dataran dan lautan dan siapa (pula)kah yang mendatangkan angin sebagai kabar gembira sebelum (kedatangan) rahmat-Nya? apakah disamping Allah ada Tuhan (yang lain)? Maha Tinggi Allah terhadap apa yang mereka persekutukan (dengan-Nya).*
64. *Atau siapakah yang menciptakan (manusia dari permulaannya), Kemudian mengulanginya (lagi), dan siapa (pula) yang memberikan rezki kepadamu dari langit dan bumi? apakah disamping Allah ada Tuhan (yang lain)? Katakanlah: "Unjuknlah bukti kebenaranmu, jika kamu memang orang-orang yang benar".*

(An-Naml 27:59-64)

Hikmah iman kepada Allah secara garis besar adalah sebagai berikut:

- a) Membebaskan diri dari penguasaan orang lain
- b) Membebaskan hati dan menumbuhkan keberanian
- c) Menenangkan hati dan menentramkan jiwa
- d) Menumbuhkan harapan dan optimisme
- e) Menumbuhkan perasaan harga diri
- f) Memelihara kebersihan diri dan mempertinggi nilai-nilai moril
- g) Menimbulkan rasa dekat dengan Tuhan

(Chirzin, 1997:45).

2. Iman Kepada Malaikat-malaikat Allah

Iman kepada malaikat, merupakan Rukun Iman kedua sesudah Iman kepada Allah. Dimaksudkan dengan Iman kepada Malaikat ialah, mempercayai bahwa Allah itu mempunyai suatu jenis mahluk yang bernama malaikat, yang

selalu taat kepadaNya dan mengerjakan dengan sebaik-baiknya tugas-tugas yang diberikan Allah kepada mereka.

Malaikat, termasuk makhluk Tuhan yang gaib. Hal yang gaib ialah segala yang tidak dapat “ditangkap” oleh pancaindera. Tidak hanya malaikat saja yang gaib, tetapi zat Tuhan, jin, segala persoalan menyangkut akhirat seperti sorga, neraka, dan lain sebagainya juga perkara-perkara yang gaib. Kata “gaib” itu sendiri, artinya ialah : hilang, lenyap, tidak ada. Jadi barang gaib ialah sesuatu yang “hilang”, atau “lenyap” atau “tidak ada” dalam jangkauan pancaindera (Tatapangarsa, 1979:81).

Allah SWT menciptakan malikat lebih dahulu daripada manusia. Ini dapat dimengerti dari dialog Allah dengan para malaikat.

وَإِذْ قَالَ رَبُّكَ لِلْمَلٰٓئِكَةِ اِنِّیْ جَاعِلٌ فِی الْاَرْضِ خَلِیْفَةً ۚ قَالُوْۤا اَتَجْعَلُ فِیْهَا مَنْ یُّفْسِدُ فِیْهَا وَیَسْفِكُ الدِّمَآءَ وَنَحْنُ نُسَبِّحُ بِحَمْدِكَ وَنُقَدِّسُ لَكَ ۗ قَالَ اِنِّیْۤ اَعْلَمُ مَا لَا تَعْلَمُوْنَ ﴿ۙۛۛ﴾

Artinya: 30. Ingatlah ketika Tuhanmu berfirman kepada para malaikat: "Sesungguhnya Aku hendak menjadikan seorang khalifah di muka bumi." mereka berkata: "Mengapa Engkau hendak menjadikan (khalifah) di bumi itu orang yang akan membuat kerusakan padanya dan menumpahkan darah, padahal kami senantiasa bertasbih dengan memuji Engkau dan mensucikan Engkau?" Tuhan berfirman: "Sesungguhnya Aku mengetahui apa yang tidak kamu ketahui."

(Al-Baqarah 2:30)

Al-Qur'an tidak menyebutkan dari apa malaikat diciptakan, namun sebuah hadis Nabi menyebutkan sebagai berikut:

Malaikat itu diciptakan dari cahaya, jin diciptakan dari nyala api dan Adam diciptakan dari apa yang telah diterangkan kepadamu semua (HR. Muslim). (Chirzin, 1997:58).

Di antara sifat-sifat malaikat yaitu sebagai berikut:

1. Malaikat diciptakan Allah dari cahaya(nur).
2. Malaikat tidak dapat dilihat oleh manusia walaupun berada ditengah mereka.
3. Malaikat dapat membentuk diri dalam wujud manusia rupawan seperti malaikat yang datang bertamu kepada Nabi Luth, sehingga kaumnya terpedaya dengannya.
4. Malaikat mempunyai kekuatan yang luar biasa dengan izin Allah.
5. Malaikat senantiasa bertasbih siang dan malam memuji Allah dan tidak pernah durhaka kepada-Nya.
6. Malaikat tidak mempunyai hawa nafsu, dan karenanya mereka tidak makan dan tidak minum, tidak kawin dan tidak beranak.
7. Malaikat senantiasa tunduk patuh sepenuhnya kepada perintah Allah dan tidak melanggar sedikit pun larangan-Nya.

(Daudy, 1997:96).

Manusia jika beriman dan taat kepada Allah SWT lebih mulia dari malaikat.

Ada beberapa alasan yang mendukung pernyataan tersebut:

- 1 Allah SWT memerintahkan kepada malaikat untuk sujud (hormat) kepada Adam AS.
- 2 Malaikat tidak bisa menjawab pertanyaan Allah tentang Al-Asma' (nama-nama, ilmu pengetahuan), sedangkan Adam mampu, karena memang diberi ilmu oleh Allah SWT.

- 3 Kepatuhan malaikat kepada Allah SWT karena sudah tabiatnya, sebab malaikat tidak memiliki hawa nafsu; sedangkan kepatuhan manusia pada Allah SWT melalui perjuangan yang berat melawan hawa nafsu dan godaan syaitan.
- 4 Manusia diberi tugas oleh Allah menjadi Khalifah di permukaan bumi.
 Iman kepada malaikat adalah salah satu dari *arkanul iman* yang tidak boleh sedikitpun bercampur dengan keraguan. Dengan beriman kepada malaikat seseorang akan:
 - a. Lebih mengenal kebesaran dan kekuasaan Allah SWT yang menciptakan dan mengugaskan para malaikat tersebut.
 - b. Lebih bersyukur kepada Allah SWT atas perhatian dan perlindunganNya terhadap hamba-hambaNya dengan mengugaskan para malaikat untuk menjaga, membantu dan mendo'akan hamba-hambanya.
 - c. Berusaha berhubungan dengan para malaikat dengan jalan mensucikan jiwa, membersihkan hati dan meningkatkan ibadah kepada Allah SWT, sehingga seseorang akan sangat beruntung bila termasuk golongan yang dido'akan oleh para malaikat, sebab do'a malaikat tidak pernah ditolak Tuhan.
 - d. Berusaha selalu berbuat kebaikan dan menjauhi segala kemaksiatan serta ingat senantiasa kepada Allah SWT, sebab para malaikat selalu mengawasi dan mencatat amal perbuatan manusia.
 - e. Dan lain-lain.

(Ilyas,1993:96)

3. Iman Kepada Kitab-kitab Allah

Secara terminologis yang dimaksud dengan kitab adalah kitab suci yang diturunkan oleh Allah SWT kepada para Nabi dan Rasul-Nya. Kata Al-kitab di dalam Al-Qur'an dipakai untuk beberapa pengertian:

1. Menunjukkan semua Kitab Suci yang pernah diturunkan kepada para Nabi dan Rasul
2. Menunjukkan semua Kitab Suci yang diturunkan sebelum Al-Qur'an
3. Menunjukkan Kitab Suci tertentu sebelum Al-Qur'an
4. Menunjukkan Kitab Suci Al-Qur'an secara khusus.

(Ilyas,1993:112)

Untuk menjadi pedoman hidup manusia dan untuk membimbing akal mereka, Tuhan menurunkan wahyu, yang disampaikannya kepada manusia-manusia yang terpilih, yaitu Nabi-nabi dan Rasul-Rasul dengan melalui perantaraan Malaikat jibril. Selanjutnya Nabi-nabi dan Rasul-rasul ini mengajarkan wahyu yang diterimanya, kepada umat mereka masing-masing.

Wahyu Tuhan tersebut dikumpulkan menjadi *suhuf*, yaitu semacam brosur-brosur kecil. Beberapa orang Nabi dan Rasul mempunyai suhuf itu. Yaitu Nabi Adam, Nabi Syisst, Nabi Ibrahim dan Nabi Musa.

Setelah itu terkumpullah beberapa kumpulan besar yang disebut Al-Kitab atau Kitab, yang bentuknya lebih besar daripada suhuf itu. Kitab mempunyai dua arti, yatu (1) perintah, dan (2) tulisan di atas kertas dan biasanya dijadikan buku.

Kitab Allah ada 4 buah, yaitu:

1. Kitab Taurot, yang diturunkan kepada Nabi Musa As.
2. Kitab Zabur, yang diturunkan kepada Nabi Daud As.
3. Kitab Injil, yang diturunkan kepada Nabi Isa Al-Masih.
4. Kitab Al-Qur'an, yang diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW.

(Tatapangarsa, 1979:93).

Al-Qur'an berbeda dari kitab-kitab sebelumnya. Di antara perbedaan-perbedaannya sebagai berikut:

- a. Kitab-kitab sebelum Al-Qur'an telah hilang keutuhan atau kemurniannya. Adapun Al-Qur'an, hingga kini masih utuh, seperti diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW 14 abad yang lalu.
- b. Kitab-kitab terdahulu, sebagaimana risalah rasul-rasul itu, adalah untuk suatu golongan tertentu. Adapun Al-Qur'an, ajaran-ajarannya untuk seluruh umat manusia sampai akhir zaman.
- c. Kitab-kitab terdahulu menggunakan bahasa kaum yang kini telah hilang sejak beberapa waktu silam. Adapun Al-Qur'an, berbahasa Arab, yang kini masih dipakai berjuta-juta manusia.
- d. Wahyu Allah dalam kitab-kitab terdahulu telah bercampur dengan perkataan-perkataan manusia. Adapun Al-Qur'an, tetap murni sebagai wahyu Allah dan Allah menjamin kemurniannya dari perubahan.
- e. Al-Qur'an memuat ringkasan ajaran-ajaran ketuhanan dalam kitab-kitab dan mengukuhkan kebenaran ajaran-ajaran yang terdapat di dalam kitab-kitab itu, yakni Zabur, Taurat dan Injil.

(Chirzin, 1997:74)

Iman yang telah mantap di hati akan menumbuhkan sikap-sikap positif terhadap Al-Qur'an. *Pertama*, menumbuhkan rasa cinta sejati. *Kedua*, menumbuhkan gairah untuk membacanya, mengingat bahwa membaca Al-Qur'an itu adalah ibadah. *Ketiga*, memberi inspirasi untuk mengambil pelajaran sebanyak-banyaknya darinya. Ia terpenggil untuk memahami isinya dengan kesiapan mental untuk menjalankan dengan mengikuti aturan-aturannya serta menyampaikan kebenaran-kebenaran itu kepada orang lain. Ia bertambah-tambah imannya mendengar bacaan ayat-ayatnya. Hatinya menjadi lembut, tenang dan penuh kedamaian (Chirzin, 1997:82).

4. Iman Kepada Rasul-rasul Allah

“Nabi” pada umumnya diartikan orang dengan: orang yang diberi wahyu oleh Tuhan berupa suatu Syari'ah [agama] yang tertentu. Sedangkan Rasul menurut bahasa berarti: utusan. Yang dimaksudkan ialah Utusan Allah. Menurut istilah, Rasul adalah: orang yang diberi wahyu oleh Tuhan berupa suatu Syari'ah yang tertentu, dan diperintahkan menyampaikan wahyu yang diterimanya itu kepada umatnya.

Maka terdapatlah perbedaan antara pengertian Nabi dan Rasul. Perbedaan itu adalah, kalau Nabi tidak diperintahkan menyampaikan wahyu Tuhan yang diterimanya itu kepada umatnya, sedangkan Rasul diperintahkan, dan berdosa sekiranya perintah itu dilaksanakan (Tatapangarsa, 1979:93).

Para rasul memiliki beberapa sifat utama melebihi manusia umumnya:

1. Benar (*shidiq*). Para rasul selalu benar dalam perkataan dan perbuatan. Manusia niscaya mengikuti tutur kata dan perbuatannya; membenarkan dan meneladani sikap hidupnya.
2. Terpercaya (*amanah*). Rasul sekali-sekali tidak mengkhianati amanat Tuhan yang dipikulnya.
3. Menyampaikan (*tabligh*). Rasul selalu menyampaikan segala pengajaran Allah kepada umatnya.
4. Cerdik (*fathanah*). Para rasul memiliki kemampuan berpikir yang tinggi.

Keempat sifat itu melaikat pada setiap rasul, sehingga dapat menangkap dengan benar isyarat-isyarat, ayat-ayat dan petunjuk Tuhannya. Mereka dapat mengemukakan keterangan-keterangan dengan argumentasi yang jitu sehingga manusia tahu dan mengerti apa yang disampaikan dan dianjurkannya (Chirzin, 1997:86).

Dengan mengetahui jejak Rasul-rasul Allah, makin mantaplah keyakinan akan kesempurnaan Islam yang dibawa Nabi Muhammad SAW. Dan makin teguh berpegang pada ajaran Tuhan Yang Maha Sempurna. Selanjutnya berusaha meneladani jejaknya secara optimal lewat pendalaman sunnah-sunnah, baik berupa ucapan, sikap, tingkah laku, maupun putusan-putusannya terhadap langkah-langkah para sahabatnya (Chirzin, 1997:94).

5. Iman Kepada Hari Akhir

Percaya kepada Hari Kiamat, adalah Rukun Iman kelima. Arti dari kepercayaan ini ialah, mempercayai bahwa seluruh alam dan segala isinya ini

pada suatu saat nanti, akan mengalami kehancuran setelah ditiupnya terompet malaikat Israfil yang pertama. Termasuk juga manusia, pada ketika itu mati semuanya tanpa kecuali. Tetapi sesudah kematiannya ini, manusia akan dihidupkan kembali, untuk diperhitungkan amalnya ketika di dunia oleh Tuhan.

Perhitungan amal ini berguna untuk menentukan nasib selanjutnya bagi manusia, baik atau buruknya. Yang baik ke surga, dan yang buruk ke neraka. Kehidupan dibalik kematian ini, kekal abadi. Inilah hidup akhirat, hidup yang sebenar hidup. Dan peristiwa-peristiwa sejak hancurnya alam hingga berlangsungnya saat perhitungan amal inilah yang disebut : *Yaumul Qiyamah* atau Hari Kiamat (Tatapangarsa, 1979:196).

Hari kiamat itu akan terjadi ditunjukkan kepada tanda-tanda yang disebut dalam Alquran dan Hadits, antara lain:

- **Allah akan mengangkat atau mencabut ilmu** (tentang Allah dan agama), kejahatan yang meluas atau merata, zina yang meluas, minum khamar, wanita lebih banyak daripada lelaki, sehingga bandingannya adalah 50:1.
- **Keluar matahari dari barat:** Pada hari ini tidak ada gunanya iman bagi orang yang tidak beriman sebelumnya.
- **Keluarnya hewan yang dapat berbicara dengan manusia.** Sebagaimana disebut dalam surat An-Naml:

❖ وَإِذَا وَقَعَ الْقَوْلُ عَلَيْهِمْ أَخْرَجْنَا لَهُمْ دَابَّةً مِّنَ الْأَرْضِ تُكَلِّمُهُمْ أَنَّ النَّاسَ كَانُوا

بِعَايَتِنَا لَا يُوقِنُونَ ﴿٨٢﴾

Artinya: 82. Dan apabila perkataan Telah jatuh atas mereka, kami keluarkan sejenis binatang melata dari bumi yang akan mengatakan kepada mereka, bahwa Sesungguhnya manusia dahulu tidak yakin kepada ayat-ayat Kami.

- **Keluar Dajjal:** dia membawa fitnah dengan mengatakan bahwa dirinya adalah tuhan yang mampu menghidupkan orang mati. Mata sebelah kanan buta dan akan tinggal selama empat puluh hari dikalangan manusia.
- **Kedatangan Imam Mahdi:** Kesimpulan riwayat yang berkenaan dengan Imam Mahdi ialah beliau akan datang pada akhir zaman.
- **Turun Nabi Issa dan Membunuh Dajjal:** Apabila kiamat sudah dekat, Nabi Isa turun dan membunuh Dajjal, menghancurkan salib, membunuh babi dan melaksanakan hukum dengan syariat Nabi Muhammad. Beliau akan tinggal di bumi ini untuk beberapa lama, kemudian meninggal dunia lalu orang-orang Islam melakukan sembahyang jenazah atasnya.
- **Keluar Ya'juj dan Ma'juj.**

حَتَّىٰ إِذَا فُتِحَتْ يَأْجُوجُ وَمَأْجُوجُ وَهُمْ مِّن كُلِّ حَدَبٍ يَنْسِلُونَ ﴿٩٦﴾

Artinya: 96. Hingga apabila dibukakan (tembok) Ya'juj dan Ma'juj, dan mereka turun dengan cepat dari seluruh tempat yang Tinggi.

(Daudy, 1997:135)

Keyakinan adanya hari akhir mendorong mukmin memilih perbuatan-perbuatan baik ketimbang perbuatan buruk yang tak ada nilainya sama sekali di hadirat Tuhan, bahkan hanya mengurangi berat timbangan amal baik di hari perhitungan, yang mengantarkan ke lembah Hawiyah (Chirzin, 1997:103).

6. Iman Kepada Qodlo dan Qodar Allah

Kepercayaan kepada Qodlo dan Qodar Allah secara umum ringkasannya menyatakan, bahwa segala sesuatu yang terjadi di alam ini, termasuk juga yang terjadi pada diri manusia, baik dan buruk, suka dan duka, dan segala gerak-gerik hidup ini, semuanya tidaklah terlepas dari takdir atau ketentuan Illahi. Semuanya, yaitu alam benda-benda atau masyarakat manusia, dikuasai oleh suatu hukum yang pasti dan tetap yang tidak tunduk kepada kemauan manusia (Tatapangarsa, 1979:215).

Ada beberapa hikmah yang dapat dipetik dari keimanan kepada Qodlo dan Qodar ini, antara lain yaitu:

1. Melahirkan kesadaran bagi umat manusia bahwa segala sesuatu di alam semesta ini berjalan sesuai dengan undang-undang, aturan dan hukum yang telah ditetapkan dengan pasti oleh Allah SWT.
2. Mendorong manusia untuk berusaha dan beramal dengan sungguh-sungguh untuk mencapai kehidupan yang baik di dunia dan di akhirat, mengikuti hukum sebab akibat yang telah ditetapkan oleh Allah SWT.
3. Mendorong manusia untuk semakin mendekatkan diri kepada Allah SWT yang memiliki kekuasaan dan kehendak yang mutlak, di samping memiliki kebijaksanaan, keadilan, dan kasih sayang kepada makhlukNya.
4. Menanamkan sikap *tawakkal* dalam diri manusia, karena menyadari bahwa manusia hanya bisa berusaha dan berdoa, sedangkan hasilnya diserahkan kepada Allah SWT.

5. Mendatangkan ketenangan jiwa dan ketenteraman hidup, karena meyakini apapun yang terjadi adalah atas kehendak dan *qadar* Allah SWT.
6. Hikmah-hikmah lainnya.

(Ilyas,1993:197)



BAB III

PEMBAHASAN

Pada Bab III ini, akan dibahas tentang faktorisasi graf pada graf komplit K_n dengan n bilangan asli. Dalam penulisan karya tulis ini, graf komplit dibedakan menjadi dua yaitu graf komplit yang berorder genap dan graf komplit yang berorder ganjil. Graf komplit yang berorder genap difaktorisasikan menggunakan 1-faktor karena hanya graf yang berorder genap yang dapat difaktorkan menggunakan 1-faktor sedangkan jika graf yang berorder ganjil difaktorkan menggunakan 1-faktor maka terdapat satu titik yang tidak memiliki 1-faktor. Dengan demikian graf komplit yang berorder ganjil difaktorkan menggunakan 2-faktor atau dapat disebut juga sebagai siklus hamilton. Sehingga faktorisasi pada graf komplit yang akan dibahas yaitu:

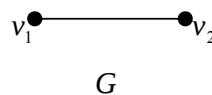
1. Faktorisasi pada graf komplit genap (K_{2n}) dengan menggunakan 1-faktor.
2. Faktorisasi pada graf komplit ganjil (K_{2n+1}) dengan menggunakan siklus Hamilton.

3.1 Faktorisasi Pada Graf Komplit K_n

3.1.1 Graf komplit genap (K_{2n}) difaktorkan menggunakan 1-faktor

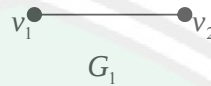
1. Graf komplit 2 (K_2).

Gambar graf K_2 sebagai berikut:



Gambar 3.1 Graf K_2

Gambar 3.1 diatas memperlihatkan bahwa graf K_2 memiliki dua titik yaitu v_1 dan v_2 , dan juga memiliki satu sisi. Graf K_2 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor akan diperoleh faktor sebagai berikut:

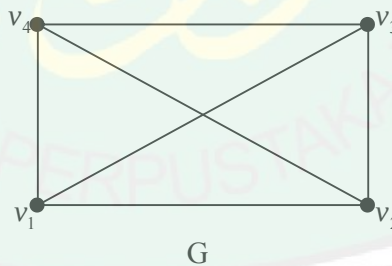


Gambar 3.2 Faktor dari Graf K_2

Gambar 3.2 diatas adalah spanning subgraf dari graf K_2 dan merupakan faktor dari graf K_2 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. G_1 merupakan graf K_2 itu sendiri, oleh karena itu diketahui bahwa graf K_2 tidak memiliki faktor lain selain G_1 . Sehingga faktorisasi dari graf K_2 adalah G_1 tanpa dioperasikan dengan graf lain karena tidak memiliki faktor lain.

2. Graf komplit 4 (K_4).

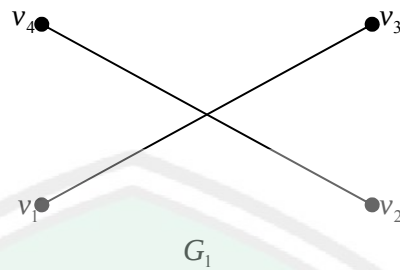
Gambar graf K_4 adalah:



Gambar 3.3 Graf K_4

Gambar 3.3 memperlihatkan bahwa graf K_4 memiliki 4 sisi yaitu v_1 , v_2 , v_3 dan v_4 , dan juga memiliki 6 sisi. Graf K_4 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor, akan diperoleh faktor-faktor sebagai berikut:

1. Faktor pertama

Gambar 3.4 Faktor pertama dari Graf K_4

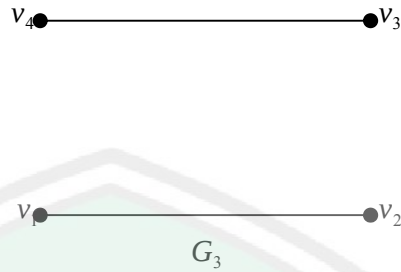
Gambar 3.4 adalah spanning subgraf dari graf K_4 dan merupakan faktor pertama dari graf K_4 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_3 dan titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_4 . Sedangkan titik v_1 dan v_2 , v_2 dan v_3 , v_3 dan v_4 , v_1 dan v_4 saling disjoint.

2. Faktor kedua

Gambar 3.5 Faktor kedua dari Graf K_4

Gambar 3.5 adalah spanning subgraf dari graf K_4 dan merupakan faktor kedua dari graf K_4 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_4 dan titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_3 . Sedangkan titik v_1 dan v_2 , v_2 dan v_4 , v_4 dan v_3 , v_3 dan v_1 saling disjoint.

3. Faktor ketiga



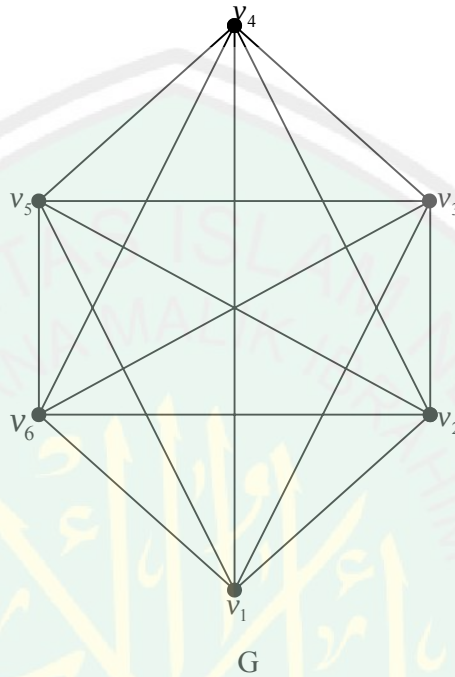
Gambar 3.6 Faktor ketiga dari Graf K_4

Gambar 3.6 adalah spanning subgraf dari graf K_4 dan merupakan faktor ketiga dari graf K_4 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_2 dan titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_4 . Sedangkan titik v_1 dan v_3 , v_3 dan v_2 , v_2 dan v_4 , v_4 dan v_1 saling disjoint.

Gambar 3.4 sampai gambar 3.6 adalah faktor-faktor graf K_4 yang diperoleh dari pemfaktoran graf K_4 menggunakan 1-faktor. Jika G_1 , G_2 dan G_3 adalah faktor-faktor graf K_4 yang mana sisi-sisinya saling disjoint pada graf K_4 sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf K_4 . Sehingga faktorisasi dari graf K_4 adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

3. Graf komplit 6 (K_6)

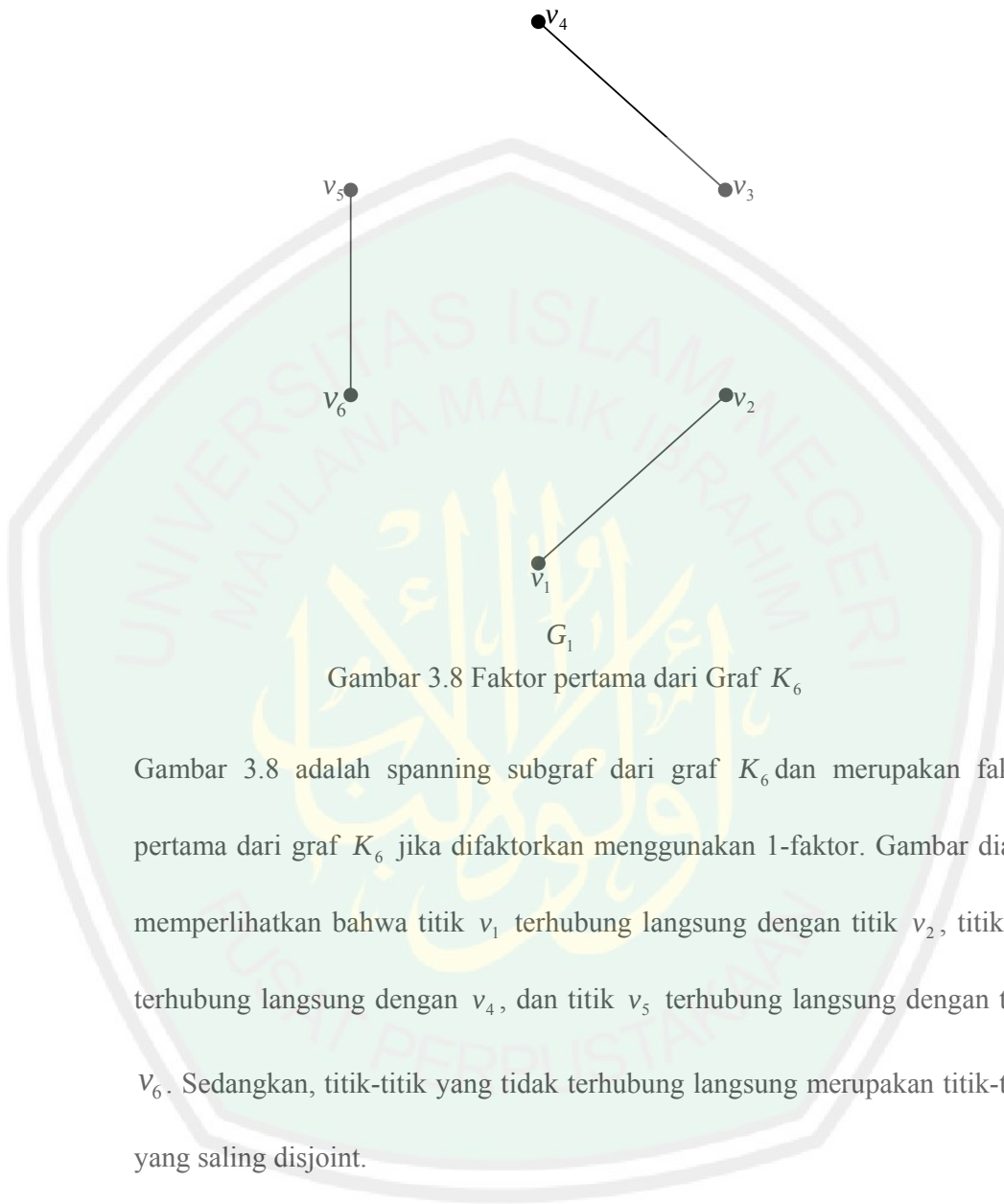
Gambar Graf K_6 adalah



Gambar 3.7 Graf K_6

Gambar 3.7 diatas, memperlihatkan bahwa graf K_6 memiliki 6 titik yaitu v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 dan v_6 , dan juga memiliki 15 sisi. Graf K_6 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor akan diperoleh faktor-faktor sebagai berikut:

1. Faktor pertama



Gambar 3.8 Faktor pertama dari Graf K_6

Gambar 3.8 adalah spanning subgraf dari graf K_6 dan merupakan faktor pertama dari graf K_6 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_3 terhubung langsung dengan v_4 , dan titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_6 . Sedangkan, titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

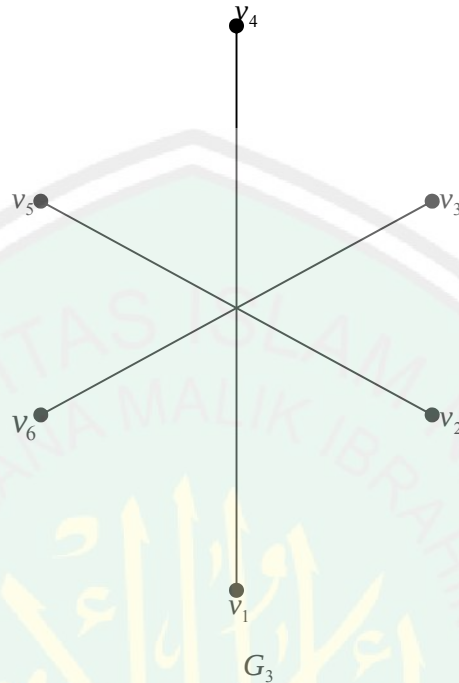
2. Faktor kedua



Gambar 3.9 Faktor kedua dari Graf K_6

Gambar 3.9 diatas adalah spanning subgraf dari graf K_6 dan merupakan faktor kedua dari graf K_6 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas menunjukkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_3 , dan titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_6 . Sedangkan, titik-titik yang tidak saling terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

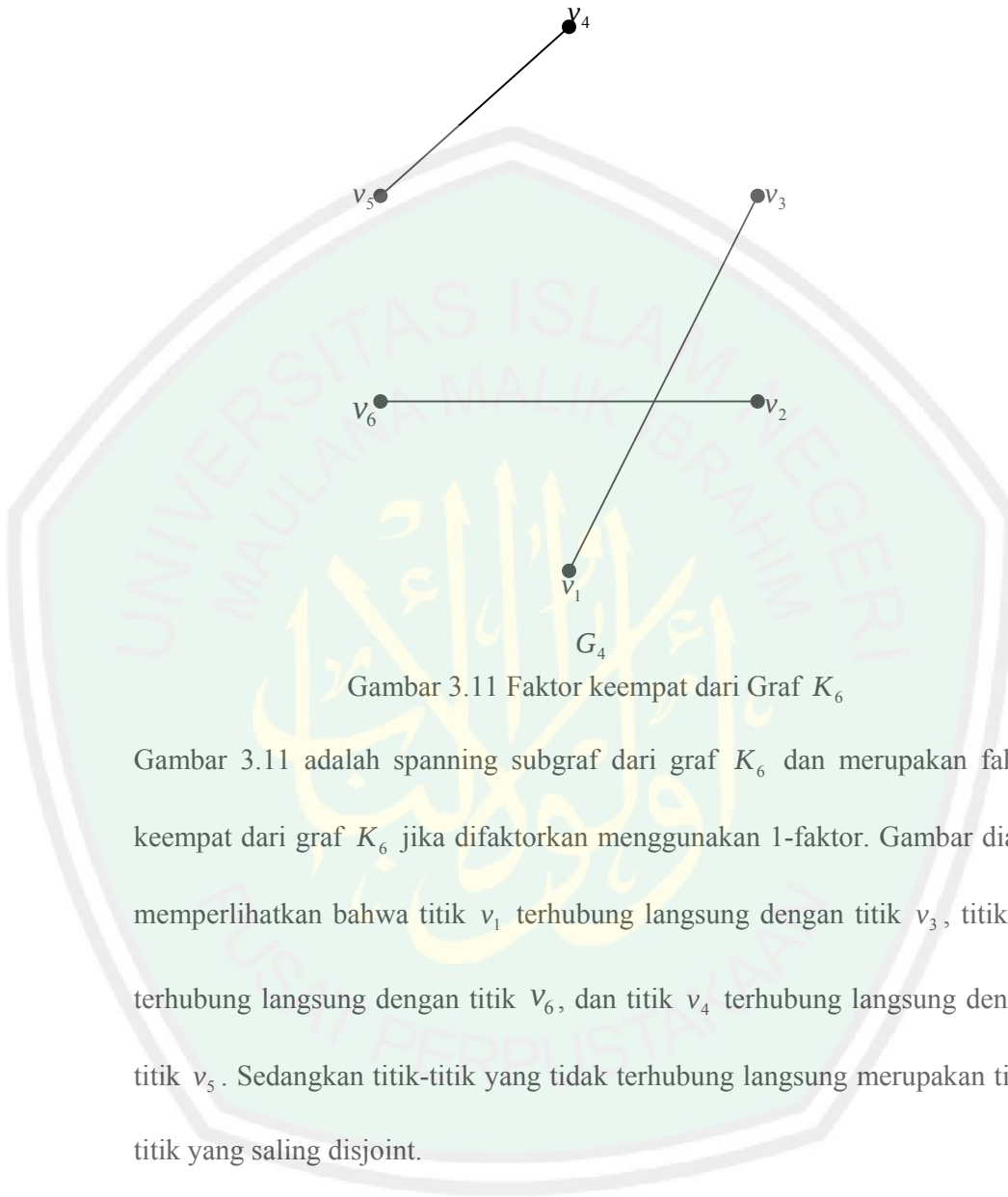
3. Faktor ketiga



Gambar 3.10 Faktor ketiga dari Graf K_6

Gambar 3.10 adalah spanning subgraf dari graf K_6 dan merupakan faktor ketiga dari graf K_6 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_5 , dan titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_6 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

4. Faktor keempat



Gambar 3.11 Faktor keempat dari Graf K_6

Gambar 3.11 adalah spanning subgraf dari graf K_6 dan merupakan faktor keempat dari graf K_6 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_6 , dan titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_5 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

5. Faktor kelima



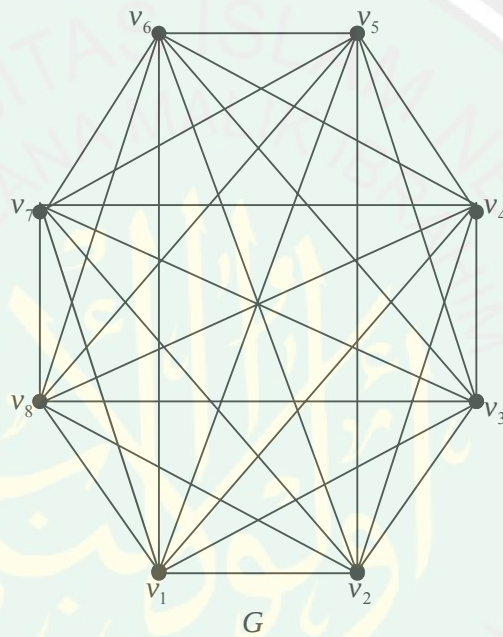
Gambar 3.12 Faktor kelima dari Graf K_6

Gambar 3.12 adalah spanning subgraf dari graf K_6 dan merupakan faktor kelima dari graf K_6 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_6 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_4 , dan titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_5 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung adalah titik yang disjoint.

Gambar 3.8 sampai gambar 3.12 adalah faktor-faktor graf K_6 yang diperoleh dari pemfaktoran graf K_6 menggunakan 1-faktor. Jika G_1 , G_2 , G_3 , G_4 dan G_5 adalah faktor-faktor graf K_6 yang mana sisi-sisinya saling disjoint pada

graf K_6 sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 = G$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf K_6 . Sehingga faktorisasi dari graf K_6 adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

4. Graf komplit 8 (K_8)



Gambar 3.13 Graf K_8

Gambar 3.13 diatas, memperlihatkan bahwa graf K_8 memiliki 8 titik yaitu v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 , v_6 , v_7 dan v_8 , dan juga memiliki 28 sisi. Graf K_8 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor akan diperoleh faktor-faktor sebagai berikut:

1. Faktor pertama

Gambar 3.14 Faktor Pertama dari Graf K_8

Gambar 3.14 adalah spanning subgraf dari graf K_8 dan merupakan faktor pertama dari graf K_8 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_6 , dan titik v_7 terhubung langsung dengan titik v_8 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

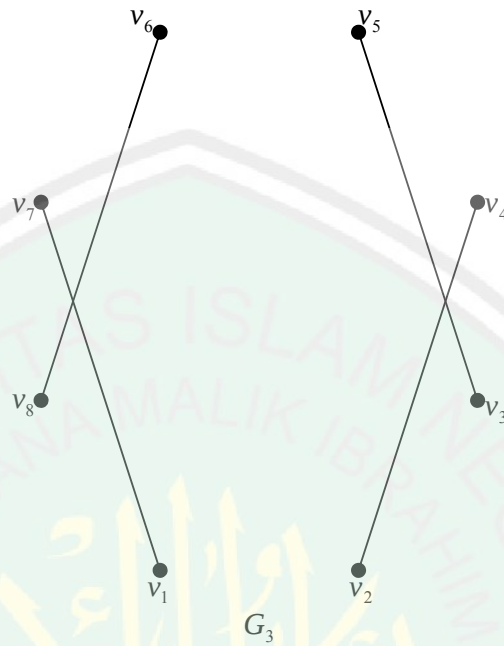
2. Faktor kedua



Gambar 3.15 Faktor kedua dari Graf K_8

Gambar 3.15 adalah spanning subgraf dari graf K_8 dan merupakan faktor kedua dari graf K_8 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_8 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_5 , dan titik v_6 terhubung langsung dengan titik v_7 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

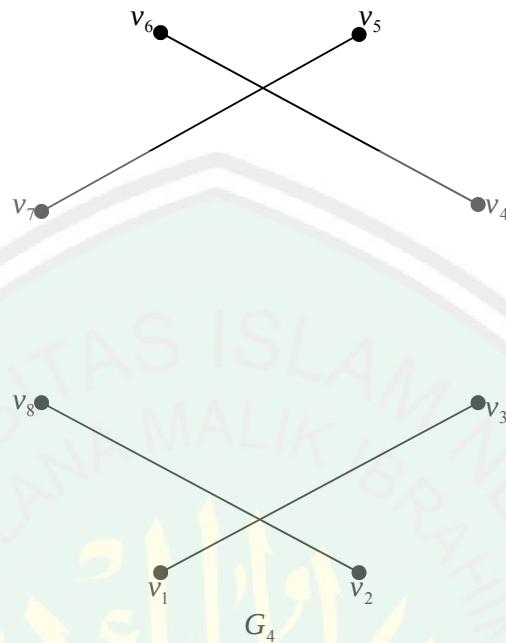
3. Faktor ketiga



Gambar 3.16 Faktor ketiga dari Graf K_8

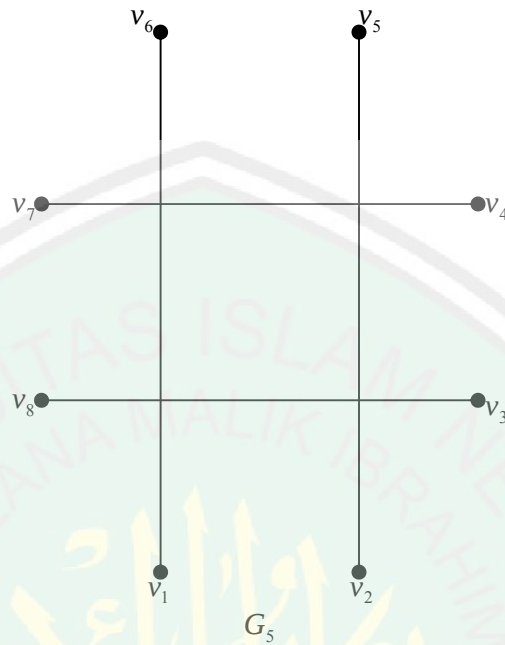
Gambar 3.16 adalah spanning subgraf dari graf K_8 dan merupakan faktor ketiga dari graf K_8 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_7 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_5 , dan titik v_6 terhubung langsung dengan titik v_8 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

4. Faktor keempat

Gambar 3.17 Faktor keempat dari Graf K_8

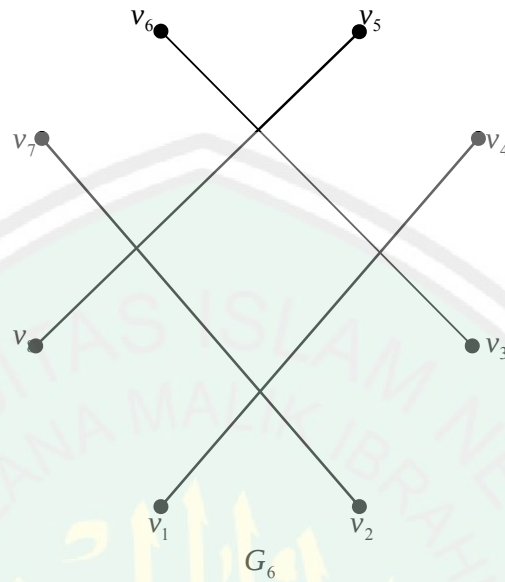
Gambar 3.17 adalah spanning subgraf dari graf K_8 dan merupakan faktor keempat dari graf K_8 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_8 , titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_6 , dan titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_7 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

5. Faktor kelima

Gambar 3.18 Faktor kelima dari Graf K_8

Gambar 3.18 adalah spanning subgraf dari graf K_8 dan merupakan faktor kelima dari graf K_8 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_6 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_8 , dan titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_7 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

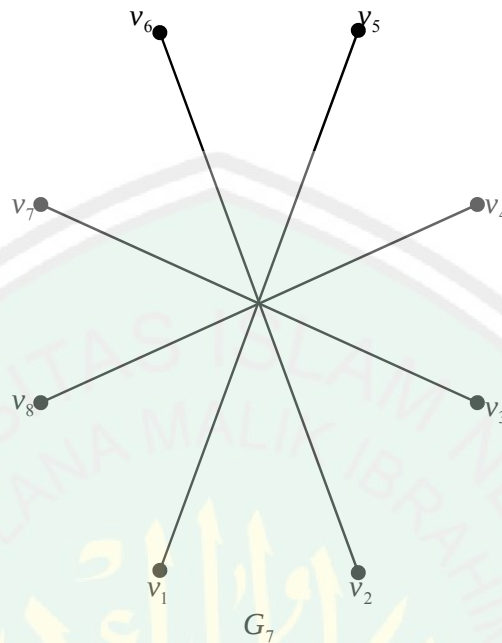
6. Faktor keenam



Gambar 3.19 Faktor keenam dari Graf K_8

Gambar 3.19 adalah spanning subgraf dari graf K_8 dan merupakan faktor keenam dari graf K_8 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_7 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_6 , dan titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_8 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

7. Faktor ketujuh

Gambar 3.20 Faktor ketujuh dari Graf K_8

Gambar 3.20 adalah spanning subgraf dari graf K_8 dan merupakan faktor ketujuh dari graf K_8 jika difaktorkan menggunakan 1-faktor. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_6 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_7 , dan titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_8 . Sedangkan titik-titik yang tidak terhubung langsung merupakan titik-titik yang saling disjoint.

Gambar 3.14 sampai gambar 3.20 adalah faktor-faktor graf K_8 yang diperoleh dari pemfaktoran graf K_8 menggunakan 1-faktor. Jika G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , G_5 , G_6 dan G_7 adalah faktor-faktor graf K_8 yang mana sisi-sisinya saling disjoint pada graf K_8 sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 \oplus G_6 \oplus G_7 = G$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari

faktor-faktor graf K_8 . Sehingga faktorisasi dari graf K_8 adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Dari proses pemfaktoran graf K_{2n} menggunakan 1-faktor diatas diperoleh suatu pola sebagai berikut:

K_n	p	q	Banyaknya 1-faktor $E(G)$
K_2	2	1	1
K_4	4	$\frac{4 \times 3}{2} = 6$	$\frac{6}{2} = 3$
K_6	6	$\frac{6 \times 5}{2} = 15$	$\frac{15}{3} = 5$
K_8	8	$\frac{8 \times 7}{2} = 28$	$\frac{28}{4} = 7$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K_{2n}	$2n$	$\frac{2n - (2n - 1)}{2} = n(2n - 1)$	$\frac{n(2n - 1)}{n} = 2n - 1$

Tabel 3.1 Jumlah Faktor Graf K_{2n} menggunakan 1-faktor

Teorema 1

Jika G graf komplit K_{2n} dengan $p(G) = 2n$ dan $q(G) = n(2n - 1)$ (dengan n bilangan asli), maka mempunyai banyak 1-faktor $E(G) = 2n - 1$.

Bukti

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan cara induksi matematika

Untuk $n = 1$ maka, suatu graf komplit G dengan $p(G) = 2n$ dan $q(G) = n(2n - 1)$ sedemikian hingga graf komplit yang mempunyai

$p(G) = 2$ dan $q(G) = 1$ adalah seperti pada contoh di pembahasan, maka graf komplit G dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.21 Graf K_2

ini berarti banyak 1-faktornya adalah 1.

Dari Teorema 1 maka diperoleh banyak 1-faktor

$$E(G) = 2n - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$$

Jadi untuk $n = 1$ benar

Asumsikan benar untuk $n = k$ maka, suatu graf komplit G dengan

$p(G) = 2n = 2k$ dan $q(G) = n(2n - 1) = k(2k - 1)$ sesuai Teorema 1 maka,

graf yang mempunyai $p(G) = 2k$ dan $q(G) = k(2k - 1)$ banyak 1-

faktornya $E(G_k) = 2n - 1 = 2k - 1$ artinya graf komplit G yang mempunyai

order $2k$ dan size $k(2k - 1)$ mempunyai banyak 1-faktor $E(G_k) = 2k - 1$.

Akan ditunjukkan benar untuk $n = k + 1$, yang berarti

$p(G) = 2n = 2(k + 1) = 2k + 2$ dan $q(G) = n(2n - 1) = (k + 1)(2(k + 1) - 1)$

$= (k + 1)(2k + 1) = 2k^2 + 3k + 1$ maka banyak 1-faktor $E(G_{k+1}) = 2n - 1 =$

$2(k + 1) - 1 = 2k + 1$.

Dimana,

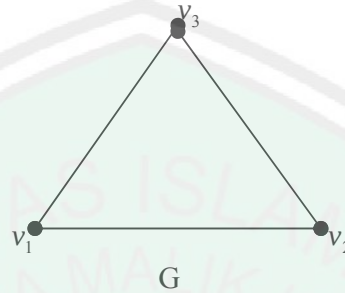
$$\begin{aligned}
 (E(G_{k+1})) &= 2k + 1 \\
 &= 2k - 1 + 2 \\
 &= E(G_k) + 2, \text{ dengan } 2 \text{ adalah penambahan titik pada graf yang} \\
 &\quad \text{diikuti dengan penambahan banyak 1-faktor} \\
 \therefore E(G_{k+1}) &= E(G_k) \oplus (G_1).
 \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $E(G_{k+1}) = 2k + 1$ maka, dimisalkan untuk G_k adalah graf komplit dengan $p(G_k) = 2k$ dan $q(G_k) = k(2k - 1)$ sehingga diperoleh $E(G_k) = 2k - 1$. Jika pada graf komplit G_k ditambahkan 2 titik yang dihubungkan oleh satu sisi, maka $p(G_k) = 2k + 2$ dan $q(G_k) = (k + 1)(2(k + 1) - 1) = 2k^2 + 3k + 1$, sedemikian hingga diperoleh $E(G_k) + 2 = 2k - 1 + 2 = 2k + 1 = E(G_{k+1})$. Jadi G_{k+1} dengan $p(G_{k+1}) = 2k + 2$ dan $q(G_{k+1}) = 2k^2 + 3k + 1$ sesuai dengan Teorema 1 maka, banyak 1-faktornya adalah $E(G_{k+1}) = 2k + 1$. Sesuai prinsip induksi matematika, maka graf komplit G dengan $p(G) = 2n$ dan $q(G) = n(2n - 1)$ mempunyai banyak 1-faktor $E(G) = 2n - 1 \quad \forall n \in \text{bilangan asli}$.

3.1.2 Graf komplit ganjil (K_{2n+1}) difaktorkan menggunakan siklus Hamilton

1. Graf komplit 3 (K_3).

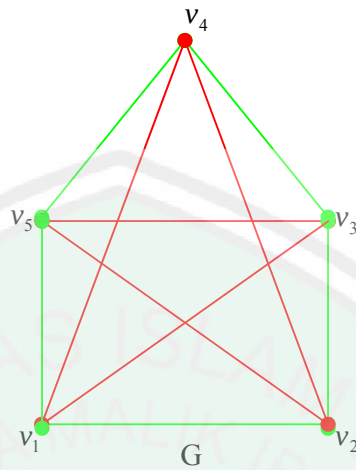
Gambar graf K_3 adalah:



Gambar 3.22 Graf K_3

Gambar 3.22 diatas memperlihatkan bahwa graf K_3 memiliki tiga titik yaitu v_1 , v_2 dan v_3 , dan memiliki 3 sisi. Jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton akan dihasilkan faktor yang memiliki bentuk yang sama dengan graf K_3 itu sendiri. Faktor dari graf K_3 adalah spanning subgraf dari graf K_3 , jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Faktor dari graf K_3 adalah graf K_3 itu sendiri, oleh karena itu diketahui bahwa graf K_3 tidak memiliki faktor lain. Sehingga faktorisasi dari graf K_3 adalah graf K_3 itu sendiri tanpa dioperasikan dengan graf lain.

2. Graf komplit 5 (K_5)



Gambar 3.23 Graf K_5

Gambar 3.23 diatas, memperlihatkan bahwa graf K_5 memiliki 5 titik yaitu v_1 , v_2 , v_3 , v_4 dan v_5 , dan juga memiliki 10 sisi. Jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton maka diperoleh sebanyak 2 faktor sebagai berikut:

1. Faktor pertama (G_1).

Sisi-sisi yang berwarna hijau pada gambar 3.23 adalah spanning subgraf dari graf K_5 dan merupakan faktor pertama (G_1) dari graf K_5 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_5 , dan titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_1 . Rangkaian titik-titik yang terhubung langsung tersebut membentuk suatu siklus Hamilton.

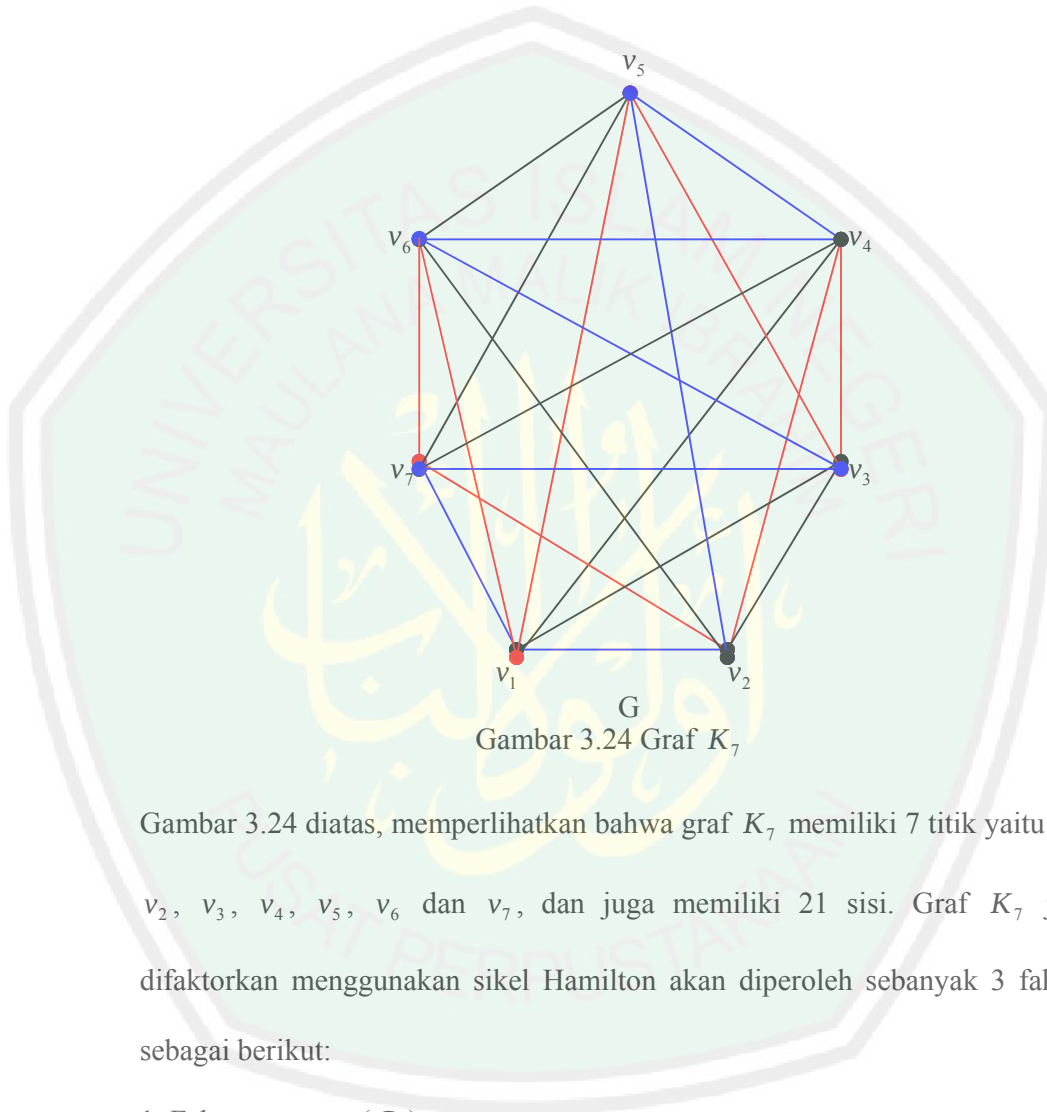
2. Faktor kedua (G_2).

Sisi-sisi yang berwarna merah pada gambar 3.23 adalah spanning subgraf dari graf K_5 dan merupakan faktor kedua (G_2) dari graf K_5 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_4 , dan titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_1 . Rangkaian titik-titik yang terhubung langsung tersebut membentuk suatu siklus Hamilton.

Jika G_1 dan G_2 adalah faktor-faktor graf K_5 yang mana sisi-sisinya saling disjoint pada graf K_5 sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf K_5 . Sehingga faktorisasi dari graf K_5 adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

3. Graf komplit 7 (K_7).

Gambar graf K_7 adalah:



Gambar 3.24 Graf K_7

Gambar 3.24 diatas, memperlihatkan bahwa graf K_7 memiliki 7 titik yaitu v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 , v_6 dan v_7 , dan juga memiliki 21 sisi. Graf K_7 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton akan diperoleh sebanyak 3 faktor sebagai berikut:

1. Faktor pertama (G_1).

Sisi-sisi yang berwarna biru pada gambar 3.24 adalah spanning subgraf dari graf K_7 dan merupakan faktor pertama (G_1) dari graf K_7 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1

terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_6 , titik v_6 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_7 dan titik v_7 terhubung langsung dengan titik v_1 . Rangkaian titik-titik yang terhubung langsung tersebut membentuk suatu siklus Hamilton.

2. Faktor kedua (G_2).

Sisi yang berwarna merah pada Gambar 3.24 adalah spanning subgraf dari graf K_7 dan merupakan faktor kedua (G_2) dari graf K_7 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_7 , titik v_7 terhubung langsung dengan titik v_6 dan titik v_6 terhubung langsung dengan titik v_1 . Rangkaian titik-titik yang terhubung langsung tersebut membentuk suatu siklus Hamilton.

3. Faktor ketiga (G_3)

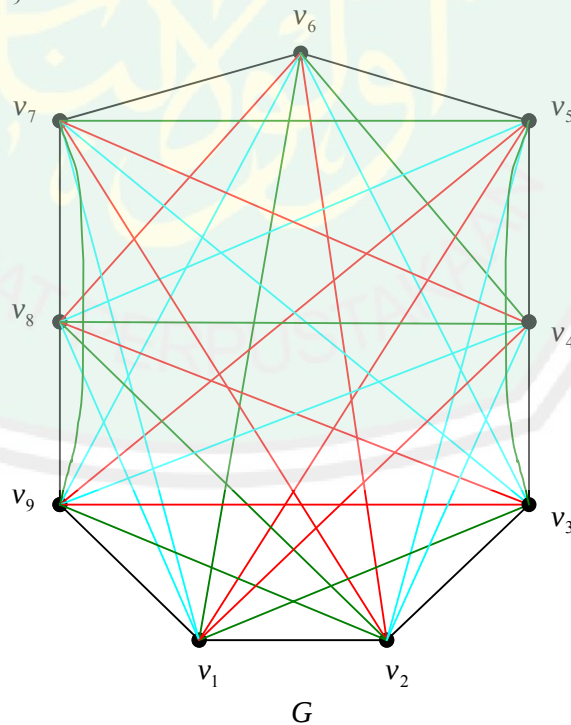
Sisi-sisi yang berwarna hitam pada Gambar 3.24 adalah spanning subgraf dari graf K_7 dan merupakan faktor ketiga (G_3) dari graf K_7 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik

v_2 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_6 , titik v_6 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_7 , titik v_7 terhubung langsung dengan titik v_4 dan titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_1 . Rangkaian titik-titik yang terhubung langsung tersebut membentuk suatu siklus Hamilton.

Jika G_1 , G_2 , dan G_3 adalah faktor-faktor graf K_7 yang mana sisi-sisinya saling disjoint pada graf K_7 sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf K_7 . Sehingga faktorisasi dari graf K_7 adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

4. Graf komplit 9 (K_9).

Gambar graf K_9 adalah:



Gambar 3.25 Graf K_9

Gambar 3.25 diatas, memperlihatkan bahwa graf K_9 memiliki 9 titik yaitu v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 , v_6 , v_7 , v_8 dan v_9 , dan juga memiliki 36 sisi. Graf K_9 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton akan diperoleh 4 faktor sebagai berikut:

1. Faktor pertama (G_1)

Sisi-sisi yang berwarna hitam gambar 3.25 adalah spanning subgraf dari graf K_9 dan merupakan faktor pertama (G_1) dari graf K_9 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_6 , titik v_6 terhubung langsung dengan titik v_7 , titik v_7 terhubung langsung dengan titik v_8 , titik v_8 terhubung langsung dengan titik v_9 dan titik v_9 terhubung langsung dengan titik v_1 . Rangkaian titik-titik yang terhubung langsung tersebut membentuk suatu siklus Hamilton.

2. Faktor kedua (G_2)

Sisi yang berwarna hijau pada gambar 3.25 adalah spanning subgraf dari graf K_9 dan merupakan faktor kedua (G_2) dari graf K_9 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_7 , titik v_7 terhubung langsung

dengan titik v_9 , titik v_9 terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_8 , titik v_8 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_6 dan titik v_6 terhubung langsung dengan titik v_1 . Rangkaian titik-titik yang terhubung langsung tersebut membentuk suatu siklus Hamilton.

3. Faktor ketiga (G_3)

Sisi-sisi yang berwarna merah pada gambar 3.25 adalah spanning subgraf dari graf K_9 dan merupakan faktor ketiga (G_3) dari graf K_9 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_7 , titik v_7 terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_6 , titik v_6 terhubung langsung dengan titik v_8 , titik v_8 terhubung langsung dengan titik v_3 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_9 , titik v_9 terhubung langsung dengan titik v_5 dan titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_1 . Rangkaian titik-titik yang terhubung langsung tersebut membentuk suatu siklus Hamilton.

4. Faktor keempat (G_4)

Sisi-sisi yang berwarna biru pada gambar 3.25 adalah spanning subgraf dari graf K_9 dan merupakan faktor ketiga (G_4) dari graf K_9 jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik v_1 terhubung langsung dengan titik v_7 , titik v_7 terhubung langsung dengan titik

v_3 , titik v_3 terhubung langsung dengan titik v_6 , titik v_6 terhubung langsung dengan titik v_9 , titik v_9 terhubung langsung dengan titik v_4 , titik v_4 terhubung langsung dengan titik v_2 , titik v_2 terhubung langsung dengan titik v_5 , titik v_5 terhubung langsung dengan titik v_8 dan titik v_8 terhubung langsung dengan titik v_1 . Rangkaian titik-titik yang terhubung langsung tersebut membentuk suatu siklus Hamilton.

Jika G_1 , G_2 , G_3 dan G_4 adalah faktor-faktor graf K_9 yang mana sisinya saling disjoint pada graf K_9 sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 = G$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf K_9 . Sehingga faktorisasi dari graf K_9 adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Dari proses pemfaktoran graf K_{2n+1} menggunakan siklus Hamilton diatas diperoleh suatu pola sebagai berikut:

K_n	P	q	Banyak faktor siklus Hamilton $E(G)$
K_3	3	3	1
K_5	5	$\frac{5 \times 4}{2} = 10$	2
K_7	7	$\frac{7 \times 6}{2} = 21$	3
K_9	9	$\frac{9 \times 8}{2} = 36$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Kesimpulan	$2n + 1$	$\frac{(2n + 1)(2n)}{2}$	$\frac{2n}{2}$

Tabel 3.2 Jumlah Faktor Graf K_{2n+1} menggunakan Siklus Hamilton

Teorema 1

Jika G graf komplit K_{2n+1} dengan $p(G) = 2n+1$ dan $q(G) = \frac{(2n-1)(2n)}{2}$

(dengan n bilangan asli), maka mempunyai banyak siklus Hamilton

$$E(G) = \frac{2n}{2}.$$

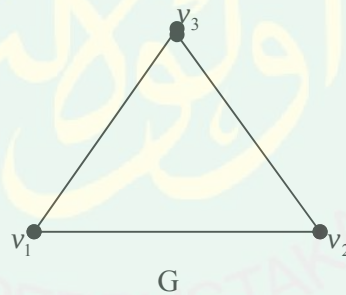
Bukti

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan cara induksi matematika

Untuk $n=1$ maka, suatu graf komplit G dengan $p(G) = 2n+1$ dan

$q(G) = \frac{(2n-1)(2n)}{2}$ sedemikian hingga graf komplit yang mempunyai

$p(G) = 3$ dan $q(G) = 3$ adalah seperti pada contoh di pembahasan, maka graf komplit G dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 3.26 Graf K_3

ini berarti banyak siklus hamiltonnya adalah 1.

Dari Teorema 1 maka diperoleh banyak siklus hamilton

$$E(G) = \frac{2n}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

Jadi untuk $n=1$ benar

Asumsikan benar untuk $n = k$ maka, suatu graf komplit G dengan

$$p(G) = 2n + 1 = 2k + 1 \quad \text{dan} \quad q(G) = \frac{(2n-1)(2n)}{2} = \frac{(2k-1)(2k)}{2} \quad \text{sesuai}$$

Teorema 1 maka, graf yang mempunyai $p(G) = 2k + 1$ dan

$$q(G) = \frac{(2k-1)(2k)}{2} \quad \text{banyak sikel hamilton} \quad E(G_k) = \frac{2n}{2} = \frac{2k}{2} \quad \text{artinya graf}$$

komplit G yang mempunyai order $2k + 1$ dan size $\frac{(2k-1)(2k)}{2}$

$$\text{mempunyai banyak sikel hamilton} \quad E(G_k) = \frac{2k}{2}.$$

Akan ditunjukkan benar untuk $n = k + 1$, yang berarti

$$\begin{aligned} p(G) &= 2n + 1 = 2(k + 1) + 1 = 2k + 3 \quad \text{dan} \quad q(G) = \frac{(2n-1)(2n)}{2} \\ &= \frac{(2(k+1)-1)(2(k+1))}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = \frac{4k^2 + 6k + 2}{2} = 2k^2 + 3k + 1 \end{aligned}$$

$$\text{maka banyak sikel Hamilton} \quad E(G_{k+1}) = \frac{2n}{2} = \frac{2(k+1)}{2} = \frac{2k+2}{2}.$$

Dimana,

$$\begin{aligned} E(G_{k+1}) &= \frac{2k+2}{2} \\ &= \frac{2k}{2} + 1 \\ &= E(G_k) + 1, \text{ dengan 1 adalah penambahan titik pada graf yang} \\ &\quad \text{diikuti dengan penambahan banyak sikel hamilton} \\ \therefore E(G_{k+1}) &= E(G_k) \oplus (G_1). \end{aligned}$$

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa $E(G_{k+1}) = \frac{2k+2}{2}$ maka,

dimisalkan untuk G_k adalah graf komplit dengan $p(G_k) = 2k + 1$ dan

$q(G) = \frac{(2k-1)(2k)}{2}$ sehingga diperoleh $E(G_k) = \frac{2k}{2}$. Jika pada graf

komplit G_k ditambahkan 1 titik, maka $p(G_k) = 2(k+1) + 2 = 2k+3$ dan

$$q(G_k) = \frac{(2(k+1)-1)(2(k+1))}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = \frac{4k^2 + 6k + 2}{2},$$

sedemikian hingga diperoleh $E(G_k) + 1 = \frac{2k}{2} + 1 = \frac{2k+2}{2} = E(G_{k+1})$. Jadi

G_{k+1} dengan $p(G_{k+1}) = 2k+1$ dan $q(G_{k+1}) = \frac{4k^2 + 6k + 2}{2}$ sesuai dengan

Teorema 1 maka, banyak 1-faktornya adalah $E(G_{k+1}) = \frac{2k+2}{2}$.

Sesuai prinsip induksi matematika, maka graf komplit G dengan

$p(G) = 2n+1$ dan $q(G) = \frac{(2n-1)(2n)}{2}$ mempunyai banyak siklus hamilton

$$E(G) = \frac{2n+2}{2} \quad \forall n \in \text{bilangan asli.}$$

Berdasarkan pembahasan tentang faktorisasi pada graf komplit diatas, dapat diperoleh suatu kesimpulan bahwa:

1. Graf komplit genap (K_{2n}) dapat difaktorkan menggunakan 1-faktor. Dari hasil pemfaktoran tersebut diperoleh pola umum untuk menentukan jumlah faktor-faktor dari graf komplit jika difaktorkan menggunakan 1-faktor yaitu: $K_{2n} = 2n-1$, untuk $n = 1, 2, \dots$.
2. Graf komplit ganjil (K_{2n+1}) dapat difaktorkan menggunakan siklus Hamilton. Dari hasilkan pemfaktoran tersebut diperoleh pola umum untuk

menentukan jumlah faktor-faktor dari graf komplit ganjil jika difaktorkan

menggunakan siklus Hamilton yaitu: $K_{2n+1} = \frac{2n}{2}$, untuk $n = 1, 2, \dots$.

3.2 Rukun Iman dalam Kajian Teori Graf

Faktorisasi graf komplit (K_n) diatas merupakan penjumlahan sisi dari faktor-faktornya. Suatu graf komplit tidak akan dikatakan graf komplit jika salah satu faktornya tidak dijumlahkan. Hal ini jika direlevansikan dengan kajian agama adalah sama dengan konsep rukun iman. Graf komplit akan diasumsikan sebagai rukun iman. Sedangkan faktor-faktor dari graf komplit adalah keenam rukun iman. Sebagaimana dalam hadist yang diriwayatkan oleh Imam Muslim, yang tertulis pada BAB I

Allah berfirman dalam surat Al-Baqarah ayat 177:

﴿لَيْسَ الْبِرَّ أَنْ تُوَلُّوا وُجُوهَكُمْ قِبَلَ الْمَشْرِقِ وَالْمَغْرِبِ وَلَكِنَّ الْبِرَّ مَنْ ءَامَنَ بِاللَّهِ وَالْيَوْمِ الْآخِرِ وَالْمَلَائِكَةِ وَالْكِتَابِ وَالنَّبِيِّينَ وَءَاتَى الْمَالَ عَلَى حُبِّهِ ذَوِي الْقُرْبَىٰ وَالْيَتَامَىٰ وَالْمَسْكِينِ وَابْنَ السَّبِيلِ وَالسَّائِلِينَ وَفِي الرِّقَابِ وَأَقَامَ الصَّلَاةَ وَءَاتَى الزَّكَاةَ وَالْمُوفُونَ بِعَهْدِهِمْ إِذَا عَاهَدُوا وَالصَّابِرِينَ فِي الْبَأْسَاءِ وَالصَّرَآءِ وَحِينَ الْبَأْسِ أُولَئِكَ الَّذِينَ صَدَقُوا وَأُولَئِكَ هُمُ الْمُتَّقُونَ﴾

Artinya: Bukanlah menghadapkan wajahmu ke arah timur dan barat itu suatu kebajikan, akan tetapi Sesungguhnya kebajikan itu ialah beriman kepada Allah, hari Kemudian, malaikat-malaikat, kitab-kitab, nabi-nabi dan memberikan harta yang dicintainya kepada kerabatnya, anak-anak yatim, orang-orang miskin, musafir (yang memerlukan pertolongan) dan orang-orang yang meminta-minta; dan (memerdekakan) hamba sahaya, mendirikan shalat, dan menunaikan zakat; dan orang-orang

yang menepati janjinya apabila ia berjanji, dan orang-orang yang sabar dalam kesempitan, penderitaan dan dalam peperangan. mereka Itulah orang-orang yang benar (imannya); dan mereka Itulah orang-orang yang bertakwa.

Ayat dan hadist diatas menjelaskan bahwa rukun iman ada enam yaitu:

1. Iman kepada Allah SWT
2. Iman kepada malaikat-malaikatNya
3. Iman kepada kitab-kitabNya
4. Iman kepada rasul-rasulNya
5. Iman kepada hari akhir, dan
6. Iman kepada qada'dan qadarNya

Setiap umat islam wajiblah percaya kepada rukun iman.

Setiap rukun iman itu terkait satu sama lain. Hal yang paling mendasar yang wajib kita percayai adalah iman kepada Allah SWT. Karena telah percaya akan adanya Allah SWT dengan segala *asma'* dan sifat-sifat-Nya. Maka hal yang kedua yang harus kita percayai adalah iman kepada malaikat-malaikatNya. Setiap malaikat memiliki tugas masing-masing. Salah satunya adalah menyampaikan wahyu Allah SWT kepada manusia yang terpilih. Karena telah percaya kepada malaikat. Maka hal yang ketiga yang harus kita percayai adalah iman kepada kitab-kitabNya. Kitab merupakan wahyu Allah SWT yang hanya diberikan kepada Nabi-nabi dan Rasul-rasul-NYa untuk disampaikan kepada umatNya. Kitab adalah pedoman hidup manusia dan untuk membimbing akal manusia. Karena telah percaya kepada kitab. Maka hal yang keempat adalah percaya kepada rasul-rasulNya. Rasul adalah manusia yang dipilih Allah SWT. Rasul

merupakan manusia utusan Allah SWT yang menyerukan kepada kebaikan dan mencegah kepada kemungkaran. Rasul diutus untuk memberi kabar gembira yaitu surga dan memberikan peringatan bahwa akan adanya neraka yang sangat panas. Karena telah beriman kepada rasul. Maka hal yang kelima adalah iman kepada hari akhir. Hari akhir atau *yaumul hisab* adalah hari dimana setiap manusia dimintai pertanggung jawabannya dihadapan Allah SWT dan akan diadili seadil-adilnya. Sebagaimana Allah berfirman dalam surat Al-qomar ayat 47:

إِنَّ الْمُجْرِمِينَ فِي ضَلَالٍ وَسُعُرٍ ﴿٤٧﴾

Artinya: Sesungguhnya orang-orang yang berdosa berada dalam kesesatan (di dunia) dan dalam neraka.

Ayat diatas menyatakan bahwa sertiap pendosa akan sesat baik di dunia maupun di akhirat dan akan berada dalam neraka. Bagi setiap orang yang berbuat kebaikan akan mendapat balasannya berupa surga. Itu merupakan janji Allah SWT kepada semua umat manusia. Karena telah beriman kepada hari akhir. Maka hal yang terakhit adalah iman kepada Qodlo dan Qodar. Qodlo dan Qodar Allah secara umum ringkasannya menyatakan, bahwa segala sesuatu yang terjadi di alam ini, termasuk juga yang terjadi pada diri manusia, baik dan buruk, suka dan duka, dan segala gerak-gerik hidup ini, semuanya tidaklah terlepas dari takdir atau ketentuan Illahi.. Maka hendaklah kita berlindung kepada Allah SWT dari segala takdirNya. Sebagaimana Allah berfirman dalam surat Al-falaq:

قُلْ أَعُوذُ بِرَبِّ الْفَلَقِ ﴿١﴾ مِنْ شَرِّ مَا خَلَقَ ﴿٢﴾ وَمِنْ شَرِّ غَاسِقٍ إِذَا وَقَبَ ﴿٣﴾ وَمِنْ شَرِّ
الْأَنفَثَتِ فِي الْعُقَدِ ﴿٤﴾ وَمِنْ شَرِّ حَاسِدٍ إِذَا حَسَدَ ﴿٥﴾

- Artinya: 1. Katakanlah: "Aku berlindung kepada Tuhan yang menguasai subuh,
 2. Dari kejahatan makhluk-Nya,
 3. Dan dari kejahatan malam apabila Telah gelap gulita,
 4. Dan dari kejahatan wanita-wanita tukang sihir yang menghembus pada buhul-buhul,
 5. Dan dari kejahatan pendengki bila ia dengki."

Berdasarkan uraian diatas, memperlihatkan bahwa rukun iman itu saling terkait satu sama lain. Rukun iman merupakan satu kesatuan yang menjadi landasan keiman seseorang. Rukun iman seseorang belum bisa dikatakan sempurna apabila tidak mempercayai salah satu dari rukun iman tersebut.

Sama halnya dengan faktorisasi pada graf komplit. Setiap faktor-faktor dari graf komplit saling terhubung satu sama lain. Suatu graf komplit tidak bisa dikatakan graf komplit jika salah satu faktornya tidak dihubungkan atau dijumlahkan.

Faktor dari graf G adalah suatu subgraf merentang (spanning subgraph) dari graf G . (Chartrand dan Lesniak, 1986: 229). Jika $(n \geq 2)$ adalah faktor yang disjoint sisi pada graf G sedemikian hingga $\bigcup_{i=1}^n E(G_i) = E(G)$, dimana $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor $G_1, \dots, G_n$. Sedangkan Faktorisasi dari graf G adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf G . (Chartrand dan Lesniak, 1986: 229).

Definisi diatas dapat disimpulkan bahwa setiap faktorisasi pada graf komplit harus memenuhi syarat-syarat berikut:

1. Memiliki bagian-bagian yang membangun atau faktor-faktor
2. Jika faktor-faktornya lebih dari 2, maka penjumlahan dari faktor-faktornya disebut sebagai faktorisasi.

3. Untuk menghasilkan graf komplit, semua faktornya harus dijumlahkan tanpa terkecuali.

Rukun iman jika dikaji dalam teori graf khususnya teori faktorisasi pada graf komplit maka rukun iman memenuhi syarat-syarat diatas yaitu:

1. Memiliki bagian-bagian yaitu rukun-rukun
2. Rukun-rukun dalam rukun iman ada 6, jika dijumlahkan (digabungkan) disebut sebagai faktorisasi rukun iman.
3. Sorang tidak tidak bisa dikatakan beriman jika tidak mempercayai salah satu rukun dari rukun iman tersebut.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

1. Pola umum untuk menentukan jumlah faktor-faktor dari graf komplit yang berorder genap jika difaktorkan menggunakan 1-faktor yaitu:

$$K_{2n} = 2n - 1, \text{ untuk } n = 1, 2, \dots$$
2. Pola umum untuk menentukan jumlah faktor-faktor dari graf komplit yang berorder ganjil jika difaktorkan menggunakan siklus Hamilton yaitu:

$$K_{2n+1} = \frac{2n}{2}, \text{ untuk } n = 1, 2, \dots$$

4.2 Saran

Pembahasan pada skripsi ini hanya difokuskan pada masalah faktorisasi pada graf komplit yang berorder genap menggunakan 1-faktor dan pada graf komplit yang berorder ganjil menggunakan siklus Hamilton. Maka dari itu untuk skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji pola faktorisasi pada graf graf komplit secara umum.

DAFTAR PUSTAKA

- An-Nawawi, Imam, dkk. 2007. *Syarah Hadits Arba'in*. Solo: Pustaka Arafah.
- Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Chirzin, Drs Muhammad. 1997. *Konsep dan Hikmah Akidah Islam*. Yogyakarta: Mitra Pustaka.
- Daudy, Drs Ahmad. 1997. *Kuliah Akidah Islam*. Jakarta: Bulan Bintang.
- Hasanah, Syifaul. 2008. *Digraf Dari Tabel Cayley Grup Dihedral*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.
- Ilyas, Drs H Yunahar. 1993. *Kuliah Aqidah Islam*. Yogyakarta: LPPI Universitas Muhamadiyah Yogyakarta.
- Kerami, Djati dan Cormentya Sitanggang. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.
- Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.
- Tatapangarsa, Drs Humaidi. *Kuliah Aqidah Lengkap*. Surabaya: Bina Ilmu.
- Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.



DEPARTEMEN AGAMA RI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Vera Mandailina
NIM : 04510041
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Faktorisasi Pada Graf Komplit
Pembimbing I : Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Achmad Nashichuddin, MA.

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	21 November 2008	Konsultasi Masalah	1.	
2	15 Desember 2008	Konsultasi BAB III		2.
3	18 Desember 2008	Revisi BAB III	3.	
4	22 Desember 2008	Konsultasi BAB I		4.
5	22 Desember 2008	Konsultasi BAB II	5.	
6	22 Desember 2008	Konsultasi Keagamaan		6.
7	24 Desember 2008	Revisi Keagamaan	7.	
8	27 Desember 2008	Revisi Keagamaan		8.
9	31 Desember 2008	Revisi BAB I	9.	
10	31 Desember 2008	Revisi BAB II		10.
11	2 Januari 2009	Konsultasi Keseluruhan	11.	
12	5 Januari 2009	ACC Keseluruhan		12.

Malang, 17 Januari 2009
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321